A minimális költségű folyam probléma megoldása hálózati szimplex-módszerrel

DR. BENKŐ JÁNOS
GATE, Logisztikai Tanszék

A hálózat optimalizálási modellek között a minimális költségű folyam kitüntetett helyet foglal el, mivel a hálózati problémák több osztályát (maximális folyam, legrövidebb út, szállítási, hozzárendelési és átrakási feladat) magában foglalja. A minimális költségű folyam megoldására rendkívül hatékony algoritmus, az ún. hálózati szimplex-módszer áll a rendelkezésünkre. E tanulmányban nemcsak a hálózati szimplex-módszert mutatjuk be, hanem javaslatot teszünk egy új, a lehetséges bázismegoldás konstruálására alkalmas módszerre is.

A hálózat optimalizálási modellek között a minimális költségű folyam kitüntetett helyet foglal el, mivel a hálózati problémák több osztályát (maximális folyam, legrövidebb út, szállítási, hozzárendelési és átrakási feladat) magában foglalja. A minimális költségű folyam megoldására rendkívül hatékony algoritmus áll a rendelkezésünkre. A problémát ugyanis meg lehet fogalmazni lineáris programozási feladatként, és meg lehet oldani a szimplex-módszerből származtatott, *hálózati szimplex-módszernek* nevezett eljárással [2]. Az eljárás lényege, hogy a disztribúciós módszerhez hasonlóan egy lehetséges bázismegoldás javításával érjük el az optimumot. A javítások száma attól függ, hogy a lehetséges bázismegoldás mennyire áll közel az optimumhoz.

E tanulmányban nemcsak a hálózati szimplex-módszert mutatjuk be, hanem javaslatot teszünk egy új, a lehetséges bázismegoldás konstruálására alkalmas módszerre is. Mielőtt azonban ezt megtennénk, tekintettel arra, hogy a hazai irodalomban maga az alapfeladat is kevésbé ismert, először a minimális folyam problémát fogalmazzuk meg.

Vegyünk egy irányított és összefüggő hálózatot, amely n csomópontot tartalmaz legalább egy forrással és legalább egy nyelővel. A döntési változók az x_{ij} áramok az $i\rightarrow j$ éleken, az áramlás fajlagos költsége az $i\rightarrow j$ élen c_{ij}, az $i\rightarrow j$ élek kapacitása k_{ij}, az i-edik csomópont által generált áramlás vagy csomópont-kapacitás b_i. A b_i értéke i csomópont természetétől függ, ahol

$b_i > 0$, ha i-edik csomópont forrás,

$b_i < 0$, ha i-edik csomópont nyelő,

$b_i = 0$, ha i-edik csomópont átrakó vagy közvetítő pont.

A cél az összes áramoltatási költség minimalizálása, úgy hogy a forrásokból a készletek el legyenek szállítva, és a megrendelők igénye ki legyen elégítve.

Az ismertetett probléma célfüggvénye és feltételei:

(1) $$z=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}\,x_{ij}\rightarrow \min,\ i=j=1,2,\ldots,n,$$

(2) $$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}-\sum_{j=1}^{n}x_{ji}=b_i,\ \text{minden } i\text{-re},$$

(3) $$0\le x_{ij}\le k_{ij},\ \text{minden } i\rightarrow j\text{-re}.$$

Az első feltétel: az *i*-edik csomópontból kilépő és *i*-edik csomópontba belépő áramok különbsége az *i*-edik csomópont igényével vagy feladásával egyenlő. A második feltétel azt mondja ki, hogy az $i \rightarrow j$ élen a k_{ij} élkapacitásnál nagyobb áram nem folyhat, és a negatív mennyiségek áramlása nem értelmezett.

Néhány alkalmazásban szükségszerű lehet az élkapacitás korlátozása alulról is, azaz $l_{ij} \leq x_{ij} \leq k_{ij}$, ahol $l_{ij}>0$. Ez az eset a változók $x'_{ij}=x_{ij}-l_{ij}$ transzformációjával és $x_{ij}=x'_{ij}+l_{ij}$ helyettesítéssel viszszavezethető az alapmodellre.

A feladat megoldása természetesen, úgymint általában, nem garantált, a lehetséges megoldás a háló struktúrájától és élek kapacitásától függ. Az ésszerűen megtervezett hálózat esetén a lehetséges megoldás szükséges feltétele a következő:

(3) $$\sum_i b_i = 0,$$

azaz a feladó és megrendelő csomópontokon generált források és nyelések összege 0 legyen.

Az alkalmazásokban, hasonlóan a szállítási feladathoz, ez a feltétel ritkán teljesül. A szállítási feladatban ezt a problémát fiktív feladók vagy megrendelők bevonásával oldjuk meg. Az analóg lépés a minimális folyam problémában: fiktív feladó vagy megrendelő csomópontot adunk a hálózathoz $c_{ij}=0$ költségű élekkel. A fiktív megrendelő csomópont minden feladó csomóponthoz $c_{ij}=0$ éllel kapcsolódik, igénye elnyeli a felesleges forrást. A fiktív feladó csomópont ugyancsak $c_{ij}=0$ éllel kapcsolódik minden megrendelő csomóponthoz, és pótolja a megrendelő csomópontokon felmerült hiányt.

Számos alkalmazásban a b_i és k_{ij} mennyiségek egész számok, amiből következik, hogy az x_{ij} értékeknek is egész számoknak kell lenniük. Szerencsére, csakúgy, mint a szállítási problémában ez az feltétel automatikusan teljesül.

A feladat megfogalmazása után most már észrevehetjük:

hasonlóan a maximális folyam problémájához, feltételezünk, hogy az áramlás a hálózat korlátozott kapacitású élein történik;

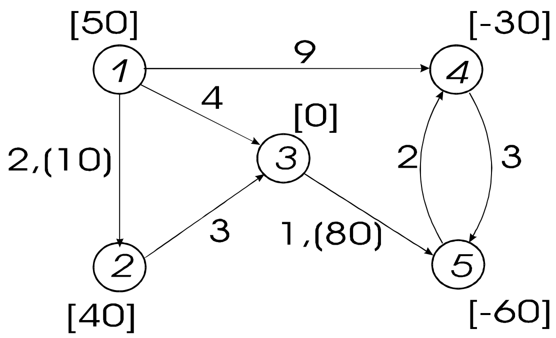
az áramlás költsége (távolsága), úgy mint a legrövidebb út problémájában az élekhez rendelt;

a szállítási vagy a hozzárendelési problémához hasonlóan az áramlás lehet több forrásos (feladó csomópontok) és több célú (megrendelő csomópontok), amelyhez még az élekhez rendelt fajlagos költségek társulnak;

az átrakási problémához hasonlóan a csomópontokat tekinthetjük átrakási pontoknak a feladók és a megrendelők között.

Mintapélda

Egy példát szemléltet a minimális költségű folyam problémára az *1. ábra*. A b_i értékek szögletes zárójelben a csomópontok mellett szerepelnek, így az *1* és *2* feladó csomópontokon ($b_i>0$), a *4* és *5* megrendelő csomópont ($b_i<0$) és a *3* közvetítő ponton ($b_i=0$). A c_{ij} fajlagos költségeket az élek mellett ábrázoltuk. A példában két él kapacitását korlátoztuk, $k_{12}=10$ és $k_{35}=80$ (ezeket kerek zárójelbe írtuk), a többi élen a $k_{ij}=M=\infty$.



1. ábra: Mintapélda a minimális költségű folyam problémához

A feltételi egyenleteket szimplex táblába foglaltuk (*1. táblázat*), ahol figyeljük meg a csomópontokra írt egyenletek változóit. Mindegyik változónak pontosan kettő nem nulla együtthatója van, és ezek közül az egyik +1, a másik −1. Ez a struktúra minden minimális költségű folyam problémában visszatér, és ennek a speciális struktúrának köszönhető az integer megoldás.

1. táblázat

	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{23}	x_{35}	x_{45}	x_{54}	b_i
u_1	1	1	1					50
u_2	–1			1				40
u_3		–1		–1	1			0
u_4			–1			1	–1	-30
u_5					–1	–1	1	-60
y_{12}	1							10
y_{35}					1			80
	2	4	9	3	1	3	2	0

Egy másik jelzése e speciális struktúrának, hogy a csomóponti egyenletek közül az egyik felesleges. Ennek oka, hogy egyenletek összegzése a (4) feltétel miatt 0-t eredményez. Ha (n-1) független egyenlettel korlátozzuk a feladatot, akkor azok (n-1) bázisváltozót határoznak meg. Ebből viszont az következik, hogy az (n-1) bázisváltozó megfelel a feszítőfa (n-1) élének.

A minimális költségű folyam probléma megoldására alkalmazható eljárás, az ún. hálózati szimplex-módszer, alapja a standard szimplex-módszer, ezért a lépései nagyon hasonlóak az eredeti eljáráshoz. A hálózati szimplex-módszerben egy lehetséges bázismegoldásból kiindulva a változók cseréjével javítjuk a programot, azonban a kihasználva a hálózati struktúra előnyeit nincs szükségünk a szimplex-táblára. Látni fogjuk, hogy bizonyos hasonlóságok fedezhetők fel a szállítási feladat megoldására alkalmazott disztribúciós módszer és a hálózati szimplex-módszer között is, ami nem véletlen, mivel mindkét eljárás a szimplex-módszeren alapul. Azt is mondhatjuk, hogy a hálózati szimplex-módszer a disztribúciós módszer kiterjesztett változata, amely kiterjesztés alkalmassá teszi más típusú feladatok megoldására is.

A hálózati szimplex-módszer alapjai

A hálózati szimplex-módszer a felsőkorlátos szimplex-módszerben használt technikát alkalmazza az $x_{ij} \leq k_{ij}$ élkapacitás-korlátok hatékony kezelésére. Mint ismeretes, ez a technika lehetővé teszi, hogy az eredetileg feltételi egyenletek formájában leírható kapacitáskorlátokat ún. nem-negativitási feltételként kezeljük, és ezzel a számítási időt lényegesen befolyásoló feltételi egyenletek számát csökkentsük [2], [4].

A felsőkorlát technika alkalmazhatósága a speciális transzformációnak köszönhető, ami a korábban bemutatott probléma (*1. ábra*) szimplex-táblájából (*1. táblázat*) érthető meg, ahol a felsőkorlátos duálváltozókat y_{ij}-vel jelöltük.

Vonjuk be a primálbázisba az x_{12}-t, még pedig úgy, hogy az y_{12} sorában az x_{12} együtthatóját válasszuk generálóelemnek. A transzformáció során a szimplex-táblában a 0 elemek miatt csak a generálóelem és a kapacitásvektor (b_i) oszlopa változik. A generálóelem $1=1^{-1}$ miatt változatlan marad, az oszlop többi eleme pedig előjelet vált. Így a célfüggvény sorában a $c_{12}=2$ $c_{12}=-2$-re módosul. A kapacitásvektor oszlopában a b_1 k_{12}-vel csökken, a b_2 pedig k_{12}-vel növekszik. Ez a transzformáció bármikor is következik be, a 0 elemek, illetve a 1 és −1 együtthatók miatt mindig megtartja ezt a sajátosságát, ami feleslegessé teszi a felsőkorlátokra vonatkozó előírások feltételi egyenletként való kezelését. Ezek a sorok a szimplex-táblából elhagyhatók. A vektorcsere alkalmával elegendő azt figyelni, hogy a korlátos változó elérte-e a felsőhatárt vagy sem. Ha az $x_{ij}<k_{ij}$ vagy $y_{ij}<k_{ij}$, akkor rendes primáltranszformációt végzünk. Ha viszont elérve a felsőhatárt $x_{ij}=k_{ij}$ vagy $y_{ij}=k_{ij}$, akkor az x_{ij}-t $x_{ij}=k_{ij}-y_{ij}$-vel, illetve y_{ij}-t $y_{ij}=k_{ij}-x_{ij}$-vel helyettesítjük. Az x_{ij}, illetve y_{ij} elhagyott bázisváltozóvá válik, és $y_{ij}=0$, illetve $x_{ij}=0$ nembázisváltozó lesz. A transzformációt a *2. táblázatban* figyelhetjük meg.

2. táblázat

	y_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{23}	x_{35}	x_{45}	x_{54}	b_i
u_1	–1	1	1					40
u_2	1			1				50
u_3		–1		–1	1			0
u_4			–1			1	–1	-30
u_5					–1	–1	1	-60
x_{12}	1							10
y_{35}					1			80
	–2	4	9	3	1	3	2	–20

Ha az optimalitás kritériumai teljesülnek, az optimális megoldás a következő képen olvasható le:

$$x_{ij} = \begin{cases} x_{ij}, & \text{ha az } x_{ij} \text{ a primálbázisban van, azaz } 0 < x_{ij} < k_{ij}, \\ k_{ij} - y_{ij}, & \text{ha az } y_{ij} \text{ a primálbázisban van, azaz } 0 < y_{ij} < k_{ij}, \end{cases}$$

$$x_{ij} = k_{ij}, \qquad \text{ha } y_{ij} \text{ a duálbázisban van, azaz } y_{ij} = 0,$$

$$x_{ij} = 0, \qquad \text{ha } x_{ij} \text{ a duálbázisban van.}$$

Az y_{ij} hálózati interpretációja a következő. Amikor y_{ij} bázisváltozóvá válik szigorúan pozitív értékkel), akkor az úgy tekinthető, mint egy folyam a j-edik csomópontból a i-edik csomópont felé, vagyis mint az $i\rightarrow j$ irányítású élen $j\rightarrow i$ irányú folyam, amely semlegesíti az i és j csomópontok közötti élhez korábban hozzárendelt ($x_{ij}=k_{ij}$) folyamot. Így amikor $x_{ij}=k_{ij}$-t helyettesítjük $x_{ij}=k_{ij}-y_{ij}$-vel, akkor egyidejűleg a valóságos $i\rightarrow j$ élet $j\rightarrow i$ ellentétes irányítású élre cseréljük, amelynek kapacitása k_{ij} és fajlagos költsége $-c_{ij}$. Az egyensúly fenntartása érdekében a törölt él $x_{ij}=k_{ij}$ kapacitását az i-edik csomópontról a j-edikre mozgatjuk, azaz b_i-t csökkentjük, b_j-t pedig növeljük k_{ij}-vel. Ha később, elérve a felsőhatárt, y_{ij} válik elhagyott bázisváltozóvá, akkor az $y_{ij}=k_{ij}$-t helyettesítjük $y_{ij}=k_{ij}-x_{ij}$-vel, és a nem-bázisváltozó x_{ij} értéke 0 lesz. Ez a lépés $j \rightarrow i$ $i \rightarrow j$ élcserét jelent, vagyis visszatérést az eredeti konfigurációhoz.

A felsőkorlát technika alkalmazása, mivel a kapacitáskorlátokat nem-negativitási feltételként kezeli, lényegesen csökkenti a feltételi egyenletek számát. A minimális költségű folyam problémában ez különösen előnyös, mivel általában az élek száma sokkal nagyobb, mint a csomópontoké. Ugyanakkor a számítási idő a feltételek számával gyorsabban növekszik, mint a változók számával. Így a módszer alkalmazása jelentős számítási idő megtakarítást eredményezhet.

Kapcsolat a lehetséges bázismegoldás és a lehetséges feszítőfa között

A hálózati szimplex-módszer első lépése egy lehetséges bázismegoldás generálása. Mint már jeleztük, n csomópont esetén a bázisvektornak $n-1$ eleme van. Az x_{ij} bázisváltozók reprezentálják az $i \rightarrow j$ élen áramló folyamot. Azokat az éleket, amelyekhez $x_{ij}>0$ folyam tartozik **báziséleknek**, és hasonlóan azokat az éleket, amelyekhez $x_{ij}=0$ vagy $y_{ij}=0$ tartozik **nem-báziséleknek** nevezzük [2].

A bázisélek jellemzője, hogy soha nem képeznek irányítatlan körutat. Továbbá ismeretes, hogy az $n-1$ élből álló élhalmaz, ha nem tartalmaz körutat, akkor feszítőfát alkot. Ezért minden bázisél-halmaz feszítőfát alkot.

Feszítőfa megoldás nyerhető a következő módon:

> Azokon az éleken, amelyek nem részei a feszítőfának (nem-bázisélek) az x_{ij} vagy y_{ij} változókat tegyük egyenlővé 0-val.
>
> Azokon az éleken, amelyek a feszítőfát alkotják (bázisélek) határozzuk meg az x_{ij} vagy y_{ij} értékeket az élekre írható lineáris egyenletrendszer segítségével.

Megjegyezzük ez az eljárás nincs tekintettel a nem-negativitási feltételekre, vagyis az élkapacitás korlátokra, ezért a kapott feszítőfa megoldás nem biztos, hogy lehetséges megoldás is. A lehetséges feszítőfa megoldásnak további követelményeknek is eleget kell tennie:

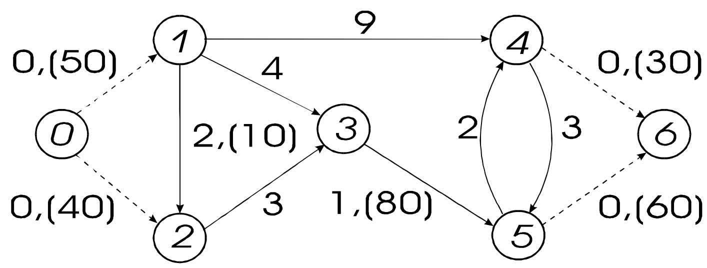
> A **lehetséges feszítőfa megoldás** a csomóponti feltételek mellett az egyéb feltételeknek ($0 \leq x_{ij} \leq k_{ij}$ vagy $0 \leq y_{ij} \leq k_{ij}$) is eleget tesz.

A fenti definíciókkal most már összegezhetjük az eljárásunk alapkoncepcióját:

> **A hálózati szimplex-módszer alaptétele:** A bázismegoldások feszítőfák és fordítva. A lehetséges bázismegoldások lehetséges feszítőfák és fordítva.

A javasolt eljárás a bázismegoldás előállítására

A hálózati szimplex-módszerrel egy lehetséges bázismegoldásból egy új javított bázismegoldás viszonylag gyorsan előállítható. Az optimum eléréséhez szükséges lépések száma azonban attól függ, hogy a bázismegoldás milyen közel áll az optimumhoz. Ezért célszerű olyan módszert alkalmazni, amely az optimálishoz közeli megoldást szolgáltat. A továbbiakban egy ilyen, a maximális folyam problémára épülő eljárásra teszünk javaslatot. Ebben az eredeti feladatot maximális folyam problémává alakítjuk, és azt valamelyik ismert algoritmussal megoldjuk.



2. ábra: Az átalakított hálózat

Alakítsuk át az *1. ábrán* bemutatott hálózatot a következő módon. A forráspontokat és a nyelőpontokat kössük össze egy fiktív forrásponttal (*0*), illetve egy nyelőponttal (n+1), még-pedig 0 költségű, egyenlőségekkel korlátozott kapacitású, irányított élekkel. Egyidejűleg az eredeti forrás- és nyelőpontokat alakítsuk át közvetítő pontokká, azaz ezeken a csomópont-okon b_i legyen 0. Az új éleken folyó x_{ij} áramok nagyságát a következő egyenlőségekkel írjuk elő:

$$x_{0i} = k_{0i} = b_i \text{ és}$$

$$x_{i\,n+1} = k_{i\,n+1} = |b_i|.$$

Ezek az egyenlőségek biztosítják, hogy az eredeti forráspontokból kilépő áramok összege, illetve az eredeti nyelőpontokba belépő áramok összege akkora legyen, amekkora az eredeti csomóponton generált áram volt. Az átalakított hálózatot a *2. ábra* szemlélteti, ami az elmondottak szerint két csomóponttal és négy éllel (szaggatott vonallal jelölve) egészült ki, forrása a *0*, nyelője a *6* csomópont, az *1,2,...,n* csomópontok pedig közvetítő pontok.

Az új hálózaton keressük azt a maximális folyamot, amit a hálózat a *0* forráspontból a *6* nyelőpontba tud vezetni. E probléma modellje ebben a speciális esetben:

(5) $$z = \sum_{j=0}^{n+1} x_{0j} = \sum_{j=0}^{n+1} x_{j\,n+1} \to \max,$$

(6) $$\sum_{j=1}^{n+1} x_{ij} - \sum_{j=0}^{n} x_{ji} = 0, \quad \text{minden } i=1,2,...n \text{ közvetítő pontra,}$$

(7) $$0 \le x_{ij} \le k_{ij}, \qquad \text{minden } i \to j \text{ élre, ahol } i=j=1,2,...n,$$

(8) $$x_{0i} = k_{0i} = b_i, \quad i=1,2,...n,$$

(9) $$x_{i\,n+1} = k_{i\,n+1} = |b_i|, \qquad i=1,2,...n.$$

A (5) célfüggvény azt fejezi ki, hogy a forráspontból kilépő áramok összege egyenlő, a nyelőpontba belépő áramok összegével, és ez maximális. Könnyen belátható, hogy a (8) és (9) egyenlőségek miatt a célfüggvény azonnal kiszámítható. Így a maximális folyam probléma olyan sajátos esetével állunk szemben, amikor ismerjük a célfüggvényt, és csak a megoldáshoz tartozó x_{ij} döntési változókat kell meghatározni.

A közvetítő pontokra írt (6) feltételek szerint az i-edik pontból kilépő és az i-edik pontba belépő áramok összegének különbsége 0. A feltétel első tagjában a szummázás alsó határa (j=1) azt jelzi, hogy a közvetítő pontokból a 0 forráspontba nem vezet él, így nincs olyan áram, amely a 0 pontba folyna. A második tagban a felsőhatár n, mert a nyelőpontból nem vezet él a közvetítő pontokba, ezért nincs olyan áram, amely az (n+1)-ből valamely közvetítő pontba folyna.

A (7) feltétel csak az eredeti hálózat éleire vonatkozik, mivel az új éleken az alsó és felső korlátok helyett a (8) és (9) egyenlőségek írják elő az áramok nagyságát.

Ha létezik a fenti maximális folyam problémának megoldása, akkor arról azt állítjuk, hogy az, az eredeti hálózaton a minimális költségű folyamnak is egy lehetséges bázismegoldása.

Mivel a minimális költségű folyam (2), (3) és a maximális folyam probléma (6), (7) feltételei ugyanarra az n elemű csomópont halmazra (az eredeti hálózat csomópontjaira) vonatkoznak, az állítás bizonyításához csak azt kell belátni, hogy a (2) és (6), valamint a (3) és (7) feltételek egyenértékűek. Ha ugyanis a feltételek egyenértékűek, akkor az átalakított hálózaton a maximális folyam optimális megoldása, az eredeti hálózaton a minimális költségű folyam egy lehetséges bázismegoldása.

A (3) és (7) feltételek egyenértékűsége triviális. A (2) és (6) feltételek egyenértékűségének bizonyításához vizsgáljuk az (6) feltételeket az eredeti forrás-, nyelő- és közvetítő pontokra külön-külön.

a/ Először írjuk fel a feltételeket a forrásponttal közvetlen kapcsolódó csomópontokra, vagyis az eredeti forráspontokra. Vegyük figyelembe, hogy az eredeti forráspontok és az n+1-edik csomópont között nem fut él, ezért az első tagnál a szummázás felső határa n lesz. Így a

,

ahol a második tagot két tag összegére bontottuk.

Mivel definíció szerint $x_{0i}=b_i$, a

,

ami azonos a (2) feltétellel.

b/ Hasonlóan az előzőekhez, írjuk fel a (6) feltételeket a nyelőponttal közvetlen kapcsolódó csomópontokra is, vagyis az eredeti nyelőpontokra. Itt azt a kikötést használjuk fel, hogy a *0* forrásból nem vezet él az eredeti nyelőpontokba, ezért a második tagnál a szummázás alsó határa 1 lesz. Az első tagot két tag összegére bontva, és a szummázás határait megváltoztatva, az

$$x_{in+1} + \sum_{j=1}^{n} x_{ij} - \sum_{j=1}^{n} x_{ji} = 0 .$$

Mivel definíció szerint $x_{in+1}=|b_i|$, a

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} - \sum_{j=1}^{n} x_{ji} = -|b_i| .$$

Az így nyert összefüggés ugyan formailag különbözik (2)-től, de mivel az eredeti nyelőpontokon $b_i<0$, az egyenértékűség belátható.

c/ Végül az eredeti közvetítő pontokon a $b_i=0$, ami miatt a (6) alakú feltétel mindkét hálózaton érvényes.

Ezzel bizonyítottuk, hogy a (2) és (6) feltételek mindkét feladatban azonosak, és azt az állításunkat is, hogy az átalakított hálózaton a maximális folyam optimális megoldása, az eredeti hálózaton a minimális költségű folyam egy lehetséges bázismegoldása. A javasolt hálózatátalakítással tehát elérhető, hogy a minimális költségű folyam egy lehetséges bázismegoldásának előállítását visszavezessük maximális folyam probléma megoldásra, amelyhez hatékony algoritmusok állnak rendelkezésre.

A javasolt eljárásunkat tovább javíthatjuk, pontosabban az eredeti feladat optimális megoldásához közelebb álló bázismegoldást nyerhetünk, ha a maximális folyam keresésekor javítóútként mindig a forráspontból (*0*) az nyelőpontba (n+1) vezető minimális költségű utat jelölünk ki. Mint ismeretes, a javítóúton az élek nyelőirányú maradékkapacitása szigorúan pozitív. Ezért a legrövidebb út probléma megoldásakor a forrásból a nyelőbe vezető legrövidebb úton előírjuk a nyelőirányú maradékkapacitások pozitív voltát.

Az eljárás alkalmazása

Az *1. ábrán* bemutatott mintapélda megoldásának első lépéseként generáljunk egy lehetséges bázismegoldást a javasolt módszerrel. Ehhez használjuk fel *a 2. ábra* szerint átalakított hálózatot. A maximális folyam problémát a következő algoritmussal oldjuk meg [2], [3]:

(1) Keresünk egy olyan nem telített (valamennyi él maradékkapacitása szigorúan pozitív) legrövidebb utat a maradékhálózaton, amely a forráspontból a nyelőpontba vezet. Ha nincs ilyen út akkor megkaptuk a maximális folyamot.

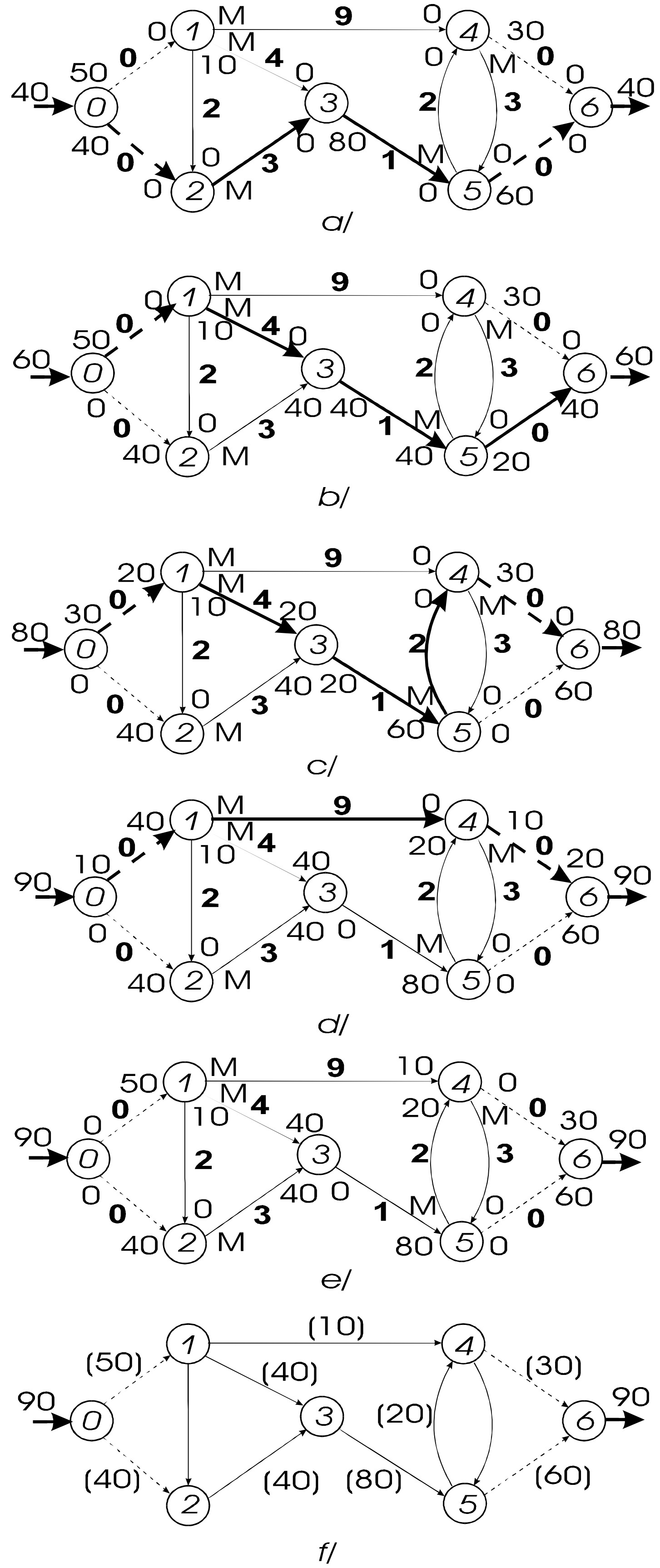
(2) Az utat alkotó élek maradékkapacitásai közül kiválasztjuk a legkisebbet, ez legyen Δ. Az út minden élének k_{ij} maradékkapacitását a nyelő irányában csökkentjük, ellentétes irányban pedig növeljük a Δ értékével. A maximális folyam értékét ugyancsak Δ-val növeljük, majd visszatérünk az (1) lépéshez.

Induláskor a **maradékhálózat** csak abban különbözik az eredeti hálózattól, hogy az eredeti hálózatot azokon a helyeken, ahol az (i,j) irányított élnek hiányzik a (j,i) irányított párja kiegészítjük 0 élkapacitású (j,i) irányított éllel. Ezeket a *3/a ábra* élein a 0-k jelzik. Ezután a maradékhálózat **maradékkapacitásnak** nevezett élkapacitásait következő módon változtatjuk. Amikor a hálózat valamelyik (i,j) élére valamilyen Δ áramot adunk, akkor a maradékhálózaton az (i,j) él k_{ij} maradékkapacitása Δ-val csökken, a (j,i) él k_{ji} maradékkapacitása pedig Δ-val nő. A hálózaton maradékkapacitás mutatja az élek telítettségét, egy él akkor telített, ha a maradékkapacitása 0. Ha a maradékkapacitás nagyobb, mint 0, akkor az élen a maradékkapacitásnak megfelelő nagyságú folyam továbbítható.

A **javítóút** a maradékhálózaton egy irányított út a forrástól a nyelő csomópontig, amelyiken minden él maradékkapacitása szigorúan pozitív. A maradékkapacitások minimumát a javítóúton a javítóút maradékkapacitásának nevezzük. Ez mutatja annak a folyamnak a nagyságát, amellyel növelni lehet a teljes folyamot. Könnyen belátható, hogy ha kijelölhető egy javítóút, akkor a maximális folyam is növelhető.

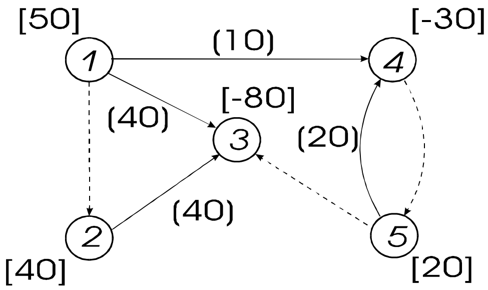
A megoldás menete a *3. ábrán* követhető, ahol a hálózat élein a maradékkapacitások mellett az élek fajlagos költségeit is feltüntettük. Az első iterációban a forrásból a nyelőbe vezető legrövidebb, szigorúan pozitív maradékkapacitású út *0-2-3-5-6*, amelyen a legkisebb nyelőirányú maradékkapacitás Δ=40. Az algoritmusnak megfelelően a javítóúton nyelőirányú maradékkapacitásokat 40-el csökkentjük, az ellentétes irányúakat pedig 40-el növeljük. A változások *3/b ábrán* láthatók, ahol a következő javítóutat *0-1-3-5-6* is kijelöltük.

Az eljárás szukcesszív alkalmazása a *3/f ábrára* vezet, ahol az éleken ténylegesen áramló folyamok láthatók. Az éleken áramló folyamokat úgy kaptunk meg, hogy a korlátozott kapacitású éleken az induló maradékhálózat nyelőirányú élkapacitásaiból levontuk az élek utolsó iterációban kapott nyelőirányú élkapacitásait. A nem korlátozott kapacitású éleken a folyamok a forrásirányú maradékkapacitással egyenlők. Az eredmény: x_{01}=50, x_{02}=40, x_{13}=40, x_{14}=10, x_{23}=40, x_{35}=80, x_{46}=30, x_{54}=20, x_{56}=60.

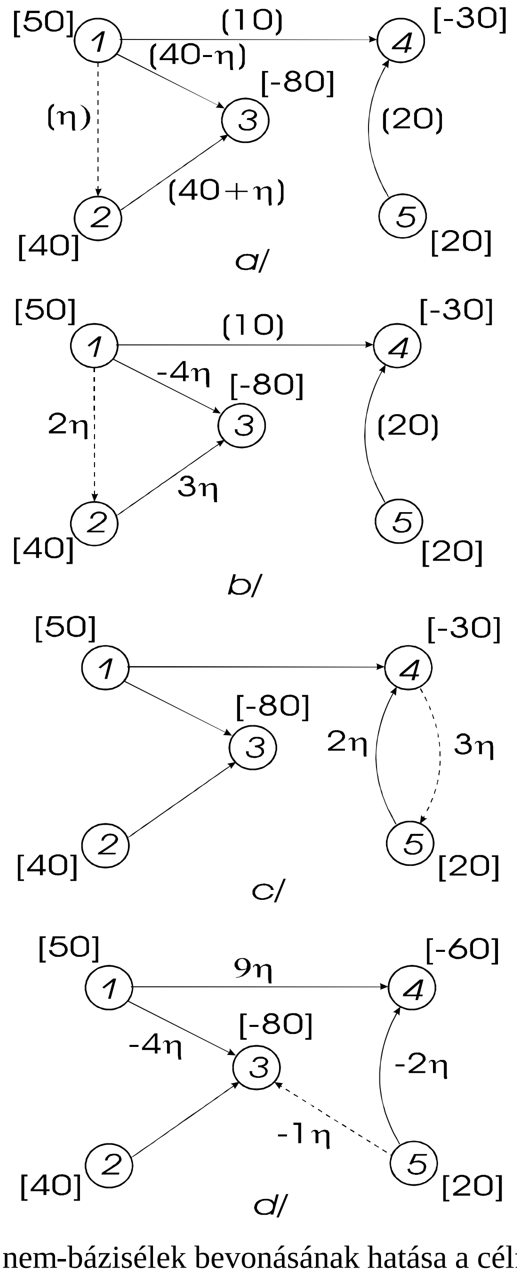


3. ábra: A bázismegoldás előállítása

Mivel az átalakított hálózaton a maximális folyam optimális megoldása, az eredeti hálózaton a minimális költségű folyam egy lehetséges bázismegoldása, a minimális költségű folyam egy lehetséges bázismegoldását a fiktív élek elhagyásával nyerjük, azaz x_{13}=40, x_{14}=10, x_{23}=40, x_{35}=80, x_{54}=20. A megoldáshoz tartozó célfüggvény $z = \Sigma_i \Sigma_j c_{ij} x_{ij} = 490$.



4. ábra: A bázismegoldáshoz tartozó feszítőfa



5. ábra: A nem-bázisélek bevonásának hatása a célfüggvényre

A továbbiakban a feladatunk a bázismegoldás optimalitásának vizsgálata és javítása a hálózati szimplex-módszerrel. Ehhez rajzoljuk meg a bázismegoldáshoz tartozó feszítőfát (*4. ábra*). Mint tudjuk a hálózati szimplex-módszer felsőkorlátos technikával kezeli az élkapacitás korlátokat. Mivel a *3-5* élen az $x_{35}=k_{35}=80$, vagyis elérte a felső határt, az x_{35} elhagyott bázisváltozó, az $y_{35}=0$ pedig nem-bázisváltozó lesz. Ennek következménye, hogy a *3-5* él irányítása ellentétesre, fajlagos költsége c_{35} =–1-re változik. Ezzel egyidejűleg a *3* csomópont kapacitása $b_3:=b_3-k_{35}=-80$, az *5* csomóponté $b_5:=b_5+k_{35}=20$ lesz. A változások a *4. ábrán* láthatók, ahol a bázisélеket (a feszítőfát) folytonos, a nem-bázisélеket szaggatott vonallal rajzoltuk meg.

A bázismegoldást úgy javítjuk, hogy a 0-ról növekvő nem-bázisváltozók közül kiválasztunk egy olyat, amelynek bevonása javítja a célfüggvényt. Most nézzük meg, hogyan valósítható ez meg a szimplex tábla nélkül. A bemutatáshoz tekintsük a *5/a ábrát*, amelyen az x_{12} nem-bázisváltozó, és az *1–2* él nem-bázisél. Növeljük az x_{12} értékét 0-ról η-ra, ami azt jelenti, hogy az *1–2* élen η nagyságú folyamot generálunk.

Ha egy feszítőfához egy nem-bázisélet adunk, akkor egy irányítatlan körutat kapunk. A *5/a ábrán* a körút *1–2–3–1.* A η folyam hatására a körút azon élein, amelyek iránya megegyezik az *1–2* irányával, a folyam η-val nő, az ellentétes irányú éleken pedig η-val csökken. A körúton kívüli éleken nincs változás.

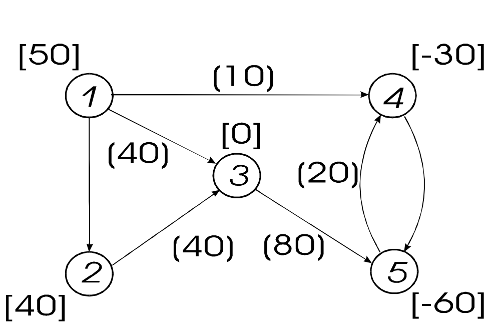
Most nézzük miként hat a η folyam a célfüggvényre. Ehhez rajzoljuk fel a hálózatot a fajlagos költségekkel és a megváltozott folyamokkal (*5/b ábra*). A célfüggvény változása az ábrából leolvasható:

$$\Delta z=2\eta+3\eta-4\eta=\eta.$$

3. táblázat

Nem-bázisél	Körút	Δz
1→2	*1–2–3–1*	2+3–4=1
4→5	*4–5–4*	3+2=5
5→3	*5–3–1–4–5*	–1–4+9–2=2

Mivel $\Delta z>0$, és a z célfüggvény minimalizálása a feladat, az *1–2* él bevonása a bázismegoldásba nem kívánatos. Az x_{12} növelése ugyanis célfüggvény növekedését eredményezné. Hasonlóan megvizsgáljuk a többi nem-bázisél bevonásának hatását is (*5c* és *d ábrák*). Az optimalitás vizsgálatot a *3. táblázatban* összefoglaltunk, amelynek eredménye azt mutatja, hogy egyik nem-bázisél bevonása sem csökkenti a célfüggvényt, vagyis a lehetséges bázismegoldás optimális megoldás is (*6. ábra*).



6. ábra: A mintapélda optimális megoldása

A teljesség kedvéért ismertetjük azt is, mi a teendő akkor, ha valamely él bevonása a bázisba kívánatos, vagyis hogyan hajtható végre a bázisvektorcsere, miként határozható meg a kilépő és a belépő bázisváltozó nagysága. Tudjuk, hogy az η folyam hatására a körút azon élein, amelyek iránya megegyezik a bevonandó él irányával a folyam η-val nő, az ellentétes irányú éleken η-val csökken. A körúton kívüli éleken pedig nincs változás. A belépő bázisváltozó η értékének meghatározásához az élek kapacitáskorlátait kell megvizsgálni. Ahol az áram növekszik ott a felsőhatárt

$$x_{ij} := x_{ij} + \eta \leq k_{ij} \, ,$$

ahol csökken ott az alsóhatárt

$$x_{ij} := x_{ij} - \eta \geq 0$$

kell figyelembe venni. Az így kiszámított η értékek közül a legkisebb fogja meghatározni a belépő bázisváltozó nagyságát, és az x_{ij}=0 vagy az x_{ij}=k_{ij} értékkel kilépő bázisváltozót is. Az utóbbi esetben, amint azt korábban leírtuk, az x_{ij} elhagyott bázisváltozó lesz, aminek a konzekvenciái az $i \rightarrow j$ élen, valamint a i és j csomópontokon ugyancsak ismertek.

Összefoglalás

A minimális költségű folyam egy lehetséges bázismegoldásának előállítására javasolt eljárás a hálózati szimplex módszerrel hatékonyan kombinálható. A javasolt hálózat átalakítással és a probléma maximális folyamként való kezelésével az optimálishoz nagyon közeli vagy esetenként, mint a bemutatott példában, optimális megoldás nyerhető.

IRODALOM

1. Benkő J.: Logisztikai operációk tervezése. (Egyetemi jegyzet), GATE, Gödöllő, 1995.

2. Hillier, F. S.-Lieberman, G. J.: Introduction to Operation Research. McGraw-Hill Publishing Company, New York, 1990.

3. **Proth, J. M.-Hillion, H. P.**: Mathematical Tools in Production Management. Plenium Press, New York and London, 1990.

4. Varga J.: Gyakorlati programozás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1985.

Publikálva:

Nemzetközi Logisztikai Tudományos Konferencia. Zrínyi Miklós Katonai Akadémia, Budapest, 1995. június 7-8. 223-237 p.