Ciklikusan változó igényű készletezési modell megoldása dinamikus programozással

DR. BENKŐ JÁNOS
egyetemi tanár, SZIE,
2100 Gödöllő, Páter K. u. 1., Tel: (28) 410-799, e-mail: BENKO.MGTI@MGK.GAU.HU

A készletek jelenlétét a gazdaságban fizikai és gazdasági kényszerek indokolják. Bármennyire is szeretnénk a készletek jelenlegi ismereteink szerint a termelési és ellátási folyamatokból nem küszöbölhetők ki, legfeljebb csökkenthetők, illetve minimalizálhatók. A készletek optimális nagyságának a meghatározásával foglalkozó tudomány a készletezési elmélet , amely általában matematikai modellek felhasználásával segíti a döntéshozókat. A modellek egyik nagy csoportját az un. periodikus készletfigyelésű modellek képezik, amelyek alkalmasak előre becsülhető, de ciklusonként változó igények leírására. A tanulmány egy ilyen modell általános korlátozó feltételek (periódusonkénti maximális gyártás, maximális készlet a feltöltés után, minimális készlet a periódus végén, stb.) melletti megoldására tesz javaslatot.

Az anyag- és készletgazdálkodás feladata a termelés ütemének megfelelő anyagszükséglet folyamatos kielégítése. A termelési program és az anyagnormák ismeretében egy adott időszak anyagszükséglete pontosan tervezhető, továbbá ismertek a termeléshez szükséges anyagok beszerezési forrásai is. Ennek ellenére az anyagellátásban problémák jelentkezhetnek, amelyek egyrészt a termelési program nem tervezett változásaira és bizonytalanságaira, másrészt a külső beszállítóknál mutatkozó előre nem kalkulálható eseményekre vezethetők vissza. A készletek jelenlétét a gazdaságban tehát fizikai és gazdasági kényszerek indokolják, és bármennyire is szeretnénk, a készletek jelenlegi ismereteink szerint a termelési és elosztási folyamatokból nem küszöbölhetők ki, legfeljebb csökkenthetők, illetve minimalizálhatók. A készletek optimális nagyságának a meghatározásával foglalkozó tudomány a készletezési elmélet, amely általában matematikai modellekre támaszkodva segíti a döntéshozókat. A készletezési elmélet célja megtalálni az egyensúlyt az ésszerű biztonság és az elfogadható költség között.

Az első, klasszikusnak tekinthető készletgazdálkodási modellt, amely „optimális rendelési tételnagyság (EOQ) modellje” néven vált ismerté, már 1915-ben publikálták [3]. Az optimális rendelési tételnagyság számítására alkalmas modell, illetve formula alkalmazhatóságának eredeti feltételei igen szigorúak és a gyakorlatban ritkán teljesülnek, ennek ellenére egyszerűségének köszönhetően a mai napig a leggyakrabban emlegetett és használt modell. Széleskörű felhasználásának nemcsak az a magyarázata, hogy matematikailag kevésbé képzett szakemberek számára is elérhető, hanem az is, hogy a megoldás nem túlzottan érzékeny a bemenő paraméterek pontosságára. Az eredetiből továbbfejlesztett modellek alkotják a folyamatos készletfigyelésű modelleket [1]. Ezek képesek figyelembe venni a hiányt, a véges feltöltési kapacitást, a darabonkénti rendelési költség tételnagyságtól való függését, stb., de továbbra is feltételezik, hogy a felhasználási vagy fogyási ráta minden ciklusban állandó.

A folyamatos készletfigyelésű modellek elsősorban a nagy tételszámokat, közel egyenletes ütemben gyártó cégeknél alkalmazhatók a kiindulási feltételek megsértése nélkül. Ezek a feltételek a szezonális ingadozásokat mutató kereskedelemben, vagy a megrendelések változását követő termelésben azonban nem teljesülnek. Ilyenkor, ha nem akarunk túl nagy hibát elkövetni, kénytelenek vagyunk bonyolultabb, nagyobb felkészültséget feltételező és több munkát igénylő modelleket alkalmazni. Ezek egyik nagy csoportját az un. periodikus készletfigyelésű modellek képezik, amelyek alkalmasak előre becsülhető, ciklusonként (periódusonként) változó igények leírására. Az első ilyen modellt *Wagner* és *Within* 1958-ban publikálták [6], akik a megoldásra a dinamikus programozást használták fel. Az algoritmust később maga *Within* fejlesztette tovább [4].

Az ’50-es évek végén és a ’60-as évek elején a számítástechnika viszonylagos fejletlensége arra késztette a matematikusokat és a kutatókat, hogy minél kisebb memória és számításigényű algoritmusokat fejlesszenek ki. Ez a törekvés visszaköszön a *Wagner-Within* algoritmusban is, amelyben az alkotók az eredmények pontosságának rovására egyszerűsítették a számításokat, pontosabban olyan a korlátokat és a költségfüggvényt fogalmazták meg, amelyek jelentős számításigény csökkenést eredményeztek [1]. Az elmúlt évek a számítástechnikai fejlődésével, ami többek között a számítások sebességének növekedésében is megnyilvánult, az akadályok megszűntek és lehetőség nyílt arra, hogy a korábbiaknál pontosabb, a valóságot jobban tükröző modelleket alkossunk.

E tanulmány is a *Wagner-Within* modell továbbfejlesztésével, illetve a fejlesztett modell megoldásával foglalkozik. Az új modellben az előrelépést az jelenti, hogy abban a gyakorlat által jogosan igényelt alsó és felső korlátok írhatók elő, továbbá az eredetihez képest a költségfüggvényben készlet fogalma is közelebb áll a valósághoz. A korlátozó feltételek következők: periódusonkénti beszerzés vagy gyártás és a feltöltés utáni készlet nem léphetnek át adott határokat, a periódusok végén a készlet pedig nem csökkenhet az előírt szint alá.

Tekintsük először modellben figyelembevett költségelemeket. Legyen K a periódusok (i=1,2,…n)) elején jelentkező, a rendelés vagy a gyártás indításakor felmerülő állandó költség, amit rendelési vagy beállítási költségnek nevezünk. A darabonkénti beszerzési vagy gyártási költség (c_i), általában állandó, de az új modellben periódusonként változhat, esetleg a rendelési tételnagyság függvénye is lehet. A darabonkénti készlettartási költség (h_i) ugyancsak lehet állandó, periódusonként változó és a készletnagyság függvénye.

Készlettartási költséggel arányos készletnek az eredeti modellben a vizsgált periódus végén megmaradó mennyiséget tekintették. A fejlesztett változatban lineáris változást feltételezve, a periódus elején és végén mérhető mennyiségek átlagával azonosítjuk a készletet, ami lehet tetszőleges vagy korlátozott nagyságú. A készlet minimumának a korlátozása a gyakorlatban általában biztonsági megfontolásokra vezethető vissza, és egy olyan minimális szint (s) előírását jelenti, ami alá a készlet soha nem csökkenhet. A készlet felsőhatárait az egy periódus alatt beszerezhető vagy gyártható mennyiség (Z), vagy a rendelkezésre álló raktárkapacitás (S) determinálja.

Értelemszerűen az i-edik periódus végén megmaradó mennyiség (készlet) az (i+1)-edik periódus belépőkészlete. Feltételezzük, hogy a belépőkészlet az első periódus elején ismert nagyságú, az n-edik periódus végén pedig a készlet 0-ra csökken. A modellben a fogyási ráta (egységnyi időre eső készletváltozás) helyett a készletváltozást az i-edik az periódus szükségletével r_i (i=1,2,...,n) jellemezzük.

A vázolt készletezési probléma megoldásának célja meghatározni az egyes periódusok elején rendelendő vagy gyártandó mennyiséget [z_i (i=1,2,...,n)] úgy, hogy a teljes költséget minimalizáljuk. A megoldáshoz célszerűen a dinamikus programozást fogjuk használjuk, amelynek változói a készletezéssel összefüggésben a következők. Az i-edik fázist az i-edik periódussal azonosítjuk, az állapotok pedig feleljenek meg az i-edik periódusba belépő lehetséges készleteknek, amit x_i (i=1,2,...,n) -vel jelölünk. Az x_i készlet az első periódus elején ismert nagyságú és az utolsó periódus vagyis a tervezési horizont végén nulla, azaz x_{n+1}=0. A döntési változó legyen a i-edik periódus elején megrendelt vagy gyártott mennyiség (z_i). A szükséglet az i-edik időszakban pedig legyen r_i.

Az i-edik időszakban felmerülő költség $B_i(x_i,z_i)$ így a belépőkészlet (x_i) és a gyártott mennyiség (z_i) függvénye. Amint azt előre jeleztük, a költségek közül az állandó rendelési vagy beállítási (K), a darabszámmal arányos c_i beszerzési vagy gyártási és a h_i készlettartási költséget vesszük figyelembe.

A készlet az i-edik periódusban a feltöltés utáni készlet x_i+z_i és a periódus végén megmaradó készlet $x_{i+1}=x_i+z_i-r_i$ átlaga, azaz

$$\frac{x_i + z_i + x_i + z_i - r_i}{2} = x_i + z_i - r_i / 2 \,,$$

amit felhasználva, az i-edik periódus költsége:

$$B_i(x_i, z_i) = \begin{cases} K + c_i(z_i) z_i + h_i(x_i + z_i - r_i / 2), \text{ ha a } z_i > 0, \\ h_i(x_i - r_i / 2), \quad \text{ha a } z_i = 0. \end{cases}$$

A $B_i(x_i,z_i)$ költségfüggvényben a c_i darab- és a h_i készlettartási költség periódusonként változhat, sőt az sem szükséges, hogy $B_i(x_i,z_i)$ lineáris függvény legyen. Például a gyakorlatban nagyon gyakran előfordul, hogy nagyobb tételszám rendelésekor kedvezményeket kapunk, azaz a darabonkénti ár (c_i) a rendelési tételnagyság (z_i) függvénye.

A probléma természetéből fakadóan a lehetséges korlátozások a következők:

a periódusonkénti beszerzés vagy gyártás maximalizált, $Z \geq z_i$,

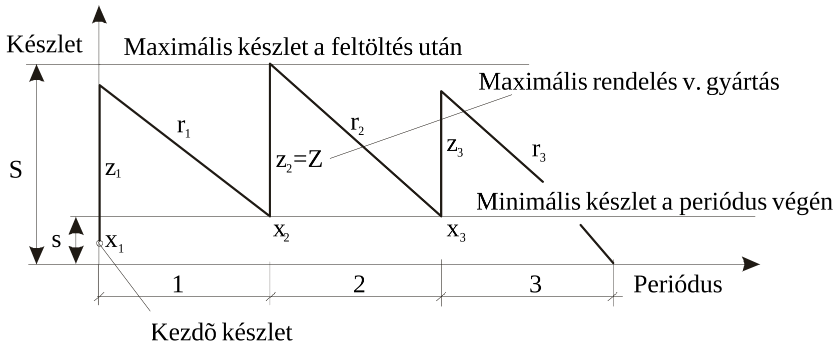
a készlet a gyártás vagy feltöltés után maximalizált, $S \geq z_i + x_i$,

a hiányt nem engedjük meg, $x_i + z_i - r_i \geq 0$,

a készlet a periódus végén minimalizált, $s \leq x_i$.

Mivel z_i-t választottuk döntési változónak, a korlátozó feltételeket az alábbiak szerint rendezzük:

$$\begin{aligned} z_i &\leq Z \,, \\ z_i &\leq S - x_i \,, \\ z_i &\geq r_i - x_i \,, \\ x_i &\geq s \,. \end{aligned}$$



1. ábra. Egy három periódusos modell

Az utolsó feltételt alakítsuk át az *1. ábrából* felírható

$$x_{i+1} = x_i + z_i - r_i$$

egyenlettel, amelyből az

$$x_i = x_{i+1} + r_i - z_i.$$

Ezt helyettesítve az utolsó feltételbe és rendezve, az

$$x_{i+1} + r_i - z_i \geq s\,,$$

$$z_i \leq x_{i+1} + r_i - s\,.$$

A feltételeket összevonva:

$$\min\{Z,\,(x_{i+1} + r_i - s),(S - x_i)\} \geq z_i \geq \max\{r_i - x_i\}.$$

Jelentse $C_i(x_i,z_i)$ a készletezési alpolitikák teljes költségét az i-edik periódus elejétől az n-edik periódus végéig, amelyek értelemszerűen a belépő készlet és a gyártott mennyiség függvényei, és x_i belépőkészlet esetén jelölje $C_i^*(x_i)$ a $C_i(x_i,z_i)$ halmaz minimális értékét.

A korlátozó feltételeket figyelembe véve a legjobb készletezési alpolitikák a

$$C_i^*(x_i) = \min_{\substack{z_i \leq \min\{Z,\,(x_{i+1} r_i - s),(S-x_i)\} \\ z_i \geq \max\{r_i - x_i\}}} \{C_i(x_i, z_i)\} = \min_{\substack{z_i \leq \min\{Z,\,(x_{i+1} r_i - s),(S-x_i)\} \\ z_i \geq \max\{r_i - x_i\}}} \{B_i(x_i, z_i) + C_{i+1}^*(x_i + z_i - r_i)\}$$

rekurzív formulával számíthatók minden i= 1,2,…,n periódusban, ahol a C_{n+1}^* definíció szerint nulla, és az

$$x_{i+1}=x_i+z_i-r_i.$$

1. táblázat

Periódus (i)	1	2	3	4	5	6
Beszerzési ár (c_i) [ezer Ft/t]	11	18	13	17	20	10
Szükséglet (r_i) [t]	8	5	3	2	7	4
Készlettartási költség (h_i) [ezer Ft/t]	1	1	1	1	1	1

A feladat megoldásának további feltételei:

$$\sum_{i=1}^{n} r_i \leq nZ + x_1,$$

azaz az összes beszerezett vagy gyártott mennyiség és az első periódusba belépő készlet összszege nem lehet kevesebb, mint az összes szükséglet. Az első periódus szükséglete pedig nem lehet nagyobb, minta az első periódusba belépőkészlet és a periódusonként maximálisan beszerezhető vagy gyárható mennyiség összege:

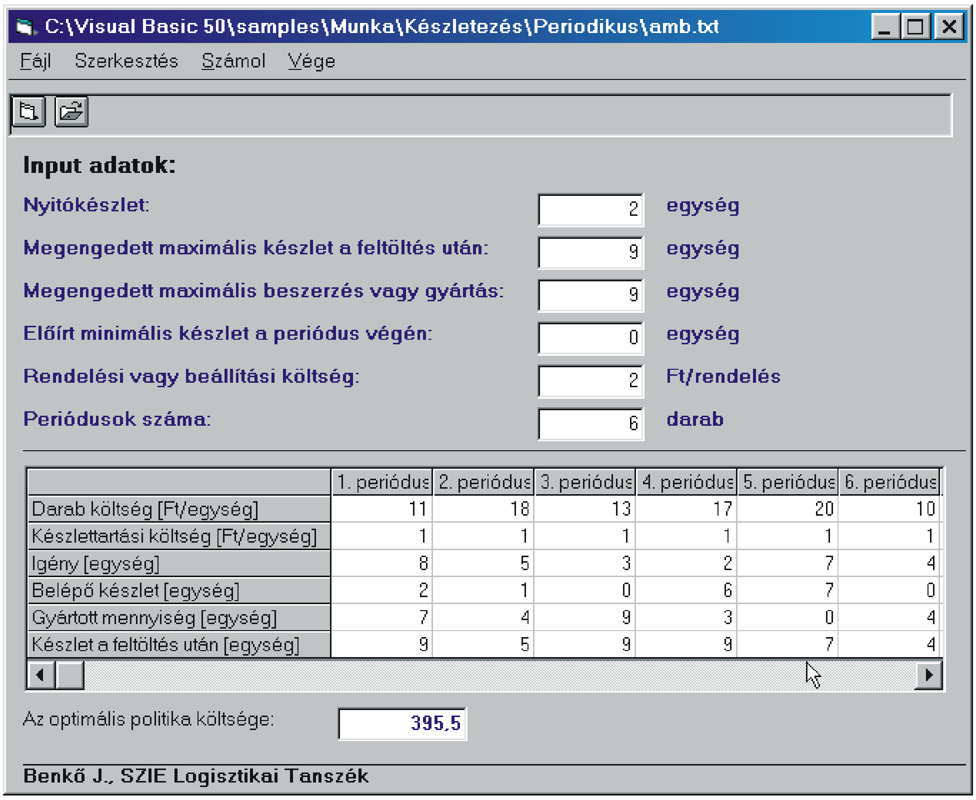
$$r_1 \leq Z + x_1.$$

A tervezési horizont végén az x_{n+1}=0 csak akkor teljesül, ha az

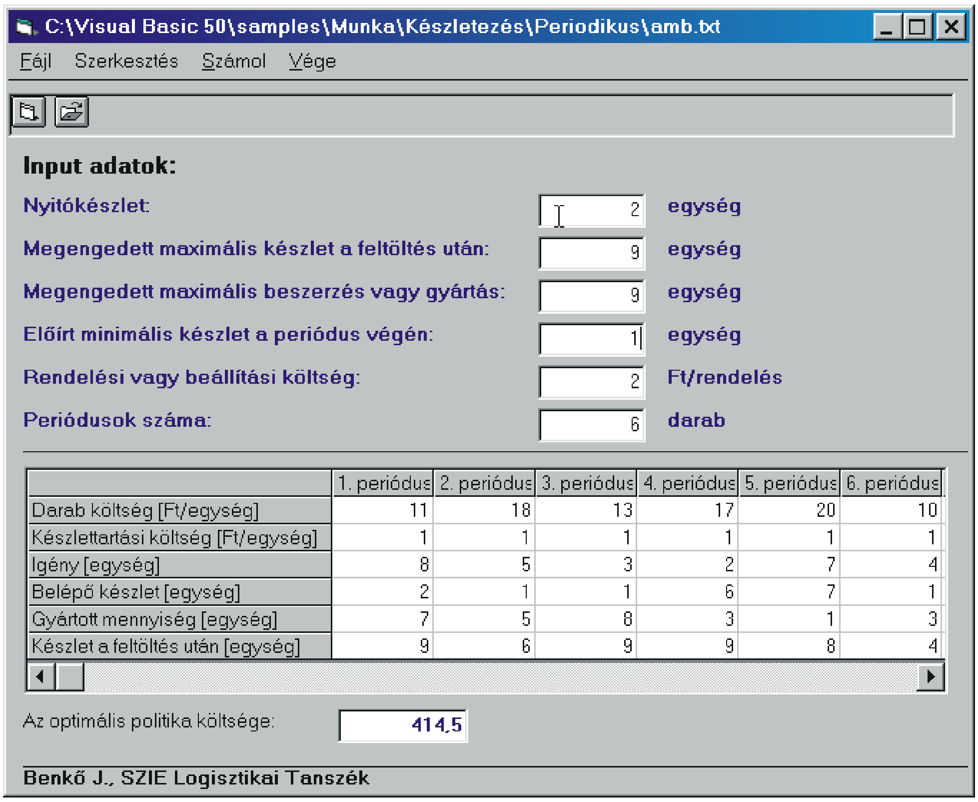
$$s \leq r_n,$$

azaz a minimális készlet nem lehet nagyobb az utolsó periódus igényénél.

A leírt algoritmus alapján készített számítógép program bemutatásához tekintsük a következő példát. A program adatbeviteli képernyőjét a *2. ábra* mutatja.



2. ábra. Az input adatok és az eredményekkel 0 minimális készletszintnél.



3. ábra. Az input adatok és az eredményekkel 1 t-ás minimális készletszintnél.

Egy vállalat anyagellátási osztályának az éves termelési program megvalósítása érdekében kéthavonta az *1. táblázatban* megadott mennyiségben (r_i) kell a gyártáshoz szükséges alapanyagokat biztosítania. A beszerzési ár (c_i) periódusonként változó, és a raktárkapacitás korlátozott, S=9 t. Az első periódusba belépőkészlet x_1=2 t. A rendelési költség K=2 ezer Ft/rendelés, a fajlagos készlettartási költség minden periódusban egyenlő, h_i=1 ezer Ft/t. Határozzuk meg az optimális készletezési politikát. Kérdés, az egyes periódusokban mekkora mennyiségeket (z_i) rendeljünk, ha a minimális készletet nem korlátozzuk, majd vizsgáljuk meg, hogy milyen költségnövekedéssel jár, ha a minimális készletet 1 t-ra növeljük.

A program futásának eredményei (a periódusok belépő készletei (x_i), a periódusokban beszerzett mennyiségek (z_i) és a feltöltés utáni készletek (x_i+z_i)), nulla minimális készletszintnél a *2. ábrán*, 1 t-ás minimális készletszintnél pedig a *3. ábrán* láthatók. Az első esetben az összes beszerzési és készletezési költség 395,5 ezer Ft, ami a minimális készletszint növelésekor 414,5 ezer Ft-ra növekszik, azaz az 1 t-ás minimális készletszint okozta költségnövekedés 19 ezer Ft.

A minimális készlet biztonságot jelent, de mindenki előtt ismert, hogy a nagyobb biztonság több pénzbe kerül. A megoldásból is kiderül, hogy a minimális készletszint előírása, azaz az s>0 készletezési politika költségnövekedést eredményez. Az újrarendelési pontot az utánpótlási idő ismeretében, ezért úgy kell meghatározni, hogy az új szállítmányok akkor érkezzenek meg, amikor a készletszint nullára csökken.

SUMMARY

Reasons for presence of inventory (stock of goods) are physical and economical constraints in business. However we would like, according to our present knowledge, inventory can not be eliminated from production and distribution of goods, at most we can reduce and minimize it. The name of the science that deals with determination of the optimal lot size is inventory theory. Inventory theory formulates mathematical models to help decision makers. One groups of inventory models is called periodic review that allows to vary the required amounts from period to period. This study deals with such a model in that maximum quantity produced or ordered for period, maximum inventory after charging and minimum inventory at the end of period are given and takes also a suggestion for the solution.

IRODALOM

1. **Benkő J.:** Logisztikai tervezés. Dinasztia Kiadó, Budapest, 2000.
2. **Chikán A.** (szerk): Készletezési modellek. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1983.
3. **Harris, F.:** Operations and Cost. A.W.Shaw Co., Chicago. 1915.
4. **Hadley, G.-Within ,T. M.:** Analysis of Inventory Systems. Prentice-Hall, 1963.
5. **Tersine, R. J.:** Principles of Inventory and Materials Management. North-Holland, Amsterdam, 1988.
6. **Wagner, H. M.-Within, T. M.:** Dynamic Version of the Economic Lot Size Model. Management Science, 5. 1958. 89-96 old.

Publikálva: Gép, LV. évf. 2004/3. 8-11 p.