Az „Arbitrázs és árazó funkcionálok pénzügyi piacokon" c. OTKA pályázat (F 49094) zárójelentése

Kutatásaimban tőzsdei származékos termékek (például opciók) árazását vizsgáltam. A pénzügyi matematika egyik alapfeltételezése az, hogy a piacok arbitrázsmentesek; ezért létezik helyes árazó funkcionál; sőt, általában ilyenek egész sokasága, melyből ki kell választani a számunkra legmegfelelőbbet.

A választás alapjául a befektetők kockázathoz való viszonya, illetve a piaci termékek ára és hozama közt megfigyelt összefüggések szolgálhatnak. A klasszikus elmélet árazó funkcionáljai olyan valószínűségi mértékek, melyekre nézve a részvényárfolyamok martingálok. Ez az elmélet azonban idealizálja a kereskedést, figyelmen kívül hagyva a portfoliókra vonatkozó megszorításokat, a tranzakciós költségeket, valamint a likviditási problémákat.

Az elvégzett kutatómunkát az előző bekezdésben felmerült szempontok szerint csoportosítva mutatom be.

Optimális befektetések, folytonosság, kockázatkerülés

A mikroökonómia egy befektető pénzhez való viszonyát általában egy konkáv, monoton növő U ún. hasznossági függvénnyel írja le. A függvény értelmezési tartománya lehet $\mathbb{R}$ (pl. $U(x) = -e^{-x}$) vagy $\mathbb{R}_+$ (például $U(x) = x^p$, $0 < p < 1$). Az utóbbi esetben a veszteséges pozíciókat eleve kizárjuk vizsgálatainkból, ami általában könnyebb matematikához vezet.

Adott U hasznossági függvényből és adott részvényár-dinamikából többféle árazó mérték származtatható: a hasznosság-semleges ár, a minimális (általánosított) entrópia mérték vagy a Davis-féle ún. „helyes" ár. Itt most nem bocsátkozom definíciókba; elég megjegyezni, hogy ezen árfogalmak mindegyike pénzügyi-közgazdaságtani vagy információelméleti megfontolások alapján került bevezetésre.

Optimális befektetések létezését igazoltuk az eddigi legenyhébb feltételek mellett diszkrét időparaméterű modellekben a [28] és [29] cikkekben a $\mathrm{dom}(U) = \mathbb{R}$ ill. a $\mathrm{dom}(U) = \mathbb{R}_+$ esetben társszerzőmmel, Lukasz Stettnerrel. A [9] cikkben egy olyan algoritmust adtunk meg, amely portfoliónk növekedési rátáját optimalizálja hosszú távon, tranzakciós költségek mellett.

Ezután azt vizsgáltuk, vajon folytonosan függ-e az optimális befektetés az adott befektető hasznossági függvényétől. Matematikailag megfogalmazva: ha adva vannak a részvényárfolyamok és az U_n függvénysorozat tart U-hoz (pontonkénti konvergencia), akkor a kapcsolódó optimális befektetések konvergálnak-e (1 valószínűséggel) ?

Az első ilyen irányú eredményt [13] érte el a közismert Black-Scholes modellben, ahol az árfolyamat geometriai Brown-mozgást követ. Az U_n függvények értelmezési tartományát $\mathbb{R}_+$-nak feltételezték.

Kolléganőmmel, Laurence Carassus-sal diszkrét időparaméterű folyamatok egy széles osztályában és $\mathbb{R}$-en értelmezett hasznossági függvényekre igazoltuk ezt az eredményt. Beláttuk azt is, hogy a befektetők által számolt árak (hasznosság-semleges ill. Davis ár) is konvergálnak, sőt, a Davis-ár ugyanolyan gyorsan, ahogyan az U_n tart U-hoz (a pontos definíciót itt mellőzöm). Az eredmény gyakorlati tartalma az, hogy ha pontatlanul határozzuk is meg U-t, és utána ezzel a közelítéssel számolunk, a kapott árak hibája arányos a kezdeti becslés hibájával. Más szóval, a hasznossági függvényeken alapuló árazás robusztus az U perturbációira nézve.

A problémát azóta többen tárgyalták folytonos ill. diszkrét idejű modellekben (lásd [22], [21], [17], [19] és [20]), hivatkozva a mi eredményünkre is. Ezidáig a miénk az egyetlen cikk, amely a $\mathrm{dom}(U) = \mathbb{R}$ esetet tárgyalja, a többi közlemény mind a pozitív tengelyen definiált hasznossági függvényekkel foglalkozik.

A befektető hasznossági függvényétől független az ún. szintetizálási költség (angolul „superhedging/superreplication price"). Ez a legkisebb kezdeti tőke amiből 1 valószínűséggel (azaz kockázatmentesen) biztosítható az adott származékos termék (opciós szerződés) kifizetése. A befektetők szubjektív kockázatkerülését az $r(x) = -U''(x)/U'(x)$ függvénnyel szokás jellemezni. Természetesen fölmerül a kérdés: vajon ha ez a függvény (pontonként) végtelenhez tart, abból következik-e, hogy egy adott opció hasznosság-semleges ára a szintetizálási költséghez tart ?

A kezdeti eredmények mind az exponenciális függvényekre születtek, azaz ha $U_\alpha(x) = -e^{-\alpha x}$. Ilyenkor $r_\alpha(x) = \alpha$ konstans. Speciális modellosztályok vizsgálata után ([31]) a [8] cikkben belátták, hogy $\alpha \to \infty$ esetén a hasznosság-semleges árak tartanak a szintetizálási költséghez midőn a részvényárak általános (lokálisan korlátos) szemimartingál folyamatot követnek (és nincs arbitrázs).

A [1] értekezésben hasznossági függvények néhány más osztályára is kiterjesztették ezt az eredményt. Továbbra is nyitott kérdés volt azonban, mi történik általános U_n függvénysorozat esetén ha $r_n(x) \to \infty$ minden x-re.

Először a [2] cikkben sikerült egy ilyen eredményt igazolnunk a $\mathrm{dom}(U_n) = \mathbb{R}_+$ esetre, diszkrét időparaméterű piacmodellek egy nagy osztályára. A $\mathrm{dom}(U_n) = \mathbb{R}$ eset jóval bonyolultabbnak bizonyult, ezt a [4] közleményben sikerült belátnunk, valamint azt is bizonyítottuk, hogy az optimális stratégiák sorozatának egyik (alkalmas módon definiált) torlódási pontja szintetizálja az opciót (azaz megfelelően kereskedve portfoliónk értéke 1 valószínűséggel legalább az opció értéke lesz). Hasonló eredményeket korábban csak egy lépéses modellekben ([6]) illetve véges valószínűségi mezőkön ([10]) értek el. Konvergencia általában nem remélhető (lásd [6] ellenpéldáját).

A [4] és [3] cikkek részben hosszadalmas direkt becsléseken alapulnak. Felhasználva a [28] cikk eredményeit, belátjuk, hogy az adott feltételek mellett a feladat helyesen kitűzött (azaz a maximális elérhető hasznosság véges), valamint az optimális stratégiák (n-ben egyenletesen) korlátosak. A [4] és [2] közleményekben egy másik fontos felhasznált tény a kereskedéssel elérhető portfolió értékek halmazának zártsága (valószínűségi változók egy alkalmas terében); ez a funkcionálanalízis technikáinak egyik alapvető alkalmazása a pénzügyi matematikában. A [3] közleményben lényeges szerepet játszik az implicit függvény tétel egy „egyenletes” változata.

Teljesen más módszerrel sikerült [4] eredményét általános (lokálisan korlátos) szemimartingál árfolyamatok esetére kiterjeszteni, a készülő [5] cikkben.

Arbitrázs nagy piacokon

Az úttörő [30] cikkben a szerző olyan piacokat tekintett, melyeken „nagyon sok” (matematikailag megszámlálhatóan végtelen számú) termék van jelen. A gyakorlati életben például a különböző lejáratú kötvények sokasága modellezhető így. A [30] cikk fő eredménye szerint a piac arbitrázsmentességéből következik, hogy az egyes termékek hozama közel lineáris függvénye a tőzsdeindexszel való korrelációjuknak.

Ez az észrevétel a mikroökonómia egyik sarokkövévé vált, amivel rengeteg közgazdaságtani cikk foglalkozott. A matematikai elméletet Yu. M. Kabanov és D. O. Kramkov új szempontok szerint tárgyalta, lásd a [14] cikket (illetve annak irodalomjegyzékét). A [30] konkrét modelljét részletesen vizsgáltam a [23] és [24] cikkeimben. Sikerült a régebbi, [30]-ban szereplő arbitrázs-fogalom és a modern pénzügyi matematikában használt definíció ekvivalenciáját belátnom, valamint martingálmérték létezését igazolnom, lásd még a [25] áttekintő cikket is.

A Ross-féle modell hátránya, hogy igen szegényes kovariancia-struktúrát feltételez a piacról: minden egyes termék korrelált a tőzsdeindexszel (amit 0. termékként szokás szerepeltetni), de máskülönben saját, független véletlen forrás hajtja meg a dinamikáját. (Kicsit precízebben: az i. termék hozama a 0. termék hozamának és ε_i-nek lineáris kombinációja, ahol ε_i-k független valószínűségi változók. A [30]-beli modell megenged véges sok faktort is, azaz több „tőzsdeindex”-et, de ez még mindig csak egy nagyon speciális modellosztályt ölel fel és a gyakorlatban faktoranalízist tesz szükségessé.)

Tényleges kötvénypiacok vizsgálatához elengedhetetlennek tűnik az általános kovariancia-struktúra vizsgálata. A [27] cikkem első lépésként olyan nagy piacokat vizsgál, ahol a termékek hozamai lognormális eloszlásúak tetszőleges kovarianciamátrixszal. Feltételt adtam a piac paramétereire (hozamok és korrelációk), mely elégséges (és plusz feltevések mellett szükséges is) ekvivalens martingálmérték (azaz árazó funkcionál) létezésére ebben a modellben. A feltétel empirikusan tesztelhető valódi hozamadatokon, faktoranalízist nem igényel és általánosítja a [30] cikk jól ismert összefüggéseit.

A tétel egyik iránya véges dimenziós mértékcserén és egy kompaktsági lemmán alapul, a másik irány pedig a Parseval-egyenlőtlenségen.

Arbitrázs és árazás az idealizált modelleken túl

A szabványos modellek figyelmen kívül hagyják a piac *súrlódás*ait, azaz a különböző likviditási gondokat és a tranzakciós költségeket. A valóságot pontosabban leíró modellek vizsgálatával is foglalkoztam. A szabványos, súrlódásmentes modellekben (lásd [18]) az optimális befektetésekkel kapcsolatos problémák kulcsa gyakran nem a dinamikus programozás elve, hanem az ún. duális feladat vizsgálata. A kérdés most az, mik a duális objektumok (azaz árazó funkcionálok) tranzakciós költségek megléte esetén ?

Diszkrét idejű modellekben kielégítő eredményeket értek el [16], [15] és [32]: az arbitrázsmentesség arányos tranzakció költségek esetén (pl. a bróker részesedése mindig 1%) ekvivalens az ún. konzisztens árazási rendszerek létezésével (a [32] cikk által bevezetett terminológiával élve). A [15] cikk fő eredményére új bizonyítási módszert javasoltam [26]-ban.

Folytonos idejű modelleket vizsgáltunk arányos tranzakciós költségekkel kollégáimmal, Paolo Guasonival és Walter Schachermayerrel együtt. Sikerült duális változókat (=árazó funkcionálokat) konstruálnunk a [11] cikkben egy széles folyamatosztályra, mely tartalmazza például a geometriai frakcionális Brown-mozgást is. Eredményünk jelentős visszhangra talált, a [7] cikken kívül már legalább 3 kéziratos közlemény hivatkozik rá. Új modellekre is kiterjesztettük a diffúziós árfolyamatokra jól ismert állítást, hogy tranzakciós költségek esetén egy európai vételi opció csak triviális kereskedéssel szintetizálható (azaz meg kell venni az adott részvényt a kereskedési periódus elején), lásd pl. [33]. További ilyen irányú vizsgálatainkat tartalmazza a [12] cikk.

Mind [11], mind [12] magja egy direkt rekurzív konstrukció. Előnye, hogy igen általánosan működik, viszont nem szolgáltat analitikusan kezelhető folyamatokat (pl. sztochasztikus differenciálegyenletet).

A fentebb ismertetett programot az OTKA 2005-től 2008-ig támogatta. E kutatás gyümölcsei a [2], [3], [4], [9], [11], [12], [26], [27], [28], [29] cikkek, valamint a [5] még kéziratban lévő közlemény. Az OTKA támogatás lehetővé tette, hogy számos külföldi konferencián ismertessem ezeket az eredményeket és konzultáljak szakterületem külföldi művelőivel. Szeretném ez úton is kifejezni hálás köszönetemet.

Budapest, 2009. február 10. Rásonyi Miklós

Hivatkozások

[1] B. Bouchard. *Stochastic control and applications in finance.* PhD thesis, Université Paris 9, 2000.

[2] L. Carassus, M. Rásonyi: Convergence of utility indifference prices to the superreplication price. *Mathematical Methods of Operations Research*, vol. 64, 145–154, 2006.

[3] L. Carassus, M. Rásonyi: Optimal strategies and utility-based price converge when agents' preferences do. *Mathematics of Operations Research*, vol. 32, 102–117, 2007.

[4] L. Carassus, M. Rásonyi: Convergence of utility indifference prices to the superreplication price: the whole real line case. *Acta Applicandae Mathematicae*, vol. 96, 119–135, 2007.

[5] L. Carassus, M. Rásonyi: Risk-averse asymptotics for reservation prices. *Manuscript*, 2009.

[6] Cheridito, P. and Summer, Ch. Utility-maximizing strategies under increasing risk aversion. *Finance Stoch.*, 10, 147–158, 2006.

[7] A. Cherny: Brownian moving averages have conditional full support. *Ann. Appl. Probab.*, **18**, 1825–1830, 2008.

[8] F. Delbaen, P. Grandits, T. Rheinländer, D. Samperi, M. Schweizer, Ch. Stricker Exponential hedging and entropic penalties. *Math. Finance*, **12**, 99–123, 2002.

[9] L. Gerencsér, M. Rásonyi, Cs. Szepesvári, Zs. Vágó Logoptimal currency portfolios and control Lyapunov exponents. *Proceedings of the 44th Conference on Decision and Control, 12-15 December, Sevilla*, 1765–1769, 2005.

[10] Grandits, P. and Summer, Ch. Risk-averse asymptotics and the optional decomposition. *Theory Probab. Appl.*, **51**, 325–334, 2007.

[11] P. Guasoni, M. Rásonyi and W. Schachermayer: Consistent price systems and face-lifting pricing under transaction costs, *Annals of Applied Probability*, **18**, 491–520, 2008.

[12] P. Guasoni, M. Rásonyi and W. Schachermayer: The fundamental theorem of asset pricing for continuous processes under small transaction costs. *Forthcoming in Annals of Finance*, 2009.

[13] E. Jouini and C. Napp, Convergence of utility functions and convergence of optimal strategies, *Finance Stoch.* **8**, 133-144, 2004.

[14] Yu. M. Kabanov, D. O. Kramkov, Asymptotic arbitrage in large financial markets. *Finance Stoch.* **2**, 143–172, 1998.

[15] Kabanov, Yu. M. , Rásonyi, M. and Stricker, Ch. No-arbitrage criteria for financial markets with efficient friction. *Finance Stoch.*, **6**, 371–382, 2002.

[16] Kabanov, Yu. M. and Stricker, Ch. The Harrison-Pliska arbitrage pricing theorem under transaction costs. *J. Math. Econom.*, **35**, 185–196, 2001.

[17] C. Kardaras, G. Žitković. Stability of the utility maximization problem with random endowment in incomplete markets. *Preprint.* 2007. http://www.ma.utexas.edu/users/gordanz/publications/index.html

[18] D. Kramkov, W. Schachermayer. The condition on the Asymptotic Elasticity of Utility Functions and Optimal Investment in Incomplete Markets. *Annals of Applied Probability*, **9**, 904–950, 1999.

[19] R. Kucharski. Convergence of optimal strategies in a discrete time market with finite horizon. *Applicationes Mathematicae*, **33**, 85–93, 2006.

[20] R. Kucharski. Convergence of optimal strategies under proportional transaction costs. *Advances in mathematics of finance.* Ed. Lukasz Stettner, Banach Center Publications **83**, 183–193, 2008.

[21] K. Larsen. Continuity of utility-maximization with respect to preferences. *To appear in Mathematical Finance.* 2009. http://www.andrew.cmu.edu/user/kasperl/

[22] K. Larsen, G. Žitković: Stability of utility-maximization in incomplete markets. *Stochastic Processes and their Applications*, **117**, 1642–1662, 2007.

[23] M. Rásonyi: Equivalent martingale measures for large financial markets in discrete time. *Mathematical Methods of Operations Research*, vol. 58, 401–415, 2003.

[24] M. Rásonyi: Arbitrage pricing theory and risk-neutral measures. *Decisions in Economics and Finance*, vol. 27, 109–123, 2004.

[25] M .Rásonyi: Arbitrázs nagy pénzügyi piacokon. *SZIGMA*, vol. 35, 123–130, 2004.

[26] M. Rásonyi: New methods in the arbitrage theory of financial markets with transaction costs, *Séminaire de Probabilités XLI*, Lecture Notes in Mathematics **1934**, 455–462, Springer, Berlin, 2008.

[27] M. Rásonyi: A note on arbitrage in term structure. *Decisions in Economics and Finance*, **31**, 73–79, 2008.

[28] M. Rásonyi, L. Stettner: On utility maximization in discrete-time market models. *Annals of Applied Probability*, vol. 15, 1367–1395, 2005.

[29] L. Stettner, M. Rásonyi: On the existence of optimal portfolios for the utility maximization problem in discrete time financial market models. *In: "From stochastic calculus to mathematical finance- the Shiryaev Festschrift"*, Ed. Yu. M. Kabanov, R. Liptser, J. Stoyanov, 589–608, Springer, 2006.

[30] S. A. Ross: The arbitrage theory of asset pricing. *Journal of Economic Theory*, **13**, 341–360, 1976.

[31] R. Rouge, N. El Karoui. Pricing via utility maximization and entropy. *Math. Finance*, **10**, 259-276, 2000.

[32] Schachermayer, W. The fundamental theorem of asset pricing under proportional transaction costs in finite discrete time. *Math. Finance*, **14**, 19–48, 2004.

[33] Soner, H. M., Shreve, S. E., and Cvitanić, J. There is no nontrivial hedging portfolio for option pricing with transaction costs. *Ann. Appl. Probab.* **5**, 2, 327–355, 1995.