

Részletes összefoglaló a Tranziens kaotikus mozgások vizsgálata – gépészmérnöki alkalmazásokkal című, F049242 nyilvántartási számú kutatás eredményeiről

1 Bevezetés, előzmények

A kaotikus rezgések hirtelen megszűnése – az ún. tranziens káosz – a gépészmérnöki gyakorlat több területén is előfordulhat. A jelenség lefolyása nem jellemezhető a hagyományos csillapítási tényezőkkel: a rezgések amplitúdója a kaotikus szakaszban véletlenszerűen változik, majd váratlanul kialakul egy más jellegű, pl. periodikus mozgás, vagy a rezgések teljesen meg is szűnhetnek. Ennek az a magyarázata, hogy a mozgásegyenlet megoldásai ilyen esetekben nem egy kaotikus attraktorhoz, hanem egy ún. repellorhoz tartanak. A repellor végtelen sok instabil periodikus megoldásból álló bonyolult geometriájú alakzat, melyen belül a kialakuló megoldások véges ideig bolyonganak, mielőtt távoznak egy stabil megoldás felé. A kaotikus tranziensek időtartama véletlenszerűen változik, és érzékenyen függ a szerkezet kezdeti állapotától. Ezért a tranziens káosz várható élettartama csak statisztikai módszerekkel határozható meg. Az elterjedt módszerek azon a feltevésen alapulnak, hogy a t élettartamú kaotikus tranziensek előfordulásának valószínűsége exponenciálisan csökken a t idővel. Az exponensben az élettartam együtthatóját kiszökési rátának nevezik, és a kiszökési ráta reciprokát tekintik a tranziens káosz várható élettartamának.

A beszámolási időszakban három témakörrel foglalkoztam: 1) káosz digitális szabályozású rendszerekben 2) száraz súrlódású oszcillátorok periodikus mozgásai 3) kaotikus forgácsolás. A digitális szabályozás és a forgácsolás esetében a folyamatok kaotikus voltának a bizonyításával és a tranziens káosz élettartamának becslésével kapcsolatosak az eredményeim. A száraz súrlódású oszcillátorok vizsgálata során nem volt kimutatható kaotikus vagy tranziens kaotikus megoldás, viszont a periodikus megoldásokkal kapcsolatban értékes eredmények születtek. Távlati célom a szabályozott fékberendezések vizsgálata, melynek kapcsán a digitális szabályozással és a száraz súrlódással kapcsolatos eredményeim összekapcsolódnak.

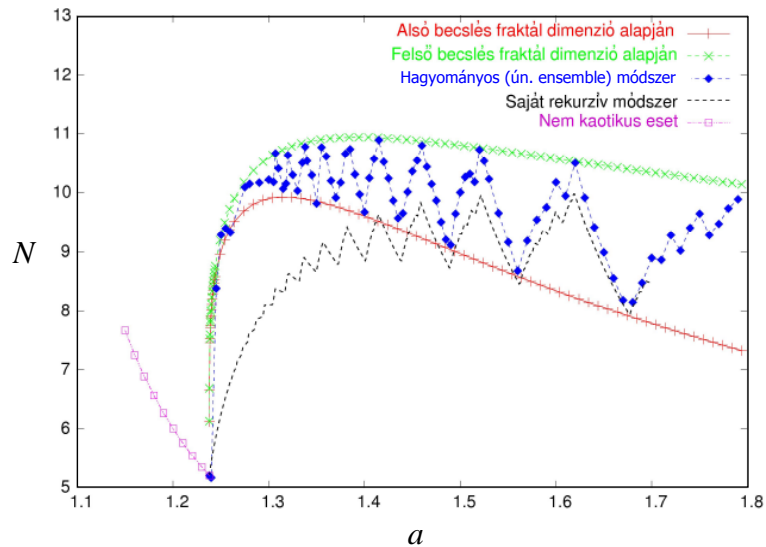
2 Digitális szabályozásokkal kapcsolatos leképezések vizsgálata

A mikro-káosz leképezés digitálisan szabályozott rendszerek egyszerű modelljének tekinthető. Különböző változataival figyelembe vehető mindhárom digitális hatás: a mintavételezés, a kerekítés és a feldolgozási időkéésés. A leképezés egydimenziós változatának alakja a következő:

$$x_{j+1} = \begin{cases} ax_j - b \operatorname{int}(x_j) - S, & \text{ha } S/a < x_j \\ 0, & \text{ha } -S/a \leq x_j \leq S/a \\ ax_j - b \operatorname{int}(x_j) + S, & \text{ha } x_j < -S/a \end{cases}$$

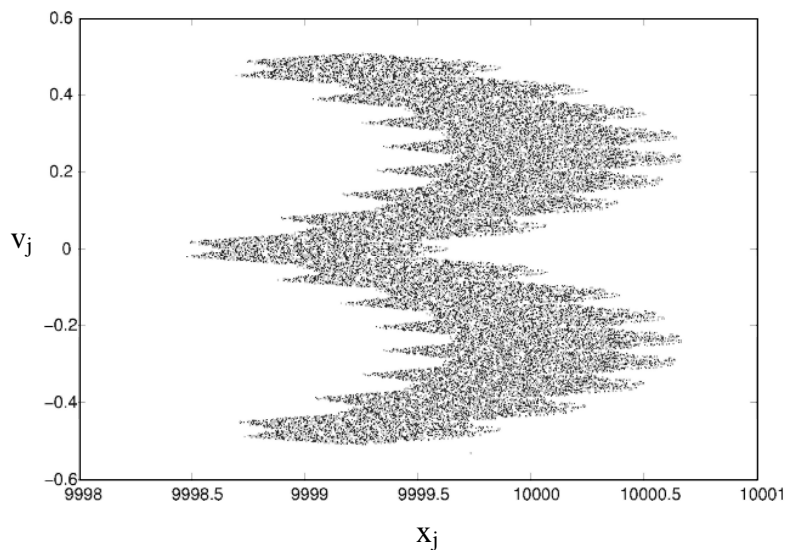
Itt a , b és S a három paraméter, x_j pedig a dimenziótlan sebesség a j -edik mintavételezési időpontban. S a száraz (Coulomb) súrlódási erőnek felel meg, melynek hatására a kaotikus rezgések időtartama véges. A leképezés vizsgálata során kiderült, hogy célszerű bevezetni az S paraméter helyett az $I_0 = Sa/(a-1) - (a-b)$ paramétert, mely annak az intervallumnak a mérete, melyen keresztül eltávoznak a megoldások a repellorból. Az egészrész képzés a kerekítés

hatását veszi figyelembe, az időkést itt elhanyagoltuk. Ennek a leképezésnek a vizsgálata során a tranzien káosz élettartamát becselő rekurzív módszeremet pontosítottam és kibővítettem érvényességi tartományát [1]. Kidolgoztam egy olyan eljárást is, ami az élettartam meghatározását a fraktáldimenzió meghatározására vezeti vissza [2]. A két módszer összehasonlítása során egy olyan példát találtam, ahol a hagyományos eljárások relatív hibája – ezeken alapul a fraktáldimenzióval kapcsolatos módszerem is – közel száz százalék is lehet, míg rekurzív módszerem hibája elhanyagolható marad (1. ábra) [3]. Az eredmények alapján a tranzien káoszt jellemző exponenciális kiszökési ütem beállási idejére is lehet következtetni, mert egy nagyobb fraktáldimenziójú objektumban a megoldások hamarabb eljutnak a kaotikus repellorhoz.



1. ábra. A tranzien káosz várható időtartamának (az N lépésszámnak) becslése különböző módszerekkel az egydimenziós mikro-káosz leképezés esetében, az a paraméter függvényében. ($b = 1.3, I_0 = 0.25$)

A beszámolási időszak második évétől a mikro-káosz leképezés realisabb, kétdimenziós modelljeivel foglalkoztam. Először egy PD szabályozót vizsgáltam, az időkést figyelembe vétele nélkül. Numerikusan megmutattam, hogy ennek a modellnek is vannak kaotikus megoldásai és megvizsgáltam a különös attraktor szerkezetét (2. ábra).

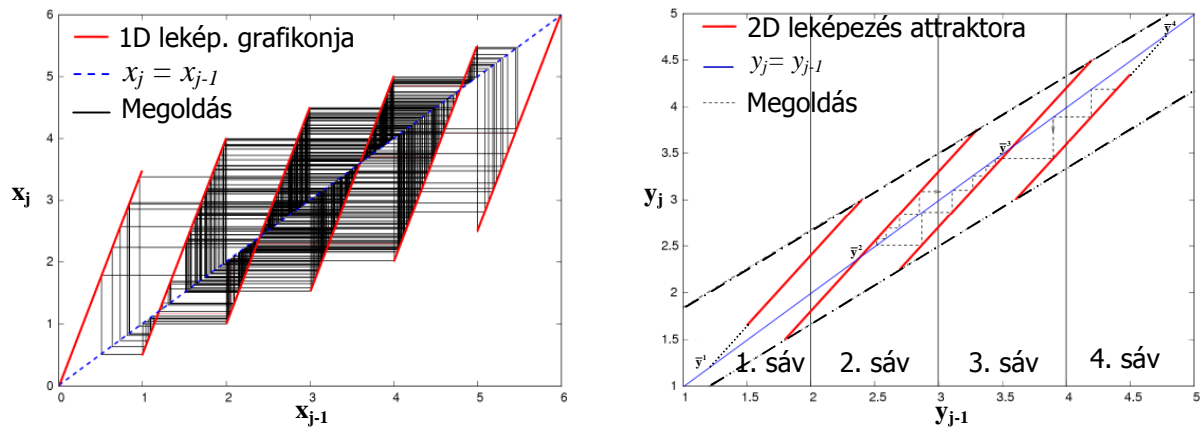


2. ábra. A PD szabályozás kapcsán levezetett mikro-káosz leképezés attraktora egy kísérletben korábban vizsgált paraméterállás esetén

Ún. differenciális (D) szabályozás és feldolgozási időkézés figyelembe vételével is kétdimenziós leképezésre jutunk, mely száraz sűrűlódás jelenlétében a következő alakú:

$$y_{j+1} = \begin{cases} 0 & \text{ha } |ay_j - b \text{Int}(y_{j-1})| \leq S \\ ay_j - b \text{Int}(y_{j-1}) - S \text{ sgn}(y_j) & \text{egyébként} \end{cases}$$

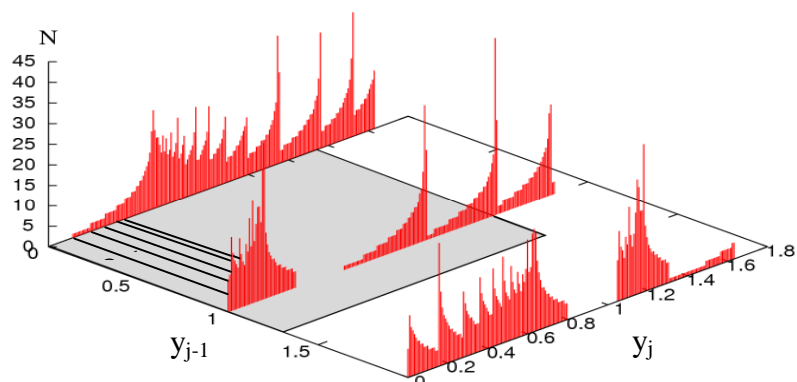
Rámutattam az így kapott leképezés és az egydimenziós mikro-káosz leképezés közti hasonlóságokra (3. ábra), amit felhasználva matematikailag bebizonyítottam, hogy ez a leképezés is kaotikus egyes jól meghatározott paraméter tartományokban [4].



3. ábra. Az egydimenziós leképezés grafikonja és a D szabályozással kapcsolatos kétdimenziós leképezés attraktora párhuzamos, a meredekségű szakaszokból áll.

Száraz sűrűlódás figyelembe vétele mellett egy egyszerű esetben meghatároztam a tranzien káosz átlagos időtartamát a korábbi rekurzív módszerem továbbfejlesztett változatával [5]. A 4. ábrán a kiszökéshez szükséges lépésszámot ábrázoltam az $(y_{j-1}; y_j)$ sík egyes tartományain. A módszer ezeknek a lépésszámoknak a súlyozott átlagát számolja.

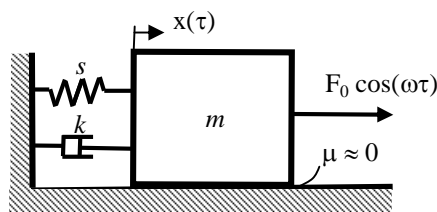
A digitális szabályozás témakörével kapcsolatban rövid ismeretterjesztő cikket írtam [6], és a kétdimenziós mikro-káosz leképezésekkel kapcsolatos eredményeket bemutató folyóiratcikkek készítése is folyamatban van [7,8].



4. ábra. A kiszökéshez szükséges lépésszámok. Az $y_{j-1} = 0$ és $y_{j-1} = 1$ egyeneseken ábrázolt értékek az egész $y_{j-1} \in [0,1)$ illetve $y_{j-1} \in [1,2)$ intervallumban érvényesek. A szürkével sátozott téglalap tartalmazza a repellort.

3 Száraz súrlódású oszcillátor vizsgálata

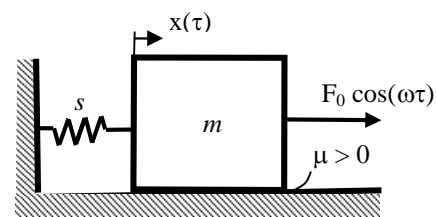
A viszkózus csillapítású, harmonikusan gerjesztett lineáris oszcillátor mozgásegyenlete és annak megoldása régóta jól ismert, az egyetemi tananyag részét képezik ezek az ismeretek (5/a ábra). Azonban ha a viszkózus csillapítás helyett száraz (Coulomb) súrlódást alkalmazunk (5/b ábra), a mozgásegyenlet a signum függvény miatt erősen nemlineárisává válik – ebben az esetben csak speciális megoldások találhatók analitikus módszerekkel. A rendszer numerikus és analitikus vizsgálatát különösen megnehezíti, hogy a súrlódás következtében a rezgő test időnként hosszabb-rövidebb ideig megállhat, letapadhat. A szakirodalomban általános volt az a vélekedés, mely szerint ennek a rendszernek a nem letapadó periodikus megoldásai időben és térben is szimmetrikusak, tehát a mozgás pozitív- és negatív sebességű fázisai ugyanakkora ideig tartanak és ugyanakkora a maximális kitérés is mindkét irányban [9,10,11].



$$\ddot{x} + 2D\alpha\dot{x} + \alpha^2 x = f_0\alpha^2 \cos(\omega\tau)$$

$$\Rightarrow x_p = A\cos(\omega\tau - \vartheta)$$

5/a. ábra. A viszkózus csillapítású harmonikusan gerjesztett oszcillátor mechanikai modellje, mozgásegyenlete és annak stacionárius megoldása



$$x'' + x = \cos(\Omega(t + t_0)) - S \operatorname{sgn}(x')$$

5/b. ábra. A száraz súrlódású oszcillátor mechanikai modellje és dimenziótlan mozgásegyenlete.

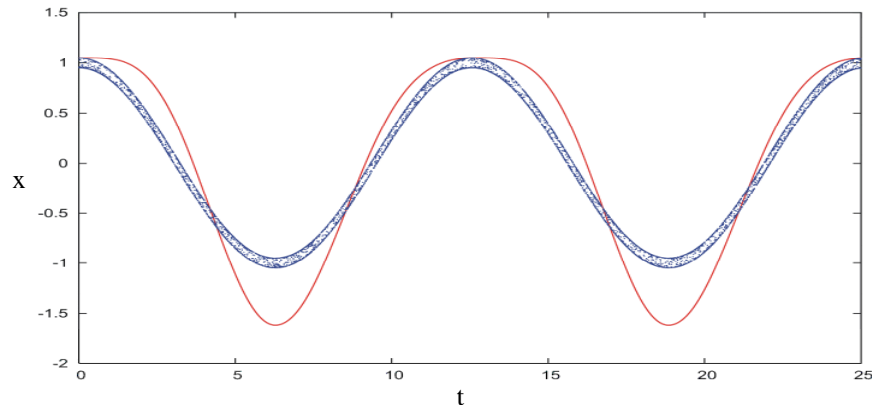
Évekkel ezelőtt felfigyeltem arra, hogy a fent említett szimmetriatulajdonság matematikailag nincs bizonyítva. A beszámolási időszakban bebizonyítottam, hogy a nem letapadó, $2\pi/\Omega$ - periodikus megoldások valóban tipikusan szimmetrikusak ha a periódus egy-egy negatív illetve pozitív sebességű szakaszból áll [12] (itt Ω a gerjesztés körfrekvenciája). S -el jelölve a súrlódási erő maximumának és a gerjesztő erő maximumának hányadosát, az amplitúdó:

$$x_0 = x_{\max} = \sqrt{\frac{1}{(\Omega^2 - 1)^2} - \frac{S^2 \sin^2(\frac{\pi}{\Omega})}{\Omega^2 (1 + \cos(\frac{\pi}{\Omega}))^2}}$$

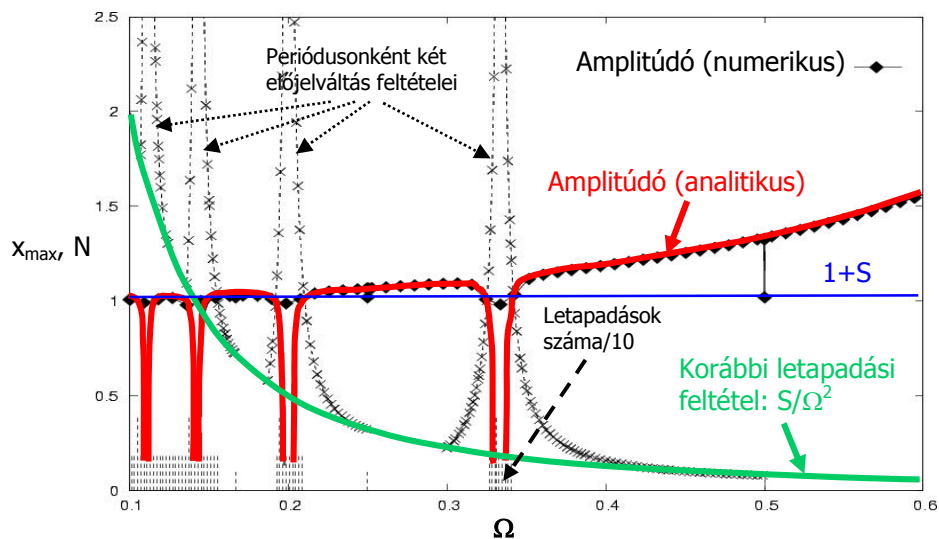
Azonban arra is rámutattam, hogy a szakmai közvélekedéssel ellentétben egyes speciális esetekben – amikor a gerjesztési frekvencia a sajátfrekvencia fele, negyede, hatoda, stb.–, aszimmetrikus megoldások is előfordulhatnak [13]. Az aszimmetrikus megoldások stabilitását nemlineáris stabilitás analízissel vizsgáltam és kimutattam, hogy a fent említett frekvenciák mellett kontinuum sokaságú, a stabilitás határán levő aszimmetrikus megoldás létezik egyszerre [13]. A 6. ábrán egy ilyen aszimmetrikus megoldás látható, mely éppen érinti a letapadási tartomány határát.

Az analitikus módszerekkel talált megoldásfüggvények esetében ellenőrizni kell, hogy valóban megfelelnek-e a megoldással szemben támasztott feltevéseknek. Esetünkben a feltevések a következők: a keresett megoldás periodikus, nem letapadó, és egy periódus alatt kétszer változik a sebesség előjele. A szakirodalomban e három feltétel közül csak az első

kettő ellenőrzésére láttam példát [9,10]. Megmutattam, hogy a harmadik feltétel ellenőrzése is fontos, sőt, ez a letapadási feltételnél erősebb feltételt jelent [12]. Az eredmények alapján egy egyszerű, gyakorlatban is használható közelítő letapadási formulát vezettem le: ha a megoldásfüggvényből kapott amplitúdó $1+S$ -nél kisebb, akkor letapadás következik be, tehát a megoldásfüggvény az adott paraméternél már nem érvényes (7. ábra) [12]. Eredményeimet kiterjesztettem $T = k \cdot 2\pi/\Omega$ -periodikus megoldásokra, és kimutattam további aszimmetrikus megoldások létezését is [14].



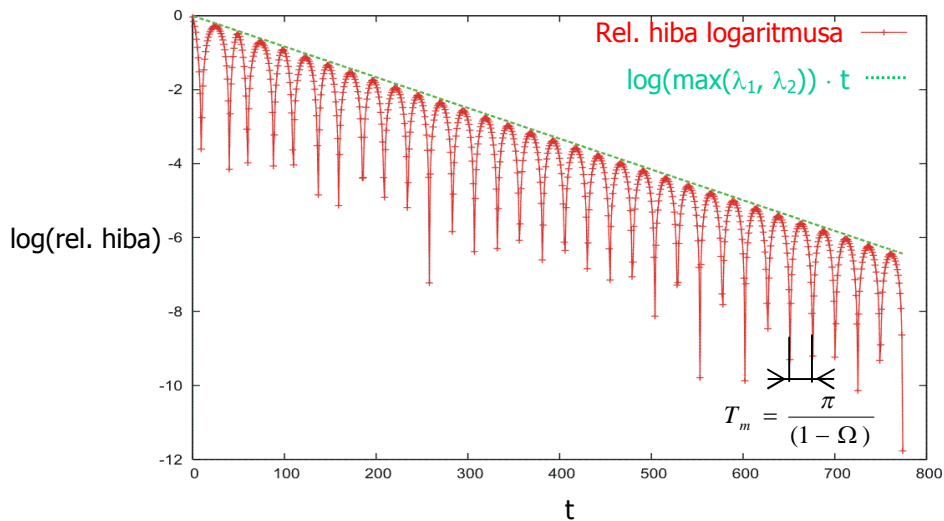
6. ábra. Aszimmetrikus megoldás $\Omega = 0.5$ és $S = 0.05$ esetén.



7. ábra. Az amplitúdó és a letapadások száma a gerjesztési frekvencia függvényében, $S = 0.05$ esetén. A szakirodalomban elfogadott $x_{\max} < S/\Omega^2$ letapadási feltételnél erősebb a periódusonként két előjelváltást előíró feltétel: $\Omega = 1/3$ ill. $\Omega = 1/5$ körül már akkor is előfordulhat letapadás amikor $x_{\max} > S/\Omega^2$. A javasolt letapadási feltétel: $x_{\max} < 1+S$. Jól látható az aszimmetrikus megoldás megjelenése $\Omega = 1/2$ -nél és $\Omega = 1/4$ -nél.

Egy száraz súrlódásos rendszerek numerikus vizsgálatával foglalkozó cikkben [11] hibát találtam: a szerzők rosszul választották meg a numerikus szimuláció időtartamát. A hiba okait elemezve kimutattam, hogy a vizsgált paramétertartományokban a jól ismert képlet alapján várt periódusidőnél rövidebb – pontosan fele akkora – periódusú lebegések fordulnak elő, mert a sebesség előjelváltásaikor hirtelen megváltozik a rezgés fázisa (4. ábra) [12].

Az akadozó csúszás kísérleti vizsgálatával kapcsolatos munka elkezdődött. Ennek során egy korábban elkészült eszközhöz új, pontosabb pozícióérzékelő berendezés készült. Sajnos a kísérletek tervezett helyszínének, a BME Műszaki Mechanikai Tanszék műhelyének az átalakítási munkálatai miatt a kísérletek elvégzésére még nem került sor.



8. ábra. Numerikus szimuláció során a relatív hiba nem egyenletesen csökken, de exponenciális burkoló görbe illeszthető rá. A tapasztalt lebegés periódusideje fele a várt periódusnak.

4 Marás és esztergálás nemlineáris vizsgálata

A forgácsolás folyamatának szabatos elméleti leírása elengedhetetlen a megmunkáló technológiák fejlesztéséhez. A nagy alakváltozással járó technológiákra általában jellemző, hogy a deformáció egy vagy több nyírési sávba koncentrálódik. Dr. Pálmai Zoltán (COGITO Rt.) egy ötdimenziós kontinuummechanikai modellt állított fel a forgácsolás leírására. A modellben két képlékeny deformációs sávot és egy hővezetési sávot különített el és a konstitutív egyenlet felírása során figyelembe vette a termikus lágyulást. A változók e három zóna hőmérséklete és a deformációs sávokban ébredő csúsztatófeszültségek voltak. A kapott egyenletrendszer a következő:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\tau}_1 &= p \cdot [1 - (F_1 + F_2)] \\ \dot{\tau}_2 &= 1 - (F_1 + F_2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \tau_1 = p \tau_2 + s$$

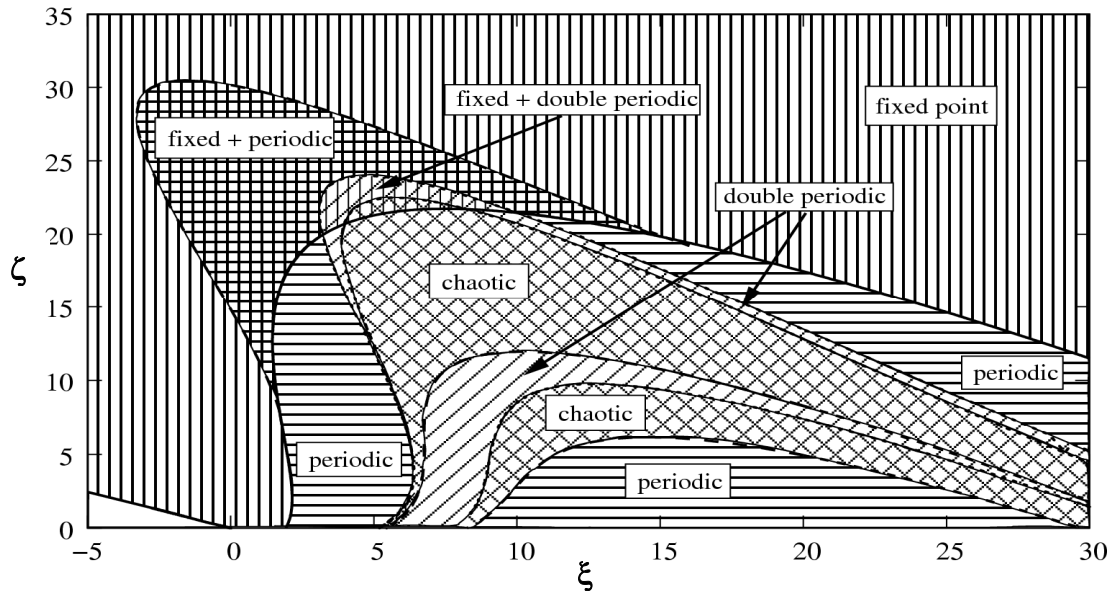
$$\dot{T}_0 = \zeta \cdot (T_1 - 2T_0) - \xi \cdot T_0$$

$$\dot{T}_1 = \eta \cdot \tau_1 \cdot F_1 - \zeta \cdot (2T_1 - T_2 - T_0) - \xi \cdot (T_1 - T_0)$$

$$\dot{T}_2 = \eta \cdot \tau_2 \cdot F_2 - (\xi + \zeta) \cdot (T_2 - T_1)$$

Rámutattam, hogy az egyik csúsztatófeszültség egy algebrai egyenleten keresztül kifejezhető a másik sávban ébredő csúsztatófeszültség segítségével, tehát a modell helyettesíthető egy ekvivalens négydimenziós modellel, melynek vizsgálata sokkal egyszerűbb. Az egyenletek megoldásainak struktúráját bifurkációs analízis segítségével térképeztem fel. Ehhez az első lépésben stabil egyensúlyi megoldásokat – folyóforgács keletkezésének megfelelő stabil fixpontokat – kerestem numerikus szimulációval az ausztenites acél forgácsolására jellemző paraméterértékek mellett. A fixpontok koordinátái alapján az AUTO nevű bifurkációs program segítségével meghatároztam, hogy egy kiválasztott paraméter változtatása során hogyan mozdulnak el a fixpontok. Ezen kívül a bifurkációs pontokat is megkereste a program, tehát azokat a paraméter értékeket, ahol a megoldás jellege megváltozik. A detektált bifurkációs pontok adataiból következtetni lehet

arra, hogy mely paraméterek mellett fordulhat elő kaotikus viselkedés. Megmutattam, hogy a perióduskettőző bifurkációk az ún. Feigenbaum-sorozat szerint követik egymást, és ezzel lehetőség nyílt a kaotikus viselkedés tartományának nagy pontosságú behatárolására [15]. Az egyparaméteres bifurkációs vizsgálat eredményeit felhasználva kétparaméteres bifurkációs vizsgálatot is végeztem, ennek eredménye látható a 9. ábrán.



9. ábra: Lehetséges megoldástípusok a ξ - ζ paraméter síkon

A függőlegesen csíkozott tartományban stabil fixpont, a vízszintesen csíkozott részen pedig stabil periodikus megoldás létezik. Az ennek megfelelően rácozott tartományban pedig mindkét megoldás típus megvalósulhat. A ferdén rácozott tartományban kaotikus és hosszú periódusú megoldások vannak.

A bifurkációs vizsgálat ugyan egyértelműen arra utal, hogy a bejelölt tartományban kaotikus megoldásokat találunk, de ezt mégsem tekinthetjük bizonyítottnak. A kaotikus viselkedés bizonyítása érdekében idősor analízist is végeztem. Ehhez numerikus szimuláció szolgáltatotta a kiindulási adatokat. A trajektóriából Poincaré-metszetet készítettem $T_0 = 0,1$ -nél, és az így kapott egymás utáni τ_2 értékeket ábrázolva egydimenziós leképezést kaptam, mely már alkalmas volt a további vizsgálatokra. A τ_2 változó egymás utáni értékeit a TISEAN nevű programcsomaggal dolgoztam fel, ami többek között azt méri, hogy egymáshoz közeli kezdeti feltételekből kiinduló megoldások milyen ütemben távolodnak. A távolodási ütem logaritmusát ábrázolva és a görbékre egyenest illesztve eldönthető, hogy a távolodás exponenciális ütemű-e, és ebben az esetben meghatározható a kaotikus rendszereket jól jellemző ún. Ljapunov-exponens, mint az egyenes meredeksége. A vizsgált esetekben elhanyagolható hibával lehetett egyenest illeszteni a kapott adatokra, amiből következik, hogy a szóban forgó megoldások kaotikusak [15,16].

Az összefoglalóban hivatkozott publikációk:

[1] Csernák Gábor, Stépán Gábor: Life Expectancy of Transient Microchaotic Behaviour, *Journal of Nonlinear Science*, **15**(2), pp. 63-91, 2005 (Impakt faktor: 1.615)

[2] Csernák Gábor, Stépán Gábor: Quick Estimation of Escape Rate with the Help of Fractal Dimension, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **11**(5), pp. 595-605, 2006.

- [3] Csernák Gábor: Transient Chaos: Mean Lifetime Versus Escape Rate, XXV. Dynamics Days Europe, Berlin, 2005
- [4] Csernák Gábor, Stépán Gábor: Sometimes Digital Control Leads to Chaos, *Proceedings of the 14th International Congress on Sound and Vibration*, CD-ROM/429, 8 pages, ICSV14, Cairns, Australia, 2007
- [5] Csernák Gábor, Stépán Gábor: Life Expectancy Calculation of Transient Chaos in the 2D Micro-chaos Map, *Periodica Polytechnica*, Mechanical Engineering, 2008, (elfogadva)
- [6] Csernák Gábor: Jó artista lenne-e egy robot?, *Interpress Magazin*, **6/8**, pp. 5, 2007
- [7] Csernák Gábor, Stépán Gábor: Digital Control as Source of Chaotic Behaviour (előkészületben)
- [8] Csernák Gábor, Stépán Gábor: Micro-chaotic Behaviour in a PD-controlled Mechanical System (előkészületben)
- [9] S.W. Shaw: On the Dynamic Response of a System with Dry Friction, *J. of Sound and Vibration*, **108**, 305-325, 1986
- [10] H-K. Hong, C-S. Liu: Coulomb Friction Oscillator: Modelling and Responses to Harmonic Loads and Base Excitations, *J. of Sound and Vibration*, **229**, 1171-1192, 2000
- [11] H-K. Hong, C-S. Liu: Non-Sticking Oscillation Formulae for Coulomb Friction Under Harmonic Loading, *J. of Sound and Vibration*, **244**, 883-898, 2001
- [12] Csernák Gábor, Stépán Gábor: On the Periodic Response of a Harmonically Excited Dry-friction Oscillator, *J. of Sound and Vibration*, **295**, pp. 649-658, 2006 (impakt faktor: 0.828)
- [13] Csernák Gábor, Stépán Gábor, S.W. Shaw: Sub-harmonic Resonant Solutions of a Harmonically Excited Dry-friction Oscillator, *Nonlinear Dynamics*, **50**, pp. 93-109, 2007 (Impakt faktor: 0.774).
- [14] Csernák Gábor, Stépán Gábor: Symmetric and Asymmetric Motions of a Harmonically Driven Dry-friction Oscillator, *Proceedings of the Fifth EUROMECH Nonlinear Dynamics Conference*, CD-ROM/01-258, ENOC-2005, Eindhoven, 2005
- [15] Pálmai Zoltán, Csernák Gábor: Káoszjelenségek a fémek gyors képlékeny deformációjánál (a forgácsolás példáján), *Gépgyártás*, 46/3, pp. 19.24, 2006
- [16] Csernák Gábor, Pálmai Zoltán: Exploration of the chaotic phenomena induced by fast plastic deformation of metals, *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 2008 DOI: 10.1007/s00170-007-1348-6, (elfogadva, impakt faktor: 0.418).