A projekt támogatásával a négy résztvevő 2005. január 1. és 2008. december 31. között mintegy félszáz tudományos közleményt készített és mintegy százhúsz nemzetközi konferencia (workshop, stb.) illetve szemináriumi (egyetemi, kutatóhelyi meghívott) előadást tartott. A projekt előzetes tervében – illetve a szerződéskötés során az eredeti tervet G. Horváth Ágota csatlakozásával összefüggésben kibővíts szerződésben és munkatervben – szereplő témák, feladatok túlnyomó többségében a tervezettnél tovább sikerült eljutni, ezen felül számos, előre nem látott illetve tervezett kérdésben értünk el kutatási eredményeket. A kutatások eredményeinek többsége nemzetközi folyóiratokban jelent meg ill. van elfogadva, emellett néhány témában a publikálás még nem történt meg illetve kézirat, preprint, benyújtott cikk áll csak még rendelkezésre.

Pozitív, illetve pozitív és pozitív definit függvények kúpjának leírása. A folytonos periodikus függvények C terében a pozitív és pozitív definit függvények egy K kúpot alkotnak. A kúp Choquet tétele szerint előáll, mint extremális elemeinek lineáris (integrál) kombinációja. Ezeket az extremális sugarakat vizsgáltuk a kúpban [33]. Megmutattuk, hogy néhány természetes módon fölvetődő sejtés nem teljesül, ugyanakkor konstruáltunk több extremális családot. Többek közt karakterizáltuk a 4-edfokú Hermite polinomok között a K-beli elemeket, és azt is beláttuk, hogy tetszőleges magas fokszám mellett van Hermite polinom extremális sugár. Így többek között megcáfoltuk azt a Choquetnak tulajdonított sejtést, hogy csak a Gauss függvények lehetnek extremálisok. A függvény és Fourier-transzformáltjának gyökeiről állapítottunk meg további összefüggéseket K-beli elemekre.

Legyen H egy kompakt részhalmaz a valós egyenesen. A polinomok illetve a folytonos függvények terén a H-n vett maximum normával és a H-n vett pozitivitás által indukált részben rendezéssel Banach háló struktúrát kapunk. Kérdés, hogy a legfeljebb n-dimenziós polinomok véges dimenziós vektorterében van-e olyan bázis, amelynek elemei pozitívak, és a pozitív elemek kúpja éppen a báziselemek nemnegatív együtthatós lineáris kombinációval írható le? Általában a válasz nemleges. Meghatároztuk a maximális dimenziós alteret, amelyben még ilyen pozitív bázis megadható: a válasz a H kompakt halmaz topológiai tulajdonságaitól függ [25].

Turán féle extremális probléma. A Turán-féle extremális problémában Mihalis Kolountzakissal közösen több becslést dolgoztunk ki amelyek az euklideszi térben tekintett alaphalmaz olyan strukturális tulajdonságait használják, minthogy a halmaz spektrális, vagy diszjunkt pakolása van egy adott eltoláshalmazzal, illetve parkettáz. Lényeges, hogy módszereink az alaphalmaznak kevésbé geometriai, és inkább Fourier-analitikus jellemzőivel mûködnek. Eredményeink messzemenően általánosítanak több korábbi eredményt, illetve meglepően éles eredményeket adnak több speciális esetben. Az eredményeket számos - önmagában sem triviális - példa kidolgozásával elemeztük illetve hasonlítottuk össze.

Az ún. pontonkénti Turán problémára vonatkozó extremális kérdésről igazoltuk, hogy az akár többdimenziós tóruszon vagy Euklideszi térben is ekvivalens egy megfelelő Caratheodory-Fejér féle problémával. Ez összefügg Boas-Kac egy korábbi cikkével és több új esetben lehetőséget ad az extremális érték meghatározására, illetve visszaadja az összes korábban ismert eredményt is.

Az ún. egyenletes aszimptotikus felső sûrûség fogalmának a lokálisan kompakt Abel csoportok általánosságában is mûködő újszerû értelmezésével a Turán problémával kapcsolatban ki tudtunk terjeszteni egyes eredményeket ebbe az általánosságba is.

Landau probléma. Feldolgoztuk a Landau féle extremális problémában ismert eredményeket, illetve ezeknek több, a dualitás segítségével megfogható ekvivalens értelmezését is leírtuk. Ez lehetővé teszi újabb megközelítések alkalmazását, más jellegû konstrukciók kipróbálását az egyes konkrét extremális konstansok becslésére.

Banach sűrűség. Konstrukciót adtunk tetszőleges lokálisan kompakt Abel-csoporton az egyenletes aszimptotikus felső sûrûség definiálására, megmutatva, hogy az általános konstrukció az euklideszi térben a szokásos fogalmat adja vissza. Ez a konstrukció azért fontos, mert a fogalom kiterjesztésével valószínûleg több, ezt a fogalmat használó eredmény - pl. Turán probléma, differenciahalmazok különböző struktúrális tulajdonságai, megállási idő az iterált differenciaképzésre stb. - általános vizsgálata válhat lehetővé. Kidolgoztuk a lokálisan kompakt Abel csoportokra annak a tételnek a kiterjesztését, hogy ha egy H halmaz egy ρ aszimptotikus egyenletes felső sûrûségû Λ eltolás-halmazzal pakolást valósít meg, akkor $\Omega = H - H$ Turán-konstansa legfeljebb $1/\rho$. (Ezek az eredmények egyelőre kéziratban illetve előadás anyagokban vannak meg.)

Idempotens polinomok. Idempotens, azaz csupa 0-1 együtthatós exponenciális polinomok értékeinek koncentrációját vizsgálva beláttuk [3], hogy bármilyen kis pozitív mértékû E halmazon bármilyen $p > 1/2$ mellett az L^p normában ill. metrikában koncentrálódhatnak egy alkalmas f idempotens polinom által felvett értékek, azaz $|f|^p$ integrálja pozitív %-ban E-re esik. Továbbá hacsak p nem páros egész, akkor ez tetszőleges nagy hézagosság mellett is megtörténik, és ezen belül $p > 1$ esetén a koncentráció maximális, azaz tetszőlegesen közel lehet 1-hez. Ha p páros egész, akkor a koncentráció legjobb konstansa 0.483 és 0.5 között helyezkedik el, kivéve $p = 2$-re, ahol már korábbról ismeretes volt, a konstans 0.463... pontos értéke. Az eredmények sok kérdést teljesen tisztáztak, ugyanakkor megcáfolták Ash, Anderson, Jones, Rider és Saffari sejtését, akik L^1-ben és $p < 1$-re már nem vártak koncentrációt. A bizonyítás módszere, konstrukciója több új elemet tartalmaz: többek között kidolgozza a Hardy-Littlewood majoráns problémával kapcsolatos Montgomery-sejtés Mockenhaupt-Schlag féle megoldásának kétváltozós analogonját, az így konstruált polinomokkal Riesz-szorzatokon keresztül 1/2-ben maximálisan koncentrálódó polinomokat konstruál, majd ezek segítségével diszkretizálja az eredeti kérdést és végül egy megfelelő szorzat-konstrukcióval mutatja meg a koncentrációt.

További munkánkban [4] B. Green és S. Konjagin egy eredményének segítségével beláttuk, hogy Anderson et. al. sejtésének megfelelője véges csoportokon már teljesül: $p = 1$-re $\mathbb{Z}_q$-ban egyenletesen már nincs koncentráció. Ugyanakkor azt is megmutattuk, hogy a tóruszon $p = 1$-re a koncentráció még mérhető halmazokra és nagy hézagokkal is eléri a 0.96-os értéket. Ugyancsak konstruáltunk [2] olyan függvényeket, amelyek $p \neq 2\mathbb{N}$-re egyszerre adnak közös ellenpéldát Wiener és Zygmund egy-egy problémájában: nagy hézagok és pozitív együtthatók mellett egy tetszőlegesen előírt, akár $1 - \varepsilon$ mértékû mérhető E halmazon $L^p(E)$-be tartoznak, de mégsem esnek $L^p(\mathbb{T})$-be.

Additív számelmélet csoportokon; Periodikus felbontás . Összeghalmazok számosságára bizonyítottunk egy szuperadditivitási és egy szubmultiplikativitási egyenlőtlenséget [26]. A szubmultiplikativitás tetszőleges kommutatív félcsoportban teljesül, míg a szuperadditivitás csak torziómentes kommutatív csoportokban.

Farkas Bálinttal közösen azt vizsgáltuk meg [20], hogy ha egy absztrakt téren egymással felcserélhető, de egyébként tetszőleges transzformációk hatnak, akkor mi a szükséges és illetve elégséges feltétele annak, hogy egy függvény az egyes transzformációkra nézve invariáns függvények összegeként előállítható legyen. E munka folytatásaképpen invertálható transzformációkra további eredményeket kaptunk Farkas Bálinttal, Keleti Tamással és Harangi Viktorral közösen [18]. Speciálisan megmutattuk, hogy Abel csoportokon az egyes elemekkel való eltolásokra, mint transzformációkra igaz, hogy ha van egy egész értékû függvénynek periodikus felbontása valós értékû függvényekre, akkor van ugyanilyen periódusokkal periodikus felbontása egész értékû függvényekre is.

Beurling prímek. Explicit gyökmentes tartományt bizonyítottunk Beurling zeta függvényekre, azon feltevés mellett, hogy ha a Beurling egészek száma $O(x^a)$ alakú hibatag pontossággal ismert valamilyen a<1 paraméter-érték mellett.

A Beurling prímek eloszlásának vizsgálata során arra az eredményre jutottunk, hogy több, a zeta függvény gyökeinek eloszlására vonatkozóan klasszikusan ismert sûrûségi tétel illetve becslés átvihető a Beurling zeta függvényekre is. (Kéziratban.) Ettől azt reméljük, hogy a prímszámformula hibatagjának nagyságrendje illetve oszcillációja és a Beurling zeta függvény gyökmentes tartománya közötti pontosabb összefüggés leírását teszi majd lehetővé.

Gömb elhelyezések Euklideszi térben. Ha az n pozitív egész kielégít bizonyos számelméleti feltételeket, akkor G. Wegner 1986-ban meghatározta n egységkör legsûrûbb elhelyezéseit a körök konvex burkára vonatkozóan. Azt könnyű látni, hogy végtelen sok n kielégíti a feltételt, de az sem volt ismert, hogy a megfelelő n-nek halmaza pozitív sűrűségű-e. Az OTKA projekt keretében sikerült megmutatni [5], hogy a pozitív egészek 94 %-a kielégíti a feltételt.

Gömb elhelyezések hiperbolikus térben. Hiperbolikus térben még a gömbelhelyezések sűrűségének definíciója is egy 50 éve nyitott probléma volt, és 2000-ig az egyedüli ismert eset a periodikus elhelyezéseké volt. Néhány éve Bowen és Radin javasolt egy sűrűségfogalmat, mely bizonyos nagyon speciális elhelyezésekre működik. Nekünk sikerült az elhelyezések teljes családját magában foglaló sűrűségfogalmat találni, továbbá Fourier analízis és a félig egyszerű csoportok ergod-elméletének segítségével sikerült igazolni, hogy a sűrűségfogalom az elvárt értéket szolgáltatja a periodikus elhelyezések esetén. (Kéziratban.)

További Geometriai eredmények. Ismert, és a szférikus harmonikusok, ill a Radon transzformáció alaptulajdonságaiból következik, hogy egy, az origóra csillagszerű és szimmetrikus testet meghatároznak az origón átmeno hipersíkmetszetek területei. Ifj. Böröczky K. és R. Schneider Fourier analízis segítségével megmutatták, hogy a metszetek területei és súlypontjai a nem szimmetrikus esetben is meghatározzák a testet, továbbá a rekonstrukciós probléma stabilitására is sikerült becslést adniuk [6].

Adott d dimenziós euklideszi térben tetszőleges egynél nagyobb r számra olyan poliédereket tekintettünk, melyek tartalmazzák az origó közepű egységgömböt, és csúcsaik legalább r távolságra vannak az origótól. Molnár József egy negyven éves sejtését igazolva beláttuk, hogy ha a dimenzió három, és r értékét megfelelően választjuk, akkor a szabályos oktaéder, illetve a szabályos ikozaéder jellemezhető, mint a minimális térfogatú, vagy minimális felszínű fenti tulajdonságú poliéder. Továbbá bármely dimenzióban tekintettük a fenti tulajdonságú poliéder minimális térfogatának és az egységgömb térfogatának különbségét r függvényeként. Erre a függvényre sikerült aszimptotikus formulát igazolni, ha r tart 1-hez. Az aszimptotikus formulát a minimális felszín és minimális átlagszélesség esetében is sikerült igazolni [7], [8], [9], [10].

Három dimenziós sima konvex testek korlátozott élszámú konvex poliéderekkel való approximációját vizsgáltuk [11]. Aszimptotikus formulát sikerült igazolni, ha a térfogat-különbséget minimalizáljuk, továbbá sikerült leírni az extremális poliéderek tipikus lapját. A bizonyítás a területen szokásos módszereken túl algebrai síkgörbék tubuláris környezetének területére adott becslést is felhasznál. Ugyancsak sikerült aszimptotikus formulát igazolni, és leírni az extremális poliéderek tipikus lapját, ha az approximáció során a Hausdorff távolságot minimalizáljuk. Érdekesség, hogy míg ha a csúcsok vagy a lapok száma korlátozott, akkor vagy háromszög vagy hatszög a tipikus lap, ugyanakkor ha az élszám korlátozott, akkor bizonyos esetben négyszög a tipikus lap.

Beláttuk, hogy egy kettő átlagszélessegű konvex test köré írt szimplex átlagszélessége legalább akkora, mint az egységgömb köré írt szabályos szimplexé [13].

Vitali Milman sejtését igazolva a d dimenziós térben karakterizáltuk az origót belsejükben tartalmazó konvex testek dualitását a következő alaptuladonsággal egy lineáris transzformáció erejéig: A dualitás felcseréli a metszetet és az úniót [14].

Ifj. Böröczky Károly Lars Hoffmann-nal es Daniel Huggal közösen egy konvex testbe beírt véletlen poliéder és a konvex test j-dik átlagszélességének különbségének asszimptotikájára adtak aszimptotikus formulát ha j tetszőleges, a dimenziónál kisebb szám [15]. A formulát csak akkor bizonyították. Ha a konvex testnek létezik gördülő gömbje, ami valamivel gyengébb feltétel annál, hogy a határ kétszer differenciálható. Ha j legfeljebb a dimenzió fele, akkor példát is adtak arra, hogy a formula érvényességéhez szükséges a gördülő gömb létezéséhez hasonló feltétel. Másrészt, ha j a dimenzió, azaz a térfogat aszimptotikáját vizsgáljuk, akkor Carsten Schuett adott korábban aszimptotikus formulát tetszőleges konvex test esetén.

Fuglede probléma. Projektünk tervezésekor friss fejlemény volt, hogy T. Tao megcáfolta B. Fuglede sejtését arról, hogy az euklideszi térben a parkettázó halmazok spektrálisak és viszont. Tao konstrukciója a legalább 5 dimenziós terekben adott spektrális, de mégsem parkettázó halmazt. Mihalis Kolountzkisszal és másokkal közösen ebben a témában több eredményt értünk el, több kapcsolódó sejtést is megvizsgáltunk ill. megcáfoltunk, és kiterjesztettük a vizsgálatokat más rokon kérdésekre ill. konstrukciókra (pl. véges csoportok univerzális spektrumai, komplex Hadamard mátrixok konstrukciója, unbiased orthogonal basis konstrukciók, fedések csak elforgatásokkal, pakolási feltételek és spektrális halmazok alkalmazása a Turán féle extremális probléma vizsgálatában).

A témában a legfontosabb eredményünk, hogy a Fuglede sejtés Tao által nyitva hagyott másik irányát Mihalis Kolountzakis és Matolcsi Máté közös munkájában [35] sikerült megcáfolni, azaz az euklideszi térben olyan parkettázó halmazt konstruálni, amely nem spektrális.

Később az ellenpélda dimenzióját újabb ötletek segítségével sikerült 5-ről 4-re csökkenteni [24]. Ezt követően megmutattuk, hogy az univerzális spektrum létezéséről szóló Lagarias-Wang sejtés minden dimenzióban ekvivalens a Fuglede sejtéssel, és ennek segítségével a konstrukciót sikerült még tovább javítani immár 3 dimenzióig [19].

A másik - 2004-ben Terence Tao által megcáfolt - irányában a Tao féle 5 dimenziós konstrukciót javítva ennek az iránynak a dimenzióját is sikerült 3-ra levinni . Mindezt elsosorban véges csoportokon, majd ebből felépítve egészek rácsain, és végül az euklideszi térben dolgoztuk ki [34].

Megvizsgáltuk, hogy egy kétdimenziós rács pontjai köré vont kis körlemezekből álló halmaz milyen elforgatottjainak uniója fedi le (majdnem) az egész síkot, (azaz legfeljebb egy origő körüli hézagot kivéve). Véges sok elforgatás nem elegendő, de viszonylag kis elforgatás-halmazokkal már van konstrukció, amely megoldja a feladatot [32].

Egy korábbról már ismert parkettázási konstrukcióról megmutattuk, hogy az analogonja spektrális halmazokra is működik, majd a létrejövő spektrális halmazokhoz asszociált komplex Hadamard mátrixokról megmutattuk, hogy azok újak, azaz még nem szerepelnek a nemrégiben Tadej és Zyczkowski által megjelentetett katalógusban sem [41].

Ciklikus csoportok nem periodikus parkettázásait vizsgáltuk, azaz olyan parkettázásokat ahol egyik faktor sem periodikus. Az ilyen parkettázások teljes karakterizálását kis elemszámú csoportok esetén egy hatékony számítógépes algoritmussal elvégeztük [34]. Ennek motivációja az volt, hogy ilyen parkettázások zeneszerzési alkalmazást nyerhetnek (Vuza kánonok).

Potenciálelmélet és alkalmazásai az approximációelméletben. Súlyozott Hermite-Fejér interpolációs kérdéseket vizsgáltunk a valós egyenesen Freud súlyok mellett [29]. Korábban az ilyen típusú pozitív eredményekhez tipikusan három súlyt kellett figyelembe venni: amely szerinti ortogonális polinomok gyökein interpoláltunk, amellyel definiált súlyozott osztályból vettük az interpolálandó függvényt, és amellyel az interpolációs eljárás hibáját mértük. Megmutattuk, hogy súlyozott esetben az Hermite-Fejér interpolációs eljárást megfelelően definiálva, a w Freud-súly szerint ρ-normális alappontrendszeren konstruált Hermite-Fejér interpolációs eljárás a w szerinti súlyozott függvényosztályban lévő folytonos függvényekre konvergál, ha $A(w) > 1$ és az ún. súlyozott Rodriguez-tulajdonság teljesül az interpolációs mátrixra. Ez speciálisan érvényes akkor, ha $w(x) = e^{-x^{2k}}$, $k = 2, 3, 4, 5$, és X olyan interpolációs mátrix, amelyen az Hermite-Fejér alapfüggvények csak polinomiálisan nőnek. Eredményünk tehát bizonyos esetekben egyetlen súlyfügvénnyel ad konvergens eljárást, ráadásul a megengedett alappontok osztálya meglehetősen széles, nem kell ortogonális polinomok szerinti gyököknek lennie az alappontoknak.

Az egységkörön Kazaros Kazariannal közösen [28] olyan peremfüggvényeket tekintettünk, amelyeknek szingularitásai lehetnek, viszont egy adott (esetleg helyenként zérus), de folytonos w súlyfüggvény szerinti folytonos osztályban vannak. Amennyiben erre a peremfüggvényre akarjuk megoldani a Dirichlet problémát, akkor a megfelelő $C(w)$ folytonossági osztályban kell dolgoznunk, és a peremfüggvény nem feltétlenül korlátos avagy integrálható, ezért a Poisson integrál sem feltétlenül létezik. Ezért konstruálunk egy általánosított Poisson operátort, és egy megfelelően konstruált ortonormált polinomrendszerrel dolgozva nemtriviálisan megbecsüljük a nulltér dimenzióját. Így tetszőleges $f \in C(w)$-re meg tudjuk konstruálni a harmonikus beterjesztést, mint az általánosított Poisson-operátor magja szerinti konvolúciót. Az operátor konstrukciójához a w szerint ortogonális polinomrendszerből bizonyos, megfelelően választott elemeket kell elhagyni, és az így létrejövő minimális rendszer szerinti ortogonális sorfejtést kell tekinteni.

A fenti módszerek további kiterjesztését is megvizsgáltuk abban a formában, amikor nem az egységkör belsejére kell harmonikusan beterjeszteni egy függvényt (Dirichlet feladat), hanem a valós egyenesen adott súlyozott fügvényünket folytatjuk pl. a felső félsíkba (és így Abel-szummációval rekonstruálhatjuk az eredeti függvényt) [30]. Ebben a munkában a valós egyenesen olyan típusú súlyfüggvényeket tekintettünk, amelyek egy $w(x)s(x)$ alakú szorzatba írhatóak, ahol $w(x)$ a szokásos Hermite súly, $s(x)$ pedig polinomiális típusú zéróhelyekkel rendelkezhet, öszesen egy véges M rendben. Beláttuk, hogy egy, a $w(x)s(x)$ szerint súlyozott L^p-térben lévo függvényre ebben az esetben az M-nél nagyobb rendű Hermite-polinomok szerinti sorfejtés L^p-ben Abel-összegezhető a függvényhez.

Másrészt további általánosításként elkezdtük azt az esetet vizsgálni, amikor $s(x)$-nek akár végtelen sok zéróhelye is lehet [31]. Boas, Pollard, Rosenblum, Talalyan, Mockenhaupt vizsgálatait folytatva Banach tételét használtuk, mely szerint egy φ_n függvény-rendszer akkor Abel szummációs bázis L^p_{vw}-ben, ha ugyanitt minimális teljes rendszer és (a minimalitás értelmezésében szereplő φ_n^* duális rendszerével vett) sorfejtése Abel-szummációs összegének normája minden $0 < r \leq 1$ mellett egyenletesen becsülhető a függvény normájának fix konstansszorosával.

Végtelen sok szingularitás esetén a w szerint ortogonális polinom-rendszerből elhagyandó elemek száma is végtelen, ezáltal lehet teljes és minimális bázist konstruálni $w(x)s(x)$ szerint. Az ebből adódó végtelen interpolációs problémát bizonyos esetekre sikerült megoldani, ezáltal Freud súlyokra és megfelelően kondicionált $s(x)$-re kaptunk Abel-szummálható sorfejtést.

Ugyancsak a potenciálelmélet területén Farkas Bálinttal közösen dolgozva azt mutattuk meg, hogyan írható le számos, a funkcionál-analízisben és a magasabb dimenziós analízisben gyakran használt fogalom – így a metrikus randevú-szám illetve átlag-szám, a Csebisev-konstans, az ún. lineáris polarizációs konstans is – a Fugled-Ohtsuka-Choquet féle általános potenciálelmélet segítségével [23, 22, 21]. Számos új eredmény mellett ez a leírás szinte minden eddig ismert eredményt lefed. Nagy előnye, hogy rávezetett a randevú-számok végtelen dimenzióban is helyes – lezárást is alkalmazó – módosított definíciójára, amellyel minden Banach tér randevú-száma létezik, és amelyet sok esetben ki is tudtunk számítani.

További eredmények. Új becslést adtunk valós téren funkcionálok szorzatának normájára, a fellépő Gram mátrix sajátértékeinek harmonikus, illetve geometriai közepével [39]. Ez élesíti B. Marcus egy korábbi eredményét, amelyben a legkisebb sajátérték szerepelt. G. Munozzal megmutattuk [40], hogy az extremálisnak sejtett ortogonális rendszer - melynek optimalitása komplex terekben már Arias de Reyna 1999-es eredménye óta ismert - valósban is extremális, legalább lokálisan. (Korábban A. Pappassal igazoltuk a teljes sejtést, ha a dimenzió nem több mint 5.) V. Anagnostopoulossal [1] kapcsolatot találtunk a Csebisev konstansok és a polarizációs konstans között, illetve általános potenciálelméleti szemszögbol vizsgálva a kérdést, Farkas Bálinttal a randevú számok és a polarizációs konstans, valamint az általánosított Csebisev konstans és energia kapcsolatát tártuk fel.

A pozitív realizációs problémakör minimalitási kérdését oldottuk meg olyan transzfer függvényekre, amelyeknek csak nemnegatív, elsőrendű pólusai vannak, méghozzá a domináns pólus kivételével negatív rezidummal [27]. Ebben a speciális esetben szükséges és elégséges feltételt adtunk minimális dimenziójú pozitív realizáció létezésére.

Hatékony általános algoritmust adtunk transzfer függvények pozitív realizálására [17], amelynek jelentős előnye az eddig ismert algoritmusokkal szemben, hogy lényegesen kisebb dimenziós realizációt ér el, a teljes általánosság megtartása mellett.

Többváltozós wavelet bázis konstruálásához természetes módon foghatunk hozzá úgy, hogy a megadott alapfüggvényt egy az egységnégyzetet egy egész kordinátájú téglalapra nagyító, expanzív A lineáris leképezés segítségével "skálázzuk". Mely A leképezések adnak meg ekvivalens wavelet konstrukciókat (azaz "m?ködnek" ugyanazon alapfügvényekre)? K. Kazarian és mások vizsgálatait folytatva A. San-Antolínnal (K. Kazaros tanítványával) leírtuk önadjungált A transzformációk körében az ekvivalenciát [51]. Az egész koordinátájú mátrixok körében a teljes leírás érdekes módon számelméleti kérdésekkel is összefügg, nevezetesen akkor kapunk teljes választ, ha a "4 exponenciális sejtés" néven ismert híres sejtés igaz.

Révész Szilárd Fülöp-szigeteki társsszerzőkkel megmutatta [44], hogy ha egy pozitív definit folytonos függvény deriváltjára van egy, a függvény normájától függő korlátunk, akkor a függvény nem tűnhet el a 0 egy alkalmas környezetében. Ezt felhasználva Bernstein-Markov típusú egyenlőtlenségeket lehet vizsgálni: megmutattuk, hogy H. N. Mhaskar Gauss függvények rendszerére bizonyított Bernstein típusú egyenlőtlensége lényegében éles.

Új, közvetlen, általánosabb és komplex polinomokra is érvényes bizonyítást adtunk arra a Schur típusú tételre, hogy ha egy polinomnak nincs gyöke az egységkörben, akkor a súlyozott polinom norma és a maximum norma között élesebb egyenlőtlenség áll fenn, mint általában [50].

A projekt támogatása különösen hasznos volt nemzetközi kapcsolataink, a nemzetközi együttműködésben megvalósuló kutatások szempontjából. Elsősorban az Aline Bonamival, Mihalis Kolountzakisszal, Philippe Jamminggal, Gustavo Munozzal, Kazaros S. Kazariannal (és tanbítványával, A. San-Antolinnal), R. Schneiderrel és Farkas Bálinttal (Darmstadt) való közös munka sikeréhez járult hozzá jelentősen az OTKA támogatás, ezen szerzőkkel több közös cikkünk is született. Farkas Bálint és Mihalis Kolountzakis neve is szerepelt az időközben beadott, kiegészítő támogatás iránti pályázatunkban, azonban ez nem nyert elfogadást, így az eredeti költségvetésből gazdálkodva próbáltuk feladatainkat megoldani. Jól fejlődő nemzetközi kapcsolatrendszerünk közvetve több hazai konferencia, workshop, nyári iskola megrendezéséhez járult hozzá.

Összességében a projektet eredményesnek érezzük, és sajnálatosnak tartjuk, hogy munkánk hasonló irányban történő folytatására - két eredménytelennek elbírált pályázat után - jelenleg már nem rendelkezünk támogatással.

Hivatkozások

[1] V. Anagnostopoulos, Sz. Gy. Révész, Polarization constants for products of linear functionals over R^2 and C^2 and the Chebyshev constants of the unit sphere, Publ. Math. Debrecen, 68/1-2 (2006), 63–75.

[2] A. Bonami, Sz. Gy. Révész, Failure of Wiener's property for positive definite periodic functions, Comptes Rendus Mathematique, Volume 346, 1-2, (2008), Pages 39-44.

[3] A. Bonami, Sz. Gy. Révész„ Integral concentration of idempotent trigonometric polynomials with gaps, Amer. J. Math., to appear, see also as ArXiv:0707.3023v1 at `http://front.math.ucdavis.edu/0707.3023`, 43 pages.

[4] A. Bonami, Sz. Gy. Révész, Concentration of the integral norm of idempotents, Fractals and related fields, Proceedings of the Conference in Honor of Jacques Peyrière, Birkhauser, 23 pages, to appear, see also as arXiv:0811.4576v1 [math.CA] at `http://uk.arxiv.org/PS_cache/arxiv/pdf/0811/0811.4576v1.pdf`.

[5] K.J. Böröczky, I.Z. Ruzsa, Note on an inequality of Wegner, Disc. Comp. Geom., 37(2007), 245-249.

[6] K. J. Böröczky, R. Schneider, Stable determination of convex bodies from sections, Studia Math. Sci. Hung., közlésre elfogadva, 2007,

[7] K. Böröczky, K. J. Böröczky, Polytopes of minimal volume with respect to a shell - another characterization ..., Disc. Comp. Geom. 38 (2007), 231-241.

[8] K. Böröczky, K. J. Böröczky, A stability property of the octahedron and the icosahedron, Publ. Math. Debrecen 71(2007), 449-466.

[9] K. Böröczky, K. Böröczky (Jr.), G. Wintsche, Typical faces of extremal polytopes with respect to a thin three-dimensional shell, Periodica Math. Hung. 53 no. 1-2, 83-102., 2006

[10] K. Böröczky, K.J. Böröczky, C. Schütt, G. Wintsche, Convex bodies of minimal volume, surface area and mean width with respect to thin shells, Canadian Journal of Mathematics, 60 (2008), 3-32., 2008

[11] K.J. Böröczky, Salvador S. Gomez, P. Tick, Volume approximation of smooth convex bodies by three-polytopes of restricted number of edges. Monats. Math., 153 (2008), 23-48.

[12] K.J. Böröczky, F. Fodor, V. Vígh, Approximating 3-dimensional convex bodies by polytopes with a restricted number of edges. Beit. Alg. Geom, 49 (2008), 177-193.

[13] K. J. Böröczky, R. Schneider, Circumscribed simpleces of minimal mean width, Beit. Alg. Geom. 48 (2007), 217-224., 2007

[14] K.J. Böröczky, R. Schneider, A characterization of the duality mapping for convex bodies. Geom. Func. Analysis (GAFA), 18 (2008), 657-667.

[15] K.J. Böröczky, L.M. Hoffmann, D. Hug, Expectation of mean projections of random polytopes. Periodica Hungarica, 57 (2008), 143-164.

[16] D. Burns, N. Levenberg, S. Ma'u, Sz. Gy. Révész, Monge–Ampère measures for convex bodies and Bernstein-Markov type inequalities, Trans. Amer. Math. Soc., to appear, see `http://www.ams.org/cgi-bin/mstrack/accepted_papers/tran`, see also as arXiv:0705.1095 at `http://uk.arxiv.org/PS_cache/arxiv/pdf/0705/0705.1095v1.pdf`, 22 pages.

[17] W. Czaja, P. Jaming, M. Matolcsi, An efficient algorithm for positive realizations, System & Control Letters, 57 (2008), no. 5, 436-441.

[18] B. Farkas, V. Harangi, T. Keleti, Sz. Gy. Révész, Proc. Amer. Math. Soc. 136 (2008), no. 4, 1325Ũ-1336.

[19] B. Farkas, M. Matolcsi, P. Móra, On Fuglede's conjecture and the existence of universal spectra, J. Fourier Anal. Appl., Volume 12, Number 5, (2006), 483-494.

[20] B. Farkas, Sz. Gy. Révész, Decomposition as the sum of invariant functions with respect to commuting transformations, Aequationes Math. 73 (2007), 233-248.

[21] B. Farkas, Sz. Gy. Révész, Rendezvous numbers in normed spaces, Bull. Austr. Math. Soc., 72 (2005), 423–440.

[22] B. Farkas, Sz. Gy. Révész, Rendezvous numbers of metric spaces – a potential theoretic approach, Archiv der Mathematik, 86 (2006), 268–281.

[23] B. Farkas, Sz. Gy. Révész, Potential theoretic approach to rendezvous numbers, Monatshefte für Mathematik, 148 (2006), 309–331.

[24] B. Farkas, Sz. Gy. Révész, Tiles with no spectra in dimension 4, Math. Scand., 98 no. 1 (2006), 44–52. MR 2221543.

[25] B. Farkas, Sz. Gy. Révész, Positive bases in spaces of polynomials, Positivity, 12 (2008), no. 4, 691Ũ-709.

[26] K. Gyarmati, M. Matolcsi, I. Z. Ruzsa, A superadditivity and submultiplicativity property for cardinalities of sumsets, Combinatorica, to appear.

[27] A. Halmschlager, M. Matolcsi, Minimal positive realizations for a class of transfer functions, IEEE Trans. Circ. Syst. II, 52 (2005), vol. 4, 177-180.

[28] Á. Horváth, K. S. Kazarian, The Dirichlet Problem in Weighted Norm, A. Renyi Inst., Preprint No. 9/2006

[29] Á. Horváth, Weighted Hermite-Fejér Interpolation on the Real Line , Acta Math. Hungar. 115 (1-2) (2007), 101-131.

[30] Á. Horváth, Abel Summation in Hermite-type Weighred Spaces with Singularities, East J. on Approx 13 (4) (2007), 357-385.

[31] Á. Horváth, Biorthonormal Systems in Freud-type Weighted Spaces with infinitely Many Zeros - an Interpolation Problem, preprint, arXiv:0811.0289v1 [math.CA], 2007

[32] A. Iosevich, M. N. Kolountzakis, M. Matolcsi, Covering the plane by rotations of a lattice arrangement of disks, in Complex and Harmonic Analysis, Proceedings of the International Conference, Thessaloniki, May 25-27, 2006, Destech Publications Inc., 2007 (eds: A. Carbery, P. L. Duren, D. Khavison, A. G. Siskakis)

[33] Ph. Jamming, M. Matolcsi, Sz. Gy. Révész, On the extremal rays of the cone of positive, positive definite functions, J. Fourier Anal. Appl., 22 pages, to appear, doi 10.1007/s00041-008-9057-6; "online first" see `http://www.springerlink.com/content/7t361775u3521t8n/fulltext.pdf`.

[34] M. N. Kolountzakis, M. Matolcsi, Algorithms for translational tiling, preprint.

[35] M. N. Kolountzakis, M. Matolcsi, Tiles with no spectra, Forum Math., 18 (2006), 519-528.

[36] M. N. Kolountzakis, M. Matolcsi, Complex Hadamard matrices and the spectral set conjecture, Collectanea Mathematica, (2006), Vol. Extra, 281-291.

[37] M. Kolountzakis, Sz. Gy. Révész, On pointwise estimates of positive definite functions with given support, Canad. J. Math., 58 (2) (2006), 401–418. MR 2209285.

[38] M. Kolountzakis, Sz. Gy. Révész, Turán's extremal problem for positive definite functions on groups, J. London Math. Soc. 74 (2006), 475–496.

[39] M. Matolcsi, A geometric estimate on the norm of product of functionals, Linear Algebra Appl. 405, (2005), 304-310.

[40] M. Matolcsi, G. Munoz, On the real polarization problem, Math. Ineq. Appl., vol. 9/3, (2006) 485-494.

[41] M. Matolcsi, J. Réffy, F. Szöllősi, Constructions of Complex Hadamard matrices via tiling Abelian groups, Open Systems & Information Dynamics, 14, (2007) 247-263.

[42] L. B. Milev, Sz. Gy. Révész, Bernstein's inequality for multivariate polynomials on the standard simplex, J. Inequalities and Appl., 2005:2 (2005), 145–163.

[43] G. A. Munoz, Sz. Gy. Révész, J. B. Seoane, Geometry of homogeneous polynomials on non symmetric convex bodies, Math. Scand., 104 (2008), 1-14.

[44] N. N. Reyes, Sz. Gy. Révész, G. A. M. Velasco, Oscillation of Fourier Transforms and Markov-Bernstein Inequalities, J. Approx. Theory, 145 (2007), 100-110.

[45] Sz. Gy. Révész, A comparative analysis of Bernstein type estimates for the derivative of multivariate polynomials, Annales Polonici Mathematici 88.3 (2006), 229–245.

[46] Sz. Gy. Révész, Turán-type converse Markov inequalities for convex domains on the plane, J. Approx. Theory, 141 (2006), No. 2, 162–173.

[47] Sz. Gy. Révész, On a paper of Erőd and Turán-Markov inequalities for non-flat convex domains, East J. Approx. 12 No. 4 (2006), 451–467.

[48] Sz. Gy. Révész, Inequalities for multivariate polynomials, Annals of the Marie Curie Fellowships, 4 (2006), (electronic), `http://www.mariecurie.org/annals/`, 6 pages.

[49] Sz. Gy. Révész, On some extremal problems of Landau, Serdica Math. J., 33 (2007), 125-162.

[50] Sz. Gy. Révész, Schur type inequalities for polynomials with no zeros in the unit disk, J. Ineq. Appl., Volume 2007 (2007), Article ID 90526 (electronic), doi:10.1155/2007/90526, `http://www.hindawi.com/journals/jia/volume-2007`, 10 pages.

[51] Sz. Gy. Révész, A. San Antolín, Equivalence of A-Approximate Continuity for Self-Adjoint Expansive Linear Maps, Linear Algebra Appl., 429, (2008), no. 7, 1504-1521.