

## Végbeszámoló a T034323 sz.

“Green függvények és Polinomok” c. OTKA pályázatról

Témavezető: Dr. Totik Vilmos

Résztevők: Nagy Béla, Toókos Ferenc, Varjú Péter

A pályázatnak megfelelően a támogatott kutatás a “potenciálmélet és annak approximációelméleti alkalmazásai” területen történt. Elsősorban polinomok aszimptotikus tulajdonságait vizsgáltuk, ahol természetes módon lépnek fel logaritmikus potenciálok mint a zérushelyek határeloszlása. Ehhez kapcsolódó terület az ortogonális polinomok elmélete – a két témakörben folyó kutatások párhuzamosan folytak, és gyakran nem is lehet őket szétválasztani; az eredmények mindkét területre vonatkoznak. Jelentős előrehaladást sikerült elérni több kérdésben, így a változó súllyal vett polinom-approximáció elméletében; a homogén polinomokkal való approximációval, illetve az ún. univerzalitási hipotézissel kapcsolatban. Pályázati támogatással 16 publikáció született.

A kutatás főbb területei a következők voltak.

### Potenciálmélet és alkalmazásai

V. Totik, Equilibrium measures and polynomials, *Proceedings of the 4th European Congress of Mathematics*, Stockholm, Sweden, A. Laptev editor, European Mathematical Society, 2005, 501–515.

Ez a IV. Európai Matematikai Kongresszuson elhangzott meghívott előadással kapcsolatos összefoglaló dolgozat arról, hogy a potenciálmélet hogyan alkalmazható polinomokra.

P. Varjú, Approximation by homogeneous polynomials, *Constructive Approximation*, **26** (2007), 317–337.

Ez egy zseniális dolgozat Varjú Pétertől, amelyben Kroó András alábbi problémájára ad részleges választ: ha  $K$  egy centrálszimmetrikus konvex felület  $R^n$ -ben, akkor  $K$ -n bármely páros (páratlan) folytonos függvény egyenletesen approximálható homogén polinomokkal. A dolgozat a teljes megoldást adja potenciálméleti eszközökkel az  $n = 2$  esetben, és bármely  $n$ -re megoldja a problémát sima felületekre illetve politópokra. A síkon a megoldás a változó súllyal vett approximáció elméletét használja fel. Sima felületekre egy direkt konstrukció adja az eredményt, míg polinomokra az 1 oldalas megoldás egyenesen Erdős “Könyvéből” való: a kétdimenziós négyzetre vonatkozó eredményt használja arra, hogy ha két halmaz felületén lehet approximálni, akkor lehet a metszetük felületén is (megjegyezzük, hogy korábban született megoldás egyetlen politópra, az ún. “cross polytop”-ra, és az maga több, mint 20 oldalas volt). Az eredmények alkalmazhatók arra a kérdésre is, hogy homogén polinomok színhalmazaival milyen jól közelíthető egy adott halmaz.

V. Totik, *Metric Properties of Harmonic Measures*, *Memoirs of the American Math. Soc.*, **184**, number 867, 2006

Ez a monográfia több OTKA cikluson keresztül készült; a publikálás előtti simításokat a jelen pályázat keretében végeztük el. A monográfia éles becsléseket tartalmaz harmonikus mértékekere végtelenszer összefüggő tartományokon. Két fő irány szerepel benne: általános tartományokra vonatkozó becslések, illetve olyan tartományokra, amelyek határának szabályos struktúrája van (Cantor-típusú halmaz). Az eredmények mind élesek, és sok alkalmazásuk van: Markov és Bernstein típusú polinom-egyenlőtlenségek; Phragmén–Lindelöf típusú tételek analitikus függvényekre; Bohr-típusú egyenlőtlenségek; polinom-approximáció általános halmazokon.

V. Totik and P. Varjú, Smooth equilibrium measures and approximation, *Advances in Mathematics*, **212**(2007), 571–616.

Ebben a dolgozatban gyakorlatilag lezártuk azt a kérdéskört, hogy mely függvények approximálhatók  $w^n P_n$  alakú (változó súllyal vett) polinomokkal. Ez egy rendkívül intenzíven vizsgált kutatási terület volt az elmúlt 20 évben, amely a külső potenciáltérben vett egyensúlyi problémával együtt fejlődött ki. Korábbi eredmények mind olyan típusúak voltak, hogy bizonyos  $w$ -kre lehet approximálni, míg bizonyosakra nem. Ebben a cikkben került először igazolásra egy szükséges feltétel, és azt is megmutattuk, hogy ez már minden, a gyakorlatban előforduló esetben elegendő is. A tételekből a témakör minden korábbi eredménye azonnal következik.

V. Totik and P. Varjú, Polynomials with prescribed zeros and small norm, *Acta Sci. Math.*, (Szeged) **73**(2007), 593–612.

A dolgozat azt a kérdést vizsgálja, hogy ha  $P_n(0) = 1$  és  $P_n$  szuprémum normája az egységkörön közel van 1-hez, akkor az egységkörön mennyi és milyen eloszlású zéróhelyek lehetnek. Végülis ez kérdés Turán hatványösszeg-módszeréhez nyúlik vissza. Pontos becsléseket adunk a zéróhelyek számára és azok eloszlására.

V. Totik, Universality and fine zero spacing on general sets, *Arkiv för Math.*, (megj. alatt)

“Universality”, azaz univerzalitás, fontos kérdés a statisztikus fizikában és a véletlen mátrixok elméletében. Ismert volt, hogy ez megfogalmazható ortogonális polinomok reprezentáló magfüggvényének viselkedésével. Nemrégiben ezzel a kérdéskörrel kapcsolatban D. S. Lubinsky ért el áttörő eredményeket, amennyiben megmutatta, hogy az univerzalitáshoz elegendő a generáló mérték folytonossága, feltéve ha a tartó egy intervallum. Ez a dolgozat az univerzalitást vizsgálja abban az esetben, ha a tartó általános halmaz. Kiderült, hogy az univerzalitás akkor is igaz, csak a tartó egyensúlyi mértéke lép be a képbe. A dolgozat módszere a polinomiális inverz-kép módszer, és persze a potenciálemélet is állandó eszköz benne.

V. Totik, Chebyshev constants and the inheritance problem, *Journal of Approximation Theory*, (megj. alatt)

H. Widom igazolta a 60-as években, hogy ha  $E$  véges sok intervallumból áll, akkor vannak olyan 1 főegyütthatós  $P_n$  polinomok, amelyekre  $\|P_n\|_E \leq C \text{cap}(E)^n$  (alulról minden polinomra  $\geq \text{cap}(E)^n$  áll fenn;  $\text{cap}(E)$  a logaritmikus kapacitás). Widom ezt egy hosszú

cikk végén egy mély elmélet alkalmazásaként kapta. Ebben a dolgozatban megmutatjuk, hogy ez levezethető egy régi Schweitzer-problémából is, az ún. öröklési problémából.

R. Taylor and V. Totik, Lebesgue constants for Leja Points, *IMA Journal of Num. Anal.*, (megj. alatt)

Meglehetősen általános halmazokra igazoljuk L. Reichel egy sejtését: a Leja pontokon vett interpoláció Lebesgue-konstansai nem lehetnek exponenciálisan nagyok. Ennek a kérdésnek az a jelentősége, hogy a numerikus analízisben rutinszerűen alkalmazzák a Leja pontokat anélkül, hogy az alkalmazásukat elméletileg megalapoznák. Ez a cikk az első ilyen jellegű eredmény, amely a numerikus alkalmazások létjogosultságát mutatja. A bizonyítások potenciáleméleti eszközöket használnak.

B. Farkas and B. Nagy, Transfinite diameter, Chebyshev constant and energy on locally compact spaces. *Potential Anal.*, **28**(2008), no. 3, 241–260.

Ebben a munkában a lehető legáltalánosabb keretek között kerülnek tárgyalásra az absztrakt potenciálemélet olyan fogalmai mint a transzmit átmérő, Csebisev konstans és halmazok energiája.

B. Nagy, Bernstein inequality in  $L^\alpha$  norms, *Anal. Math.*, (megj. alatt)

A dolgozat aszimptotikusan pontos Markov-típusú  $L^p$ -becsléseket igazol polinomok deriváltjaira súlyozott terekben véges sok intervallumból álló halmazokon (a súlyfüggvény a halmaz egyensúlyi mértéke). A bizonyítások a polinomiális inverz-kép módszeren alapulnak.

## Ortogonalis polinomok

V. Totik, Orthogonal polynomials, *Surveys in Approximation Theory*, **1**(2005), 70–125.

Ez egy összefoglaló dolgozat ortogonalis polinomokról, azok eredetéről, a velük kapcsolatos legfontosabb kérdésekről, az elmélet legfontosabb tételeiről és ortogonalis polinomok alkalmazásairól.

L. Golinskii and V. Totik, Orthogonal Polynomials from Jacobi to Simon, Spectral Theory and Mathematical Physics: A Festschrift in Honor of Barry Simon's 60th Birthday: Ergodic Schrödinger Operators, Singular Spectrum, Orthogonal Polynomials, and Inverse Spectral Theory, *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, AMS, Providence 2007, pp. 821–874.

Leonid Golinskii és Totik Vilmos két főelőadó volt a Barry Simon 60. születésnapjára rendezett konferencián. Ez a dolgozat előadásaik alapján készült összefoglaló cikk.

K. Jordaan and F. Toókos, Convexity of the zeros of some orthogonal polynomials and related functions, *J. Comp. Appl. Math.*, (megj. alatt)

Laguerre, Jacobi és ultraszférikus polinomok zérushelyeire konvexitási tulajdonságok kerültek igazolásra. Ezen felül szomszédos zéróhelyek távolságára vonatkozó pontos becslések szerepelnek a dolgozatban.

### Egyéb munkák

P. Komjáth and V. Totik, *Problems and Theorems in Classical Set Theory*, Problem books in Mathematics, Springer Verlag, 2006

Ez egy 550 oldalas magas szintű feladatokat tárgyaló feladatgyűjtemény. Halmazelméleti illetve azzal kapcsolatos feladatokat tartalmaz (kombinatorika, topológia, valós függvénytan, Euklidészi terek). Mivel ez több, mint 10 évig készült, több OTKA támogatás is megemlíthető vele kapcsolatban. Az utolsó, publikálás előtti munkálatokat a jelen pályázat keretében végeztük el.

L. Hatvani, F. Toókos, G. Tusnády: A mutation-selection-recombination model in population genetics, *Dynamic Systems and Applications*, (megj. alatt)

Ez egy populációgenetikával kapcsolatos dolgozat. Igazolásra került, hogy ciklikus mutációs ráták stabilis és nemstabilis határciklusokhoz is vezethetnek Hopf bifurkáción keresztül. E mellett a fellépő dinamika teljes quantitative leírása szerepel a dolgozatban.

P. Komjáth and V. Totik, Ultrafilters, *American Mathematical Monthly*, **115**(2008), 33–44.

Ez egy ismeretterjesztő mű ultraszűrőkről és azok alkalmazásairól.

### Előadások, konferencia-részvétel

melyeket részben a jelen pályázat támogatott

IX-th international conference on approximation and optimization in the Caribbeans, San Andres, Colombia, 2008 (Totik Vilmos). Előadás: *Zeros of polynomials with minimal norm*.

V. Európai Matematikai Kongresszus, Amszterdam, Hollandia, 2008 (Nagy Béla).

Modern methods in the theory of asymptotics of polynomials, Banff International Research Station, Banff, Canada, 2007 (Totik Vilmos). Meghívott előadás: *The polynomial inverse image method*.

Workshop on potential theory, Krakow, 2007 (Nagy Béla). Előadás: *Chebyshev constants, transfinite diameter and energy*.

Nemzetközi Matematikai Kongresszus, Madrid, 2006 (Nagy Béla és Varjú Péter).

Spectral Theory and Mathematical Physics, Los Angeles, USA, 2006 (Totik Vilmos).  
Plenáris előadás: *Orthogonal polynomials*.

Recent trends in complex analysis, Cyprus, 2006 (Totik Vilmos és Varjú Péter).  
Meghívott előadás (Totik Vilmos): *Metric properties of harmonic functions*; előadás:  
(Varjú Péter) *Approximation by homogeneous polynomials*.

Constructive Theory of Functions, Varna, Bulgaria, 2005 (Nagy Béla, Totik Vilmos  
és Varjú Péter). Plenáris előadás: (Totik Vilmos) *The  $\varphi$ -moduli of smoothness*; előadások:  
(Nagy Béla) *Sharpening of Hilbert's lemniscate theorem*; (Varjú Péter) *Approximation by  
polynomials with varying weights*.

University of New South Wales, Sydney, Australia, 2005 (Totik Vilmos). Előadás:  
*Numerical analysis and extremal points*.

Harmonic Analysis and Approximation, Auckland, New Zealand, 2005 (Totik Vilmos).  
Plenáris előadás: *Green functions and polynomials*.