SZAKMAI ZÁRÓJELENTÉS

Kombinatorikus módszerek gráfok és rúdszerkezetek merevségének vizsgálatában

OTKA 49671

2005-2008

Témavezető: Jordán Tibor (ELTE)

Rúdszerkezetek statikai tulajdonságainak matematikai eszközökkel történő vizsgálata Maxwell (1864) és Henneberg (1911) korai eredményei óta fontos terület. Az elmúlt évtizedben a szerkezetek merevségének vizsgálata új lendületet kapott, köszönhetően annak, hogy egyrészt egészen más területeken (molekulák szerkezetének vizsgálatában, szenzorhálózatok lokalizációs problémáiban, CAD feladatokban, stb.) is hasznosnak bizonyultak a merevséggel kapcsolatos elméleti eredmények, másrészt néhány több évtizede nyitott sejtést sikerült igazolni.

Az utóbbiak között említhetők például Connelly és Hendrickson sejtései a kétdimenzióban globálisan merev gráfokról, valamint Dress sejtése a háromdimenziós merevségi matroid rangfüggvényéről. Ezeket sikerült - szerzőtársaimmal együtt - igazolni, illetve megcáfolni. Ezen új eredményeket a gráf- és matroidelmélet módszereinek alkalmazása tette lehetővé, teljessé téve a korábbi, geometriai, algebrai és differenciál-topológiai megfontolásokkal kapott részeredményeket.

Az itt összefoglalt egyszemélyes OTKA pályázat célja ezen kutatások folytatása volt: kombinatorikus módszerek használata a merevségre és globális merevségre vonatkozó nyitott kérdések vizsgálatában.

Merev gráfok és szerkezetek

A (G, p) d-dimenziós *szerkezet* egy G gráfból és egy $p : V \to R^d$ hozzárendelésből áll. A szerkezetre (melyet más területen geometriai gráfnak is neveznek) azt mondjuk, hogy a G egy d-dimenziós *realizációja*. A szerkezetben az éleket egyenes szakaszoknak vagy rudaknak képzeljük, egy él hossza a végpontjainak távolsága. A szerkezet *merev*, ha az adott élhosszakra nézve lokálisan egyértelmű, avagy folytonosan nem deformálható (eltekintve az eltolásoktól, elforgatásoktól, ill. általában az egész tér izometriáitól). A szerkezet merevsége csak a G gráftól függ, amennyiben p *generikus*, azaz a pontok koordinátái kellően általános helyzetűek. A $d = 2$ esetben a merev gráfokat Laman jellemezte (1970). A térbeli (és magasabb dimenziós) merevség pontos jellemzése a terület mai napig megoldatlan nehéz nyitott problémája.

A [4] dolgozat fő eredménye egy új felső korlát a háromdimenziós merevségi matroid rangfüggvényére. Ez gráfok háromdimenziós merevségére ad olyan új szükséges feltételt, amely - legalábbis bizonyos gráfosztályok esetén - elégségesnek is tűnik.

Egy fontos speciális eset a *molekuláris gráfok*, avagy négyzetgráfok családja, melyek merevségére ad feltételt az 1984 óta nyitott Molekuláris Sejtés. Ezt a sejtést kitűzői, Tay és Whiteley eredetileg a következő alakban fogalmazták meg. A d-dimenziós térben kettő ko-dimenziós affin alterek (ú.n. zsanérok) mentén illeszkedő teljes dimenziós merev testekből álló rendszert *d-dimenziós test-zsanér szerkezetnek* nevezzük. Kétdimenzióban tehát összeszögelt síkidomokra, háromdimenzióban egyenes szakaszok mentén összeragasztott testekre gondolhatunk. Egy ilyen szerkezet *mozgása* minden testet külön-külön folytonosan mozgat úgy, hogy az illeszkedő testek egymáshoz viszonyított mozgása a megfelelő zsanér körüli forgatás legyen. A mozgás akkor *triviális*, ha minden test egyformán mozog. A szerkezet akkor *merev*, ha minden mozgása triviális. A szerkezet gráfjában a testeknek pontok, a zsanéroknak élek felelnek meg. Tay és Whiteley 1984-ben megmutatták, hogy egy gráfnak d dimenzióban pontosan akkor van merev test-zsanér realizációja, ha minden élét $\binom{d+1}{2}-1$ párhuzamos éllel helyettesítve a kapott gráfban lesz $\binom{d+1}{2}$ él-diszjunkt feszítőfa. Ugyanekkor megfogalmazták azt a sejést, hogy ha egy gráfnak van ilyen merev realizációja, akkor olyan is van, amelyben minden testre a rá illeszkedő zsanérok egy közös hipersíkban vannak.

Ez a Molekuláris Sejtés, amely az utóbbi években nagy figyelmet kapott, köszönhetően a háromdimenziós eset (projektív) duális alakjának, amelyet molekulák merevségének teszteléséhez használnak. Eszerint ha egy gráfnak van merev test-zsanér realizációja, akkor olyan is van, amelyben minden testre a rá illeszkedő zsanérok (egyenesek) egy ponton mennek át. Molekulák modellezésénél az atomoknak pontok, a kötéseknek élek felelnek meg. Mivel az illeszkedő kötések közti szög is rögzített, minden atom a rá illeszkedő kötésekkel együtt egy merev testet alkot. Az így előálló test-zsanér szerkezetben az atomok a nekik megfelelő testre illeszkedő zsanérok metszéspontjába kerülnek.

A sejtés minden $d \geq 2$-re nyitott volt. Whiteley ért el részeredményeket a $d = 2$ esetben 1989-ben. A [8] cikkben teljes megoldást adtunk a $d = 2$ esetre. Megoldásunk kulcsa egy ekvivalens, csukló-kollinearitási feltételeket teljesítő, rúd-csukló szerkezet szabadsági fokára adott új képlet volt.

Az [5], [6], [17] cikkek a háromdimenziós esetre vonatkozó részeredményeket tartalmaznak. Itt hasznos egy további ekvivalens alakot tekinteni: a G gráf G^2 négyzetgráfja pontosan akkor merev a térben, ha G minden élét öt párhuzamos éllel helyettesítve olyan gráfot kapunk, melyben van hat él-diszjunkt feszítőfa. Elégséges feltételeket adtunk a G^2 gráf függetlenségére és felső korlátot a merevségi matroidjának rangjára. Ebből egyúttal a sejtés rúd-csukló alakjában a szükségességre direkt bizonyítást nyertünk.

Eredményeink gráfok erdőkkel való fedéseire vonatkozó új strukturális eredményeken (lásd [9]) és a kombinatorikus merevség néhány alaperedményének kiterjesztésén alapulnak. Megmutattuk azt is, hogy a Molekuláris Sejtésből hogyan olvasható ki hatékony algoritmus egy négyzetgráf szabadsági fokának és maximális merev részgráfjainak meghatározására. Igazoltuk, hogy a kombinatorikus merevség két további sejtéséből (Dress, 1987 és Jacobs, 1998) a Molekuláris Sejtés (a $d = 3$ esetben) levezethető. A [13] dolgozatban a test-zsanér modellt vizsgáltuk és megmutattuk, hogy a G gráf G^2 négyzetgráfja merev a térben, ha G minden élét két párhuzamos éllel helyettesítve olyan gráfot kapunk, melyben van három él-diszjunkt feszítőfa.

Az [2] dolgozat kétdimenziós merevséggel foglalkozik. Megmutatjuk, hogy minden merev gráfnak van olyan merev realizációja, ahol a csúcsok egy $O(|V(G)|)$ pontú kis négyzetrács pontjaiban helyezkednek el. Ez a nagyságrend tovább nem javítható.

A [10] cikkben hatékony kombinatorikus algoritmust adunk arra, hogyan helyettesítsük egy síkbeli redundánsan merev generikus rúd-csukló szerkezetben a rudakat kötelekkel és rugókkal úgy, hogy a kapott ú.n. *tensegrity szerkezetnek* továbbra is legyen merev realizációja.

Általánosítottuk Lovász és Yemini 1982-es eredményét, amely szerint 6-összefüggő gráfok generikusan merevek a síkban. Az állítás 5-összefüggő gráfokra általában nem érvényes. Kiterjeszthető azonban vegyesen 6-összefüggő gráfokra [12]. (Egy G gráf vegyesen 6-összefüggő, ha minden vegyes vágására, amely az X ponthalmazból és az Y élhalmazból áll, $2|X| + |Y| \geq 6$.)

A merevség fogalmának egyik lehetséges kiterjesztése irányított gráfokra a *perzisztencia*. A [7] cikkben hatékony algoritmust mutatunk annak tesztelésére, hogy irányított gráfok bizonyos osztályai perzisztensek-e a síkban.

Globálisan merev gráfok és szerkezetek

A (G, p) d-dimenziós szerkezet *globálisan merev*, ha az adott élhosszakra nézve a realizáció globálisan is egyértelmű, azaz minden más d-dimenziós szerkezet ezen élhosszakkal az eredetivel egybevágó. Természetesen minden globálisan merev szerkezet merev, fordítva azonban ez nem mindig érvényes. Generikus, azaz kellően általános helyzetű szerkezetek esetén a globális merevség is csak a G gráftól függ. Ennek igazolása jóval nehezebb a merevségre vonatkozó megfelelő állításnál és a $d \geq 3$ esetre ez csak 2007 óta ismert. A merevséggel való kapcsolatra Hendrickson mutatott rá, aki igazolta, hogy egy d-dimenziós globálisan merev gráf $(d+1)$-összefüggő és *redundánsan merev*, azaz bármely élét elhagyva is merev. A $d = 2$ esetben ezek a feltételek elégségesek és jellemzik a globális merevséget. Ezt egy korábbi cikkben igazoltuk Bill Jacksonnal. A $d \geq 3$ esetben nem ismert a pontos jellemzés.

Általánosabb fogalmat vizsgáltunk a [3] cikkben, ahol a szerkezet egy pontpárját *globálisan linkeltnek* neveztük, ha távolságuk minden, a megfelelő élhosszakkal rendelkező realizációjában ugyanakkora. A globális linkeltségre már nem érvényes, hogy generikus realizáció esetén csak a gráftól függ. A gráf egy pontpárját akkor mondjuk globálisan linkeltnek, ha minden generikus realizációban globálisan linkelt. Elégséges feltételt adtunk egy gráf valamely pontpárjának globális linkeltségére, mely számos esetben pontos jellemzéshez vezetett. Ezen új fogalom segítségével rövid bizonyítást adtunk Connelly egy tételére, mely a globálisan merev gráfok jellemzésében kulcsfontosságú.

Ezen cikk egyik fejezete és a [15] cikk a globális merevség lehetséges alkalmazásaival foglalkozik szenzor hálózatok lokalizációs problémáiban. Itt az alapfeladat a hálózat csúcspárjainak távolságára és a csúcsok helyzetére vonatkozó részleges információból az összes csúcs pontos helyének meghatározása. Amennyiben a hálózat gráfja globálisan merev és kellő számú csúcs pontos helye ismert, a kapott megoldás egyértelmű lesz. A [3] cikk arra ad feltételeket, hogy bizonyos csúcsok mikor lokalizálhatók egyértelműen, ezzel nagymértékben általánosítva Whiteley és szerzőtársai korábbi megfigyeléseit. A [15] cikkben azt vizsgáljuk, hogy az ismert csúcstávolságok gráfját rögzítettnek tekintve hogyan kell minimális számú csúcsot kijelölni úgy, hogy az ő helyzetüket pontosan ismerve mindig egyértelmű megoldást kapjunk. Ezt a problémát Ye egy nemrég megjelent cikke is felveti. A globálisan merev gráfokra és egy gráf merevségi matroidjára vonatkozó korábbi strukturális eredményeinkre is támaszkodva egy hálózat minimális számú referenciapontjának meghatározására egyszerű és hatékony determinisztikus közelítő algoritmust adtunk. Ebben a témában egy új, a lokalizációs problémáról szóló könyv egyik fejezetének megírására kértek fel [1].

Foglalkoztunk azzal a kérdéssel is, hogyan lehet (nem generikus) globálisan merev szerkezetet készíteni egy globálisan merev gráfhoz. Megmutattuk, hogy a *vertex split* művelet megőrzi a kétdimenziós globális merevséget. Ez Whiteley és Cheung sejtésére adott választ. Ezek az eredmények a [11] cikkben jelennek meg.

Legújabb kutatásainkban azt az általánosabb kérdést vizsgáltuk, amelyben néhány pontpárra az irány, néhány párra a távolság rögzített, és a kérdés az, egy ilyen vegyes szerkezet mikor globálisan merev. Egy speciális gráfosztály (a megfelelő matroid körei) esetén erre pontos jellemzést adtunk [14].

Tudományos együttműködés, előadások

Az OTKA támogatás segítségével folytattam a tudományos együttműködést a témakör vezető kutatóival (Bill Jackson, Bob Connelly, Walter Whiteley). Két doktorandusz témavezetője voltam, akik a pályázat témájához kötődő feladatokon dolgoztak (Fekete Zsolt, Szabadka Zoltán).

2005 és 2008 között körülbelül 20 nemzetközi konferencián vettem részt, valamint tartottam előadásokat külföldi egyetemeken. Ezek közül néhány, amelyeken meghívott előadóként ill. látogatóként vettem részt: Graph connectivity seminar (Hiroshima, Japán, 2005. február), 4th Japanese Hungarian symposium on discrete mathematics and its applications (Budapest, 2005. június), ADONET-COST Spring school on combinatorial optimization and communication networks (Budapest, 2006. március), Workshop on flexibility of polyhedra and frameworks (Erwin Schrödinger Institut, Bécs, Ausztria, 2006. április), Equipe Combinatoire, Université Paris 6 (Párizs, Franciaország, 2006. június), RIMS (Kyoto, Japán, 2006. november), Hiroshima University (Hiroshima, Japán, 2007. február), Oberwolfach (Németország, 2007. március és 2008. november).

2008. júliusában egyik szervezője voltam a Recent progress in rigidity theory workshopnak (Banff, Kanada), melyre a terület vezető kutatóit hívtuk meg. A kutatások eredményeit rangos nemzetközi folyóiratokban jelentettem meg (lásd a következő publikációs listát).

Publikációk (minden esetben az OTKA szám feltüntetésével):

Könyvfejezet:

[1] B. Jackson, T. Jordán, Graph theoretic techniques in the analysis of uniquely localizable sensor networks, in: G. Mao, B. Fidan (eds), Localization algorithms and strategies for wireless sensor networks, IGI Global, 2009, in press.

Folyóiratban:

[2] Z. Fekete, T. Jordán, Rigid realizations of graphs on small grids, Computational Geometry, Vol. 32, 216-222, 2005.

[3] B. Jackson, T. Jordán, Z. Szabadka, Globally linked pairs of vertices in equivalent realizations of graphs, Discrete and Computational Geometry, Vol. 35, 493-512, 2006.

[4] B. Jackson, T. Jordán, On the rank function of the 3-dimensional rigidity matroid, International Journal on Computational Geometry and Applications, Vol. 16, Nos. 5-6 (2006) 415-429.

[5] B. Jackson, T. Jordán, Rigid components in molecular graphs, Algorithmica, Vol. 48, No. 4 (2007) 399-412.

[6] B. Jackson, T. Jordán, On the rigidity of molecular graphs, Combinatorica 28 (6), 645-658, 2008.

[7] J. Bang-Jensen, T. Jordán, On persistent directed graphs, Networks, Vol. 52, Issue 4, 271-276, December 2008.

[8] B. Jackson, T. Jordán, Pin-collinear body-and-pin frameworks and the molecular conjecture, Discrete and Computational Geometry 40: 258-278, 2008.

[9] B. Jackson, T. Jordán, Brick partitions of graphs, Discrete Mathematics, in press.

[10] T. Jordán, A. Recski, Z. Szabadka, Rigid tensegrity labelings of graphs, European J. Combinatorics, in press.

[11] T. Jordán, Z. Szabadka, Operations preserving the global rigidity of graphs and frameworks in the plane, Computational Geometry, in press.

[12] B. Jackson, T. Jordán, A sufficient connectivity condition for generic rigidity in the plane, Discrete Applied Mathematics, in press.

[13] B. Jackson, T. Jordán, Generic rigidity of body-bar-and-hinge frameworks, European J. Combinatorics, to appear.

[14] B. Jackson, T. Jordán, Globally rigid circuits of the direction-length rigidity matroid, J. Combinatorial Theory, Ser. B., to appear.

Konferencia kiadványban:

[15] Z. Fekete, T. Jordán, Uniquely localizable networks with few anchors, Proc. 4th Japanese Hungarian symposium on discrete mathematics and its applications, Budapest, June 2005, pp. 144-148.

[16] S. Iwata, T. Jordán, Orientations and detachments of graphs with prescribed degrees and connectivity, Proc. 5th Hungarian-Japanese symposium on discrete mathematics and its applications, Sendai, April 2007, pp. 149-153.

Egyéb:

[17] B. Jackson, T. Jordán, Rank and independence in the rigidity matroid of molecular graphs, Egerváry Research Group, Budapest, TR-2006-02.

Megjegyzés: a fenti cikkek többségének első változata megjelent az MTA-ELTE Egerváry Jenő Kombinatorikus Optimalizálási Kutatócsoport Technical Report sorozatában és elérhető a `www.cs.elte.hu/egres/` web oldalon.

Budapest, 2009. február 27.