

# Részletes szakmai zárójelentés az OTKA TS049788 pályázathoz

2008. november 27.

Az ELTE Operációkutatási tanszékén folyó kombinatorikus optimalizálási kutatások keretét több egymással párhuzamosan futó pályázat és egyéb kutatástámogatási szerződés határozza meg. Mindezek alapja egyrészt az MTA-ELTE Egerváry Jenő Kutatócsoport (EGRES), amelynek keretében három fiatal kutató teljes állású foglalkoztatására van lehetőség valamint az ELTE TTK matematika doktori iskolája: átlagban 5-6 ösztöndíjas doktorandusz hallgató dolgozik nálunk kombinatorikus optimalizálási területen. Az elméleti vizsgálatok gyakorlati kicsatolását támogatja a France Telecommal kötött kutatási szerződés, az ETIK (Egyetemközi Távközlési és Informatikai központ) és a Siemens. 2004 és 2007 között egy európai Marie Curie pályázat (ADONET) résztvevőiként jelentős támogatást kaptunk fiatal kutatóink külföldi látogatásainak elősegítésére és számos külföldi kutató dolgozott nálunk hosszabb-rövidebb ideig. Működésünk alapvető támasza egy jövőre befejeződő kutatási OTKA pályázat. Ebbe a háttérbe illeszkedett az OTKA szóban forgó Tudományos Iskola pályázata, amely pótolhatatlan szerepet játszott a csoportunk eredményes működésében.

Az elmúlt közel másfél évtizedre visszanyúló tapasztalat szerint a doktori iskola által nyújtott három ösztöndíjas esztendő még a legkiválóbbaknak sem elegendő a dolgozat elkészítéséhez, ehhez tipikusan még egy évre szükség van. Az OTKA pályázat épp azt biztosította, hogy a harmadik évet követően a vizsgálataik csúcspontján lévő ifjú kutatóink a megszokott környezetben folytathassák munkájukat. Nem kevesebb, mint hat embernek jelentett ez döntő segítséget. Közülük Szabó Jácint, Pap Gyula és Fekete Zsolt már megszerezte a fokozatát. Bernáth Attila, Végh László és Makai Márton pedig egész közel vannak itteni kutatásaik lezárásához és a doktori dolgozat benyújtásához. Az volt a jellemző, hogy az OTKA pályázat keretében foglalkoztatottak egy idő után átkerültek a fent említett EGRES akadémiai kutatócsoportba (Szabó, Pap, Makai, Végh, Bernáth) majd onnan többen is kitűnő állásokba mehettek: Pap az USA-ban posztdoktor, Makai a Google munkatársa lett Zürichben, Fekete és Szabó a Sztaki egy sikeres kutatócsoportjának tagja.

Ifjú kutatóink munkáikat rangos nemzetközi konferenciákon mutathatták be, eredményeiket tekintélyes szaklapokban publikálták. Több, mint 30 olyan publikáció keletkezett, amely szorosan köthető az OTKA pályázathoz. Jelentős sikerként értékelhető, hogy mind Pap, mind Szabó kutatási eredményeiért elnyerte a Bolyai Társulat Grünwald Géza emlékdíját, míg Pap Gyula megkapta az MTA nagypresztizsú Ifjúsági Díját is! Kutatócsoportunk eredményességét fémjelzi, hogy az elmúlt néhány év során Jordán Tibor Erdős Díjat, Király Tamás Grünwald Díjat, Jüttner Alpár pedig Farkas Gyula Díjat kapott: az ő jelenlétük jelentős motiváló erőt jelentett az ifjabbaknak.

Az alábbiakban részletesen ismertetjük a résztvevők projektben végzett tevékenységét, a résztvevők neve szerint abc sorrendben.

## 1. Bernáth Attila

Bernáth Attila 2005-ben, 2007-ben és 2008-ban dolgozott a projektben. A 2005-ös évben először olyan halmazrendszerek maximális méretét vizsgálta, amelyek nem tartalmaznak két előírt

méretű teljesen diszjunkt halmazláncot. A kérdés egy egyszerűbb változatára a választ a Matematikai Lapokban publikálta ([1]), majd az általános verziót közösen oldották meg Gerbner Dániellel, ebből született később a [5] publikáció. A másik téma, amivel foglalkozott az egyensúlyi irányítások vizsgálata. A fogalmat Nash-Williams vezette be 1960-ban. Ebben a témakörben Bernáthnak olyan régóta nyitott problémák nehézségét sikerült bebizonyítania, mint a *minimális súlyú egyensúlyi irányítás* vagy a *fokszámkorlátos egyensúlyi irányítás* keresésének a problémája. Eredményeit először az [2] technical reportban publikálta, majd mások eredményeivel közösen benyújtották a Discrete Optimization nevű folyóirathoz, ebből született a [6] közlemény. Később egy további, ide kapcsolódó kérdés NP-teljségét sikerült kimutatnia Gwenaél Joret-el közösen, aki egy ADONET ösztöndíjjal dolgozott Budapesten. A kérdés arra vonatkozik, hogy vajon egy vegyes gráf irányítását be tudjuk-e fejezni úgy, hogy egyensúlyi irányítást kapjunk. Dolgozatukat [7]-ben publikálták. Bernáth egy korábbi eredményét is ebben az időszakban publikálta a Matematikai Lapokban [3].

A 2007-2008-as években Bernáth Attila főleg *szimmetrikus ferdén szupermoduláris halmazfüggvények* fedésével kapcsolatos kérdéseket vizsgált Király Tamással közösen. Ilyen problémák élösszefüggőség növelési feladatok kapcsán vetődnek fel. Először azt az esetet vizsgálták, amikor hipergráffal akarjuk fedni a fenti halmazfüggvényt. Sikerült Szigeti Zoltán eredményeit több irányban is általánosítaniuk, munkájukat az [8] riportban írták le, amit tudományos folyóiratban való közlésre a közeljövőben nyújtanak be.

A másik vizsgált eset az, amikor csak gráféleket engedünk meg a halmazfüggvény fedésére. A szokásos technika ebben a témakörben az úgynevezett *leemelés* művelete. Ehhez a művelethez sikerült egy olyan újfajta megközelítést találniuk, ami a tárgyalást jelentősen megkönnyítette, ezáltal leegyszerűsítette ismert tételek bizonyítását, világosabbá tette ezek egymáshoz való viszonyát és új eredmények felfedezéséhez is vezetett. Példaként említjük Mader leemelési tételét, a japán Ishii és Hagiwara által vizsgált *node-to-area* összefüggőség növelés témakörét és a Bang-Jensen, Jackson és Frank által vizsgált globális élösszefüggőség növelési problémát vegyes gráfokban. Az ezzel kapcsolatos eredményeikről Bernáth előadást tartott az IPCO 2008 konferencián (Bertinoro, Olaszország). A dolgozatuk megjelent a konferencia kiadványában [9], a folyóiratban való publikálás jelenleg elbírálás alatt áll. Sikerült továbbá Benczúr és Frank absztrakt, keresztező szupermoduláris függvény gráfokkal való fedéséről szóló tételére is egyszerűbb bizonyítást adni, ami rövidesen megjelenik az EGRES technical reports sorozatban.

Szintén ebben az időben született meg a [4] folyóirat publikáció egy korábbi eredményből. A dolgozatban egyes forrás-telepítési feladatok hipergrafikus általánosítása van kidolgozva. 2007 júniusában Bernáth részt vett a XXVII. Magyar Operációkutatási Konferencián Balatonöszödön, ahol előadást tartott ebben a témában.

Fontos megemlíteni, hogy a 2007-2008-ban született eredmények tették lehetővé, hogy Bernáth Attila 2008 februárjában elindíthassa a doktori eljárást. 2008 júniusában doktori szigorlatot tett és elkezdte a doktori disszertációjának a megírását.

## 2. Fekete Zsolt

Fekete Zsolt Szegő Lászlóval közösen azt a kérdést vizsgálta, hogy hogyan lehet a  $k$  éldiszjunkt feszítőfa uniójaként előálló gráfokra vonatkozó előállítási tételt a  $[k, l]$ -ritka gráfokra általánosítani. Ha  $0 \leq l \leq k$ , akkor a  $[k, l]$ -ritka gráfok osztálya azon gráfokat tartalmazza, melyek minden  $X$  csúcshalmaza legfeljebb  $k|X| - l$  élet feszít. A  $[k, l]$ -ritka gráfok osztálya bizonyos merevségi kérdések vizsgálatakor merül fel.

Az eredményt Fekete Zsolt előadta a Claude Berge emlékére rendezett *Graph Theory in Paris* konferencián, megjelent a konferencia anyagából válogatott lektorált cikkgyűjteményben és publikálták a TR-2005-05 számú EGRES Technical Reportban [14].

Fekete Zsolt Jordán Tiborral közösen vizsgálta azt a kérdést, hogy mi azon csúcsok minimális száma, melyeknek rögzítésével egy gráf globálisan merevvé tehető. Globálisan merevnek

nevezünk egy gráfot, ha egy algebrailag független koordinátákkal való realizációjához nem létezik egy másik realizáció, melyben az élek hossza ugyanannyi mint az előző realizációban, de nem egybevágó vele. Azaz, ha egy algebrailag független koordinátákkal való realizációban az élhosszok meghatározzák a csúcsok koordinátáit egybevágóság erejéig. A globális merevségre ismert Jordán Tibor és Bill Jackson kombinatorikus karakterizációja, ami lehetőséget ad a feladat kombinatorikus megfogalmazására. A kérdést az úgynevezett szenzor-hálózatokbeli helymeghatározási probléma motiválja. Egy szenzor-hálózatban a szenzorok közötti bizonyos távolságok mérhetőek, ugyanakkor a szenzorok pontos koordinátáinak mérése költséges. Ekkor fontos azon csúcsok számának minimalizálása, amelyek pozícióinak megmérése meghatározza az összes pozíciót. A vizsgált kérdésre adtak egy 2-approximációs algoritmust.

Az eredményt Fekete Zsolt előadta az ICALP 2006 konferencia keretein belül rendezett ALGOSENSORS 2006 workshopon, és megjelent a Lecture Notes in Computer Science 4240 kötetben [13].

Fekete Zsolt vizsgálta azt az optimalizálási problémát, hogy mi a minimális száma azon csúcsoknak, melyek rögzítésével egy gráf generikusan merevvé tehető a síkon, valamint, hogy mi a minimális száma azon csúcsoknak, melyek összehúzása után a gráf élhalmaza lefedhető lesz két éldiszjunkt feszítőfával. A kérdések a forrás-elhelyezési problémák változatai. Lényegében ekvivalensek azzal, amikor a gráfhoz egy minimális méretű klikket akarunk adni úgy, hogy a kapott gráf generikusan merev legyen, illetve lefedhető legyen két éldiszjunkt feszítőfával. Ezen optimalizálási feladatokra adott Fekete Zsolt jó karakterizációt, illetve egy polinomiális algoritmust, amely meghatározza az optimumot.

Az eredményt Fekete Zsolt előadta a 4. Japán-Magyar konferencián [10], publikálta az Operations Research Letters folyóiratban [12] és megjelent az EGRES Technical Report sorozatban [11].

Részben a fenti eredmények tették lehetővé, hogy Fekete a későbbiekben elkészíthesse és megvédhesse a doktori disszertációját és megszerezhesse a PhD fokozatot.

### 3. Makai Márton

Makai Márton a 2005-ös évben dolgozott egy rövid ideig a pályázatban. Ezalatt a  $k|X|-1$  típusú matroidokra vonatkozó matroid matching feladatokat vizsgálta. Ezeket sikerült egy általánosabb matroidosztályban elhelyezni, így bizonyos paritásos irányítási feladatokat és Mader pontdiszjunkt útjainak feladatát is sikerült egy közös rendszerbe foglalni. Az eredményről előadást tartott a IV. Japán-Magyar Diszkrét Matematikai Szimpóziumon, és a 2005-ös EUROCOMB-on Berlinben, és ezek megjelentek ezen konferenciák kiadványaiban is (lásd az [21] és az [20] publikációkat).

Részben a fenti eredményeknek köszönhetően Makai 2008-ra elkészítette doktori disszertációját, amit a közeljövőben szeretne megvédeni.

### 4. Pap Gyula

Pap Gyula 2005 április 1- 2006 december 31-ig dolgozott a kutatócsoportban az OTKA TS049788 által finanszírozott tudományos segédmunkatársi pozícióban, továbbá az ezt követő időszakban több konferenciára való kiutazását is az OTKA támogatta. Pap Gyula 2007 folyamán Frank András témavezetésével PhD doktori fokozatot szerzett az ELTE TTK Matematika Doktori Iskolájában, a kapcsolódó kutatási eredményeit a kutatócsoport támogatásával publikálta konferenciákon és folyóiratokban, melyeket az alábbiakban részletezünk. Ebben az időszakban nyerte el a Grünwald Emlékérmét a Bolyai Társulattól, illetve az Akadémiai Ifjúsági Díjat az MTA-tól. 2008 júliusa óta az amerikai Cornell egyetemen dolgozik posztdoktori kutatóként.

Pap Gyula kutatásának középpontjában a maximális párosítás feladatra vonatkozó ismert alternáló utas algoritmus egy újfajta megközelítése állt, melynek segítségével több rokon feladatra

elsőként adott hatékony algoritmust, több más feladat esetén pedig a korábbinál jelentősen egyszerűbb szerkezetű hatékony algoritmust tudott adni. Ennek az algoritmikus technikának az "Alternating paths revisited I-IV" sorozat adott helyet a kutatócsoport technical report sorozatában, melyek egy összefoglalója a nemzetközi Mathematical Programming folyóiratban is megjelent [23]. A kutatás kiindulópontja az útpárosítás feladat volt, melynek általánosításaként a páros faktor feladatra sikerült adni hatékony és egyszerű algoritmust. A páros faktor feladat esetén bevezette az odd-cycle-symmetric gráf fogalmát, melyet számos helyen hivatkoznak azóta. Erre az összefoglaló munkájára hivatkozott Harvey, aki a téma algebrai aspektusain dolgozott, Iwata és Takazawa, akik egy matroidos általánosítást oldottak meg hasonló technikával a SODA konferencián, Takazawa, aki a páros faktor feladatra és a négyzetmentes feladatra adott egy súlyozott algoritmust, illetve Murota, aki az odd-cycle-symmetric gráfokról kimutatta, hogy a páros faktorok egy diszkrét konvex függvényt definiálnak. Ebbe az vonulatba tartozik egy további algoritmus is, melyet a Makai Mártonnal és Szabó Jácinttal közös IPCO '07 cikkükben [22] publikáltak. Ide tartozik az összefoglaló munkája is, melyet a Mathematical Programming folyóiratban publikált, ahol összeveti a párosításra, páros faktorra, és négyzetmentes 2-faktorra vonatkozó algoritmusát.

Ettől a iránytól némileg eltér a Combinatoricában megjelent [24] cikke, melyben rövid bizonyítást ad permutáció-címkés utak pakolására, mellyel általánosítja Chudnovskyék egy évvel korábbi eredményét. Erre a permutáció-címkés útpakolási feladatra adott algoritmust a cikk sorozat negyedik tagjában, melyet később a Discrete Mathematics-ben is publikált [25]. További, a technical report sorozatban publikált eredményei az időszakban: megoldotta Schrijver kérdését, hogy igaz-e az, hogy minden Mader matroid gammoid? A holland Dion Gijswijttal, aki a kutatócsoport vendége volt 2006-ban, erősen polinomiális algoritmust adtak a súlyozott matroid tört párosítás feladatra, mellyel Vande Vate egy korábbi súlyozatlan eredményét általánosítják. Elsőként adott erősen polinomiális algoritmust a pontkapacitásos félegész multifolyam feladatra. A STOC '07-en bemutatta egy proximity lemma típusú eredményét a pontkapacitásos egész multifolyam feladatra, mely az előbbivel együtt egy erősen polinomiális algoritmust is bizonyít.

Számos nemzetközi konferencián képviselte kutatócsoportunkat. Kiemeljük az MTA Felolvasótermében rendezett "Ötven Éves a Magyar Módszer" konferencián adott előadását, illetve az ötödik japán-magyar konferencián (Sendai, 2005 április) adott meghívott előadását. Háromszor vett részt az oberwolfachi kutatóközpontban rendezett rangos konferencián, kétszer a kombinatorikus optimalizálás, illetve egyszer a gráfelmélet témájában. Három munkájával is szerepelt (egyszer Makai és Szabó társszerzőjeként) a kombinatorikus optimalizálás legrangosabbnak számító IPCO konferenciáján, illetve egy munkájával a STOC-on is szerepelt, 2005-ben meghívást kapott a dániai gráfelmélet találkozóra Nyborg-ba, 2008-ban pedig a kétévente megrendezett aussoisi kombinatorikus optimalizálás találkozóra. További konferenciaelőadások: EUROCOMB 2005 (Berlin), ICGT 2005 (Hyeres). Az amszterdami CWI meghívásában két hetet dolgozott Gijswijttal, melyet 2008-ban EGRES technical report formájában publikáltak.

## 5. Szabó Jácint

Szabó Jácint a 2006-os évben főleg gráf-pakolásokat valamint a matroid partner problémát vizsgálta. Emellett benyújtotta doktori dolgozatát a gráf-pakolások témakörében.

Szabó J., Hartvigsen és Hell a [17] dolgozatban bevezetik és számos eredményt leírnak a  $k$ -rész pakolási problémáról. A  $k$ -rész pakolási problémában olyan egyszerű irányítatlan gráfokkal akarunk pakolni, amelyek maximális foka  $k$ . Ezen gráfokat hívjuk  $k$ -részeknek. A szerzők egy Edmonds-típusú polinomiális algoritmust, valamint egy Berge–Tutte típusú struktúrátételt adnak a problémára. Ez a pakolási probléma egyben Loebel és Poljak egy sejtését is cáfolja, miszerint ha  $\mathcal{G}$  véges, akkor a globális  $\mathcal{G}$ -pakolási probléma pontosan akkor polinomiális, ha a pakolások által fedhető csúcshalmazok egy matroid függetlenjeit alkotják. Ezen ellenpélda ismeretében Loebel és Poljak a  $K_2 \in \mathcal{G}$  kikötéssel módosították sejtésüket.

Szabó J. a [27] dolgozatban az előírt fokú részgráf problémával foglalkozik. Hogy Lovász és Cornuéjols az előírt fokú részgráf problémára adott struktúratételei jó karakterizációk legyenek, ahhoz el kell tudnunk dönteni egy gráfról, hogy kritikus-e. Ez a feladat sajnos lényegében azonos nehézségű az eredetivel. A [27] dolgozat két megközelítést mutatja be e problémának. Egyfelől a fokszám-előírásokat egy segédgráffal visszavezeti a lokális  $K_2$  és faktorkritikus gráf pakolási problémára. Az ilyen, ún. reprezentálható fokszám-előírások karakterizációja nyitott volt. Szabó belátja, hogy egy előírás pontosan akkor reprezentálható, ha minden lyuka azonos paritású. Ez a módszer lehetővé teszi, hogy a  $K_2$  és faktorkritikus gráf pakolási problémára ismert jó karakterizációt visszahúzhassuk az előírt fokú részgráf problémára — feltéve, hogy minden előírás reprezentálható. Ezzel a technikával Pap Gy. egy eredményét felhasználva az élsúlyozott előírt fokú részgráf probléma is megoldható a reprezentálható esetben. Egy másik megközelítés a kritikus gráfok karakterizációjára Sebő lokális javító technikáján alapszik, amivel a feladatot egy olyan előírt fokú részgráf problémára vezethetjük vissza, ahol minden fokszám-előírás pepita, azaz egy intervallum azonos paritású elemeiből áll.

Ezen technikát ugrácsokra (ismert angol nevükön jump systemekre) kiterjesztve Szabónak [28] sikerült igazolni Recski András egy 25 éves, a matroid partner problémával kapcsolatos sejtését.

Szabó Jácint és Makai Márton [19] a matroid partner probléma vizsgálata során megmutatták, hogy az úgynevezett ntdc-mentes polimatroidokban egy partíciós formula karakterizálja a maximális matroid párosítás méretét, azaz Lovász eredeti formulájánál jóval egyszerűbb karakterizáció létezik ebben a speciális esetben. Ezen eredménynek alkalmazását adták merevségre, valamint az előírt befok-paritású irányításra.

Szabó emellett a kombinatorikus Nullstellensatz vizsgálatával is foglalkozott, amiből egy cikk született Frank András és Lap Chi Lau társszerzőkkel [15].

Szabó a [26] dolgozatban egy újfajta probléma-típussal, a telekommunikációs hálózatok által motivált kiterjesztési problémával foglalkozik. Ebben a feladatban két igénygráf minél hasonlóbb útkiosztását keressük, azzal a céllal, hogy az útkiosztás váltását megkönnyítsük. A feladat összes definiált változata NP-teljes, de e dolgozat teljes megoldást ad gyűrű hálózatra és csillag igénygráfra.

Szabó a [29] dolgozatban a Kaneko által bevezetett  $m$ -fa pakolási feladatot vizsgálja. Egy  $m$ -fa  $m$ -fa, ha minden csúcsának legfeljebb  $m$  levél-szomszédja van. Azzal a szándékkal, hogy e feladatot a gráf-pakolás elméletébe integrálja, Szabó egy hatékonyabb bizonyítási technikát használ mint Kaneko, amivel Gallai–Edmonds és Berge–Tutte típusú tételeket valamint matroidos eredményt bizonyít a feladatra.

Szabó a 2006-os évben elkészítette PhD disszertációját Frank András témavezetése mellett, melyet a 2007-es évben sikeresen meg is védett. A 2007-es évben Grünwald Emlékérmeket kapott a Bolyai Társulattól. Részt vett a 8-ik ICTON konferencián (Nottingham, Anglia) és a 2007-es IPCO konferencián (Ithaca, NY), ahol eredményei bemutatásra kerültek.

## 6. Végh László

Végh László tevékenysége a 2007-08. időszakban három főbb téma köré rendeződik. Kovács Erikával közösen sikerült konstruktív karakterizációval leírniuk a  $(k, \ell)$ -élösszefüggő digráfokat. Konstruktív karakterizáció alatt egy adott  $\mathcal{H}$  gráfosztály olyan jellemzését értjük, ami  $\mathcal{H}$  kisszámú egyszerű eleméből néhány egyszerű lépés segítségével állítja elő az osztály összes elemét. A  $(k, \ell)$ -élösszefüggő digráfok a  $k$ -élösszefüggő digráfok és a gyökeresen  $k$ -élösszefüggő gráfok fogalmának közös általánosítását adják. A rájuk vonatkozó konstruktív karakterizáció Frank András egy régebbi sejtése volt, amely általánosította Mader  $k$ -élösszefüggő digráfokra vonatkozó karakterizációját. A  $(k, \ell)$ -élösszefüggő digráfok szoros kapcsolatban állnak az ún.  $(k, \ell)$ -partícióösszefüggő irányítatlan gráfokkal; tételük következményeként ezekre is konstruktív jellemzés adódik. Az eredményt a [18] technical report tartalmazza, és hamarosan benyújtják publikálásra. Erről és

általában véve konstruktív karakterizációkról előadást tartott Kyotóban a RIMS Combinatorial Optimization and Discrete Algorithms nevű workshopján 2008. júniusában, valamint a Bonn Workshop on Combinatorial Optimization konferencián 2008. novemberében.

Összefüggőség-növeléssel kapcsolatban tanulmányozta a lokális élösszefüggőség növelésének problémáját, partíciós feltétellel. A lokális élösszefüggőség-növelés kérdésében adott egy gráf, és bármely két pontja közt egy élösszefüggőségi igény (melyek különbözőek is lehetnek). Szeretnénk minimális számú új élet adni a gráfhoz úgy, hogy mindegyik összefüggőségi igényt kielégítsük. Az optimális növelő élhalmaz megtalálására ismert polinomiális algoritmus. Amennyiben globális élösszefüggőség növelést tekintünk (tehát ha az igény bármely két pont közt ugyanannyi), akkor még partíciós megszorítás mellett is létezik polinomiális algoritmus. Ez a megszorítás azt jelenti, hogy a adott a gráf ponthalmazán egy partíció, és csak a különböző osztályok közt futó éleket használhatunk. Végh László ennek lehetséges általánosítását vizsgálta lokális összefüggőségre. Korábban Szigeti Zoltánnal approximációs algoritmust adtak a feladatra; az általános probléma megoldásának leírásán jelenleg is dolgozik.

Tobias Harksszal, a berlini Műszaki Egyetem munkatársával végzett közlekedési játékokkal kapcsolatos kutatásokat. A közlekedési játékok olyan hálózatok forgalmát modellezik, ahol minden élen az áthaladás ideje az ott található folyam mennyiségének függvénye. Ilyen hálózatokkal kapcsolatban természetes fogalom a Nash-egyensúly és az optimális megoldás viszonyát becsülni. Harksszal közösen online szituációban vizsgálták az ilyen játékok különböző változatait: az igények nem egyszerre jelennek meg, hanem sok, egymásra következő játékban; viszont a korábbi játékok szereplői nem változtathatnak stratégiájukon a későbbiek döntésének függvényében. Eredményeikről szóló cikket a CAAN 2007 konferencián mutatták be, megjelent a konferencia kiadványában [16], folyóirat változata jelenleg elbírálás alatt áll.

## Hivatkozások

- [1] Attila Bernáth. On a problem in extremal set theory. *Mat. Lapok (N.S.)*, 10(2):2–4 (2005), 2000/01. (Hungarian, with English summary).
- [2] Attila Bernáth. Hardness results for well-balanced orientations. Technical Report TR-2006-05, Egerváry Research Group, Budapest, 2006. [www.cs.elte.hu/egres](http://www.cs.elte.hu/egres).
- [3] Attila Bernáth. A representation for intersecting families. *Mat. Lapok (N.S.)*, 13(1):6–12, 2006/07. (Hungarian, with English summary).
- [4] Attila Bernáth. Source location in undirected and directed hypergraphs. *Oper. Res. Lett.*, 36(3):355–360, 2008.
- [5] Attila Bernáth and Dániel Gerbner. Chain intersecting families. *Graphs Combin.*, 23(4):353–366, 2007.
- [6] Attila Bernáth, Satoru Iwata, Tamás Király, Zoltán Király, and Zoltán Szigeti. Recent results on well-balanced orientations. *Discrete Optimization*, 5(4):663–676, 2008.
- [7] Attila Bernáth and Gwenaél Joret. Well-balanced orientations of mixed graphs. *Inf. Process. Lett.*, 106(4):149–151, 2008.
- [8] Attila Bernáth and Tamás Király. Covering symmetric skew-supermodular functions with hyperedges. Technical Report TR-2008-05, Egerváry Research Group, Budapest, 2008. [www.cs.elte.hu/egres](http://www.cs.elte.hu/egres).
- [9] Attila Bernáth and Tamás Király. A new approach to splitting-off. In *Proceedings of the 13th International Conference on Integer Programming and Combinatorial Optimization, IPCO 2008*, volume 5035 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 401–415. Springer, 2008.

- [10] Zsolt Fekete. Source location problems with rigidity and tree packing requirements. In *Proceedings of the 4th Japanese-Hungarian Symposium on Discrete Mathematics and Its Applications, Budapest*, June 2005.
- [11] Zsolt Fekete. Source location with rigidity and tree packing requirements. Technical Report TR-2005-04, Egerváry Research Group, Budapest, 2005. [www.cs.elte.hu/egres](http://www.cs.elte.hu/egres).
- [12] Zsolt Fekete. Source location with rigidity and tree packing requirements. *Oper. Res. Lett.*, 34(6):607–612, 2006.
- [13] Zsolt Fekete and Tibor Jordán. Uniquely localizable networks with few anchors. In *ALGO-SENSORS 2006, Lecture Notes in Computer Science 4240: 176-183*, 2006.
- [14] Zsolt Fekete and László Szegő. A note on  $[k, l]$ -sparse graphs. Technical Report TR-2005-05, Egerváry Research Group, Budapest, 2005. [www.cs.elte.hu/egres](http://www.cs.elte.hu/egres).
- [15] A. Frank, L. Chi Lau, and J. Szabó. A note on degree-constrained subgraphs. *Discrete Mathematics*, 308(12):2647–2648, 2008.
- [16] Tobias Harks and László Végh. Nonadaptive selfish routing with online demands. pages 27–45. 2007.
- [17] D. Hartvigsen, P. Hell, and J. Szabó. The  $k$ -piece packing problem. *J. Graph Theory*, 52(4):267–293, 2006.
- [18] Erika Kovács and László Végh. The constructive characterization of  $(k, \ell)$ -edge-connected digraphs. Technical Report TR-2008-14, Egerváry Research Group, Budapest, 2008. [www.cs.elte.hu/egres](http://www.cs.elte.hu/egres).
- [19] M. Makai and J. Szabó. The parity problem of polymatroids without double circuits. *Combinatorica*, 2008. megjelenés alatt.
- [20] Márton Makai. Matroid matching with Dilworth truncation. In Stefan Felsner, editor, *2005 European Conference on Combinatorics, Graph Theory and Applications (EuroComb '05)*, volume AE of *DMTCS Proceedings*, pages 175–180. Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, 2005.
- [21] Márton Makai. Rigid graphs from edge-pairs. In *4th Japanese-Hungarian Symposium on Discrete Mathematics and Its Applications*, pages 199–208, June 2005.
- [22] Márton Makai, Gyula Pap, and Jácint Szabó. Matching problems in polymatroids without double circuits. In Matteo Fischetti and David P. Williamson, editors, *IPCO*, volume 4513 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 167–181. Springer, 2007.
- [23] Gyula Pap. Combinatorial algorithms for matchings, even factors and square-free 2-factors. *Math. Program.*, 110(1):57–69, 2007.
- [24] Gyula Pap. Packing non-returning  $a$ -paths. *Combinatorica*, 27(2):247–251, 2007.
- [25] Gyula Pap. Packing non-returning  $a$ -paths algorithmically. *Discrete Mathematics*, 308(8):1472–1488, 2008.
- [26] J. Szabó. Éldiszjunkt útrenyszer kiterjesztése. *Alk. Mat. Lapok*, 25:119–129, 2008.
- [27] J. Szabó. Good characterizations for some degree constrained subgraphs. *J. Combinatorial Theory, Ser B*, 2008. megjelenés alatt.

- [28] J. Szabó. Matroid Parity and Jump Systems: A Solution to a Conjecture of Recski. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 22:854, 2008.
- [29] J. Szabó. Packing trees with constraints on the leaf degree. *Graphs and Combin.*, 2008. megjelenés alatt.