A geometriai transzformációk egy speciális esete, a külső tájékozás

Závoti József
MTA CSFK GGI
zavoti@ggki.hu

ÖSSZEFOGLALÓ. A geometriai külső tájékozás paramétereit a pontok képkoordinátái és a hozzájuk tartozó tárgy- vagy terepkoordináták között fennálló matematikai összefüggésből lehet meghatározni. A feladat megoldására a gyakorlatban már jól bevált közelítő módszereket léteznek. Ezek a matematikai modellek évtizedek óta használatban vannak. Ebben a cikkben javaslatot teszünk a feladat egy újszerű, egzakt megoldására.

ABSTRACT. The parameters of geometric exterior orientation can be determined from the mathematical relation between the image coordinates of the points and the object or terrain coordinates belonging to them. There exist approximation methods for the solution of this problem which have for decades been successfully applied in the practice. In this work we propose a new and exact solution of the problem.

1. Bevezetés

A természetben létező összefüggéseket, törvényeket általában nemlineáris egyenletekkel lehet leírni, amelyeket a gyakorlatban linearizálva, iterációval szokás megoldani. A matematikai problémák linearizálására, iterációval történő megoldására számtalan példát találunk Závoti (1999) dolgozatában. Bizonyos esetekben előfordulhat, hogy a nemlineáris feladatokra egzakt, korrekt megoldásokat lehet adni linearizálás nélkül is. Awange és Grafarend (2002, 2003) tanulmányaikban a 3D, 7 paraméteres hasonlósági transzformációra adtak egzakt nemlineáris megoldást, amelyet Závoti (2005) és Závoti és Jancsó (2006) cikkek módosítva továbbfejlesztettek. Battha és Závoti (2009a, 2009b) további nemlineáris geodéziai feladatokat oldottak meg analitikusan. A geometriai külső tájékozás nemlineáris megoldásával Jancsó (1994, 2004) és Závoti (2011), Závoti és Fritsch (2011) tanulmányai is foglalkoztak.

2. A külső tájékozás matematikai modellje

A geometriai külső tájékozás térbeli képkoordináta-rendszerének a tárgykoordináta-rendszerbe történő transzformációja hat paraméterrel (a projekciós központ 3 koordinátája és a 3 tengely körüli elforgatás szöge) adható meg.

Egy képpontnak a perspektív leképzése a tárgykoordináta-rendszerbe Luhmann (2000) alapján az alábbi egyenlettel írható le:

$$\begin{bmatrix} X_p \\ Y_p \\ Z_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} + \lambda_p \boldsymbol{R} \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ -z \end{bmatrix}, \qquad (1)$$

ahol

- $[X_p, Y_p, Z_p]^T$ tárgypont koordinátái,
- $[X_0, Y_0, Z_0]^T$ vetítési központ koordinátái,
- λ_p minden pontra egyedi, ismeretlen méretarány,
- $\boldsymbol{R}(\varphi, \omega, \kappa)$ forgatási mátrix,
- $[x_p, y_p, -z]^T$ képvektor és $-z$ kameraállandó,
- $[x_p - x_0, y_p - y_0, -z]^T$ redukált képpont-koordináták, ahol x_0, y_0 a képfőpont koordinátái.

Az $\boldsymbol{R}$ forgatási mátrix három független értékkel paraméterezhető, amely a három koordináta-tengely körüli ismeretlen szögekkel történő elforgatásból adódik.

Az Awange és Grafarend (2002) tanulmányukban a 3D, 7 paraméteres hasonlósági transzformáció megoldása során az $\boldsymbol{R}$ forgatási mátrixot a ferdén szimmetrikus $\boldsymbol{S}$ mátrix felhasználásával a következő módon fejezték ki:

$$\boldsymbol{R} = (\boldsymbol{I}_3 - \boldsymbol{S})^{-1}(\boldsymbol{I}_3 + \boldsymbol{S}), \qquad (2)$$

ahol $\boldsymbol{I}_3$ a 3D egységmátrix. Az $\boldsymbol{S}$ mátrix az a, b és c paraméterekkel az alábbi módon parametrizálható:

$$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix}. \qquad (3)$$

A (2) és (3) összefüggéseket ebben a tanulmányban is felhasználjuk.

3. A méretarány-tényezők meghatározása

Az ismeretlen paraméterek megoldását három lépésben kívánjuk elvégezni, elsőként a méretarány-tényezőket határozzuk meg.

A (2) összefüggés figyelembevételével a (1) egyenletet balról $(\boldsymbol{I}_3 - \boldsymbol{S})$ mátrixszal balról szorozva adódik a következő formula:

$$\begin{bmatrix} 1 & c & -b \\ -c & 1 & a \\ b & -a & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_p \\ Y_p \\ Z_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & c & -b \\ -c & 1 & a \\ b & -a & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} + \lambda_p \begin{bmatrix} 1 & -c & b \\ c & 1 & -a \\ -b & a & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ -z \end{bmatrix}. \qquad (4)$$

A (4) összefüggést írjuk fel 3 különböző pontra.

$$
\begin{array}{llllllllllll}
f_1 := & +X_0 & +cY_0 & -bZ_0 & +\lambda_1 x_1 & -c\lambda_1 y_1 & -b\lambda_1 z & -X_1 & -cY_1 & +bZ_1 & =0 \\
f_2 := & -cX_0 & +Y_0 & +aZ_0 & +c\lambda_1 x_1 & +\lambda_1 y_1 & +a\lambda_1 z & +cX_1 & -Y_1 & -aZ_1 & =0 \\
f_3 := & +bX_0 & -aY_0 & +Z_0 & -b\lambda_1 x_1 & +a\lambda_1 y_1 & -\lambda_1 z & -bX_1 & +aY_1 & -Z_1 & =0 \\
f_4 := & +X_0 & +cY_0 & -bZ_0 & +\lambda_2 x_2 & -c\lambda_2 y_2 & -b\lambda_2 z & -X_2 & -cY_2 & +bZ_2 & =0 \\
f_5 := & -cX_0 & +Y_0 & +aZ_0 & +c\lambda_2 x_2 & +\lambda_2 y_2 & +a\lambda_2 z & +cX_2 & -Y_2 & -aZ_2 & =0 \\
f_6 := & +bX_0 & -aY_0 & +Z_0 & -b\lambda_2 x_2 & +a\lambda_2 y_2 & -\lambda_2 z & -bX_2 & +aY_2 & -Z_2 & =0 \\
f_7 := & +X_0 & +cY_0 & -bZ_0 & +\lambda_3 x_3 & -c\lambda_3 y_3 & -b\lambda_3 z & -X_3 & -cY_3 & +bZ_3 & =0 \\
f_8 := & -cX_0 & +Y_0 & +aZ_0 & +c\lambda_3 x_3 & +\lambda_3 y_3 & +a\lambda_3 z & +cX_3 & -Y_3 & -aZ_3 & =0 \\
f_9 := & +bX_0 & -aY_0 & +Z_0 & -b\lambda_3 x_3 & +a\lambda_3 y_3 & -\lambda_3 z & -bX_3 & +aY_3 & -Z_3 & =0
\end{array}
\qquad (5)
$$

Összesen van kilenc ismeretlenünk (X_0, Y_0, Z_0, a, b, c, λ_1, λ_2, λ_3) és kilenc egyenletünk, így a feladat megoldhatónak tűnik. A nehézség abban rejlik, hogy a feladat az ismeretleneket tekintve nem lineáris. A megoldás folyamán sorozatosan elimináljuk az ismeretleneket. A vetítési központ koordinátáit a megfelelő egyenletek kivonásával kiküszöbölhetjük:

$$
\begin{array}{lllllllllll}
f_{14} := & f_1 - f_4 = & +\lambda_1 x_1 & -\lambda_2 x_2 & -c\lambda_1 y_1 & +c\lambda_2 y_2 & -b(\lambda_1-\lambda_2)z & -X_{12} & -cY_{12} & +bZ_{12} & =0 \\
f_{25} := & f_2 - f_5 = & +c\lambda_1 x_1 & -c\lambda_2 x_2 & +\lambda_1 y_1 & -\lambda_2 y_2 & +a(\lambda_1-\lambda_2)z & +cX_{12} & -Y_{12} & -aZ_{12} & =0 \\
f_{36} := & f_3 - f_6 = & -b\lambda_1 x_1 & +b\lambda_2 x_2 & +a\lambda_1 y_1 & -a\lambda_2 y_2 & -(\lambda_1-\lambda_2)z & -bX_{12} & +aY_{12} & -Z_{12} & =0 \\
f_{47} := & f_4 - f_7 = & +\lambda_2 x_2 & -\lambda_3 x_3 & -c\lambda_2 y_2 & +c\lambda_3 y_3 & -b(\lambda_2-\lambda_3)z & -X_{23} & -cY_{23} & +bZ_{23} & =0 \\
f_{58} := & f_5 - f_8 = & +c\lambda_2 x_2 & -c\lambda_3 x_3 & +\lambda_2 y_2 & -\lambda_3 y_3 & +a(\lambda_2-\lambda_3)z & +cX_{23} & -Y_{23} & -aZ_{23} & =0 \\
f_{69} := & f_6 - f_9 = & -b\lambda_2 x_2 & +b\lambda_3 x_3 & +a\lambda_2 y_2 & -a\lambda_3 y_3 & -(\lambda_2-\lambda_3)z & -bX_{23} & +aY_{23} & -Z_{23} & =0 \\
f_{71} := & f_7 - f_1 = & +\lambda_3 x_3 & -\lambda_1 x_1 & -c\lambda_3 y_3 & +c\lambda_1 y_1 & -b(\lambda_3-\lambda_1)z & -X_{31} & -cY_{31} & +bZ_{31} & =0 \\
f_{82} := & f_8 - f_2 = & +c\lambda_3 x_3 & -c\lambda_1 x_1 & +\lambda_3 y_3 & -\lambda_1 y_1 & +a(\lambda_3-\lambda_1)z & +cX_{31} & -Y_{31} & -aZ_{31} & =0 \\
f_{93} := & f_9 - f_3 = & -b\lambda_3 x_3 & +b\lambda_1 x_1 & +a\lambda_3 y_3 & -a\lambda_1 y_1 & -(\lambda_3-\lambda_1)z & -bX_{31} & +aY_{31} & -Z_{31} & =0
\end{array}
\qquad (6)
$$

ahol az alábbi jelöléseket vezettük be:

$$X_{ij} = X_i - X_j,\ Y_{ij} = Y_i - Y_j,\ Z_{ij} = Z_i - Z_j, \qquad i=1,2,3;\ \ j=\mathrm{mod}(i,3)+1. \qquad (7)$$

Az f_{14}, f_{47}, f_{71} egyenletekből a b paramétert, illetve az f_{25}, f_{58}, f_{82} egyenletekből az a paramétert kifejezve, adódnak az alábbi képletek:

$$
\begin{aligned}
b &= -\left[\lambda_i x_i - X_{ij} - \lambda_j x_j - c(\lambda_i y_i + Y_{ij} - \lambda_j y_j)\right] / \left[Z_{ij} - (\lambda_i - \lambda_j)z\right] \\
a &= +\left[\lambda_i y_i - Y_{ij} - \lambda_j y_j + c(\lambda_i x_i + X_{ij} - \lambda_j x_j)\right] / \left[Z_{ij} - (\lambda_i - \lambda_j)z\right]
\end{aligned}
$$

$$i=1,2,3;\ \ j=\mathrm{mod}(i,3)+1. \qquad (8)$$

Az f_{36}, f_{69}, f_{93} egyenleteket így írhatjuk fel:

$$a(\lambda_i y_i + Y_{ij} - \lambda_j y_j) - b(\lambda_i x_{ij} + X_{ij} - \lambda_j x_j) = Z_{ij} + (\lambda_i - \lambda_j)z,$$

$$i=1,2,3;\ \ j=\mathrm{mod}(i,3)+1. \qquad (9)$$

Helyettesítsük a (8) egyenleteket a (9) összefüggésekbe, néhány elemi átalakítás után a következő formulákhoz jutunk:

$$
\begin{aligned}
&(\lambda_i y_i + Y_{ij} - \lambda_j y_j)\left[\lambda_i y_i - Y_{ij} - \lambda_j y_j + c(\lambda_i x_i + X_{ij} - \lambda_j x_j)\right] \\
&+(\lambda_i x_{ij} + X_{ij} - \lambda_j x_j)\left[\lambda_i x_i - X_{ij} - \lambda_j x_j - c(\lambda_i y_i + Y_{ij} - \lambda_j y_j)\right] = \left[Z_{ij}^2 - (\lambda_i - \lambda_j)^2 z^2\right]
\end{aligned}
$$

$$i=1,2,3;\ \ j=\mathrm{mod}(i,3)+1. \qquad (10)$$

További egyszerűsítések után az alábbi egyenletek adódnak:

$$(\lambda_i x_i - \lambda_j x_j)^2 + (\lambda_i y_i - \lambda_j y_j)^2 + (y_i - \lambda_j)^2 z^2 = X_{ij}^2 + Y_{ij}^2 + Z_{ij}^2$$

$$i=1,2,3;\ \ j=\mathrm{mod}(i,3)+1. \qquad (11)$$

A (11) összefüggéseket részletesen kiírva, az alábbi homogén, másodfokú egyenletrendszer oldandó meg a λ_1, λ_2 és λ_3 ismeretlenekre:

$$\begin{aligned}
&\lambda_1^2(x_1^2+y_1^2+z^2)-2\lambda_1\lambda_2(x_1x_2+y_1y_2+z^2)+\lambda_2^2(x_2^2+y_2^2+z^2)=X_{12}^2+Y_{12}^2+Z_{12}^2\\
&\lambda_2^2(x_2^2+y_2^2+z^2)-2\lambda_2\lambda_3(x_2x_3+y_2y_3+z^2)+\lambda_3^2(x_3^2+y_3^2+z^2)=X_{23}^2+Y_{23}^2+Z_{23}^2\\
&\lambda_3^2(x_3^2+y_3^2+z^2)-2\lambda_3\lambda_1(x_3x_1+y_3y_1+z^2)+\lambda_1^2(x_1^2+y_1^2+z^2)=X_{31}^2+Y_{31}^2+Z_{31}^2\,.
\end{aligned} \tag{12}$$

A (12) egyenletrendszert vagy analitikusan, vagy numerikusan kell megoldani. Paláncz (2012) cikkében a (12) egyenletrendszer megoldását zárt alakban állította elő. Battha és Závoti (2009) tanulmány a Sylvester-rezultáns felhasználásával adta meg hasonló szerkezetű nemlineáris egyenletrendszer megoldását.

Numerikus algoritmussal, például a Mathematica programrendszerrel a megoldások megkaphatók. További nehézség merülhet fel az egyenletrendszer nemlinearitása miatt: egyszerre több megoldás is adódhat. Több megoldás esetén a paraméterek jelentése miatt a komplex gyököket és a negatív megoldásokat ki lehet zárni. A nemlineáris egyenletrendszer pozitív gyökei közül a helyes megoldás kiválasztása speciális geometriai meggondolásokat igényel. Külön tanulmány fogja tárgyalni a módszer általánosítását tetszőleges számú pontra.

4. A forgatási mátrix *a, b, c* paramétereinek meghatározása

Második lépésben a forgatási mátrix paramétereinek megoldását írjuk le. Ennek megfelelően ezen fejezet a külső tájékozás normálegyenleteinek levezetését tárgyalja.

Miután a λ_i ismeretlenekre egy nemlineáris egyenletrendszert vezettünk le, és az egyenletrendszert numerikusan megoldottuk, a következőkben a méretarány-tényezőket ismertnek tekinthetjük. Ezzel a külső tájékozási feladatot lineáris egyenletekre vezettük vissza.

A (6) összefüggések felhasználásával az *a*, *b*, *c* ismeretlen paraméterekre felírhatók az alábbi közvetítő egyenletek:

$$\begin{bmatrix} X_{12}-\lambda_1x_1+\lambda_2x_2\\ Y_{12}-\lambda_1y_1+\lambda_2y_2\\ Z_{12}-(\lambda_1-\lambda_2)z\\ X_{23}-\lambda_2x_2+\lambda_3x_3\\ Y_{23}-\lambda_2y_2+\lambda_3y_3\\ Z_{23}-(\lambda_2-\lambda_3)z\\ X_{31}-\lambda_3x_3+\lambda_1x_1\\ Y_{31}-\lambda_3y_3+\lambda_1y_1\\ Z_{31}-(\lambda_3-\lambda_1)z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & (\lambda_1-\lambda_2)z+Z_{12} & -(\lambda_1y_1-\lambda_2y_2+Y_{12})\\ -[(\lambda_1-\lambda_2)z+Z_{12}] & 0 & \lambda_1x_1-\lambda_2x_2+X_{12}\\ \lambda_1y_1-\lambda_2y_2+Y_{12} & -(\lambda_1x_1-\lambda_2x_2+X_{12}) & 0\\ 0 & (\lambda_2-\lambda_3)z+Z_{23} & -(\lambda_2y_2-\lambda_3y_3+Y_{23})\\ -[(\lambda_2-\lambda_3)z+Z_{23}] & 0 & \lambda_2x_2-\lambda_3x_3+X_{23}\\ \lambda_2y_2-\lambda_3y_3+Y_{23} & -(\lambda_2x_2-\lambda_3x_3+X_{23}) & 0\\ 0 & (\lambda_3-\lambda_1)z+Z_{31} & -(\lambda_3y_3-\lambda_1y_1+Y_{31})\\ -[(\lambda_3-\lambda_1)z+Z_{31}] & 0 & \lambda_3x_3-\lambda_1x_1+X_{31}\\ \lambda_3y_3-\lambda_1y_1+Y_{31} & -(\lambda_3x_3-\lambda_1x_1+X_{31}) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a\\ b\\ c \end{bmatrix}. \tag{13}$$

A fenti egyenletek alapján a külső tájékozás normálmátrixának elemeit az alábbi képletekkel adhatjuk meg:

$$
\begin{aligned}
a_{11} &= \sum_{i=1}^{3}\left[\left(\lambda_i y_i - \lambda_{\mathrm{mod}(i,3)+1} y_{\mathrm{mod}(i,3)+1} + Y_{i\,\mathrm{mod}(i,3)+1}\right)^2 + \left((\lambda_i - \lambda_{\mathrm{mod}(i,3)+1})z + Z_{i\,\mathrm{mod}(i,3)+1}\right)^2\right] \\
a_{12} &= -\sum_{i=1}^{3}\left(\lambda_i x_i - \lambda_{\mathrm{mod}(i,3)+1} x_{\mathrm{mod}(i,3)+1} + X_{i\,\mathrm{mod}(i,3)+1}\right)\left(\lambda_i y_i - \lambda_{\mathrm{mod}(i,3)+1} y_{\mathrm{mod}(i,3)+1} + Y_{i\,\mathrm{mod}(i,3)+1}\right) \\
a_{13} &= -\sum_{i=1}^{3}\left(\lambda_i x_i - \lambda_{\mathrm{mod}(i,3)+1} x_{\mathrm{mod}(i,3)+1} + X_{i\,\mathrm{mod}(i,3)+1}\right)\left((\lambda_i - \lambda_{\mathrm{mod}(i,3)+1})z + Z_{i\,\mathrm{mod}(i,3)+1}\right) \\
a_{22} &= \sum_{i=1}^{3}\left[\left(\lambda_i x_i - \lambda_{\mathrm{mod}(i,3)+1} x_{\mathrm{mod}(i,3)+1} + X_{i\,\mathrm{mod}(i,3)+1}\right)^2 + \left((\lambda_i - \lambda_{\mathrm{mod}(i,3)+1})z + Z_{i\,\mathrm{mod}(i,3)+1}\right)^2\right] \\
a_{23} &= -\sum_{i=1}^{3}\left(\lambda_i y_i - \lambda_{\mathrm{mod}(i,3)+1} y_{\mathrm{mod}(i,3)+1} + Y_{i\,\mathrm{mod}(i,3)+1}\right)\left((\lambda_i - \lambda_{\mathrm{mod}(i,3)+1})z + Z_{i\,\mathrm{mod}(i,3)+1}\right) \\
a_{33} &= \sum_{i=1}^{3}\left[\left(\lambda_i x_i - \lambda_{\mathrm{mod}(i,3)+1} x_{\mathrm{mod}(i,3)+1} + X_{i\,\mathrm{mod}(i,3)+1}\right)^2 + \left(\lambda_i y_i - \lambda_{\mathrm{mod}(i,3)+1} y_{\mathrm{mod}(i,3)+1} + Y_{i\,\mathrm{mod}(i,3)+1}\right)^2\right]
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Ismert, hogy a normálmátrix szimmetrikus, azaz $a_{21} = a_{12}$, $a_{31} = a_{13}$, $a_{32} = a_{23}$.

A külső tájékozás feladatához tartozó normálvektor mátrix-elméleti megfontolásokkal hasonló módon állítható elő:

$$
2\begin{bmatrix}
\sum_{i=1}^{3}\left[(\lambda_i y_i - \lambda_{\mathrm{mod}(i,3)+1} y_{\mathrm{mod}(i,3)+1})Z_{i\,\mathrm{mod}(i,3)+1} - (\lambda_i - \lambda_{\mathrm{mod}(i,3)+1})zY_{i\,\mathrm{mod}(i,3)+1}\right] \\
\sum_{i=1}^{3}\left[(\lambda_i - \lambda_{\mathrm{mod}(i,3)+1})zX_{i\,\mathrm{mod}(i,3)+1} - (\lambda_i x_i - \lambda_{\mathrm{mod}(i,3)+1} x_{\mathrm{mod}(i,3)+1})Z_{i\,\mathrm{mod}(i,3)+1}\right] \\
\sum_{i=1}^{3}\left[(\lambda_i x_i - \lambda_{\mathrm{mod}(i,3)+1} x_{\mathrm{mod}(i,3)+1})Y_{i\,\mathrm{mod}(i,3)+1} - (\lambda_i y_i - \lambda_{\mathrm{mod}(i,3)+1} y_{\mathrm{mod}(i,3)+1})X_{i\,\mathrm{mod}(i,3)+1}\right]
\end{bmatrix}
\tag{15}
$$

A normálegyenlet-rendszer megoldására számos módszer ismert a szakirodalomban. A gyakorlati számítások során a szinguláris értékek dekompozicióján alapuló (singular value decomposition, SVD) módszer megfelelőnek bizonyult a megoldás előállítására.

5. A vetítési központ koordinátáinak meghatározása

A harmadik lépésben a vetítési központ koordinátáit határozzuk meg. A vetítési központ még ismeretlen $[X_0, Y_0, Z_0]^T$ paramétereit a λ_s méretarány-tényező és a forgatási mátrix a, b és c már meghatározott értékeivel a (1) összefüggés felhasználásával nyerhetjük.

$$
\begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_s \\ Y_s \\ Z_s \end{bmatrix} - \frac{\lambda_s}{1 + a^2 + b^2 + c^2}\begin{bmatrix} 1 + a^2 - b^2 - c^2 & 2(ab - c) & 2(ac + b) \\ 2(ab + c) & 1 - a^2 + b^2 - c^2 & 2(bc - a) \\ 2(ac - b) & 2(bc + a) & 1 - a^2 - b^2 + c^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_s \\ y_s \\ -z \end{bmatrix}
\tag{16}
$$

A (16) összefüggésben az s index mind a képkoordináták, mind a tárgykoordináták esetében az adatrendszer súlypontjára vonatkozik. Valójában mindhárom pontra a (16) egyenleteket megoldjuk, és az X_0, Y_0, Z_0 koordinátákra kapott értékek átlagát vesszük.

Valamennyi paraméter megadásával a külső tájékozás alapfeladata megoldottnak tekinthető.

6. Összefoglaló

A tanulmányban megadtunk egy új matematikai megoldást a külső tájékozás paramétereinek meghatározására. Ahogy a hagyományos eljárásnál is: a megoldás a pontok képkoordinátái és a hozzájuk tartozó tárgy- vagy terepkoordináták között fennálló leképezés összefüggéseinek felhasználásán nyugszik, úgy az új megoldásnak is alapja a pontok képkoordinátái és a hozzájuk tartozó tárgy- vagy terepkoordináták között fennálló kapcsolat. A tanulmányban tárgyalt eljárás a hagyományos megoldási módszer helyett új matematikai megoldási menetet ad meg. Fő eltérés az új és a hagyományos módszer között a méretarány-tényezők kezelésében van: míg a régi módszer indirekt kezeli (nem használja) a méretarányokat, az új módszer minden pont esetén explicite meghatároz egyedi méretarány-tényezőket. A külső tájékozásra újonnan kidolgozott eljárás a hagyományos megoldási módszereknél hatékonyabb, gyorsabb algoritmusra épül, a régi módszer nehézségeit kiküszöböli: nem igényel sem Taylor-sorfejtést, sem közelítő értékeket, sem iterációt. A módszer továbbfejlesztése a külső tájékozásba bevonható pontok számának növelése érdekében a nemlineáris egyenletrendszerek megoldásának kezelésében képzelhető el.

Irodalomjegyzék

[1] **Awange, JL., Grafarend, EW.,** Linearized Least Squares and nonlinear Gauss-Jacobbi combinatorical algorithm applied to the 7 parameter datum transformation C7(3) problem, *Zeitschrift für Vermessungswesen,*127 (2002) 109-116.

[2] **Awange, JL., Grafarend, EW.,** Closed form solution of the overdetermined nonlinear 7 parameter datum transformation, *Allgemeine Vermessungsnachrichten,* 4 (2003) 130-149.

[3] **Battha, L., Závoti, J.,** Solution of the intersection problem by the Sylvester-resultant and a comparison of two solutions of the 2D similarity transformation, *Acta Geod. Geoph. Hung*., 44(4) (2009) 429-438.

[4] **Battha, L., Závoti, J.,** Az előmetszési probléma és a 2D hasonlósági transzformáció, *Geomatikai Közlemények*, XII (2009) 19-26.

[5] **Jancsó, T.,** Külső tájékozási elemek meghatározása közvetlen analitikus módszerrel, *Geodézia és Kartográfia*, 46(1) (1994) 33-38.

[6] **Jancsó, T.,** Durvahiba-szűrés a fotogrammetriai hátrametszés kiegyenlítése előtt, kezdőértékek megadása nélkül, *Geomatikai Közlemények*, VII. (2004) 181-195.

[7] **Luhmann, T.,** Nahbereichsphotogammetrie, *Herbert-Wichmann Verlag*, Heidelberg, (2000) 571.

[8] **Paláncz, B.,** Dixon-rezultáns alkalmazása a fotogrammetriai külső tájékozás megoldása során, *Geomatikai Közlemények*, XV (2012) 85-94.

[9] **Závoti, J.,** A geodézia korszerű matematikai módszerei, *Geomatikai Közlemények*, II (1999), 149.

[10] **Závoti, J.,** A 7 paraméteres 3D transzformáció egzakt megoldása, *Geomatikai Közlemények*, VIII (2005) 53-60.

[11] **Závoti, J., Jancsó, T.,** The solution of the 7-parameter datum transformation problem with- and without the Gröbner basis, *Acta Geod. Geoph. Hung*., 41(1) (2006) 87-100.

[12] **Závoti, J.,** A fotogrammetriai külső tájékozás egy új, alternatív megoldása, *Geomatikai Közlemények*, XIV/1 (2011) 55-62.

[13] **Závoti, J., Fritsch D.,** A first attempt at a new algebraic solution of the exterior orientation of photogrammetry, *Geod. Geoph. Hung*., 46(3) (2011) 317-325.