NÉHÁNY ALTERNATÍV MEGOLDÁSI LEHETŐSÉG A 3D NEMLINEÁRIS HASONLÓSÁGI DÁTUM-TRANSZFORMÁCIÓ ALKALMAZÁSÁRA A BURSA-WOLF MODELL VISZONYLATÁBAN

*Závoti József**, *Kalmár János**

Some alternative possibilities for the solution of 3D non-linear similarity datum transformation compared to the Bursa-Wolf model – *The present work deals with an important theoretical problem of geodesy: we are looking for a mathematical relationship between two spatial coordinate systems utilizing common pairs of points whose coordinates are given in both systems. In geodesy and photogrammetry the most often used procedure to move from one coordinate system to the other is the 3D, 7 parameter Helmert transformation. Up to recent times this task was solved either by iteration, or by applying the Bursa-Wolf model. Producers of GPS/GNSS receivers install these algorithms into their systems to achieve a quick processing of data. But nowadays algebraic methods of mathematics give closed form solutions of this problem, which require high level computer technology background. In everyday usage, the closed form solutions are much more simple and have a higher precision than earlier procedures and thus it can be predicted that these new solutions will find their place in the practice. The paper discusses various methods for calculating the scale factor and it also compares solutions based on quaternion with those that are based on rotation matrix defined by skew-symmetric matrix.*

Keywords: 3D or 7-parameter datum transformation, absolute orientation

A tanulmány a geodézia egyik fontos elméleti problémáját tárgyalja: két térbeli koordináta rendszer között keresünk matematikai összefüggést a két rendszerben koordinátáikkal megadott közös pontpárok felhasználásával. A geodéziában, fotogrammetriában két koordináta-rendszer közötti áttérés során a legáltalánosabban használt eljárás a 3D, 7 paraméteres Helmert transzformáció alkalmazása. Ezt a feladatot a közelmúltban vagy iterációval, vagy a Bursa-Wolf modell alapján oldották meg. A GPS/GNSS vevők gyártói a rugalmas adatfeldolgozás érdekében ezeket az algoritmusokat szoftveresen beépítik rendszerükbe. Manapság a matematika algebrai módszereinek felhasználásával – jelentős számítástechnikai tudás birtokában – zárt formulákkal is meg lehet adni a probléma megoldását. A zárt alakban előállított megoldások a mindennapi használatban sokkal egyszerűbbnek, pontosabbnak bizonyulnak, mint a korábbi eljárások, ezért prognosztizálható, hogy a jövőben ezek az új megoldások bekerülnek a gyakorlatba. A cikk különböző eljárásokat ad meg a méretarány-tényező kiszámítására és összehasonlítja a kvaternión alapuló megoldást a ferdén szimmetrikus mátrixszal adott forgatási mátrixon alapulóval.

Kulcsszavak: 3D vagy 7 paraméteres dátumtranszformáció, abszolút tájékozás

1 Bevezetés

A 3D, 7 paraméteres Helmert dátum transzformáció hagyományos jellegű tárgyalása a Grafarend és Krumm (1995), a Grafarend és Kampman (1996) és a Grafarend és Shan (1997) tanulmányokban található meg, később Awange et al. (2004) tanulmánya kiterjeszti a megoldási módokat. Závoti (1999) munkája korlátozott feltételekkel L1 normában oldotta meg a feladatot.

A dátumtranszformációk számítógépes algebrai rendszerekkel történő tárgyalásában Awange és Grafarend (2002, 2003a, 2003b, 2003c) években megjelent tanulmányai új irányt adtak a téma kutatásának. A hazai szakirodalomban Závoti (2005) tanulmánya az első algebrai megközelítése a feladat megoldásának, amely egyúttal javítást is javasolt a matematikai modellhez. A Závoti és Jancsó (2006) tanulmánya jó alapötletet adott a linearizálásra, amit Závoti (2012) cikk dolgoz ki alaposab-

*MTA CSFK GGI, 9400 Sopron, Csatkai u. 6-8.
E-mail: zavoti@ggki.hu

ban. A Battha és Závoti (2009a, 2009b) cikkek pedig kiterjesztették a számítógépes algebra alkalmazásának területét a geodéziában ú.n. előmetszési problémaként ismert feladatra. A fotogrammetriai külső tájékozás esetében a Závoti és Fritsch (2011) tanulmány teljesen új megoldási módszert javasol, mint a hagyományos megoldási eljárás. Az abszolút tájékozási probléma kvaterniókkal történő megoldását Horn (1987) tanulmánya elsők között tárgyalja, de a megoldás eltér a Závoti (2012) cikkben leírtaktól. A Kalmár és Závoti (2013) tanulmány jól összefoglalja a két megoldás különbözőségét.

2 A 3D, 7 paraméteres hasonlósági transzformáció új megoldásának modellje

Tegyük fel, hogy adott két különböző koordinátarendszerben mért *n* közös pont a koordinátáikkal.

A 3D, 7-paraméteres (Helmert) térbeli túlhatározott hasonlósági transzformáció a következő modellel adható meg: keressük az elsődleges (cél) *(X, Y, Z)*- és a másodlagos (tárgy) *(x, y, z)* koordináta-rendszerek közötti Euklidészi térben adott pontok közötti leképezést az alábbi formában ($\boldsymbol{t}$ az eltolási-vektor, $\boldsymbol{R}$ a forgatási mátrix és a λ skálaparaméter vagy méretarány-tényező):

$$\boldsymbol{s}_{\mathbf{i}} = \boldsymbol{t} + \lambda \boldsymbol{R} \boldsymbol{p}_{\mathbf{i}}, \qquad i = 1,2,...,n, \tag{1}$$

ahol $\boldsymbol{s}_{\mathbf{i}} = [X_i, Y_i, Z_i]^T$ a célpontok koordináta értékei,

$\boldsymbol{t} = [X_0, Y_0, Z_0]^T$ az ismeretlen eltolási-vektor,

λ az ismeretlen méretarány-tényező,

$\boldsymbol{R}(\alpha, \beta, \gamma)$ a forgatási mátrix,

$\boldsymbol{p}_{\mathbf{i}} = [x_i, y_i, z_i]^T$ tárgypontok koordináta értékei.

Az $\boldsymbol{R}$ forgási mátrixot a három tengely körüli elforgatással, három független, ismeretlen α, β és γ Cardan-szöggel Awange (2002) az alábbi módon adta meg:

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_1(\alpha)\boldsymbol{R}_2(\beta)\boldsymbol{R}_3(\gamma). \tag{2}$$

Természetesen, a fizikai geodéziában használatos forgatási sorrendtől eltérő forgatási sorrend vagy ellenkező irányú tengely körüli forgatás más-más eredményre vezet. Például a forgási mátrix elemeinek ismeretében a forgási szögek az alábbi összefüggéssel meghatározhatók:

$$\alpha = -\arctan\left(\frac{r_{23}}{r_{33}}\right), \ \beta = \arcsin(r_{13}), \ \gamma = -\arctan\left(\frac{r_{12}}{r_{11}}\right), \tag{3}$$

ahol r_{ij} érték az $\boldsymbol{R}$ forgatási mátrix *i*-edik sorának és *j*-edik oszlopának eleme.
Célunk tehát a forgatási mátrix meghatározása. A 3D, 7 paraméteres Helmert transzformáció algebrai megoldása érdekében Awange és Grafarend (2002) az $\boldsymbol{R}$ forgatási mátrixot a ferdén szimmetrikus $\boldsymbol{C}'$ mátrix (5) bevezetésével a következő módon írta fel:

$$\boldsymbol{R} = \left(\boldsymbol{I}_3 - \boldsymbol{C}'\right)^{-1}\left(\boldsymbol{I}_3 + \boldsymbol{C}'\right), \tag{4}$$

ahol I_3 a három dimenziós egységmátrix, és $\boldsymbol{C}'$ mátrix az *a*, *b* és *c* paraméterekkel meghatározott:

$$\boldsymbol{C}' = \begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Ha az (1) egyenletet a (4) összefüggés alapján az $\left(\boldsymbol{I}_3 - \boldsymbol{C}'\right)$ mátrixszal balról szorozzuk, akkor a következő alak adódik:

$$\begin{bmatrix} 1 & c & -b \\ -c & 1 & a \\ b & -a & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & c & -b \\ -c & 1 & a \\ b & -a & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} + \lambda\begin{bmatrix} 1 & -c & b \\ c & 1 & -a \\ -b & a & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix}, \qquad i = 1,2,\ldots,n. \tag{6}$$

A fenti egyenletek képezik a 3D, 7 paraméteres Helmert transzformáció algebrai megoldásának alapját.

3 A 3D, 7 paraméteres hasonlósági transzformáció méretarány-tényezőjének meghatározása három módszerrel

Závoti (2012) tanulmányában megmutatta, hogy súlyponti koordináták bevezetésével milyen módon lehetséges az eltolási paraméterek eliminálása. Ugyanezen tanulmányban az is beigazolódott, hogy a túlhatározott egyenletrendszer megoldása során az a, b és c paraméterek kiküszöbölésével ezen paraméterek kiesnek és a λ paraméterre egy egy ismeretlenes, másodfokú, túlhatározott egyenletrendszer áll elő az alábbi formában:

$$\lambda^2\left(x_{is}^2 + y_{is}^2 + z_{is}^2\right) = X_{is}^2 + Y_{is}^2 + Z_{is}^2, \qquad i = 1,2,\ldots,n, \tag{7}$$

ahol

$$X_{is} = X_i - X_s,\ Y_{12} = Y_1 - Y_2,\ Z_{is} = Z_i - Z_s, \qquad i = 1,2,\ldots,n,$$

$$x_{is} = x_i - x_s,\ y_{is} = y_i - y_s,\ z_{is} = z_i - z_s, \qquad i = 1,2,\ldots,n.$$

(Megjegyezzük, hogy Awange és Grafarend (2002) tanulmányukban a méretarány-tényezőre egy negyedfokú egyenlet adódott.)

A (7) egyenletrendszer túlhatározott, megoldása több féle módon is megadható:

I. Megoldás:

A fenti egyenletrendszert alakítsuk szorzattá a következő módon:

$$\left(\lambda\sqrt{x_{is}^2 + y_{is}^2 + z_{is}^2} - \sqrt{X_{is}^2 + Y_{is}^2 + Z_{is}^2}\right)\left(\lambda\sqrt{x_{is}^2 + y_{is}^2 + z_{is}^2} + \sqrt{X_{is}^2 + Y_{is}^2 + Z_{is}^2}\right) = 0,$$

$$i = 1,2,\ldots,n. \tag{8}$$

Tekintsük a (8) formulában szereplő szorzatok első tényezőit. Megoldandó az alábbi egyenletrendszer:

$$\lambda\sqrt{x_{is}^2 + y_{is}^2 + z_{is}^2} = \sqrt{X_{is}^2 + Y_{is}^2 + Z_{is}^2}, \qquad i = 1,2,\ldots,n. \tag{9}$$

Adjuk össze valamennyi egyenletet! Ekkor a túlhatározott egyenletrendszer megoldása során a λ méretarány-tényező értékére – a számunkra fizikai jelentéssel bíró pozitív gyök alapján – az alábbi, a Závoti (2012) cikkben megadott, a tapasztalatból is ismert összefüggés adódik:

$$\lambda = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sqrt{X_{is}^2 + Y_{is}^2 + Z_{is}^2}}{\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_{is}^2 + y_{is}^2 + z_{is}^2}}. \tag{10}$$

A fotogrammetriai szakirodalomban ismert Albertz és Kreiling (1975) publikációja alapján, hogy a λ méretarány-tényező számolható a pontok súlyponti rendszerbeli távolságok összegeinek hányadosaként is. Tehát a (7) másodfokú egyenleteket elsőfokú egyenletekre vezettük vissza – a szakirodalomból ismert (Awange és Grafarend (2002)) negyedfokú polinom gyökeinek nehézkes szétválasztási eljárásával ellentétben.

II. Megoldás

Tekintsük ismételten a (7) egyenletrendszert és adjuk össze valamennyi egyenletet. Így az alábbi összefüggés adódik:

$$\lambda^2 \sum_{i=1}^{n} \left(x_{is}^2 + y_{is}^2 + z_{is}^2 \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(X_{is}^2 + Y_{is}^2 + Z_{is}^2 \right). \tag{11}$$

A fenti egyenlet szorzattá alakítás nélkül is egyszerűen megoldható (a nemnegatív valós számok fölött). A λ méretarány-tényező értékére – a számunkra fizikai jelentéssel bíró pozitív gyök alapján – az alábbi, a Horn (1987) tanulmányában a kvaterniókkal levezetett összefüggés adódik, amely a Bursa-Wolf modell megoldása is:

$$\lambda = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \left(X_{is}^2 + Y_{is}^2 + Z_{is}^2 \right)}{\sum_{i=1}^{n} \left(x_{is}^2 + y_{is}^2 + z_{is}^2 \right)}}\ . \tag{12}$$

Tehát jelen esetben is a λ méretarány-tényezőt a másodfokú egyenletekből egyértelműen meghatározhatjuk – a szakirodalomból ismert (Awange és Grafarend 2002) negyedfokú polinom gyökeinek bonyolult szétválasztási eljárásával szemben.

III. Megoldás

Induljunk ki ismét a (9) egyenletrendszerből. Keressük a megoldást λ értékére kiegyenlítéssel a legkisebb négyzetek módszerének elve alapján közvetítő egyenletek felhasználásával. Elemi meggondolások után λ értékre a következő eredmény adódik (részletes levezetés a (23)-(26) összefüggésekben található):

$$\lambda = \frac{\sum_{i=1}^{n} \sqrt{\left(x_{is}^2 + y_{is}^2 + z_{is}^2 \right)\left(X_{is}^2 + Y_{is}^2 + Z_{is}^2 \right)}}{\sum_{i=1}^{n} \left(x_{is}^2 + y_{is}^2 + z_{is}^2 \right)}. \tag{13}$$

Tehát különböző levezetések adhatók a 3D, 7 paraméteres Helmert transzformáció λ méretarány-tényezőjének megoldására.

4 A forgatási és eltolási paraméterek meghatározása

A méretarány-tényező meghatározása után a feladat lineárisra redukálható, és megadható a lineáris probléma kiegyenlítő számítási modellje. Ezen a módon tetszőlegesen sok egyenletből (közös pontból adódó) álló egyenletrendszer is megoldható az *a*, *b* és *c* paraméterekre. A teljesség kedvéért Závoti (2013) alapján megadjuk a feladat normál mátrixát és normál vektorát:

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n}\left[(\lambda y_{is}+Y_{is})^2+(\lambda z_{is}+Z_{is})^2\right] & -\sum_{i=1}^{n}(\lambda x_{is}+X_{is})(\lambda y_{is}+Y_{is}) & -\sum_{i=1}^{n}(\lambda x_{is}+X_{is})(\lambda z_{is}+Z_{is}) \\ & \sum_{i=1}^{n}\left[(\lambda x_{is}+X_{is})^2+(\lambda z_{is}+Z_{is})^2\right] & -\sum_{i=1}^{n}(\lambda y_{is}+Y_{is})(\lambda z_{is}+Z_{is}) \\ & & \sum_{i=1}^{n}\left[(\lambda x_{is}+X_{is})^2+(\lambda y_{is}+Y_{is})^2\right] \end{bmatrix}. \tag{14}$$

(A normál mátrix szimmetrikus elemeit nem tüntettük fel.)

Hasonló módon adódik a normálvektor is:

$$2\lambda \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n}(y_{is}Z_{is} - z_{is}Y_{is}) \\ \sum_{i=1}^{n}(z_{is}X_{is} - x_{is}Z_{is}) \\ \sum_{i=1}^{n}\left(x_{is}Y_{is} - y_{is}X_{is}\right) \end{bmatrix}. \tag{15}$$

A 3×3 méretű normál-egyenletrendszerből az *a, b* és *c* paraméterek számos eljárással meghatározhatók, mi stabilitása miatt a sajátérték felbontás (SVD) módszert használtuk. A normál mátrix speciális tulajdonságát kihasználva a (3) összefüggésben keresett forgatási paraméterek is meghatározhatók.

A még ismeretlen X_0, Y_0 és Z_0 eltolási paramétereket az (1) összefüggés súlypontra felírt alakjából lehet meghatározni:

$$\begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_s \\ Y_s \\ Z_s \end{bmatrix} - \lambda R \begin{bmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{bmatrix}. \tag{16}$$

A modell alkalmazása során a pontossági, variancia és kovariancia paraméterek számítása a hagyományos módon történik

5 Az eltolási vektor és a méretarány-tényező meghatározása a Bursa-Wolf modellben

A (13) formulához a következőképp is eljuthatunk (a két koordináta rendszerben $\bar{\boldsymbol{s}}$ és $\bar{\boldsymbol{p}}$ a súlypontot jelöli):

$$\begin{aligned} \Delta\boldsymbol{s}_i &= \boldsymbol{s}_i - \bar{\boldsymbol{s}} \Rightarrow \boldsymbol{s}_i = \Delta\boldsymbol{s}_i + \bar{\boldsymbol{s}}, \\ \Delta\boldsymbol{p}_i &= \boldsymbol{p}_i - \bar{\boldsymbol{p}} \Rightarrow \boldsymbol{p}_i = \Delta\boldsymbol{p}_i + \bar{\boldsymbol{p}}. \end{aligned} \tag{17}$$

Visszaírva a transzformáció (1) képletébe kapjuk:

$$\Delta\boldsymbol{s}_i + \bar{\boldsymbol{s}} = \boldsymbol{t} + \lambda\boldsymbol{R}\left(\Delta\boldsymbol{p}_i + \bar{\boldsymbol{p}}\right). \qquad i = 1,2,\ldots,n. \tag{18}$$

Átrendezés után adódik:

$$\Delta\boldsymbol{s}_i + \bar{\boldsymbol{s}} = \boldsymbol{t} + \lambda\boldsymbol{R}\bar{\boldsymbol{p}} + \lambda\boldsymbol{R}\Delta\boldsymbol{p}_i. \qquad i = 1,2,\ldots,n. \tag{19}$$

A (19) képlet közepe elhagyható, mert az (1) összefüggés az $\bar{\boldsymbol{s}}$ és $\bar{\boldsymbol{p}}$ súlypontokra is igaz, így marad:

$$\Delta\boldsymbol{s}_i = \lambda\boldsymbol{R}\Delta\boldsymbol{p}_i. \qquad i = 1,2,\ldots,n. \tag{20}$$

Az ismeretlen ***t*** eltolás-vektortól így átmenetileg megszabadultunk, maradnak még λ és ***R*** változók.

Az (1) formula alapján a Bursa-Wolf modellben szereplő ***t*** eltolási-vektort az adott pontok koordinátáinak átlagolásával az ***R*** forgatási mátrix függvényében előállíthatjuk:

$$\boldsymbol{t} = \sum_i \frac{\boldsymbol{s}_i - \lambda\boldsymbol{R}\boldsymbol{p}_i}{n} = \sum_i \frac{\boldsymbol{s}_i}{n} - \lambda\boldsymbol{R}\sum_i \frac{\boldsymbol{p}_i}{n} = \bar{\boldsymbol{s}} - \lambda\boldsymbol{R}\bar{\boldsymbol{p}} \tag{21}$$

Nyilvánvaló, hogy (21) képlet ekvivalens (16) összefüggéssel, tehát a két módszer az eltolásvektorra ugyanazt a megoldást szolgáltatja.

Áttérve méretarány-tényező vizsgálatára, az egyszerűbb összehasonlíthatóság végett aktualizáljuk (10) képletet a Bursa-Wolf modell jelöléseivel:

$$\lambda = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\Delta \boldsymbol{s}_i^T \Delta \boldsymbol{s}_i} \Bigg/ \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\Delta \boldsymbol{p}_i^T \Delta \boldsymbol{p}_i} \ . \qquad (22)$$

A λ méretarány-tényező a (12) és (22) összefüggései alapján van egy lényeges különbség: a (22) képletben előbb van gyökvonás, és utána összegzés, míg (12) formulában fordítva – ezért megállapíthatjuk, hogy a (12) és (22) összefüggések nem ekvivalensek, vagyis a méretarány-tényezőre a két képlet némileg eltérő értéket számolhat. Viszont (12) és (22) képletek egyaránt statisztikai becslések a méretarány-tényezőre (eltérésük a hibaegyenletek felírásából származik), mert fixpontjuk megegyezik. Induljunk ki ugyanis abból, hogy az ideális Helmert transzformáció során minden távolság és képének hányadosa fix (λ) – ami igaz a súlyponti koordinátákra is, ugyanis a transzformáció során a súlypontot is áthelyeztük, vagyis a súlyponti koordinátákból a súlyponttól való távolságok is levezethetők:

$$\sqrt{\Delta \boldsymbol{s}_i^T \Delta \boldsymbol{s}_i}, \sqrt{\Delta \boldsymbol{p}_i^T \Delta \boldsymbol{p}_i} \ , \qquad i = 1,2,\ldots,n \ , \qquad (23)$$

és a távolságok közötti összefüggést a méretarány-tényezővel írhatjuk fel hibamentes esetben:

$$\sqrt{\Delta \boldsymbol{s}_i^T \Delta \boldsymbol{s}_i} = \lambda \sqrt{\Delta \boldsymbol{p}_i^T \Delta \boldsymbol{p}_i} \ , \qquad i = 1,2,\ldots, n. \qquad (24)$$

Ezt követően belátható, hogy (24) összefüggés behelyettesítése (10) képletbe illetve (22) formulába azonossághoz vezet, vagyis a két statisztikai becslés fixpontja (az elméleti méretarány) megegyezik. Amennyiben (24) képlet alapján felírjuk közvetlenül a hibaegyenleteket:

$$v_i = \sqrt{\Delta \boldsymbol{s}_i^T \Delta \boldsymbol{s}_i} - \lambda \sqrt{\Delta \boldsymbol{p}_i^T \Delta \boldsymbol{p}_i} \ , \qquad i = 1,2,\ldots, n. \qquad (25)$$

akkor a kiegyenlítés az alábbi (de ugyanazon fixpontú), a korábbiaktól eltérő statisztikai becsléshez vezet:

$$\lambda = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\left(\Delta \boldsymbol{s}_i^T \Delta \boldsymbol{s}_i\right) \cdot \left(\Delta \boldsymbol{p}_i^T \Delta \boldsymbol{p}_i\right)} \Bigg/ \sum_{i=1}^{n} \Delta \boldsymbol{p}_i^T \Delta \boldsymbol{p}_i \ . \qquad (26)$$

A fentiek alapján megállapíthatjuk, hogy a (26) összefüggés teljes megegyezést mutat a (13) formulával. A (22) és (26) képletek alapján igaz a következő összefüggés:

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{\Delta \boldsymbol{s}_i^T \Delta \boldsymbol{s}_i} \Bigg/ \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\Delta \boldsymbol{p}_i^T \Delta \boldsymbol{p}_i} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\left(\Delta \boldsymbol{s}_i^T \Delta \boldsymbol{s}_i\right) \cdot \left(\Delta \boldsymbol{p}_i^T \Delta \boldsymbol{p}_i\right)} \Bigg/ \sum_{i=1}^{n} \Delta \boldsymbol{p}_i^T \Delta \boldsymbol{p}_i \ . \qquad (27)$$

6 Az ismeretlenek meghatározása szélsőérték feladatból

Határozzuk meg (20) formula maradék vektorait:

$$\Delta \boldsymbol{v}_i = \Delta \boldsymbol{s}_i - \lambda \boldsymbol{R} \Delta \boldsymbol{p}_i \ , \qquad i = 1,2,\ldots,n \ . \qquad (28)$$

Tekintsük a következő optimalizálási feladatot:

$$\min_{\lambda, \boldsymbol{R}} \sum_i \Delta \boldsymbol{v}_i^T \Delta \boldsymbol{v}_i = \min_{\lambda, \boldsymbol{R}} \sum_i \left(\Delta \boldsymbol{s}_i - \lambda \boldsymbol{R} \Delta \boldsymbol{p}_i\right)^T \cdot \left(\Delta \boldsymbol{s}_i - \lambda \boldsymbol{R} \Delta \boldsymbol{p}_i\right). \qquad (29)$$

Mivel $\boldsymbol{R}$ ortogonális mátrix ($\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{R}=\boldsymbol{I}_3$), az egyenlet a következő alakban is felírható:

$$\min_{\lambda, \boldsymbol{R}} \left\{ \sum_i \left(\Delta \boldsymbol{s}_i^T \Delta \boldsymbol{s}_i\right) - 2\lambda \left(\sum_i \Delta \boldsymbol{s}_i^T \boldsymbol{R} \Delta \boldsymbol{p}_i \right) + \lambda^2 \sum_i \left(\Delta \boldsymbol{p}_i^T \Delta \boldsymbol{p}_i\right) \right\} \ . \qquad (30)$$

A célfüggvény szélsőértékét a λ szerinti parciális derivált eltűnése esetén veszi fel, így kapjuk, hogy

$$\lambda = \sum_i \left(\Delta \boldsymbol{s}_i^T \boldsymbol{R} \Delta \boldsymbol{p}_i\right) \Big/ \sum_i \left(\Delta \boldsymbol{p}_i^T \Delta \boldsymbol{p}_i\right) \qquad (31)$$

A (27) képlet miatt teljesül

$$\frac{1}{\lambda}\Delta\boldsymbol{s}_i = \boldsymbol{R}\Delta\boldsymbol{p}_i, \qquad i = 1,2,\ldots,n. \tag{32}$$

Ezért (31) összefüggés felírható a

$$\lambda = \frac{1}{\lambda}\sum_i\left(\Delta\boldsymbol{s}_i^T\Delta\boldsymbol{s}_i\right)\Big/\sum_i\left(\Delta\boldsymbol{p}_i^T\Delta\boldsymbol{p}_i\right) \tag{33}$$

alakban is, amiből a szakirodalomban ismert Horn-féle képlet adódik:

$$\lambda = \sqrt{\sum_i\left(\Delta\boldsymbol{s}_i^T\Delta\boldsymbol{s}_i\right)\Big/\sum_i\left(\Delta\boldsymbol{p}_i^T\Delta\boldsymbol{p}_i\right)}. \tag{34}$$

A λ ismeretében a (30) formula szélsőértéke már csak az $\boldsymbol{R}$ forgatási mátrix függvénye, így az első és harmadik (konstans) összegek elhagyhatók, a másodikból viszont az előjelváltás miatt maximum számítandó, a biztosan pozitív konstans nevező elhagyható, így marad:

$$\max_{\boldsymbol{R}}\sum_i\left(\Delta\boldsymbol{s}_i^T\boldsymbol{R}\Delta\boldsymbol{p}_i\right). \tag{35}$$

7 A szélsőérték számítás megoldása kvaternió-algebrával

A kvaterniókra vonatkozó legfontosabb összefüggések:

$$\underline{\boldsymbol{q}} = q_0 + q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k} = q_0 + \boldsymbol{q},$$

$$\underline{\boldsymbol{q}}^* = q_0 - \boldsymbol{q} = (q_0, -\boldsymbol{q}^T)^T \quad \left(\underline{\boldsymbol{q}}^* \textit{ a } \underline{\boldsymbol{q}} \textit{ konjugáltja}\right), \quad \left\|\underline{\boldsymbol{q}}\right\| = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} \quad \left(\left\|\underline{\boldsymbol{q}}\right\| \textit{ a } \underline{\boldsymbol{q}} \textit{ hossza}\right),$$

$$\mathbf{C}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} 0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & 0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{Q}^+ = \begin{bmatrix} q_0 & -\boldsymbol{q}^T \\ \boldsymbol{q} & q_0\boldsymbol{I}_3 + C(\boldsymbol{q}) \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{Q}^- = \begin{bmatrix} q_0 & -\boldsymbol{q}^T \\ \boldsymbol{q} & q_0\boldsymbol{I}_3 - C(\boldsymbol{q}) \end{bmatrix}. \tag{36}$$

Kvaterniókra (4 dimenziós $\underline{\boldsymbol{s}} = \left(0, \Delta\boldsymbol{s}^T\right)^T$, $\underline{\boldsymbol{p}} = \left(0, \Delta\boldsymbol{p}^T\right)^T$ vektorokra) áttérve a (35) bilineáris alak az ismeretlen $\boldsymbol{R}$ forgatási mátrix helyett az ismeretlen $\underline{\boldsymbol{q}} = \left(q_0, \boldsymbol{q}^T\right)^T$ kvaternióval is felírható, ahol a keresett $\boldsymbol{R}$ forgatási mátrix és a számított $\underline{\boldsymbol{q}}$ kvaternió között az alábbi összefüggés van (Shen et al., 2006):

$$\boldsymbol{R} = \left(q_0^2 - \boldsymbol{q}^T\boldsymbol{q}\right)\cdot I_3 + 2\left(\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}^T + q_0\mathbf{C}(\boldsymbol{q})\right). \tag{37}$$

Most már minden adott (35) összefüggés átírásához:

$$\max_{\boldsymbol{R}}\sum_i\left(\Delta\boldsymbol{s}_i^T\boldsymbol{R}\Delta\boldsymbol{p}_i\right) = \max_{\underline{\boldsymbol{q}}}\sum_i\left(\underline{\boldsymbol{s}}_i^T\boldsymbol{Q}^+\boldsymbol{P}_i^+\underline{\boldsymbol{q}}^*\right) = \max_{\underline{\boldsymbol{q}}}\underline{\boldsymbol{q}}^T\boldsymbol{N}\underline{\boldsymbol{q}}, \tag{38}$$

ahol $\boldsymbol{N}$ (4×4) mátrix a következő alakú :

$$\boldsymbol{N} = \sum_i\begin{bmatrix} \Delta\boldsymbol{s}_i^T\Delta\boldsymbol{p}_i & \Delta\boldsymbol{s}_i^T\mathbf{C}(\Delta\boldsymbol{p}_i) \\ -\mathbf{C}(\Delta\boldsymbol{s}_i)\Delta\boldsymbol{p}_i & \Delta\boldsymbol{s}_i\cdot\Delta\boldsymbol{p}_i^T + \mathbf{C}(\Delta\boldsymbol{s}_i)\mathbf{C}(\Delta\boldsymbol{p}_i) \end{bmatrix}. \tag{39}$$

A (38) kvadratikus alak akkor éri el maximumát, ha q sajátvektora $\boldsymbol{N}$ mátrixnak, ekkor értéke megegyezik $\boldsymbol{N}$ sajátértékével – tehát a maximalizálási feladat $\boldsymbol{N}$ mátrix maximális χ sajátértékének, illetve a hozzá tartozó egységnyi q, χ sajátvektornak (a keresett kvaternió) a meghatározására vezet.

A $\underline{q}$ kvaternió ismeretében (37) alapján az $\boldsymbol{R} = (r_{ij})$ forgatási mátrix már felírható és a forgásszögek (3) alapján kiszámíthatók. A $\boldsymbol{t}$ eltolás-vektort ezután (21) alapján átlagolással határozhatjuk meg.

8 Kapcsolat a két módszer megoldásának paraméterei között

Az $\boldsymbol{C}'$ ferdén szimmetrikus mátrix az (5) képlet alapján, $\underline{q}$ kvaternió pedig a (36) képlet alapján írja le a nemlineáris hasonlósági transzformáció $\boldsymbol{R}$ forgatási mátrixát. Először kifejtettük $\boldsymbol{R}$ forgatási mátrixot az (5) képlet alapján:

$$\boldsymbol{R} = \frac{1}{1+a^2+b^2+c^2}\begin{bmatrix} 1+a^2-b^2-c^2 & 2(ab-c) & 2(ac+b) \\ 2(ab+c) & 1-a^2+b^2-c^2 & 2(bc-a) \\ 2(ac-b) & 2(bc+a) & 1-a^2-b^2+c^2 \end{bmatrix}. \tag{40}$$

Azután felírtuk a forgatási mátrixot a $\underline{q}$ kvaternió komponenseivel (36) alapján:

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} q_0^2+q_1^2-q_2^2-q_3^2 & 2(q_1q_2-q_0q_3) & 2(q_1q_3+q_0q_2) \\ 2(q_1q_2+q_0q_3) & q_0^2-q_1^2+q_2^2-q_3^2 & 2(q_2q_3-q_0q_1) \\ 2(q_1q_3-q_0q_2) & 2(q_2q_3+q_0q_1) & q_0^2-q_1^2-q_2^2+q_3^2 \end{bmatrix}. \tag{41}$$

Felmerül az a kérdés, hogy a (40) és (41) képletekkel adott $\boldsymbol{R}$ forgatási mátrixok milyen esetben egyeznek meg?

Legyen

$$a = \frac{q_1}{q_0}, \quad b = \frac{q_2}{q_0}, \quad c = \frac{q_3}{q_0}. \tag{42}$$

Helyettesítsük a (42) összefüggésekkel adott a, b és c paramétereket a (40) formulába, az alábbi összefüggésekhez jutunk:

$$\boldsymbol{R} = \frac{q_0^2}{q_0^2+q_1^2+q_2^2+q_3^2}\begin{bmatrix} \frac{q_0^2+q_1^2-q_2^2-q_3^2}{q_0^2} & 2\frac{q_1q_2-q_0q_3}{q_0^2} & 2\frac{q_1q_3+q_0q_2}{q_0^2} \\ 2\frac{q_1q_2+q_0q_3}{q_0^2} & \frac{q_0^2-q_1^2+q_2^2-q_3^2}{q_0^2} & 2\frac{q_2q_3-q_0q_1}{q_0^2} \\ 2\frac{q_1q_3-q_0q_2}{q_0^2} & 2\frac{q_2q_3+q_0q_1}{q_0^2} & \frac{q_0^2-q_1^2-q_2^2+q_3^2}{q_0^2} \end{bmatrix}. \tag{43}$$

A (43) képletben az $\boldsymbol{R}$ forgatási mátrix valamennyi elemének nevezőjéből kiemelve $q_0{}^2$ értéket, a mátrix skalárszorzójának számlálóját $q_0{}^2$ értékkel egyszerűsítve, és felhasználva, hogy $q_0{}^2+q_1{}^2+q_2{}^2+q_3{}^2=1$, éppen a (41) összefüggéssel adott azonossághoz jutunk, azaz a (40) összefüggésből a (41) formulát kaptuk meg.

Legyen most

$$q_1 = q_0\, a, \quad q_2 = q_0\, b, \quad q_3 = q_0\, c. \tag{44}$$

Ekkor az

$$1 = q_0^{\,2} + q_1^{\,2} + q_2^{\,2} + q_3^{\,2} = q_0^{\,2}\left(1 + a^2 + b^2 + c^2\right) \tag{45}$$

egyenletből kapjuk az alábbi egyenlőséget:

$$q_0 = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 + b^2 + c^2}}\,. \tag{46}$$

Helyettesítsük most (44) és (46) összefüggéseket a (41) formulába, akkor az $\boldsymbol{R}$ forgatási mátrixra az alábbi alak adódik:

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} \dfrac{1 + a^2 - b^2 - c^2}{1 + a^2 + b^2 + c^2} & 2\dfrac{ab - c}{1 + a^2 + b^2 + c^2} & 2\dfrac{ac + b}{1 + a^2 + b^2 + c^2} \\ 2\dfrac{ab + c}{1 + a^2 + b^2 + c^2} & \dfrac{1 - a^2 + b^2 - c^2}{1 + a^2 + b^2 + c^2} & 2\dfrac{bc - a}{1 + a^2 + b^2 + c^2} \\ 2\dfrac{ac - b}{1 + a^2 + b^2 + c^2} & 2\dfrac{bc + a}{1 + a^2 + b^2 + c^2} & \dfrac{1 - a^2 - b^2 + c^2}{1 + a^2 + b^2 + c^2} \end{bmatrix}, \tag{47}$$

amely láthatólag megegyezik a (40) összefüggéssel. Tehát összefoglalva, a Bursa-Wolf modell q_0, q_1, q_2 és q_3 kvaternió komponenseken alapuló megoldása és a ferdén szimmetrikus $\boldsymbol{C}'$ mátrix *a*, *b* és *c* paraméterei között az 1. táblázatban összefoglalt összefüggések állnak fenn.

9 Összefoglalás

Tanulmányunkban a 3D, 7-paraméteres (Helmert) térbeli nemlineáris hasonlósági transzformáció megoldására olyan általános eljárást adtunk meg, amelyből a méretarány-tényezőre több, különböző megoldás is levezethető. A módszer lényege a méretarány-tényezőre kapott túlhatározott egyenlet-rendszer más-más módon történő megoldásában rejlik. Megadtuk a méretarány-tényező legkisebb négyzetek elvén alapuló olyan új levezetését is, amely a Bursa-Wolf modell kvaternióval előállított megoldásának megfelelő paraméterével (legnagyobb sajátérték) numerikusan azonosságot mutat. A méretarány-tényező meghatározásával az eredetileg nemlineáris probléma lineáris feladat megoldására vezethető vissza.

Megmutattuk azt is, hogy a Bursa-Wolf modellben bevezetett kvaterniók és az Awange-Grafarend szerzők által bevezetett ferdén szimmetrikus mátrix elemei között funkcionális kapcsolat van, ezáltal a két eljárás egymásba átvihető.

1. táblázat. Összefüggések a kvaterniók és az *a*, *b* és *c* paraméterek között

$q_0 = \dfrac{1}{\sqrt{1 + a^2 + b^2 + c^2}}$	
$q_1 = q_0 a$	$a = \dfrac{q_1}{q_0}$
$q_2 = q_0 b$	$b = \dfrac{q_2}{q_0}$
$q_3 = q_0 c$	$c = \dfrac{q_3}{q_0}$

Hivatkozások

Albertz J, Kreiling W (1975): Photogrammetric Guide. Herbert Wichmann Verl., Karlsruhe, 58-60.
Awange JL (2002): Gröbner Bases, Multipolynomial Resultants and the Gauss-Jacobbi Combinatorical Algorithms-Adjustment of Nonlinear GPS/LPS Observations. Dissertation, Geodätisches Institut der Universität Stuttgart.
Awange JL, Grafarend EW (2002): Linearized Least Squares and nonlinear Gauss-Jacobbi combinatorical algorithm applied to the 7 parameter datum transformation $c_7(3)$ problem. Zeitschrift für Vermessungswesen, 127, 109-116.
Awange JL, Grafarend EW (2003a): Closed form solution of the overdetermined nonlinear 7 parameter datum transformatiotn. Allgemeine Vermessungsnachrichten, 110, 130-149.
Awange JL, Grafarend EW (2003b): Explicit Solution of the Overdetermined Three-Dimensional Resection problem, Journal of Geodesy, 76, 605-616..
Awange JL, Grafarend EW (2003c): Polinomial Optimization of the 7-Parameter Datum Transformation Problem when Only Three Stations in Both System are Given, Zeitschrift für Vermessungswesen, 128, 266-270.
Awange JL, Grafarend EW, Fukuda Y (2004): Exact solution of the nonlinear 7-parameter datum trsformaton by Groebner basis, Bul. di Geodesia e Scienze Affini, 63, 117-127.
Battha L, Závoti J (2009a): Solution of the intersection problem by the Sylvester-resultant and a comparison of two solutions of the 2D similarity transformation. Acta Geod. Geoph. Hung., 44(4), 429-438.
Battha L, Závoti J (2009b): Az előmetszési probléma és a 2D hasonlósági transzformáció. Geomatikai Közlemények, 12, 19-26.
Grafarend EW, Kampmann G (1996): $C_{10}(3)$: The ten parameter conformal group as a datum transformation in threedimensional Euclidean space. Zeitschrift für Vermessungswesen, 121, 68-77.
Grafarend EW, Krumm F (1995): Curvilinear geodetic datum transformations. Zeitschrift für Vermessungswesen, 120, 334-350.
Grafarend EW, Shan J (1997): Estimable quantities in projective networks. Zeitschrift für Vermessungswesen, 122, 323-333.
Horn BKP (1987): Closed form solution of absolute orientation using unit quaternions. Journal of the Optical Society of America, 4, 629-642.
Kalmár J, Závoti J (2013)**:** A 3D, 7-paraméteres dátumtranszformáció megoldása Gröbner-bázisban és a Bursa-Wolf modellben, Dimenziók Matematikai Közlemények, 1, 2013, 37-44.
Papp E (2013): Geodéziai dátumtranszformáció kvaternióval. Geomatikai Közlemények, 16, 17-28.
Závoti J (1999): A geodézia korszerű matematikai módszerei. Geomatikai Közlemények, 2, 149.
Závoti J (2005): A 7 paraméteres 3D transzformáció egzakt megoldása. Geomatikai Közlemények, 8, 53-60.
Závoti J, Jancsó T (2006): The solution of the 7-parameter datum transformation problem with- and without the Gröbner basis. Acta Geod. Geoph. Hung., 41(1), 87-100.
Shen YZ, Chen Y,·Zheng DH (2006): A quaternion-based geodetic datum transformation algorithm. J Geod 80, 233–239
Závoti J, Fritsch D (2011): A first attempt at a new algebraic solution of the exterior orientation of photogrammetry. Acta Geod. Geoph. Hung., 46, 317-325.
Závoti J (2012): A simple proof of the solutions of the Helmert- and the overdetermined nonlinear 7-parameter datum transformation. Acta Geod. Geoph. Hung., 47(4), 453-464.
Závoti J (2013): A 2D és 3D nemlineáris hasonlósági (Helmert) transzformációk megoldásának új levezetése. Geomatikai Közlemények, 16, 7-16.

Függelék:

Numerikus példa a 3D, 7 paraméteres hasonlósági transzformáció különböző típusú megoldására

A módszer gyakorlati alkalmazásának bemutatásához az Awange és Grafarend (2002) tanulmányban közölt, Závoti (2013) cikkben megismételt példát vesszük. A két koordináta rendszer közös pontjai a WGS84 és egy lokális rendszerben adottak. A numerikus számítások ellenőrzése céljából MATLAB környezetben saját programot írtunk, amely lehetővé teszi, hogy opcionálisan választani lehet a méretarány-tényező levezetésében tárgyalt I., II. és III. megoldás között. Kiemeljük, hogy a méretarány-tényező meghatározása után az általunk bemutatott eljárás mindhárom esetben a lineárisra visszavezetett modellt használja. Tehát a forgatási és az eltolási paramétereket a Bursa-Wolf modell esetében is a lineáris modellből határozzuk meg, de a két eljárás egyenértékűsége már a Papp (2013) és Závoti (2013) tanulmányok alapján bebizonyosodott.

Amint látható, nem szükséges kezdőértéket megadni, nem kell az egyenleteket sorba fejteni, szükségtelen iterálni és az eljárás tetszőleges szögelfordulások esetén is használható.

A tanulmányban ismertetett algoritmusokkal a nemlineáris feladat megoldására a 2. táblázatban megadott eredményeket kaptuk.

2. táblázat. A numerikus számítások eredménye

Ismeretlen	I. Megoldás	Ismeretlen	II.-III. Megoldás
λ	1.0000047879	λ	1.0000055825
		q_0	0.9999999999
a	0.0000024204	q_1	0.0000024204
b	-0.0000021664	q_2	-0.0000021664
c	-0.0000024073	q_3	-0.0000024073
X_0	645.1812	t_x	641.8804
Y_0	69.1921	t_y	68.6553
Z_0	420.1933	t_z	416.3981
σ_0	0.0786340816	σ_0	0.0772336608

Mindkét módszer a Cardan szögekre az alábbi azonos értékeket adja a számítási pontosságon belül:

$$\alpha = -0.9984976709\,['']\qquad \beta = 0.8936957645\,['']\qquad \gamma = 0.9930877298\,[''] .$$

A méretarány-tényező levezetésében tárgyalt II. és III. megoldás ugyanazon numerikus értékeket szolgáltatja, ezért a 2. táblázat fejlécében a Bursa-Wolf felírás alatt ezen közös értékeket csak egyszer adtuk meg.

Megjegyezzük, hogy a q_1, q_2 és q_3 kvaterniók és a $\boldsymbol{C}'$ ferdén szimmetrikus mátrix *a*, *b* és *c* paraméterei csak a számítási élesség határain belül egyeznek meg. A további tizedes jegyekben észlelt eltérés a (42) formulával magyarázható. Nagyobb különbség tapasztalható a két módszer λ méretarány-tényezőjének és eltolási paramétereinek értékeiben. A méretarány-tényezők eltérésére magyarázatot ad a (10) és (12) képletek eltérő számítási módja, az eltolási paraméterek viszonylag nem egyezése következmény lehet. Hogy teljesen nem érdektelen a λ méretarány-tényező (10) képlettel történő számítási módja, arra jó okot ad azon észrevétel, hogy már kevés adott pont ($n=7$) esetén is a két σ_0 középhiba csak 0.001 értékkel tér el egymástól. Ha pedig a σ_0 középhiba helyett a közepes abszolút eltérést számoljuk, akkor 0.002 értékkel kisebb értéket kaphatunk. A Bursa-Wolf modell kifejezetten a legkisebb négyzetek módszere alapján minimalizálja a mérési hibákat, míg a javasolt modell más mértékek esetén is alkalmazható.