

A pályázat témái szerinti bontásban ismertetjük a főbb eredményeket. Ezek nagy száma miatt (92 dolgozat), minden részletre kitérni nem áll módunkban. A forrásmunkákra a szokásos módon, a publikációs lista [xx] sorszámaival hivatkozunk.

**Modellek konstrukciója:** A [37] dolgozat az attraktív bricklayer, és a teljesen aszimmetrikus zero range folyamatok dinamikáját konstruálja meg legfeljebb exponenciálisan növekedő ugrási ráták esetén. Ezeknek a fizikai szempontból is érdekes modelleknek a létezése eddig csak lineárisan korlátozott ráták esetében volt ismert. A cikk a csatolás igencsak kifinomult módszerét használja a modell megadására, majd alapvető tulajdonságainak ellenőrzésére, a modell további vizsgálatát illetően lásd [89].

**Hidrodinamikai határátmenet:** Valkó [8] dolgozata két megmaradó mennyiséggel rendelkező kölcsönható részecskerendszerek szigorúan hiperbolikus egyensúlyi állapotai körüli kis, nemegyensúlyi perturbációk hidrodinamikai viselkedését vizsgálja. Mikroszkopikus megalapozást ad (azaz: matematikailag szigorú hidrodinamikai limeszt bizonyít) Di Perna és Majda egy nevezetes eredményének szellemében, mely hasonló problémát vizsgál a parciális differenciál-egyenletek szintjén.

Fritz-Nagy [10] cikke a kompenzált kompaktság módszerét alkalmazza. Fritz-Tóth korábbi (CMP 2004) dolgozatának kétkomponesű modellje esetében az unicitás kérdése rendkívül nehéz, itt a modell olyan változatát vizsgáljuk, amelynek csak egy megmaradó mennyisége van. A hidrodinamikai határátmenet eredménye a nevezetes Burgers egyenlet, a levezetés és a megoldás egyértelműsége a lökéshullámok tartományában is érvényes. A bizonyítás technikai újdonsága logaritmikus Szoboljev egyenlőtlenség két szinten történő alkalmazása. Mivel a modell nem attraktív, kategóriájában ez is első eredmény.

A [31] cikk az elektroforézis modelljének hidrodinamikáját vizsgálja a Fritz-Tóth CMP (2004) és [10] (2006) alapján. Az ott tárgyalt csatolt kizárások folyamatában részecskék keletkezését és megsemmisülését is megengedjük, ami fizikailag motivált, nehéz matematikai problémához vezet. Kidolgoztuk a PDE elméletben ismert relaxációs technika mikroszkopikus rendszereknél is alkalmazható sztochasztikus változatát.

Egydimenziós rugalmas közeg nemlineáris rezgéseit tárgyalja [55], a rácsmodell ergodikus viselkedését Ginzburg-Landau típusu konzervatív

zaj garantálja. A modell hidrodinamikai határátmenete a konkrét fizikai jelentéssel rendelkező nevezetes p-rendszer (isothermal/isentropic elastodynamics). Ez a bizonyítás is a kompenzált kompaktság sztochasztikus elmeletet használja, fő segédeszköze a logaritmikus Szobeljev egyenlőség.

**Ingadozási jelenségek:** Fritz-Nagy-Olla [11] dolgozata végtelen sok komponensből álló mechanikai modell olyan sztochasztikus perturbációit vizsgálja, amelyek nem sértik az energia megmaradásának elvét. Ingadozási jelenségek csak diffúzív skálázás esetén lépnek fel, de ilyenkor a dinamika mechanikai komponense erősen oszcilláló, szinguláris viselkedést mutat. A fő probléma annak megmutatása hogy a mikroszkopikus szint oszcillációi kompenzálják egymást, a makroszkopikus fluktuációkat két sztochasztikus parciális differenciálegyenletből álló rendszer írja le. Nagy Katalin [12] PhD értekezése a hidrodinamikai határátmenet és a fluktuációk problémáját is tárgyalja.

Balázs-Rassoulagha-Seppalainen [14] dolgozata a véletlen átlagolási folyamatban vizsgálja a modell karakterisztikák mentén fellépő fluktuációit. A folyamat növekedésének limesze Gauss-folyamat, melynek a kovarianciáját explicit módon kiszámoljuk. Ez a folyamat egyben egy sztochasztikus hővezetési egyenlet megoldása is, illetve bizonyos esetekben az  $1/4$  Hurst-paraméterű frakcionális Brown-mozgással is kapcsolatban áll. A bizonyítás során speciális véletlen közegben haladó bolyongásokat használunk, és a bolyongás (majdnem minden) fix környezetben fellépő várható értékére is új eredményeket kaptunk. A teljesen aszimmetrikus kizárásos folyamat karakterisztikák mentén fellépő egyensúlyi fluktuációit vizsgálja [18]. Johansson 2000-ben közölt cikkével ellentétben, tisztán valószínűségelméleti módszerekkel sikerült a fluktuációk  $1/3$  exponensű skálázását bizonyítani.

Áttörésként értékelhető eredmények születtek az egydimenziós aszimmetrikus kizárásos modellekben fellépő fluktuációk leírásával kapcsolatban Balázs Márton, Valkó Benedek és Komjáthy Júlia részvételével, lásd a [15,38,39,59,60] és a [35,57] cikkeket. Különösen értékes az Annals of Mathematics által már elfogadott [84] cikk. A szimmetrikus eset tisztázása csaknem húsz éve kezdődött, a sokkal nehezebb aszimmetrikus modellek vizsgálatához csak az utóbbi években sikerült hatékony módszereket kidolgozni, a kutatások intenzív nemzetközi verseny keretében folynak. Fizikai megfontolások alapján sejthető hogy az ingadozások nagyságrendje szuperdiffúzív: az idő köbgyökével arányos. Alsó és felső becsléseket adtak a részecske-áram fluktuációira, és tisztázták a fluktuációk és a másodfajú részecske mozgása közötti kapcsolatot.

Balázs Márton és T.Seppa-lainen módszereit követve a konstans rátájú teljesen aszimmetrikus zero range folyamatra is bizonyítjuk a karakterisztikán mért áram  $t^{1/3}$  skálázású fluktuációit. Ez az első ilyen jellegű eredmény lokálisan nem korlátos állapotterű részecske-rendszerre. Az egyszerű kizárásos folyamatra ebből a karakterisztikán mozgó részecskék helyének hasonló fluktuációi is következnek. A karakterisztikán mért áram-fluktuációk  $t^{1/3}$ -os skálázásának első bizonyítás a (részlegesen) aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamatra Balázs és Seppalainen korábbi módszereinek továbbfejlesztésével. Az argumentum tisztán valószínűségszámítási és csatolásos módszereken alapul, és a másodosztályú részecske szuperdiffúzív viselkedését is megmutatja. M. Balázs és T. Seppalainen módszereit követve a konstans rátájú teljesen aszimmetrikus zero range folyamatra is bizonyítjuk a karakterisztikán mért áram  $t^{1/3}$  skálázású fluktuációit. Ez az első ilyen jellegű eredmény lokálisan nem korlátos állapotterű részecske-rendszerre. Az egyszerű kizárásos folyamatra ebből a karakterisztikán mozgó részecskék helyének hasonló fluktuációi is következnek.

A korábbi eredményeket egy teljes modellcsaládra terjesztik ki a [87,88,89] dolgozatok. Bevezetik a mikroszkopikus konvexitás kritériumát, melynek teljesülése esetén igaz a karakterisztikán mért áram  $t^{1/3}$ -os fluktuáció-skálázása. A másodosztályú részecskére is a megfelelő skálázást bizonyítjuk. Példaként szerepel a (részlegesen) aszimmetrikus kizárásos folyamat, és egy új, exponenciálisan konkáv rátájú teljesen aszimmetrikus zero range modell. Az exponenciálisan konvex rátájú teljesen aszimmetrikus kőműves folyamat is teljesíti a mikroszkopikus konvexitás feltételét, így az előző cikk rá is érvényes. A bizonyítás nemtriviális csatolásokat és eltérés-korlátokat tartalmaz másodosztályú részecskék egymáshoz viszonyított helyzetére vonatkozólag.

**Véletlen kombinatorikus struktúrák:** Erdős és Rényi klasszikus eredményéhez, valamint Barabási sokat vizsgált modelljéhez kapcsolódik a kombinatorikából ismert véletlenszerűen növekvő hálózatok határeloszlásait tisztázó [27,28,69] dolgozatok. Általános formában, matematikai precizitással bizonyít állításokat a véletlen fa aszimptotikus fokszámeloszlásáról, többek között általánosítja Bollobás, Riordan, Spencer és Tusnády sokat idézett eredményét, amely az aszimptotikus fokszámeloszlást vezeti le egy speciális esetben. Önszerveződő kritikus viselkedést (self-organized criticality) bizonyítottunk egy Erdős-Rényi típusú dinamikus véletlen gráf modellben. Ennek jelentőségét az adja, hogy a statisztikus fizikából ismert önszerveződő kritikus viselkedéssel kapcsolatban kevés a matematikailag is tárgyalható

modellek egyike. A véletlen gráf permanensen olyan állapotban marad, amely az Erdős-Rényi gráf kritikus állapotához hasonló. Az összeolvadás dinamikája Smoluchowski-féle differenciálegyenlet-rendszerhez vezet, aminek segítségével megkaptuk a gráfkomponensek aszimptotikus méretét.

Liggett-Steif-Tóth [44]dolgozata az  $N$  teljes gráfon értelmezett átlagtér modellek végtelen felcserélhető valószínűségi változó sorozattá való kiterjeszhetőségét vizsgáljuk. Kvadratikusan Hamilton függvényel definiált ferromágneses esetben ez általában lehetséges (Ising, Potts, Heisenberg stb. modellek), de nem kvadratikusan definiált ferromágneses, és az antiferromágneses esetekben ez már nem igaz. Vizsgálataik egy újszerű véges momentum-problémára vezetnek, melyet kimerítően tanulmányoznak.

Hosszú memóriával rendelkező nem Markov-tulajdonságú bolyongások vizsgálata [49,50,71,79]. Új határeloszlás-tételeket bizonyítottunk öntaszító bolyongásokra (self-repelling random walks). Egyik eredményünk fenomenologikus tartalma meglepő: a Tóth (1995)-ben tárgyalt modellt irányított élű gráfon értelmezve (irányítatlan élek helyett) gyökeresen különböző aszimptotikus viselkedést bizonyítottunk. Az eddigi eredményektől eltérően a csúcsokon számított lokális időtől függő bolyongást is vizsgáltuk.

**Véletlen mátrixok:** Réffy Júlia [4] doktori értekezése véletlen unitér mátrixok sajátértékeinek határeloszlásait vizsgálja. Véletlen mátrixok egy osztályának spektrumát vizsgáltuk és határeloszlás-tételeket bizonyítottunk a sajátértékek pontfolyamatára [72,73]. A limeszfolyamatot a hiperbolikus Brown mozgás funkcionáljaként, illetve egy egyparaméteres sztochasztikus differenciálegyenlet család segítségével jellemeztük.

**Kaotikus dinamikai rendszerek:** Szász-Tóth [77] cikke végtelen horizontú síkbiliárdra bizonyít határeloszlás tételt szuperdiffúzív skálázással. A bizonyítás módszere a Bálint-Gouzel [22] féle analitikus technika adaptálása. Bálint-Tóth [19,20,21] dolgozatai magas dimenziós Hamilton-rendszerek hiperbolicitásának bizonyítására dolgoznak ki módszert, amely lehetővé teszi a probléma kezelését alacsonyabb dimenziós vizsgálatokon keresztül. Alkalmazásként magasdimenziós puha biliárdok egy osztályának hiperbolicitását bizonyítjuk, amely magába foglalja a konstans potenciálokat és számos taszító potenciált. Bálint-Gouzel [22] megmutatja, hogy a Bunyimovich stadionban tipikus megfigyelhető mennyiségekre nem-standard határeloszlás tétel teljesül, míg a fennmaradó, expliciten leírható speciális osztályra centrális

határelosztástételt igazolunk. A bizonyítás módszerei a Young tornyokhoz kapcsolódó operátorok perturbatív vizsgálata, valamint a fázistér részletes geometriai analízise. Fraktálok leginkább mint dinamikai rendszerek vagy diszkrét idejű iterált leképezések attraktorai jelennek meg. Ilyenek Hausdorff dimenzióját és további finomszerkezetét is meghatározták.

Szász Domokos és Varjú Tamás behatóan foglalkozott a Lorenz gáz rekurrenciájának és határelosztásának problémáival, az első eredményeket Varjú [23] doktori értekezése ismerteti. A centrális határelosztás tétel lokális alakja az alapvető segédeszköz, a technika szintjén a "Young tornyok" jelennek meg, lokálisan perturbált periodikus, ( $d=1$  ill.  $d=2$ ) Lorentz folyamatra bizonyítanak Brown mozgáshoz való konvergenciát [32,33].

A rekurrencia kérdését a fentikeken messze túlmenően tisztázzák a [51,52,53,74,77] dolgozatok. Megmutatják, hogy a kétdimenziós végtelen horizontú periodikus Lorentz folyamat szuperdiffúzív és rekurrens. Ehhez lokális és globális határelosztástételeket bizonyítottunk. Globális határelosztástételünk Bleher 1992-es heurisztikus elméletének szigorú igazolása. Sikerült kiterjeszteni véges horizontú periodikus Lorentz folyamatra Erdős-Taylor illetve Darling-Kac véletlen bolyongásra talált klasszikus eredményeit. Kétdimenziós modellek mellett tárgyaltunk (kvázi)-egy dimenziós modelleket is. A síkbeli periodikus Lorentz folyamat (véges horizont) rekurrencia tulajdonságaira elért 2007-es eredményekre alapozva (l. [53]) sikerült választ adni Sinai 1981-ben megfogalmazott problémájára: a síkbeli periodikus Lorentz folyamat lokális perturbációi esetén a részecske diffúziós limesze Brown mozgás, amelynek kovariancia mátrixa azonos a perturbálatlan folyamat diffúziós limeszének kovariancia mátrixával. Ugyancsak sikerült tárgyalni kvázi egydimenziós modelleket, pl. lokális külső tér esetén.

**Dinamikai rendszerek paramétereinek becslése:** Kinetikai folyamatok differenciálegyenletekkel leírt modelljeinek paraméterbecslésére neurális hálózatokat használó, bizonyos esetekben nagyon jól alkalmazható módszert dolgoztunk ki, lásd [67,68].

**Fraktálok:** Központi feladat iterált függvényrendszerek (IFS) attraktorainak vizsgálata. Solomyak-Simon [7] azt igazolja hogy ha  $\Lambda$  önhasonló Cantor halmaz a síkon, melyre az ún. OSC teljesül, és  $0 < H(\Lambda) < \infty$ , akkor a sík egy tetszőleges pontjából a  $\Lambda$  „láthatatlan”. Ez azt jelenti, hogy a sík egy tetszőleges  $P$  pontjában azon szögeknek halmaza melyek alatt a  $\Lambda$  pontjai a  $P$ -ből láthatóak Lebesgue nulla mértékű halmazt alkot.

Peres-Simon-Solomyak [24] önhasonló iterált függvényrendszereket (IFS) vizsgál a számegeyenesen. Az a rég óta megoldatlan sejtés, hogy "tipikusan" igaz, hogy ha egy invariáns mértékre az entrópia és a Lyapunov exponens hányadosa kisebb, mint 1, akkor az invariáns mérték Hausdorff dimenziója ez a hányados, egyébként pedig a mérték abszolút folytonos a Lebesgue mértékre. Ezt a sejtés igazoltuk olyan véletlen IFS-ekre, melyeket egy determinisztikus IFS-ből úgy kapunk, hogy az IFS függvényeihez minden lépésben hozzáadunk egy akármilyen kis véletlen perturbációt.

Dekking-Simon [36] cikke arra a kérdésre ad részleges választ, hogy ha két véletlen Cantor halmaz Hausdorff dimenzióinak összege nagyobb mint 1, akkor vajon teljesül-e egy valószínűséggel, hogy a különbségük tartalmaz-e intervallumot?

Az intervallumon sokat vizsgált parabola család két-dimenziós analógjára kiszámítottuk az attraktor Hausdorff dimenzióját. Továbbfejlesztettük a szubadditív nyomás Ön hasonló IFS-ek véletlen perturbációinál az attraktor Hausdorff dimenzióját a normára vonatkozó megszorítás nélkül is meghatároztuk [34,43] Megjavítottuk a Sierpinski háromszög s dimenziós Hausdorff mértékére az eddig ismert legjobb becslést [90]

Palis és Takens egy sejtése az volt, hogy ha  $C$ , az egyenesen egy dinamikaliag definiált Cantor halmaz, akkor a  $C-C$  algebrai különbség halmaz vagy nulla mértékű vagy ha nem akkor tartalmaz intervallumot. Ebben a cikkben véletlen Cantor halmazokra tekintettük ezt a problémát és adtunk kritériumot arra, hogy véletlen Cantor halmazok algebrai különbsége pozitív mértékű. Az általunk tanulmányozott modellben meg cáfoltuk a fenti Palis Takens sejtést. [36,43]

A sub-additív nyomás a nem-konformis dinamikai rendszerek attraktorának dimenziója számításához szükséges fogalom. Ennek a fogalmonak egy nagyon lényeges, a szokásos topologiai nyomáshoz hasonló tulajdonságát igazolja skew product leképezésekre a dolgozat [64].

**Kvantum információelmélet:** A kvantummechanikai állapotteret a valós, a komplex vagy a kvaternió test feletti Hilbert tér operatoraival lehet azonosítani. Meghatároztuk az állapotter Euklideszi metrika szerinti térfogatát, és explicit formulát adtunk a determináns függvény tetszőleges hatványának a várható

értékre. A metrikából adódó valószínűségi mertekre nevezve. Qbitek állapotterének a terfogatára olykor véges, olykor végtelen érték adódott. Általánosítottuk a klasszikus- illetve nemkommutatív információgeometriában sokat szereplő alfa-geometriát. Igazoltuk a Heisenberg-féle határozatlansági relációhoz kapcsolódó Gibilisco - Isola - Imperato sejtést, l. Andai [5,45]. Egyszerű bizonyítást adtunk a kvantum kovarianciával és Fisher információval kapcsolatos egyenlőtlenségekre, a módszer általánosított kovarianciák esetén is működik, és az egyenlőség feltételeit is megadja. Tisztáztuk kvantumrendszerek állapotbecslésének hatékonyságát. Algoritmust adtunk n-szintű rendszer esetében a 'constrained' becslésre, és szimulációval vizsgáltuk azt a becslési stratégiát, amikor az újabb mérések függenek az előzők eredményétől [9,13,46].

Mátrix algebrák kommutatív és nem-kommutatív, kvázi-ortogonális részalgebráinak jellemzése vezetett el kvantum bitek optimális állapotbecsléséhez. Nem kommutatív maximális részalgebrák leírását elsőként kezdeményezi a [61] dolgozat, majd ezt [76] fejleszti tovább.

Egy három részből összetett rendszer un. Markov állapotban van, ha a részrendszerek Neumann entrópiájára felírt erős szubadditívitási egyenlőtlenségben az egyenlőség valósul meg. Belátható, hogy ez a definíció ténylegesen a klasszikus Markov láncok általánosításának ö a nemkommutatív esetre. A cikkben megadjuk a Markov hármasok karakterizációját a kanonikus felcserélési reláció (CCR) algebrán a Gauss eloszlásnak megfeleltethető un. kváziszabad állapotok esetében.

Megvizsgáljuk ezek kapcsolatát a klasszikus Gauss Markov hármasokéval is [63]. Ezután megadjuk [75] a CCR algebrán a kváziszabad Markov állapotok ekvivalens karakterizációit. Megvizsgáljuk Markov hármasok lánccá való folytathatóságának problémáját. Megmutatjuk, hogy egy állapot, mely minimalizálja egy kváziszabad Markov állapottal vett relatív entrópiáját, szintén Markov tulajdonságú, hasonlóan a klasszikus esethez.

Elkészült Pitrik József PhD értekezése [81], a disszertáció tárgyalja a klasszikus Markov láncok általánosítását a nemkommutatív valószínűségelméletben. Megadja az L. Accardi által az 1980-as években adott definícióval ekvivalens megfogalmazásokat és igyekszünk ezen állapotok teljes leírását megadni több fizikailag is releváns rendszer esetében, például a Markov állapotok karakterizációját a fermionokat leíró CAR algebrán. Külön vizsgálja a Gauss mértéknek megfelelő kváziszabad állapotok Markov tulajdonságait. Vizsgálódásait kiterjeszti a bozonikus

rendszereket leíró CCR algebrák esetére is.

**Pénzügyi matematika:** A Feynman - Kac formula segítségével nagyméretű rendszerek stabilizálhatóságát vizsgálta Lukity Anikó [58]. Az eredmény akkor pozitív ha a feladathoz rendelhető bolyongás rekurrens.

Gazdag-Tóth Boglárka és munkatársai a többcélú optimalizálás témakörében dolgoztak. Mízható módszert adtak két-célú problémák Pareto-optimális pontjainak befoglalására. [66] Foglalkoztak [47] úgynevezett lefedési émékkal is, azaz vizsgáltuk, hogy egy  $n$ -dimenziós szimplex mikor fedett a csúcsaiba helyezett különböző sugarú gömbök által. Megállapítottuk, hogy a probléma redukálható a Voronoi diagramhoz hasonló Power diagram éleinek lefedésére, amik bizonyos esetekben könnyen vizsgálhatóak. Az eredmények felhasználhatóak konvex optimalizálási problémák megoldásában a korlátozás és szétválasztás módszer gyorsítására. Másik eredmény [70] egy új, általános, csökkenő irányú módszer, ami tulajdonképpen a vonalmenti keresést gyorsítja fel amíg az optimum közelébe nem érünk. Az új eljárást vizsgáltuk konvex problémákra, legkisebb négyzetek féle feladatoknál, és végül GARCH modelleken is, ahol pénzügyi folyamatok paramétereit kell becsülni. Minden esetben átlagosan sokkal jobb eredményeket értünk el az új módszerrel, ami alátámasztja annak alkalmazhatóságát általános problémák esetén, így egyéb pénzügyi feladatok megoldása során is.