Legyen $\mathcal{H}$ komplex Hilbert tér. A $T: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ lineáris leképezést kontrakciónak nevezzük, ha a vektorok hosszát nem növeli meg, azaz ha $\|T\| \le 1$. Invariáns altérhálóikat tekintve a kontrakciók ugyanazt az általánosságot képviselik mint $\mathcal{H}$ korlátos lineáris operátorai, hiszen bármely operátor valamely nem-nulla konstans-szorosa kontrakció. Ugyanakkor a kontrakciók jóval könnyebben kezelhetők az általános operátoroknál, mivel kapcsolatba hozhatók unitér operátorokkal. Nevezetesen, Sz.-Nagy Béla híres dilatációs tétele azt állítja, hogy minden T kontrakcióhoz, amely a $\mathcal{H}$ Hilbert téren hat, létezik egy bővebb $\mathcal{K}$ Hilbert téren ható U unitér operátor, melynél $\langle T^n x, y \rangle = \langle U^n x, y \rangle$ igaz minden n természetes számra és minden $x, y \in \mathcal{H}$ vektorra. Ha az U unitér dilatáció minimális — abban az értelemben, hogy a legszűkebb $\mathcal{H}$-t tartalmazó redukáló altere U-nak maga a $\mathcal{K}$ —, akkor U izomorfia erejéig egyértelműen meghatározott. A T kontrakció és az U minimális unitér dilatáció kapcsolatából kiindulva született meg a Hilbert térbeli kontrakciók elmélete, alapvetően Sz.-Nagy Béla és Ciprian Foias közös kutatásainak köszönhetően. E vizsgálatokba azután sokan kapcsolódtak be a világ minden részéről, hozzájárulva egy gazdag, s sokrétű alkalmazásokban bővelkedő diszciplína kidolgozásához.

Az eredmények összegzéseként jelent meg Sz.-Nagy és Foias sokat idézett monográfiája, először francia nyelven 1967-ben, majd angolul és oroszul 1970-ben. Az angol kiadás címe: *Harmonic analysis of operators on Hilbert space.* Ez a könyv nem csak az operátorelméletre gyakorolt nagy hatást, hanem számos mérnöki alkalmazásra is talált.

Sz.-Nagy Béla kiemelt tervei közt szerepelt egy olyan új kiadás megjelentetése, amely tükrözi az 1970 óta végbement hatalmas fejlődést. Erre határozott biztatást is kapott a kiadótól. Sajnálatos módon ez a tervezett új kiadás Sz.-Nagy Béla életében nem valósult meg. Az új kiadás előkészítésében nagy lépést jelentett a témavezető vendégprofesszori meghívása a Texas A&M University-re. 2005 tavaszi féléve során Ciprian Foias-sal közösen átdolgoztuk az előző kiadás szövegét, kijavítva az előforduló pontatlanságokat, több ponton kibővítve és átstruktúrálva a tárgyalt anyagot, vigyázva arra, hogy megőrizzük az Sz.-Nagy Bélára jellemző elegáns stílust. Ebbe a projektbe aztán bekapcsolódott Hari Bercovici is az Indiana University-ről. A kontrakcióelmélet újabb eredményeiről a könyv két új fejezetében adtunk képet. Az egyik ezek közül az aszimptotikusan nem-eltűnő kontrakciókról, a másik pedig az un. C_0-kontrakciókról szól. Az előbbi első változatát a témavezető, az utóbbiét H. Bercovici írta.

Aszimptotikus viselkedésük alapján a kontrakciók különböző osztályokba sorolhatók. Ha $\|T\| \le 1$, akkor bármely $x \in \mathcal{H}$ esetén a $\{\|T^n x\|\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat monoton csökkenő, s így létezik az $L_T(x) := \lim_{n\to\infty} \|T^n x\|$ határérték. Ha $L_T(x) = 0$ minden x-re, akkor a T kontrakció stabil, vagyis $C_{0\cdot}$-osztályú. Ha viszont $L_T(x) > 0$ minden nem-nulla x-re, akkor T aszimptotikusan nem-eltűnő, más szóval $C_{1\cdot}$-osztályú. Ha a T adjungáltja $C_{0\cdot}$- vagy $C_{1\cdot}$-osztályú, akkor maga a T $C_{\cdot 0}$- illetve $C_{\cdot 1}$-osztályú. Végtelen dimenzióban egyik $C_{ij} := C_{i\cdot} \cap C_{\cdot j}$ osztály sem üres. A C_{00}-kontrakciók egy alosztályát képezik azok a kontrakciók, amelyeket kinulláz egy nem-nulla H^∞-beli függvény; ezeket hívjuk C_0-kontrakcióknak. A témavezető által kezdeményezett, s főként saját kutatásait tartalmazó fejezet a $C_{1\cdot}$-beli és a C_{11}-beli kontrakciókkal foglalkozik.

2008 végére az új kiadás előkészítéséből már csak az maradt hátra, hogy egy rövid kiegészítő függelékben összefoglaljuk azokat a legfontosabb kontrakciókkal kapcsolatos eredményeket, amelyeket a két újabb fejezetben sem tárgyaltunk.

A fenti projekttel kapcsolatos közös munka során született a témavezető és Hari Bercovici *Spectral behaviour of C_{10}-contractions* című cikke, amit 2008 őszén nyújtottunk be publikálásra. A C_{00}-kontrakciók invariáns altérhálói az általános operátorok invariáns altérhálóit adják, hiszen minden operátor egy nem-nulla skalár-szorosa C_{00}-kontrakció. Így az invariáns altér probléma C_{00}-kontrakciókra ekvivalens az általános invariáns altér problémával: nem tudjuk, hogy van-e minden Hilbert térbeli operátornak valódi invariáns altere. Ugyanakkor a C_{11}-kontrakciók szerkezetéről sokat tudunk: minden ilyen T kontrakciónak (amely nem az identitás skalár-szorosa) van valódi hiperinvariáns altere, azaz olyan valódi invariáns altere, amely a T-vel felcserélhető operátorokra is invariáns. Ez abból következik, hogy T kvázihasonló egy egyértelműen meghatározott W unitér operátorhoz, vagyis léteznek olyan X, Y kváziaffinitások (kölcsönösen egyértelmű, sűrű képterű, korlátos lineáris transzformációk), melyekre $XT = WX$ és $YW = TY$ teljesül. Ilyenkor a T hiperinvariáns altérhálójának van olyan részhalmaza, amely izomorf a W hiperinvariáns altérhálójával; ez utóbbi pedig szeparábilis esetben a W spektrális altereiből áll. A C_{10} kontrakció-osztály bizonyos értelemben az általános vonásokat mutató C_{00}-osztály s a jól leírt C_{11}-osztály közé esik, ezért is remélhető, hogy a C_{11}-nél alkalmazott technika finomításával az invariáns és a hiperinvariáns altér problémák a C_{10}-osztályban is megoldhatók. E kérdések azonban az egész C_{10}-osztályra vonatkozóan még mindig nyitottak. Természetes módon vetődik fel a kérdés, hogy vajon a ciklikus C_{10}-kontrakciók spektrumának van-e valamilyen megkülönböztetett jellegzetessége az általános C_{10}-kontrakciókhoz képest. A fenti cikkben negatív választ adunk erre a kérdésre. Ebben a dolgozatban új megközelítéssel tárgyaljuk a T kontrakcióhoz társítható unitér aszimptotát. Nevezetesen, akkor mondjuk, hogy az (X, W) pár a T unitér aszimptotája, ha W unitér operátor, $XT = WX$ teljesül az X kontraktív lineáris leképezésre, s valahányszor (X', W') hasonló tulajdonságú pár, mindannyiszor létezik egy egyértelműen meghatározott Y transzformácó, melyre $YW = W'Y$, $YX = X'$ és $\|Y\| \leq 1$. E megközelítés előnye, hogy nem az (X, W) valamilyen konkrét realizációjához kötött; ezáltal rugalmasabbá válik az aszimptota kezelése, s egyúttal lehetőség nyílik a konkrét szituációban leginkább alkalmas megvalósítás választására. Teljes leírását adjuk a T és W lehetséges spektrumainak, ezek kapcsolatának, jelentősen élesítve a témavezető korábbi eredményeit.

A *J. Functional Analysis*-ben 2007-ben megjelent cikkében a témavezető a C_{10}-kontrakciókra vonatkozó hiperinvariáns altér problémát arra az esetre vezette vissza, amikor a kontrakciónak sok invariáns altere van. Az invariáns altérháló gazdagságára egy fontos faktorizációs tétel segítségével következtethetünk. E faktorizációs tételt a témavezető egy korábbi cikkében bizonyította be, a most idézett cikkben pedig élesítette a bizonyítás lényeges módosításával. Az állítás a következő módon fogalmazható meg. Legyen T C_{10}-kontrakció, W a T unitér aszimptotája, s d a W spektrál-multiplicitás függvénye. Tegyük fel, hogy $d(\zeta) \geq n$ a $\mathbb{T}$ egységkörvonal pozitív mértékű ω Borel halmazának minden ζ pontjában; $1 \leq n \leq \aleph_0$ megszámlálható számosság. Legyen $\mathcal{E}_n$ n-dimenziós Hilbert tér, s tekintsük a Lebesgue mértékre nézve négyzetesen integrálható $f\colon \mathbb{T} \to \mathcal{E}_n$ függvények $L^2(\mathcal{E}_n)$ Hilbert terét, s ennek Hardy-féle $H^2(\mathcal{E}_n)$ alterét (ahol a negatív indexű Fourier együtthatók 0-val egyenlők). A $J_{n,\omega}\colon H^2(\mathcal{E}_n) \to \chi_\omega L^2(\mathcal{E}_n), f \mapsto \chi_\omega f$ beágyazás kölcsönösen egyértelmű kontrakció; χ_ω az ω karakterisztikus függvénye. Az identikus χ függvénnyel való szorzás a $H^2(\mathcal{E}_n)$ téren az n multiplicitású S_n egyirányú eltolás-operátort adja, míg a χ-vel való szorzás $M_{n,\omega}$ operátora a $\chi_\omega L^2(\mathcal{E}_n)$ téren olyan abszolút folytonos unitér operátor, melynek $n\chi_\omega$ a spektrál-multiplicitás függvénye. A faktorizációs tétel szerint minden $\varepsilon > 0$ esetén megadhatók olyan $X\colon H^2(\mathcal{E}_n) \to \mathcal{H}$ és $Y\colon \mathcal{H} \to \chi_\omega L^2(\mathcal{E}_n)$ lineáris transzformációk, melyekre $XS_n = TX$, $YT = M_{n,\omega}Y$, $YX = J_{n,\omega}$, $\|X\| < 1 + \varepsilon$ és $\|Y\| < 1 + \varepsilon$. Ha $\omega = \mathbb{T}$, akkor $J_{n,\omega}$ izometria, s így T megszorítása az $XH^2(\mathcal{E}_n)$ invariáns altérre az S_n-hez hasonló operátor lesz, ráadásul a hasonlóságot megvalósító affinitás ε-nál közelebb van egy unitér transzformációhoz. Mivel a lehetséges X transzformációk képterei kifeszítik a $\mathcal{H}$ Hilbert teret, ezért T-nek valóban sok olyan invariáns altere van, ahol T megközelítőleg úgy hat, mint az S_n eltolás-operátor. Ez utóbbi invariáns altérhálójáról a Beurling–Halmos–Lax tétel ad pontos képet. Meglepő és reményt keltő, hogy a C_{10}-kontrakciókra vonatkozó hiperinvariáns altér probléma az előző speciális esetre vezethető vissza, amikor is a kontrakció bővelkedik invariáns alterekben. Ez az eredmény rokon Ciprian Foias és Carl Pearcy (más szerzőtársakkal együtt elért) eredményeivel. Ők azt mutatták meg, hogy az általános hiperinvariáns altér probléma arra az esetre redukálható, amikor az operátor olyan kontrakció, ahol a (bal lényeges) spektrum egy körgyűrű, melynek külső határa $\mathbb{T}$. Ekkor a duális algebrák elméletéből tudjuk, hogy az operátornak sok invariáns altere van.

A Vladimir Müllerrel közös, *IEOT*-ben 2007-ben megjelent dolgozatában a témavezető a stabilitás alterekre való öröklődését vizsgálta. A kérdés pontosan a következő módon fogalmazható meg. Legyen T a $\mathcal{H}$ Hilbert téren ható stabil, azaz $C_{0\cdot}$-osztályú kontrakció; legyen $\mathcal{M}$ tetszőleges altér $\mathcal{H}$-ban, s tekintsük a T operátor $\mathcal{M}$ altérre való kompresszióját: $T_{\mathcal{M}} := P_{\mathcal{M}}T|\mathcal{M}$, ahol $P_{\mathcal{M}}$ az $\mathcal{M}$-re való ortogonális projekció. Igaz-e, hogy $T_{\mathcal{M}}$ is stabil kontrakció? A válasz bizonyos kiegészítő feltételek mellett (pl. $\|T\| < 1$ vagy $\dim \mathcal{H} < \infty$ esetén) pozitív. Ugyanakkor bebizonyítottuk, hogy a $T_{\mathcal{M}}$ kontrakció lehet nem-stabil is. Mivel minden (szeparábilis téren ható) stabil kontrakció a $B_\infty := S_\infty^*$ csonkító hátratolás megszorítása annak egy invariáns alterére (itt $\infty := \aleph_0$), ezért az előbbi eredmény úgy is megfogalmazható, hogy vannak olyan $\mathcal{M}$ alterek a $H^2(\mathcal{E}_\infty)$ térben, melyeknél a $(B_\infty)_{\mathcal{M}}$ kompresszió nem stabil. Pontos leírását adtuk azon nem-stabil súlyozott egy- és kétirányú eltolás-operátoroknak, amelyek ilyen kompresszióként felléphetnek. Meglepő módon ezek között vannak C_{11}-kontrakciók is. Ezek az eredmények szorosan kapcsolódnak K. Takahashi, P.Y. Wu, C. Benhida és D. Timotin közönséges (azaz nem Sz.-Nagy-féle hatvány-típusú) dilatációkkal kapcsolatos vizsgálataihoz.

A szegedi *Acta*-ban 2005-ben megjelent cikkében a témavezető erős ciklikus tulajdonságú reprezentációkkal foglalkozott. Emlékeztetünk rá, hogy a $\mathcal{H}$ Hilbert téren ható T operátort akkor nevezzük ciklikusnak, ha létezik olyan $x \in \mathcal{H}$ vektor, melynek $\{T^n x\}_{n=0}^\infty$ pályája kifeszíti $\mathcal{H}$-t (azaz e vektorok lineáris kombinációi sűrűn vannak $\mathcal{H}$-ban). Ha valamely x vektorra maga a $\{T^n x\}_{n=0}^\infty$ sorozat sűrű $\mathcal{H}$-ban, akkor a T operátor hiperciklikus. Ha pedig van olyan $x \in \mathcal{H}$, melyre a $\{\lambda T^n x : \lambda \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ halmaz sűrű $\mathcal{H}$-ban, akkor T szuperciklikus. E kaotikus viselkedésű operátorokat sokat vizsgálták az utóbbi évtizedekben. Az un. hiperciklikussági kritérium könnyen ellenőrizhető elegendő feltételét adja a hiperciklikusságnak; alkalmazásával adódik, hogy pl. a cS_n^* operátor hiperciklikus, ha $|c| > 1$. A hiperciklikussági kritérium szükséges volta sokáig nyitott kérdés volt; a negatív választ M. de la Rosa, C. Read, valamint F. Bayart és É. Matheron adták meg 2007-ben. Ha a T operátor hiperciklikus, akkor nyilván nem lehet hatványkorlátos, azaz $\sup\{\|T^n\| : n \in \mathbb{N}\} = \infty$; ugyanakkor cT szuperciklikus minden nem-nulla c

konstansra. S.I. Ansari és P.S. Bourdon érdekes összefüggést fedezett fel a szuperciklikusság és a stabilitás között. Nevezetesen, bebizonyították, hogy ha egy hatványkorlátos operátor szuperciklikus, akkor szükségképpen stabil. Ezt az eredményt általánosította a témavezető diszkrét félcsoportok reprezentációira, valamint az egyparaméteres folytonos operátor-félcsoportokra. Az idézett dolgozatban azt is megmutattuk, hogy egy szuperciklikus operátor-félcsoport állhat csupa nem-szuperciklikus operátorból.

A témavezető és Léka Zoltán a lengyel *Studia*-ban 2007-ben megjelent közös dolgozatukban a lokálisan kompakt félcsoportok reguláris norma-viselkedésű reprezentációinak stabilitását tanulmányozták, kiterjesztve a témavezető korábbi, diszkrét félcsoportokra vonatkozó eredményeit. A regularitást az invariáns közepek segítségével értelmezett konvergencia fogalommal definiáljuk. Legyen S olyan zárt részfélcsoportja a G lokálisan kompakt, kommutatív, additív csoportnak, amelyre $S - S = G$ és $S \cap (-S) = \{0\}$. Jelölje μ a G-ben értelmezett Haar mérték megszorítását S-re, s tekintsük az $L^\infty(S) := L^\infty(\mu)$ Banach teret. Egy $m\colon L^\infty(S) \to \mathbb{C}$ lineáris funkcionált invariáns középnek nevezünk, ha $\|m\| = m(\mathbf{1}) = 1$ és $m(f_s) = m(f)$, ahol $f_s(t) = f(s+t)$. Akkor mondjuk, hogy $f \in L^\infty(S)$ majdnem konvergál a $c \in \mathbb{C}$ számhoz, ha $m(f) = c$ minden m invariáns középre. A $p\colon S \to [1, \infty)$ leképezést normalizáló függvénynek nevezzük, ha lokálisan korlátos, mérhető, továbbá bármely $s \in S$ esetén $p_s/p \in L^\infty(S)$ és létezik olyan $c_p(s) \in (0, \infty)$, melyre $|p_s/p - c_p(s)|$ majdnem konvergál nullához. Legyen $\mathcal{X}$ komplex Banach tér, s jelölje $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ az $\mathcal{X}$-en ható korlátos lineáris operátorok Banach algebráját. Az erősen folytonos $\rho\colon S \to \mathcal{L}(\mathcal{X})$ reprezentáció reguláris norma-tulajdonságú, ha megadható olyan p normalizáló függvény, melynél $\|\rho(s)\| \leq p(s)$ $(s \in S)$ és ugyanakkor $\|\rho(s)\|/p(s)$ nem konvergál nullához a majdnem konvergencia értelmében. A p speciális választásától független $c_\rho := c_p\colon S \to [1, \infty)$ funkcionál a ρ limesz-funkcionálja. E limesz-funkcionál segítségével értelmezhetjük a (nem feltétlen korlátos) ρ reprezentáció $\sigma(\rho)$ spektrumát és $\sigma_{\mathrm{per}}(\rho)$ perifériális spektrumát. Az előbbibe S azon χ karakterei tartoznak, melyekre $|\chi| \leq c_\rho$ és $|\widehat{f}(\chi)| \leq \|\widehat{f}(\rho)\|$ teljesül minden kompakt tartójú, folytonos f függvényre. Itt $\widehat{f}(\chi)$ és $\widehat{f}(\rho)$ a megfelelő Fourier transzformáltakat jelölik: $\widehat{f}(\chi) := \int_S f(s)\chi(s)\,d\mu(s)$ és $\widehat{f}(\rho)x := \int_S f(s)\rho(s)x\,d\mu(s)$ $(x \in \mathcal{X})$. A perifériális spektrum definíció szerint: $\sigma_{\mathrm{per}}(\rho) := \{\chi \in \sigma(\rho) : |\chi| = c_\rho\}$. A ρ reprezentációt izometrikus reprezentációval kapcsolatba hozva, s felhasználva C.J.K. Batty és Q.P. Vu izometrikus reprezentációkról szóló eredményeit, a következő módon sikerült általánosítanunk a jól ismert Arendt–Batty–Lyubich–Vu stabilitási tételt. Ha a ρ reprezentáció perifériális spektruma megszámlálható és a $\rho^\#$ adjungált reprezentáció pont-spektrumában nincs olyan χ karakter, melyre $|\chi| = c_\rho$, akkor ρ a p normalizáló függvényhez viszonyítva stabil abban az értelemben, hogy minden $x \in \mathcal{X}$ esetén $\|\rho(s)x\|/p(s)$ majdnem konvergál nullához.

A szegedi *Acta*-ban 2008-ban megjelent cikkében Léka Zoltán igazolta, hogy az előző eredmények érvényben maradnak akkor is, ha az $L^\infty(S)$ invariáns közepei helyett a topologikusan invariáns közepekre szorítkozunk. Ez utóbbiak olyan közepek, amelyek az eltolás-invarianciánál erősebb $m(f * g) = m(f)$ feltételnek tesznek eleget, ahol $f \in L^\infty(S)$, $g \geq 0$ mérhető és $\int_S g\, d\mu = 1$. A topologikusan invariáns közepekkel azért előnyösebb dolgozni, mert a segítségükkel definiált konvergencia fogalom pontosan jellemezhető integrálközepek konvergenciájával. Nevezetesen, az $f \in L^\infty(S)$ függvényre akkor és csak akkor igaz, hogy $m(f) = c$ minden m topologikusan invariáns középre, ha

$$\lim_{n\to\infty} \mu(K_n)^{-1} \int_{K_n} f_y(s)\, d\mu(s) = c$$

áll fenn az $y \in S$-re nézve egyenletesen, ahol $\{K_n\}_{n=1}^\infty$ tetszőlegesen választott Folner sorozat. Az egyparaméteres folytonos operátor-félcsoportok, $S = \mathbb{R}_+$ választással adódó, s a gyakorlati alkalmazások szempontjából kiemelkedően fontos esetére koncentrálva, kifejezte e reprezentációk fentiekben definiált spektrumát az infinitezimális generátor spektrumának segítségével. A cikk fő eredménye a $T\colon \mathbb{R}_+ \to \mathcal{L}(\mathcal{X})$ operátor-félcsoport reguláris norma-viselkedésének teljes karakterizációja. A megadott feltétel formailag a témavezető és Vladimir Müller diszkrét esetben adott feltételének analogonja, a bizonyítás azonban nem a diszkrét eset egyszerű adaptációja, hanem számos új gondolatot igényel.

Léka Zoltán a *Proc. Amer. Math. Soc.*-ban közlésre elfogadott cikkében a nevezetes Katznelson–Tzafriri tétel következő kiterjesztését igazolta. Legyen T a $\mathcal{H}$ Hilbert téren ható hatványkorlátos operátor, s legyen Q a T-vel felcserélhető operátor. A $\lim_{n\to\infty} \|T^n Q\| = 0$ feltétel akkor és csak akkor teljesül, ha

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} \left\| \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^{-k} T^k Q \right\| = 0 \quad \text{minden } \lambda \in \sigma(T) \cap \mathbb{T}\text{-re.}$$

E tétel újdonsága az, hogy a T valamilyen függvénye helyett tetszőleges T-vel felcserélhető Q operátor szerepel benne. A bizonyítás az erős konvergencia igazolására, majd ultrahatványok alkalmazására épül.

Ezen OTKA pályázat támogatásával készült el a témavezető *Valós- és funkcionálanalízis* című egyetemi jegyzete 354 oldal terjdelemben. Ennek fejezetei: 1. Lebesgue integrál,

2. Mértékek kiterjesztése, 3. Mértékek $\mathbb{R}^k$-ban, 4. Regularitás, 5. Mértékterek szorzata, 6. Függvényterek, 7. Abszolút folytonosság és szingularitás, 8. Komplex Borel mértékek az egyenesen, 9. Ortonormált rendszerek, Fourier sorok, 10. Lineáris funkcionálok kiterjesztése, 11. Banach tér teljességének következményei, 12. L^p terek duálisai, 13. Folytonos függvények terének duálisa, 14. Gyenge topológiák és approximáció. Bár vannak akik a jegyzetírást nem sorolják a tudományos tevékenység körébe, tapasztalatunk szerint ez a munka több cikk megírásához szükséges energiát és kutatói aktivitást emészt fel.

Az MTA Emlékbeszédek sorozatában (majd másodközlésben a Matematikai Lapokban) 2005-ben jelent meg a témavezető Szőkefalvi-Nagy Béláról szóló írása, amely az Akadémián elhangzott előadásának szerkesztett változata. Ez az írás az 1998-ban elhunyt akadémikus pályájának felidézése mellett bemutatja Szőkefalvi-Nagy Béla legfontosabb tudományos eredményeit.