

Statisztikai próbák sztochasztikus, közel izotróp
tenzorral leírható kőzetfizikai mennyiségek vizsgálatára
Statistical tests for rock physical parameters given by
near isotropic, stochastic tensors

Sipos András Árpád
BME Szilárdságtani és Tartószerkezeti Tanszék
Műgyetem rkp. 1-3., Budapest 1111
siposa@eik.bme.hu

2015. január 16.

Rövidített cím: Sztochasztikus, közel izotróp tenzorok statisztikai próbái

Kivonat

2x2-es, vagy 3x3-as márixszal ábrázolható, valószínűségi változótól függő tenzorok sajátirányainak és sajátértékeinek statisztikai elemzése a feladat nemlineáris jellege miatt nem triviális feladat. Anioztróp tenzorok esetén az irodalomban található, linearizáláson alapuló módszerek kielégítőek, azonban a geofizikai alkalmazások gyakran felvetik a közel izotróp tenzor vizsgálatának szükségességét. Írásunkban ezen speciálisnak tűnő, de a gyakorlatban mégis gyakran előforduló eset vizsgálatára adunk statisztikai módszereket. Rámutatunk arra, hogy a determinisztikus tenzoroknál megszokott helyzet - vagyis, hogy a sajátértékek multiplicitása alapján következtethetünk a sajátvektorok térbeli elhelyezkedésére -, valószínűségi változó elemű mátrixok esetén nem áll fent. Ilyen értelemben a vonatkozó szakirodalom sajátértékekre koncentráló módszerei nem kielégítőek. Ez utóbbi állítást írásunk geofizikai vonatkozású példái is alátámasztják. Új módszerünk egyben lehetővé teszi tenzorral ábrázolható kőzetfizikai mennyiségek szorosságának, illetve adott vektor és a tenzor egyik sajátiránya közötti egyezés statisztikai vizsgálatát.

Abstract

Statistical hypothesis testing for the eigenvalues and eigenvectors of a stochastic tensor is not straightforward process due to the nonlinear dependence involved in the problem. For anisotropic tensors the linearized approaches of the literature are adequate, however geophysical applications require the analysis of nearly isotropic tensors, too. Our paper is devoted to introduce new statistical methods for these, seemingly rare cases which turns out to be a regular problem in practice. We point out that the well-known behavior of deterministic tensors, namely that the multiplicity of the eigenvalues unambiguously refers to the spatial distribution of the eigenvectors, does not hold for matrices with random variable elements. In this way the published methods focusing only on the eigenvalues are not satisfactory. The latter statement is also confirmed by examples from geophysics. Our method can be used to analyse closeness of tensor state parameters or directional differences between a vector and one of the eigenvectors in a statistical framework.

1. Bevezetés

Kőzetfizikai mennyiségek direkt (laboratóriumi mérés), vagy indirekt (mérésből származtatott) meghatározásával a geológiai és a geofizika számtalan ága foglalkozik. A publikációk zöme a mérési eredményeket statisztikai eszközökkel értékeli. Amíg skalárral és vektorral ábrázolható mennyiségek esetén a statisztikai elemzés eszközei széles körben elterjedtek (Borradaile, 2003), addig tenzor jellegű kőzetfizikai mennyiségek (pl: feszültség, mágneses anizotrópia, elektromos vezetőképesség,...stb.) esetén az irodalomban megtalálható eredmények (Hext, 1963; Jelinek, 1988; Constable et al., 1990) ellenére sincs egységesen bevett gyakorlat. A geofizikai és geológiai alkalmazásokban (például: mágneses anizotrópia tenzor, mikrotektonikai feszülsténzor,... stb.) kitüntetett szerepe van a tenzor sajátirányainak, emiatt a tenzonnal ábrázolható kőzetfizikai mennyiségek elemzése gyakran azok sajátirányainak statisztikai vizsgálatát jelenti. Ilyen esetben a gömb felett értelmezett Fisher statisztika (Fisher et al., 1993), vagy annak továbbfejlesztett változata használatos (Henry et al., 1995). Ezen megközelítés hátránya, hogy a sajátirányok statisztikai vizsgálatánál a sajátvektorok ortogonalitását nem veszi figyelembe, a sajátvektorokat egymástól független valószínűségi változóknak tekinti.

Célunk egy olyan, a fizikai modellt nem torzító statisztikai eljárás kidolgozása, amellyel mérési eredményekből meghatározott tenzor mennyiségek ekvivalenciája, illetve különbsége számszerűsíthető, illetve akár különböző eredetű mennyiségek közötti kapcsolat is vizsgálható. Mivel szimmetrikus tenzorok statisztikai vizsgálatával leginkább a mágneses szuszceptibilitási tenzor kapcsán foglalkoztak, ezért a geofizika ezen ágában elterjedt terminológiát használjuk. Eredményeinket a mágneses anizotrópia mérések példáján mutatjuk be, azonban állításaink tetszőleges, valós elemű tenzonnal ábrázolható mennyiségre általánosíthatóak. Jelen írás elsődleges célja egy új, sztochasztikus tenzorok statisztikai vizsgálatára szolgáló módszer bemutatása. A cikk 2. fejezete rövid irodalmi összefoglaló után az ún. forgási anizotrópia vizsgálatával foglalkozik. A 3. fejezet különböző rétegekből származó, vagy egyéb okokból eltérő mintákon mért anizotrópia tenzorok elkülönítését megvalósító módszert mutat be. Az előző két fejezet nyomán a 4. fejezet tenzonnal ábrázolható kőzetfizikai mennyiségek statisztikai összehasonlítására ad módszert.

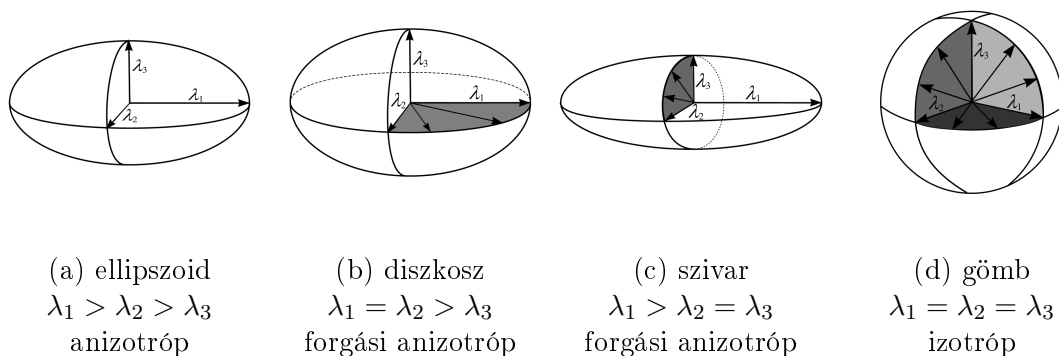
2. A forgási anizotrópia vizsgálata

Munkánk során a gyakorlatban leginkább előforduló, másodrendű, szimmetrikus, valós elemű tenzorokat vizsgáljuk. A \mathbf{k} tenzor az O középpontú, (X, Y, Z) derékszögű koordináta-rendszerben a

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{12} & k_{22} & k_{23} \\ k_{13} & k_{23} & k_{33} \end{bmatrix}. \quad (1)$$

mátrixszal ábrázolható. \mathbf{k} sajátértékeit nagyság szerint sorba állítva jelölje $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$! Ha a sajátértékek pozitívak, akkor a \mathbf{k} tenzornak egy ellipszoid feleltethető meg. Az ellipszoid nagytengelyeinek hossza megegyezik a sajátértékekkel, a nagytengelyek irányát a sajátértékekhez tartozó sajátvektorok jelölik ki. Ha \mathbf{k} sajátértékeire teljesül, hogy $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$, akkor \mathbf{k} -t *anizotróp tenzornak* nevezzük (1.(a) ábra). Az eltérő sajátértékeket a lineáris algebrában egyszeres multiplicitásúnak nevezik. (A lineáris algebra megkülönbözteti a *geometriai* és az *algebrai multiplicitás* fogalmát, azonban bizonyított, hogy szimmetrikus mátrixok esetén a geometriai és az algebrai multiplicitás azonos (Wetttl, 2011), ezért a továbbiakban az azonos sajátértékekre a multiplicitás szóval utalunk.) Lehetséges, hogy \mathbf{k} pontosan két sajátértéke azonos.

Ha ez a $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$ relációt jelenti, akkor a tenzornak megfeleltethető test egy diszkoszhoz hasonlít (legnagyobb területű vetülete kör, 1.(b) ábra). Amennyiben a $\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3$ reláció áll fenn, akkor a test szivarszerű (legkisebb területű vetülete kör, 1.(c) ábra). Mindkét említett esetben van egy sajátérték, ami kétszeres multiplicitással rendelkezik. (Jelinek, 1988) nyomán *forgási anizotrópiaként* utalunk ezen két lehetőségre. Forgási anizotrópia esetén a két azonos sajátértékhez tartozó sajátirány határozza meg azt a síkot, amelyen a vetület kör. Ezen síkban minden, \mathbf{O} kezdőpontú vektor sajátirány. Lehetséges továbbá, hogy a tenzor összes sajátértéke azonos ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$), akkor a tenzor *izotróp*, az egyetlen sajátérték multiplicitása 3. Az izotróp tenzornak megfeleltethető test a gömb (1.(d) ábra), ami jól szemlélteti, hogy az izotróp tenzor semmilyen irányultsággal nem rendelkezik, esetében bármely, az origóból induló vektor sajátirány.



1. ábra. A 3×3 -as, pozitív definit tenzornak megfeleltethető ellipszoidok

Azt gondolhatnánk, hogy az egyenlőség megkövetelése miatt izotróp és forgási anizotróp tenzorok ritkán, vagy egyáltalán nem fordulnak elő a geofizikai gyakorlatban. Ez az intuíció tévesnek bizonyul akkor, ha a \mathbf{k} tenzor elemei valószínűségi változók. Ilyen, sztochasztikus tenzorra jó példa a mágneses szuszceptibilitási tenzor, ami az ismert \mathbf{H} mágneses térerősség vektor és a mért \mathbf{M} mágnesezettség vektor közötti kapcsolatot teremti meg (azaz $\mathbf{M} = \mathbf{kH}$). A mérési eljárást és annak statisztikai értékelését (Jelinek, 1988) részletesen ismerteti. A mérés során 15, előre definiált irányban határozzák meg a minta mágnesezettségét. Ilyen esetben \mathbf{k} meghatározása nem más, mint egy hatparaméteres, lineáris regresszió paramétereinek ($k_{11}, k_{12}, k_{13}, k_{22}, k_{23}, k_{33}$) illesztése a mérési eredményekre. A statisztikai elemzéshez kézenfekvőbb a hat paramétert egy vektorban összefoglalni, ezért ha külön nem jelezzük, akkor a továbbiakban:

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_{11} \\ k_{22} \\ k_{33} \\ k_{12} \\ k_{23} \\ k_{13} \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Jelinek nyomán az egy darab mintán mért szuszceptibilitási tenzor forgási anizotrópiáját vagy izotrópiáját egyszerű, a sajátértékekre vonatkozó statisztikai próbákkal el lehet dönteni (Jelinek, 1988). Bemutatásra kerülő eredményeink rávilágítanak arra, hogy pusztán a sajátértéken alapuló próbák nem elégségesek a szuszceptibilitási tenzor jellemzésére. Ez a megállapítás elvi jelentőségű csupán: manapság a mérési eljárás hibája nagyon kicsi, annak statisztikai elemzéstől akár el is lehet tekinteni (Jelinek,

1978). Ezért írásunkban a minta szintű kiértékeléssel a továbbiakban nem foglalkozunk.

A geofizikai alkalmazás szempontjából lényegesebb probléma, ha egy mintacsoporttal (például egy földrajzi terület több mintája) rendelkezünk és ezek alapján szeretnénk következtetéseket levonni. Jellemzően a minták szuszceptibilitási tenzori eltérések, ez részben ugyan magyarázható az orientációs hibával, de gyakran a mögöttes fizikai folyamatra vezethető vissza a tenzorok különbsége. Ilyen eset például a harmadidőszaki üledékes kőzeteknél áll elő akkor, ha a tömörödéssel kívül nem volt olyan mechanizmus (vízfolyás, oldalirányú nyomás), ami a rétegződés síkjában irányultságot jelölt volna ki. Harmadidőszaki kőzetekből származó mintacsoportok elemzése felveti azt a kérdést, hogy van-e lehetőségünk az említett mechanizmusok kimutatására akkor, ha ezek ugyan jelen voltak, de csak gyenge, kis mértékű irányultságot tudtak kialakítani. Jelen írásban különböző helyszínek üledékes formációiból származó mérési eredményekre alkalmazzuk a bemutatásra kerülő eljárást. Nem célunk az ismertetésre kerülő helyszínek földtani elemzése, a példák a módszer gyakorlati alkalmazhatóságát támasztják alá. A bemutatásra kerülő magyarországi példák földtani hátterét, az alkalmazott mérési módszereket és a mérési eredmények értelmezését (Sipos-Benkő et al., 2014) részletesen tárgyalja.

A mintacsoport mérési eredményeit olyan, N elemű statisztikai mintának tekintjük, ahol a minta elemei a mért szuszceptibilitási tenzorok. (Jelinek, 1978) eljárást ad a várható érték számítására, módszere (Hext, 1963) eredményein alapszik. Kettőjük eljárásával az eredő szuszceptibilitási tenzor sajátvektorainak és sajátértékeinek konfidencia intervallumai számíthatók. A statisztikai elemzés nehézségét az okozza, hogy egy tetszőleges másodrendű tenzor sajátértékei és sajátvektorai a tenzor elemek *nemlineáris* függvényei. A Hext-féle (Hext, 1963) statisztikai eljárás ezen függvények linearizálásán alapszik. Ehhez szükséges kikötni, hogy az egyes tenzorelemek Δ szórása kisebb két tetszőleges sajátérték különbségénél. Nevezzük *kismértékben anizotrópnak* azt a \mathbf{k} tenzort, amely bármely elemének szórására teljesül, hogy

$$\Delta > |\lambda_i - \lambda_j|, \quad i \neq j, \quad i, j \in (1, 2, 3). \quad (3)$$

Mind Hext, mind Jelinek írásaikban felhívják a figyelmet arra, hogy módszerük az imént definiált, kismértékben anizotróp tenzorokra nem alkalmazható. Azonos sajátértékekkel rendelkező (izotróp, vagy forgási anizotróp) tenzorok esetén pedig nullával való osztást eredményez. Jelinek eljárása tartalmaz egy statisztikai próbát annak eldöntésére, hogy az eredő tenzor izotróp-e, vagy sem. Azonban (szemben a minta szintű kiértékeléssel) nem foglalkozik a forgási anizotrópia problémájával. (Constable et al., 1990) ezen hiányosságot joggal kifogásolja, továbbá felhívja a figyelmet arra, hogy az eredő tenzor sajátértékeinek és sajátvektorainak meghatározásakor (Jelinek, 1978) a már említett, Hextől származó linearizálást hajtja végre, ami kismértékben anizotróp tenzorok esetén a konfidencia intervallum jelentős alulbecsléséhez vezet. (Jelinek, 1978) ezzel kapcsolatban annyi támpontot ad, hogy amennyiben bármelyik sajátvektorhoz számított konfidencia ellipszis nagyobbik nyílászöge (a konfidencia ellipszis nagytengelyének végpontjai által meghatározott szög a sztereografikus projekción) meghaladja a 25 fokot, úgy módszere nem használható (a geofizikában szokásos, $\alpha = 0.05$ szignifikancia szint mellett). (Constable et al., 1990; Tauxe et al., 1991, 1990) éppen az említett hiányosságok miatt választ más megközelítést. Az említett publikációk az ún. *Bootstrapping eljárást* használják fel a statisztikai elemzéshez. Azonban a sajátvektorok konfidencia köreit csak úgy tudják számítani, hogy a sajátvektorokat egymástól függetlennek tekintik (nem foglalkoznak az ortogonalitással), illetve a forgási anizotrópiát csak meglehetősen szubjektíven, gyakoriság diagramok alapján különítik el.

Jelen írás fő megállapítása, hogy létezik a Jelinek-féle módszerhez hasonló, az em-

lített hiányokat kiküszöbölő eljárás. A felvetett probléma matematikai szempontból is érdekes: a lineáris algebra (Wetli, 2011) és a tenzor analízis (Itskov, 2007) területén gyakran találkozunk azzal, hogy a többszörös multiplicitású sajátértékek külön vizsgálatot igényelnek. Esetünkben épp a többszörös multiplicitás vizsgálata mutat rá arra, hogy sztochasztikus tenzorok esetén a determinisztikus tenzoroknál megszokott összefüggéseket nem lehet automatikusan alkalmazni, tekintettel kell lenni arra, hogy valószínűségi változókkal végezzünk műveleteket. Írásunkban gyakran fogunk a forgási anizotrópiára utalni, a továbbiakban következetesen csak a $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$ esettel foglalkozunk, a $\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3$ eset levezetése teljesen analóg módon történhet.

A fentiek nyomán feltesszük, hogy az egyes minták kiértékelése során a számított tenzor elemek variancia-kovariancia mátrixa közel zérus. Ezzel a mért minta \mathbf{k}_i ($1 \leq i \leq N$) tenzorát mérési hiba nélküli, pontosan ismert, determinisztikus mennyiségnek tekintjük. (Ez a feltevés megegyezik a jelenlegi gyakorlattal, a (Jelinek, 1978) alapján készült AnisoSoft 4.2. szofver is ezen alapul.) Feltesszük továbbá, hogy a statisztikai mintajellemzők empirikus értékeinek várható értéke megegyezik az elméleti értékekkel. (A továbbiakban minta alatt mindig a statisztikai mintát értjük).

2.1. A várható érték és a kovariancia számítása

A mintacsoport eredő tenzorának meghatározásához tisztázni kell, hogy a számítást *normált*, vagy *normálás nélküli* adatokon hajtjuk végre. Az N elemű statisztikai mintában szereplő, \mathbf{k}_i tenzorok nem csak sajátvektoraik, hanem sajátértékeik szerint is különböznek (pontosabban fogalmazva, skalárinvariánsaik eltérőek). Az alapján, hogy ezen különbséget mely okokkal hozzuk összefüggésbe, két lehetőségünk van:

1. Amennyiben a vizsgált jelenség szempontjából érdektelen okok állhatnak az eltérő skalárinvariánsok mögött (például mágneses vizsgálatok esetén a szuszceptibilitási ellipszoid irányaira vagyunk kíváncsiak, az eltérő ellipszoid térfogatok a minták eltérő ásványi összetételének tudhatóak be), akkor ezen okok hatását a tenzorok normálásával tudjuk csökkenteni.
2. Amennyiben a vizsgált jelenség szempontjából lényeges okra vezetjük vissza az első skalár invariánsokban megmutatkozó különbséget, akkor közvetlenül a mért tenzorokon kell a statisztikai vizsgálatot végrehajtani.

A paleomágneses irodalomban (Jelinek, 1978; Constable et al., 1990) jellemzően a tenzor első skalárinvariánsának ($I_1 = k_{11} + k_{22} + k_{33}$) segítségével hajtják végre a normálást:

$$\mathbf{k}_{n,i} = \frac{\mathbf{k}_i}{k_{i,11} + k_{i,22} + k_{i,33}}. \quad (4)$$

Az adatok normálásnak célja a tenzoroknak megfeleltethető ellipszoidok méretkülönbségének kiküszöbölése. Az első skalárinvariáns használata ezen célra vitatható, ám bár kétségkívül praktikus választás. Elvileg lehetőségünk lenne a másik két skalárinvariáns valamelyikének használatára is (például az imént említett, azonos térfogatú ellipszoidok esetén a minta egyes elemeire az $I_3 = \det(\mathbf{k})$ mennyiséget kell azonosá tenni). A 4. fejezetben olyan transzformációra is példát fogunk mutatni, amely lehetővé teszi két skalárinvariáns azonosság tételét anélkül, hogy a tenzor sajátirányai megváltoznának.

A normálás következtében a $\mathbf{k}_{n,i}$ elemei közül csak öt független, hiszen $k_{n,i,11} + k_{n,i,22} + k_{n,i,33} = 1$. Ezért normált esetben a \mathbf{k}_i vektor csak a független elemeket tartalmazza, írásunkban:

$$\mathbf{k}_i = \begin{bmatrix} k_{n,i,22} \\ k_{n,i,33} \\ k_{n,i,12} \\ k_{n,i,23} \\ k_{n,i,13} \end{bmatrix}. \quad (5)$$

A bemutatásra kerülő eljárások többsége egyaránt jól használható normált és normálás nélküli statisztikai mintákra. Ez alól csak a 3. fejezetben bemutatásra kerülő klaszter analízis kivétel: azt normálás nélküli mintán érdemes végrehajtani. A félreértések elkerülése végett fontos kiemelni, hogy normálás esetén a (4). művelet után kapott \mathbf{k}_i tenzorok elemeit tekintjük normális eloszlású valószínűségi változóknak. Ezek után a statisztikai minta várható értéke, vagyis az eredő tenzor és a hat (normálás esetén: öt) elem statisztikai kapcsolatát jellemző 6×6 -os (normálás esetén: 5×5 -ös) variancia-kovariancia mátrix (\mathbf{V}) torzítatlan becslése az ismert módon számítható (Timm, 2002):

$$\mathbf{k}_e = E(\mathbf{k}_i) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{k}_i, \quad (6)$$

$$\mathbf{V} = E((\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_e)(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_e)^T) = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_e)(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_e)^T. \quad (7)$$

2.2. Az eredő tenzor sajátirányai

Az eddigi leírás is sejteti, hogy az N elemű statisztikai minta (akár normált, akár normálás nélküli) \mathbf{k}_i tenzoraiból ($i = 1, \dots, N$) az eredő \mathbf{k}_e tenzor (6) és annak sajátirányai valamely alkalmas algoritmussal meghatározhatóak anélkül, hogy a sajátértékek multiplicitását vizsgálnánk. Ez a gyakorlati alkalmazás szempontjából veszélyesnek is mondható: az elterjedt numerikus módszerek forgási anizotrópia ($\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$) esetén is három főirányt adnak eredményül, holott ebben az esetben a kétszeres multiplicitású sajátértékhez tartozó sajátvektorok (\mathbf{u}_1 és \mathbf{u}_2) tetszőleges lineáris kombinációja is sajátvektor. (Természetesen ez a probléma izotróp tenzor esetén is fennáll.) Célunk olyan statisztikai eljárás megkonstruálása, amivel a forgási anizotrópia kizárható. Ehhez vagy a Jelinek-féle eljárás nem lineáris változatára lenne szükség, vagy egy olyan összefüggésre a forgási anizotróp \mathbf{k}_e elemei között, amit statisztikai teszttel ellenőrizni tudunk.

Az izotróp eset vizsgálatára Jelinek az utóbbi megközelítést javasolja. Az izotróp tenzor - a koordináta-rendszer tengelyirányaitól függetlenül - diagonál mátrixnak feleltethető meg, így könnyű olyan transzformációt mutatni, ami \mathbf{k}_e elemeire nézve lineáris. A normális eloszlású valószínűségi változók lineáris kombinációjával nyert valószínűségi változó is normális eloszlású, ezért az izotrópia az egymintás t -próba többdimenzós változatával, az ún. Hotelling-féle T^2 próba egymintás változatával vizsgálható. Sajnos, forgási anizotrópiával bíró tenzorra nem található ilyen lineáris transzformáció. (A forgási anizotróp \mathbf{k}_e elemei között levezethető, nem lineáris kapcsolatot az Appendix tartalmazza.) Vélhetően ez az oka annak, hogy (Jelinek, 1978) mellőzi a forgási anizotrópia vizsgálatát.

Ahelyett, hogy a normális eloszlású valószínűségi változókkal kitöltött \mathbf{k}_e tenzor sajátvektorainak és főirányainak egzakt valószínűségi eloszlását kísérelnénk meg levezetni, egy olyan eljárást mutatunk, ahol ugyan nagyobb számításigénnyel, de közelítés nélküli statisztikai próbát lehet végrehajtani. A \mathbf{u}_i sajátvektorok és a λ_i sajátértékek definíciója jól ismert:

$$\mathbf{k}_e \mathbf{u}_i = \lambda_i \mathbf{u}_i, \quad (8)$$

ahol az irodalomban szokásos módon $\|\mathbf{u}_i\| = 1$ és $i = 1, 2, 3$. A tetszőleges, O középpontú egységvektort jelölje \mathbf{u} , ez tipikusan nem sajátvektora a \mathbf{k}_e tenzornak. A (8) egyenlet alapján definiáljuk a következő vektort:

$$\mathbf{e} = \mathbf{k}_e \mathbf{u} - (\mathbf{u}^T \mathbf{k}_e \mathbf{u}) \mathbf{u} = \mathbf{k}_e \mathbf{u} - \lambda \mathbf{u}. \quad (9)$$

A konstrukció miatt \mathbf{e} akkor, és csak akkor zérus vektor, ha $\mathbf{u} = \mathbf{u}_i$, és ekkor (8) alapján $\lambda = \lambda_i$ is teljesül. Vegyük észre, hogy (9) egyenlet \mathbf{k}_e elemeire nézve lineáris összefüggés, amelyet a következő alakra lehet hozni:

$$\mathbf{e} = \mathbf{A} + \mathbf{B} \mathbf{k}_e. \quad (10)$$

Nem normált statisztikai minta esetén $\mathbf{A} = [0, 0, 0]^T$ és a 3×6 -os \mathbf{B} mátrix csak \mathbf{u} elemeitől (u_1, u_2 és u_3) függ:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} u_1 - u_1^3 & -u_1 u_2^2 & -u_1 u_3^2 & -2u_1^2 u_2 + u_2 & -2u_1 u_2 u_3 & u_3 - 2u_1^2 u_3 \\ -u_1^2 u_2 & u_2 - u_2^3 & -u_2 u_3^2 & u_1 - 2u_1 u_2^2 & u_3 - 2u_2^2 u_3 & -2u_1 u_2 u_3 \\ -u_1^2 u_3 & -u_2^2 u_3 & u_3 - u_3^3 & -2u_1 u_2 u_3 & u_2 - 2u_2 u_3^2 & u_1 - 2u_1 u_3^2 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Normált statisztikai minta esetén az \mathbf{A} vektor nem zérus, a \mathbf{B} mátrix pedig 3×5 -ös:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} u_1 - u_1^3 \\ -u_1^2 u_2 \\ -u_1^2 u_3 \end{bmatrix}, \quad (12)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -u_1 u_2^2 - u_1 + u_1^3 & -u_1 u_3^2 - u_1 + u_1^3 & -2u_1^2 u_2 + u_2 & -2u_1 u_2 u_3 & u_3 - 2u_1^2 u_3 \\ u_2 - u_2^3 + u_1^2 u_2 & -u_2 u_3^2 + u_1^2 u_2 & u_1 - 2u_1 u_2^2 & u_3 - 2u_2^2 u_3 & -2u_1 u_2 u_3 \\ -u_2^2 u_3 + u_1^2 u_3 & u_3 - u_3^3 + u_1^2 u_3 & -2u_1 u_2 u_3 & u_2 - 2u_2 u_3^2 & u_1 - 2u_1 u_3^2 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Többváltozós normális eloszlás lineáris kombinációja is normális eloszlás, amennyiben a (10) egyenletben \mathbf{B} teljes rangú. Ez esetünkben nem teljesül, meg lehet mutatni, hogy mivel \mathbf{u} egységvektor, \mathbf{B} rangja mindig 2. Ez azt jelenti, hogy \mathbf{e} elemei közül egy lineárisan függ a másik két elem egyikétől. \mathbf{B} lineárisan összefüggő két sora közül az egyiket töröljük, az így nyert 2×6 -os (normált esetben 2×5 -os) mátrixot jelölje $\hat{\mathbf{B}}$. Az \mathbf{A} vektor ugyanazon sorának törlésével nyerjük a $\hat{\mathbf{A}}$ vektort. Így a $\hat{\mathbf{e}} = \hat{\mathbf{A}} + \hat{\mathbf{B}} \mathbf{k}_e$ összefüggéssel számított vektor két eleme egymástól lineárisan független, normális eloszlású valószínűségi változó. Az elemek 2×2 -es variancia-kovariancia mátrixa közvetlenül \mathbf{k}_e független elemeinek (7) egyenlettel definiált, \mathbf{V} variancia-kovariancia mátrixából határozható meg:

$$\mathbf{W} = \hat{\mathbf{B}} \mathbf{V} \hat{\mathbf{B}}^T. \quad (14)$$

Azt kívánjuk statisztikai próbával vizsgálni, hogy az \mathbf{u} egységvektor lehet-e a \mathbf{k}_e tenzor sajátvektora. A próba hipotézisei:

$$\begin{aligned} H_0 : \hat{\mathbf{e}} &= \mathbf{0}, \\ H_1 : \hat{\mathbf{e}} &\neq \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (15)$$

Normális eloszlású vektorok esetén a várható értékre vonatkozó, többdimenziós próbát a Hotelling féle T^2 teszt egyoldali változatával hajtjuk végre. A próba statisztika:

$$T^2 = N\hat{\mathbf{e}}^T \mathbf{W}^{-1} \hat{\mathbf{e}}, \quad (16)$$

ami az F eloszlást követi. Az összevetéshez a $p_1 = 2$ és $p_2 = N - 2$ paraméterű, α szignifikancia szinten vett F eloszlás inverzének irodalom (Timm, 2002) szerinti átskálázására van szükségünk:

$$T_0 = 2(N - 1)/(N - 2)F_{1-\alpha, 2, N-2}. \quad (17)$$

Amennyiben $T^2 < T_0$ teljesül, a H_0 hipotézis elutasítására nincs okunk, ellenkező esetben H_1 javára döntünk. Az, hogy a (15) hipotézisek alapján mely vektorok kerülnek elfogadásra, nagy mértékben függ a mérési eredmények szórásától. Ezért a teszt által elfogadott \mathbf{u} vektorokat *pszeudo-sajátvektoroknak* nevezzük el és az $\tilde{\mathbf{u}}$ jelöléssel látjuk el megkülönböztetve ezeket a \mathbf{k}_e tenzor közvetlenül számított \mathbf{u}_i sajátvektoraitól. Gyakorlati alkalmazásokban a félgömböt megfelelő sűrűségű (legalább 100, hozzávetőlegesen egyenletesen szétosztott pont a gömb felszínén) hálózattal diszkretizálva meghatározható a pszeudo-sajátvektorok elhelyezkedése (a bemutatásra kerülő példákban 200 pontos diszkretizálást használtunk). A számítás eredménye a geofizikában használatos sztereogramokon könnyen ábrázolható.

2.3. Statisztikai próbák a forgási anizotrópia ellenőrzésére

A 2.2. alfejezetben leírt próba eredménye ugyan könnyen vizualizálható, azonban ez még nem dönt a forgási anizotrópia kérdésében. Láttuk korábban (1. (b) és (c) ábrák), hogy a forgási anizotrópiát megközelíthetjük akár a sajátértékek ($\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$), akár a sajátvektorok felől (ha az \mathbf{u}_1 és \mathbf{u}_2 sajátvektorok által kifeszített sík minden, O középpontú vektora sajátvektor, akkor a tenzor forgási anizotróp). Amíg a két megközelítés determinisztikus (mérési hibával nem terhelt) tenzorok esetén felcserélhető, addig sztochasztikus tenzorok esetén a két megközelítés vezethet eltérő eredményre. Ennek oka, hogy a tenzor elemei a sajátvektorokat és a sajátértékeket eltérő, nemlineáris függvényekkel határozzák meg. Ezért a \mathbf{k}_e tenzor elemeinek szórása is eltérő módon jelentkezik a sajátvektorokban és a sajátértékekben. A (2.2). alfejezetben ismertetett konstrukció lehetővé teszi, hogy mindkét megközelítés alapján külön-külön statisztikai próbákat hajtsunk végre. Azt is mondhatjuk, hogy - szemben a sajátértékekre koncentráló irodalommal - mindkét vizsgálat szükséges ahhoz, hogy a forgási anizotrópia (sőt, az izotrópia!) kérdésében dönteni tudjunk.

A *sajátvektorokra alapuló vizsgálat* esetén a sztereogramon a (15) próba elvégzése után feltüntetjük a $\tilde{\mathbf{u}}$ pszeudo-sajátvektorokat. Szemlélet alapján is könnyen ellenőrizhetjük, hogy a pontfelhőben három, kettő, vagy egy diszjunkt halmazt lehet elkülöníteni. Három elkülönülő halmaz anizotróp, kettő elkülönülő halmaz forgási anizotróp, egy (összefüggő) halmaz pedig izotróp tenzorra utal. Ha számszerűsíteni is szeretnénk eredményeinket, akkor a \mathbf{k}_e tenzor számított sajátirányáiból (ahogy utaltunk rá, a numerikus eljárások jellege miatt ebből mindig három van) képezzük a $\mathbf{u}_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{u}_i + \mathbf{u}_j)$ vektorokat ($i = 1, 2, j = 2, 3$ és $i < j$). Amennyiben mindhárom \mathbf{u}_{ij} esetén a (15) próba H_1 alternatív hipotézise igazolódik, akkor a tenzor a sajátvektorok szempontjából anizotróp, ha pontosan egy \mathbf{u}_{ij} esetén igazolódik H_0 hipotézis, akkor a tenzor forgási anizotróp (u_i és u_j sajátvektorok síkjában minden vektor sajátvektor), egyébként izotróp (mivel ekkor mindhárom \mathbf{u}_{ij} esetén H_0 igazolódik). Ezen vizsgálatnál állításunk erejét is igazolhatjuk: a H_1 -re vezető \mathbf{u}_{ij} vektoroknál a (15) próba erejét is számszerűsíthetjük (Timm, 2002).

Konstrukciónk hasonlóan alkalmas arra, hogy a (15) próbával elfogadott irányokban a *sajátérték vizsgálatát* hajtsuk végre. Legyen két, különböző pszeudo-sajátvektor $\tilde{\mathbf{u}}_1$ és $\tilde{\mathbf{u}}_2$. Mindkét esethez számítható a (9) összefüggésben λ -val jelölt skalár:

$$\tilde{\lambda}_i = \tilde{\mathbf{u}}_i^T \mathbf{k}_e \tilde{\mathbf{u}}_i, \quad (18)$$

amit *pszeudo-sajátértéknek* nevezünk. Természetesen $\tilde{\lambda}$ a valódi sajátirányokban a sajátértékkel egyenlő. A pszeudo-sajátérték valószínűségi változó, \mathbf{k}_e elemeinek lineáris függvénye ($\tilde{\lambda} = C + \mathbf{D}\mathbf{k}_e$), ezért normális eloszlású. Nem normált statisztikai minta esetén $C = 0$ és $\mathbf{D} = [\tilde{u}_1\tilde{u}_1, \tilde{u}_2\tilde{u}_2, \tilde{u}_3\tilde{u}_3, 2\tilde{u}_2\tilde{u}_1, 2\tilde{u}_2\tilde{u}_3, 2\tilde{u}_3\tilde{u}_1]^T$. Normált adathalmazra $C = [\tilde{u}_1 - \tilde{u}_1^3, -\tilde{u}_1^2\tilde{u}_2, -\tilde{u}_1^2\tilde{u}_3]^T$ és $\mathbf{D} = [\tilde{u}_2^2 - \tilde{u}_1^2, \tilde{u}_3^2 - \tilde{u}_1^2, 2\tilde{u}_2\tilde{u}_1, 2\tilde{u}_2\tilde{u}_3, 2\tilde{u}_3\tilde{u}_1]^T$. A variancia-kovariancia mátrix jelen esetben egyetlen elemű: $\tilde{W}_i = \mathbf{D}\mathbf{V}\mathbf{D}^T$. Célunk $\tilde{\lambda}_1$ és $\tilde{\lambda}_2$ várható értékének összehasonlítása, ezt kétmintás t -próbával tehetjük meg, feltéve, hogy a $\tilde{W}_1 = \tilde{W}_2$ teljesül. Ezen feltétel teljesülését F -próbával igazoljuk. A várható értékek azonosságát vizsgáló próba hipotézisei:

$$\begin{aligned} H_0 : \quad & \tilde{\lambda}_1 = \tilde{\lambda}_2 \\ H_1 : \quad & \tilde{\lambda}_1 \neq \tilde{\lambda}_2. \end{aligned} \tag{19}$$

A próbastatisztikát a $2N - 2$ szabadságfokú t eloszlásfüggvény inverzének α szignifikancia szinten vett értékével vetjük össze:

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{N} \frac{\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\lambda}_2}{\sqrt{W_1^2 + W_2^2}} \\ t_0 &= T_{1-\alpha, 2N-2}; \end{aligned} \tag{20}$$

A $t < t_0$ esetben H_0 hipotézis elvetésére nincs okunk, a két sajátérték különbsége statisztikai alapon nem állapítható meg. Ellenkező esetben a két sajátértéket az α szignifikanciaszinten különbözőnek kell tekintenünk. Praktikus az imént ismertett próbát úgy végrehajtani, hogy az egyik pszeudo-sajátvektort \mathbf{k}_e egyik sajátvektorának irányában vesszük fel (például $\tilde{\mathbf{u}}_2 = \mathbf{u}_i$). Így meg tudjuk jelölni azon pszeudo-sajátvektorokat, amelyek pszeudo-sajátértéke szignifikánsan nem különbözik valamelyik sajátértéktől. Ennek segítségével a példánál alkalmazott színezés egyértelmű.

Nincs okunk feltételezni, hogy egy adott statisztikai minta sajátértékeinek és sajátvektorainak vizsgálata ugyanazon eredményre vezet. Amíg egy determinisztikus (mérési hibával nem rendelkező) tenzor esetén a lineáris algebrából jól ismert módon csak három lehetőség közül választhatunk (lásd 1. ábrán és az 1. táblázatban), addig statisztikai kiértékelés esetén a megkülönböztethető esetek száma kilenc (2. táblázat). A megnövekedett esetszám a tenzorelemek szórásából eredő bizonytalanságot fejezi ki: például lehetséges, hogy a sajátirányok a sztereogramon jól elkülönülnek, a hozzájuk tartozó sajátvektorok nagysága olyan mértékben bizonytalan, hogy nem dönthető el, melyik értéke maximális. Például az anizotrópia meglétét csak akkor jelenthetjük ki egyértelműen, ha a pszeudo-sajátértékek szignifikánsan eltérnek és a pszeudo-sajátvektorok három diszjunkt halmazt alkotnak. Hasonlóan szükséges, hogy mind a sajátértékek, mind a sajátvektorok szerint igazolódjon a forgási anizotrópia, vagy az izotrópia. A gyakorlat szempontjából érdemes a 2. táblázat hasonló jelentésű celláit összefoglaló névvel illetni: a bevezetésben már említett, kismértékben anizotróp (KA) tenzorokat a 2. táblázat 3A és 3B cellái tartalmazzák. Ezekhez hasonlít az az eset, a három sajátérték különböző ugyan, de a pszeudo-sajátirányok nem különülnek el eléggé, egy, vagy két diszjunkt halmazt alkotnak (1C és 2C cellák). Írásunkban ezen eseteket is kismértékben anizotrópnak tekintjük. Az elnevezéssel arra utalunk, hogy az anizotrópia pontosan egyik feltételének teljesülését tuduk igazolni. Hasonlóan járunk el a forgási anizotrópia esetében is: a pontosan két megkülönböztethető sajátértékkel és egy halmazt alkotó pszeudo-sajátvektorokkal rendelkező, továbbá a két halmazt adó pszeudo-sajátvektorokkal, de megkülönböztethetetlen sajátértékekkel jellemezhető tenzorokat *kismértékben forgási anizotrópnak* (KFA) nevezzük, ezek a 2. táblázat 1B és 2A celláiban találhatóak.

Jel	Sajátértékek	Sajátirányok diszjunkt halmazai		
		1	2	3
A	$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$	Izotróp	-	-
B	$\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$	-	Forgási	-
	$\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3$	-	anizotróp	-
C	$\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$	-	-	Anizotróp

1. táblázat. Determinisztikus tenzorok lehetséges osztályozása

Jel	Sajátértékek	Sajátirányok diszjunkt halmazai		
		1	2	3
A	$\lambda_1 \cong \lambda_2 \cong \lambda_3$	Izotróp	KFA	KA
B	$\lambda_1 \cong \lambda_2 \neq \lambda_3$	KFA	Forgási	KA
	$\lambda_1 \neq \lambda_2 \cong \lambda_3$			
C	$\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$	KA	KA	Anizotróp

2. táblázat. Sztochasztikus tenzorok lehetséges osztályozása. A táblázatban szereplő rövidítések: KA - kismértékben anizotróp, KFA - kismértékben forgási anizotróp. A sajátértékeknél alkalmazott \cong jellel arra utalunk, hogy a tenzor sajátértékei statisztikai próbával nem megkülönböztethetők.

2.4. A zajérzékenység vizsgálata

A 2. táblázatban bemutatott, a determinisztikus tenzorokhoz szokott kutató számára talán furcsának tűnő esetek nem elhanyagolható mennyiségben jelennek meg a paleomágneses mérések között. Mielőtt terepi mérések kiértékelését mutatnánk be, szimulált adatsorokon vizsgáljuk az eljárás működését. Tegyük fel, hogy egy hipotetikus földrajzi hely \mathbf{k}_i mérési eredményi az egzakt \mathbf{k}_0 tenzort közelítik. Az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy nincs szükség normalásra és az O központú koordináta-rendszer tengelyei egybeesnek \mathbf{k}_0 sajátirányaival (azaz $k_{0,12} = k_{0,13} = k_{0,23} = 0$). A terepi mérések jellemzően $N = 20..40$ mérési eredményt szolgáltatnak, ennek megfelelően a szimulációkat $N = 30$ méretű mintán hajtottuk végre. Az egyes szimulált mérési eredményeket az egzakt tenzorból állítottuk elő:

$$\mathbf{k}_i = \mathbf{k}_0 + \Delta \cdot \mathbf{r}_i, \quad i = 1..N, \quad (22)$$

ahol \mathbf{r}_i elemei standard normális eloszlásból húzott számok, Δ a szimulációban felvett szórás. A szimulációk során \mathbf{k}_0 rendre izotróp ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$), forgási anizotróp ($\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$) és anizotróp ($\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$) tenzor volt, a (3) összefüggés nyomán a Δ szórást a sajátértékek különbségének minimuma környékén vettük fel. A szimuláció eredményeit a 3. táblázatban foglaltuk össze. Várakozásinknak megfelelően, a sajátértékek különbségénél kisebb szórás esetén ($\Delta = 0.001$ oszlop) módszerünk egyértelműen beazonosítja \mathbf{k}_0 típusát (azaz a hibás besorolás valószínűsége Δ csökkenésével tart a nullához). Ezzel szemben túl nagy szórás ($\Delta = 0.1$ oszlop) esetén bármely adathalmaz tipikusan izotrópnak bizonyul. A második és harmadik sorban felvett \mathbf{k}_0 sajátértékek különbségeinek minimumával megegyező szórás ($\Delta = 0.01$) esetén a szimuláció kimenetele jellemzően visszadja \mathbf{k}_0 típusát, azonban időnként KA és KFA besorolást kapunk eredményül. Ez Δ növelésével egyre gyakrabban fordul elő jelezvén, hogy a $\Delta = 0.1$ oszlopban nagy valószínűséggel 1A kimenetelre számíthatunk. Szimulációink alátámasztják a (3) összefüggés kapcsán leírtakat: módszerünk olyan tartományban is képes (legalább részlegesen) reprodukálni \mathbf{k}_0 típusát, ahol az irodalomban található megoldások már izotrópiát jeleznek.

\mathbf{k}_0	\mathbf{k}_0 sajátértékei	$\Delta = 0.001$	$\Delta = 0.010$	$\Delta = 0.100$
1A	$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1.00$	1A	1A	1A
2B	$\lambda_1 = \lambda_2 = 1.01$ $\lambda_3 = 1.00$	2B	2B (1C,1B)	1A
3C	$\lambda_1 = 1.01$ $\lambda_2 = 1.00$ $\lambda_3 = 0.99$	3C	3C (1B, 1C, 2B, 2C)	1A

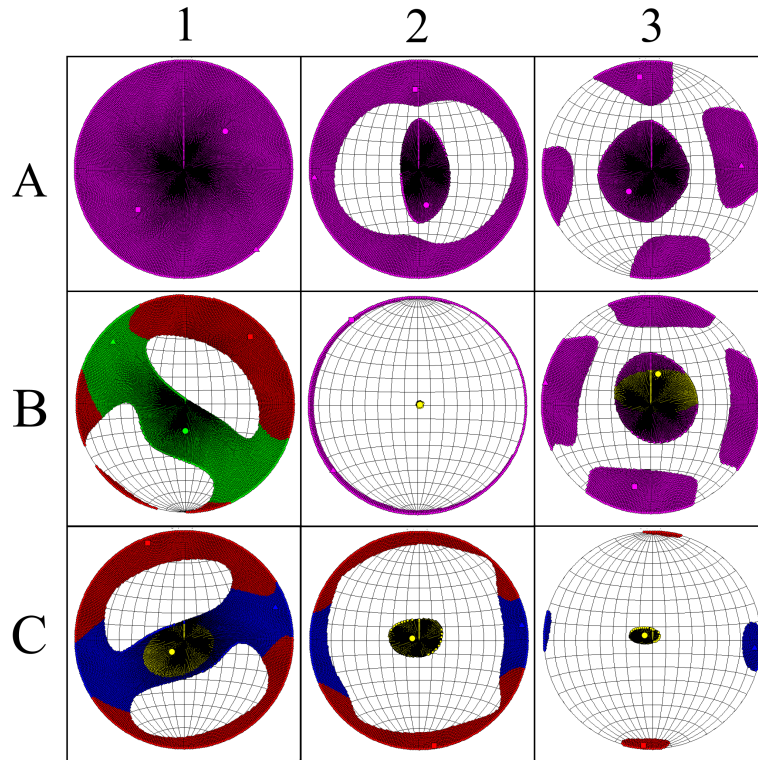
3. táblázat. $N = 30$ szimulált mérési eredményből képzett statisztikai minták kiértékelése. A szimulációk feltüntetett kimenetelei a 2. táblázat celláira utalnak. A szimuláció sztochasztikus jellege miatt elvben bármely kimenetel lehetséges. A többszöri futtatás esetén leggyakoribb kimeneteleket tüntettük fel, a zárójelben szereplő kimenetelek ritkábban, de érzékelhető mennyiségben (körülbeül 1 – 5%-os gyakorisággal) jelentkeznek.

Végezetül, a szimulációs adatok lehetővé teszik, hogy a 2. táblázat osztályainak egy-egy jellemző elemét sztereogrammon ábrázoljuk. A 2. ábrán különböző sajátértékek és Δ szórás mellett ($\alpha = 0.05$ szignifikanciaszinten) mutatjuk be a sztochasztikus tenzorokra jellemző sztereogrammokot. Az itt és a későbbi ábrák sztereogramjain a maximális irány (λ_1) sajátvektorát piros, a középső (λ_2) sajátvektorát kék, míg a minimális irány (λ_3) sajátvektorát sárga szín jelöli. Amennyiben a maximális és az intermedier irány sajátértékei nem elkülöníthetőek, akkor a pszeudo-sajátvektorok lila színűek, az intermedier és a minimális irány sajátértékeinek megkülönböztetetlenségét zöld szín jelöli.

2.5. Terepi példák

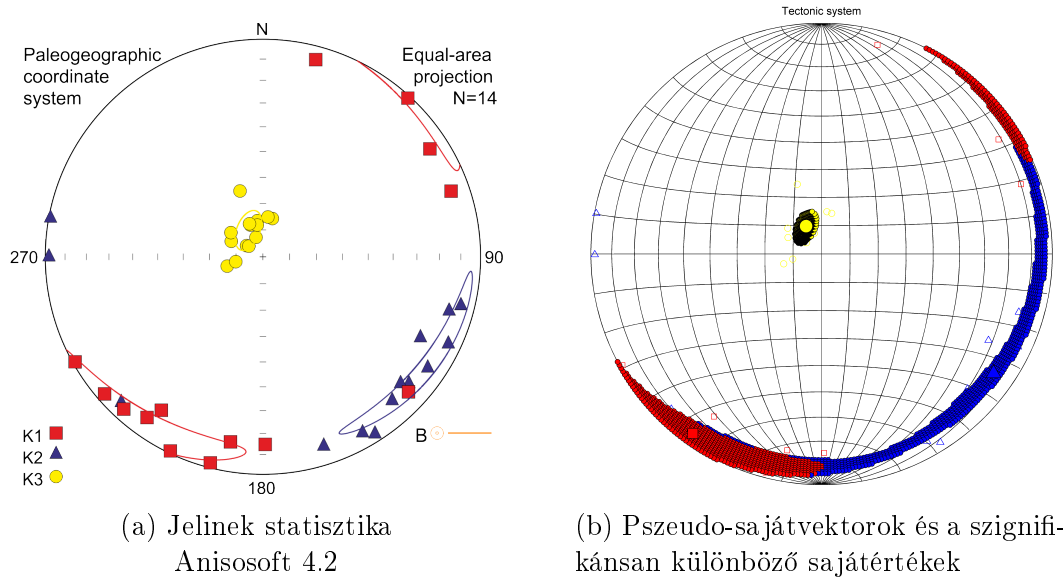
Ezen alfejezetben a gyakorlati alkalmazhatóság alátámasztására módszerünket valós, terepi eredmények kiértékelésére használjuk fel. A bemutatásra kerülő összes példa sztereogramját a tektonikai korrekció után ábrázoljuk. Az összehasonlíthatóság miatt minden példánál megadjuk a Jelinek-féle eljárás eredményeit is. Jelinek a sajátértékeket k_1, k_2, k_3 szimbólumokkal jelöli, ezek teljesen mértékben megfelelnek jelen írás λ_1, λ_2 és λ_3 értékeinek.

Elsőként Óbarok adatsorát ($N = 14$) vizsgáljuk (3.(a) ábra). Ez a statisztikai minta szigorúan véve nem lenne vizsgálható Jelinek módszerével mert a $\lambda_1 = k_1$ és $\lambda_2 = k_2$ sajátvektorokhoz tartozó sajátirányok konfidencia ellipsziseinek nagyobbik nyílásszöge bőven meghaladja a 25 fokot. A 2.2. alfejezetben részletezett eljárást használva a sztereogramra vetítjük az $\alpha = 0.05$ szignifikancia szint mellett elfogadott pszeudo-sajátvektorokat. Ábránk megmutatja, hogy az adatsorban meglévő szórás mellett mely irányokról lehet valószínűsíteni, hogy azok az adatsor eredő tenzorának sajátirányai. Az ábrán a pszeudo-sajátvektorok által megjelölt tartományok lényegében megfelelnek a Jelinek-féle módszer konfidencia tartományainak, azonban azokkal szemben egzaktaknak tekinthetőek. A vektorok eloszlása alapján a mérési eredmények eredője forgási anizotróp: a pszeudosajátvektorok két, diszjunkt halmazt alkotnak: a minimális (sárgával jelölt) \mathbf{u}_3 irányban a halmaz kiterjedése kicsiny, a másik halmaz azonban jelentős kiterjedésű. A forgási anizotrópiát igazolja, hogy az \mathbf{u}_1 és \mathbf{u}_2 (az eredő tenzorból közvetlenül számított) sajátvektorok által kifeszített síkon körbe minden egységvektor a (15) próba H_0 hipotézisét adja eredményül. Ezen síkon a pszeudo-sajátértékekre készített (19) próba szignifikáns különbséget jelez, ezt az ábrán a piros (=maximális szuszceptibilitás iránya) és kék (=intermedier irány) színekkel



2. ábra. Szimulációs példák a 2. táblázat osztályaihoz. A szimulációk bemenő paramétereit az egyes esetekhez $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \Delta)$ alakban (v.ö. a 3. táblázattal):

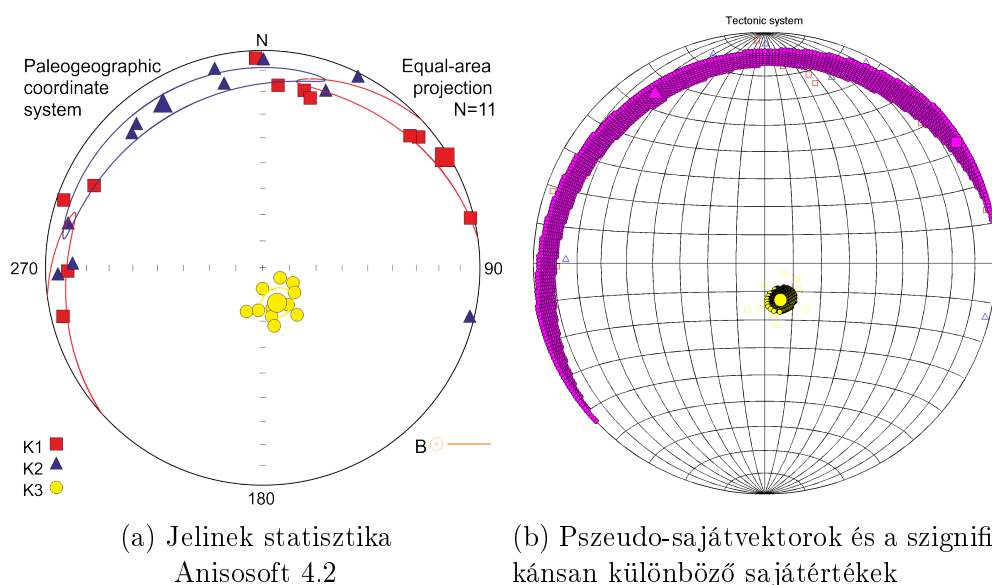
1A:(1.01,1.00,0.99,0.050), 2A:(1.01,1.01,1.00,0.005), 3A:(1.01,1.00,0.99,0.009),
 1B:(1.01,1.01,1.00,0.010), 2B:(1.01,1.01,1.00,0.001), 3B:(1.01,1.00,0.99,0.007),
 1C:(1.01,1.00,0.99,0.016), 2C:(1.01,1.00,0.99,0.013), 3C:(1.01,1.00,0.99,0.005)



3. ábra. Óbaroki mintacsoport

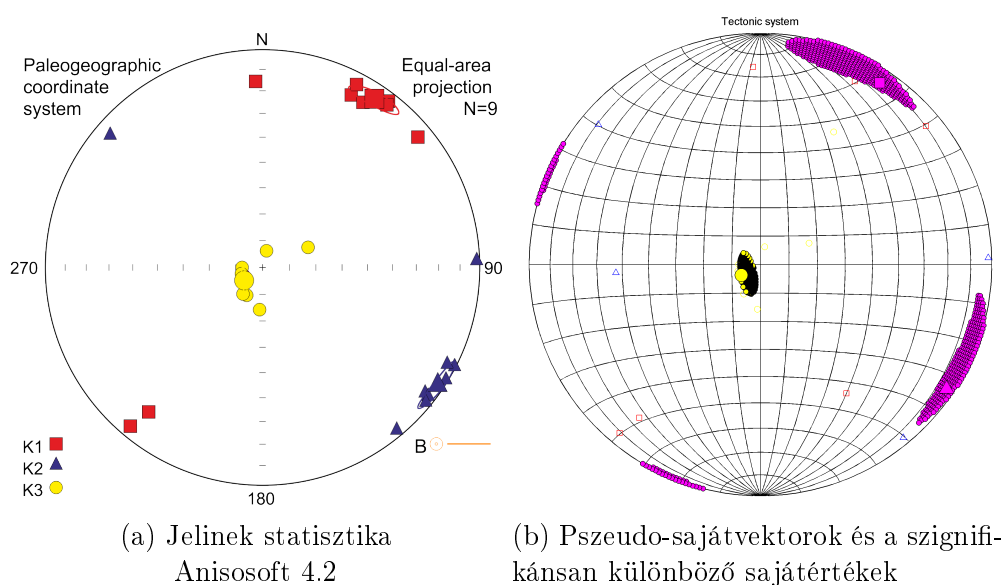
különítjük el. Összefoglalva, a 2. táblázat szerint az óbaroki minta a 2C osztálynak felel meg (kismértékben anizotróp). Felmerül a kérdés, hogy akkor az adathalmaz rendelkezik-e irányultsággal? A minimális sajátvektor iránya teljesen egyértelmű. A sajátértékek szignifikáns különbsége miatt védhető, ha a sztereogramon az eredő tenzorhoz számított maximális és középső sajátvektorokat is feltüntetjük. Azonban az

eredmények értékelésénél érdemes figyelembe vennünk, hogy ezen megoldás "gyengébb" egy valódban anizotróp tenzorhoz képest. Ez éppen a 2. fejezetben említett, gyenge irányultságot okozó mechanizmusra utal.



4. ábra. Solymári mintacsoport

Az óbaroki adatsorhoz hasonlóknak tűnik a solymári adathalmaz ($N = 11$, 4. ábra), itt Jelinek módszerével számított konfidenciaellipszisek részben átfedik egymást. Az adatsor eredő tenzora mind a sajátvektorai, mind a sajátértékei alapján forgási anizotróp, a maximális és a középső irány a mintából nem különíthető el, (2B osztály a 2. táblázatban). Ilyen esetben az eredő tenzor maximális és középső sajátirányainak feltüntetése a sztereogramon kimondottan félrevezető: az adott mintához nem létezik plauzibilis érv arra, hogy miért pont a bejelölt irányokat tekintsük maximális és intermedier irányoknak.



5. ábra. Fenyőfői mintacsoport

Utolsó példánk Fenyőfő ($N = 9$, 5. ábra). Az eredő tenzor a Jelinek-féle eljárással anizotrópnak tűnik, a konfidencia ellipszisek kiterjedése kicsiny, nincs okunk a módszer alkalmazhatóságában kételkedeni. Azonban, kiszámítva az eredő tenzor sajátértékekeit azt találjuk, hogy $\lambda_1 = k_1$ és $\lambda_2 = k_2$ értéke meglehetősen közel esik egymáshoz. Ez felveti, hogy vajon a (3). egyenletben a sajátértékek különbsége, vagy a Δ szórás a kisebb. Új módszerünk a sajátvektorok tekintetében megerősíti az anizotrópiát, a pszeudo-sajátvektorok három, diszjunkt halmazt eredményeznek, ráadásul mindegyik halmaz csak a sztereogram kis részét fedi. Azonban a sajátvektorokkal kapcsolatban az derült ki, hogy $\lambda_1 = k_1$ és $\lambda_2 = k_2$ nem különböztethető meg, ami az említett kis eltérés miatt nem is tűnik meglepőnek. Az eredményt úgy interpretálhatjuk, hogy a maximális és a középső sajátirány elhelyezkedését nem tudjuk eldönteni, ámbár lehetséges irányuk kis szögterületben helyezkedik el. A statisztikai minta alapján mindkét, lilával jelölt halmaz tartalmazhatja a maximális irányt. Ezen adatsor eredő tenzora a 2. táblázat szerinti 3B esetet képviseli (kismértékben anizotróp). Utolsó példánk rámutat arra, hogy pusztán a Jelinek módszer konfidencia ellipszisei alapján, "ránézésre" vélelmezett anizotrópia téves is lehet, mert ez még nem garantálja a sajátértékek szignifikáns elkülönülését.

A bemutatott példákat különböző szignifikancia szinten is elemeztük. Vizsgálataink szerint a szignifikancia-szint változtatása a $0.01 < \alpha < 0.20$ tartományon a pszeudo-sajátvektorok halmazát csak kis mértékben módosítja, a szignifikánsan különböző sajátértékek számára pedig nincs hatással. Ez különösen alkalmassá teszi módszerünket a kismértékben anizotróp tenzorok vizsgálatára.

3. Eltérő eredetű mérési eredmények különválasztása klaszter analízissel

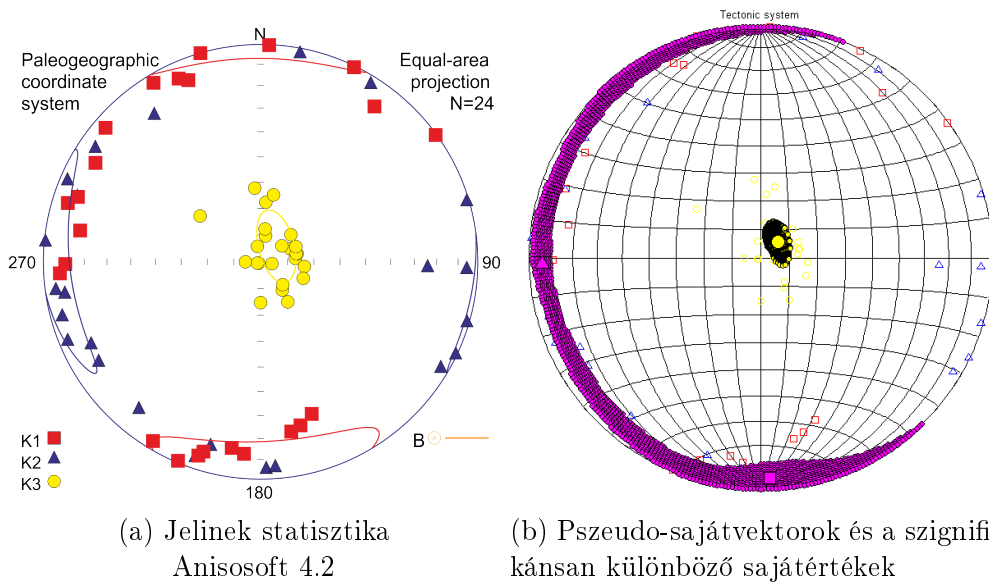
A gyakorlatban a forgási anizotrópiát mutató (vagy ahhoz közel álló) mérési eredmények felvetik azt a kérdést, hogy vajon nem két, vagy esetleg több fázis adatai kerültek-e kiértékelésre. Mint láttuk, N darab mérési eredményből a \mathbf{k}_e eredő tenzor kötöttségek nélkül számítható. Az N darab mérési eredmény egy statisztikai mintába sorolása önkényesnek is mondható. A döntés mögött az a feltételezés húzódik meg, hogy az adott mintacsoport valamikor zaj mellett ugyanazon közetfizikai mennyiséget approximálja. Ezen feltevés gyakran vitatható. Ebben a fejezetben a mintán belüli csoportok elkülönítésére egy, a klaszter analízisből ismert módszert mutatunk be. A klaszter analízis kiterjedt irodalmában szinte megszámlálhatatlan algoritmust publikáltak. Mi kizárólag felhasználni szeretnénk egy, a problémánknak megfelelő módszert. Munkánk során több eljárással is kísérleteztünk (pl: K-mean, Hierarhiikus Klaszterek, Gaussian Mixture Modellek,...stb.), a *dbscan* algoritmus (Ester et al., 1996) kiemelkedően jó eredményeket szolgáltatott. Az eljárás az N elemű minta sűrűbb tartományait célozza különválasztani. Más, klaszter analízishez használt eljárásokkal szemben nem szükséges előre definiálni a szétválasztandó klaszterek számát. A (2) egyenlet alapján 6 darab független elem határozza meg a szuszceptibilitási tenzort, így egy mérési eredmény egyértelműen megfeleltethető egy $D = 6$ dimenziós tér egy pontjának. Az eljáráshoz elengedhetetlen a pontok közötti távolság definiálása, mi munkánkban a legerjedtebb, euklideszi távolságot vesszük alapul (azaz a vizsgálat tere \mathbb{R}^6). A normálás a ponthalmazt összehúzza, ezért a klaszter analízist a normálatlan adathalmazon érdemes végrehajtani.

A klaszter analízisben használt eljárások jellemzően nagy, több ezer, vagy akár több millió adatpontot tartalmazó minták elemzésére használatosak. Ezért is fontos kiemelni, hogy a klaszter analízissel kapott eredményt csak egy ötletnek, és nem végeredménynek tekintjük. Amennyiben az itt bemutatásra kerülő, vagy más eljárás

rással több klasztert azonosítunk a mérési eredmények halmazán, akkor azt érdemes statisztikai eljárással is megvizsgálni. Ilyen eljárást fog bemutatni a 4. fejezet. Az ott bemutatásra kerülő módszerekkel a gyakorlott kutató saját, klaszterekre vonatkozó hipotéziseit is ellenőrizheti.

3.1. Példa

Az $N = 24$ elemű orondpusztai adatokat három földtani rétegből mintázták. A teljes minta együtt a 6. ábra szerinti sztereogramot eredményezi, a \mathbf{k}_e eredő tenzor forgási anizotróp, sem a sajátvektorok, sem a sajátértékek nem engednek anizotrópiára következtetni. Osztályozásunk szerint (2. táblázat) ezen adatsor eredő tenzora (\mathbf{k}_e) a 2B osztályba tartozik.

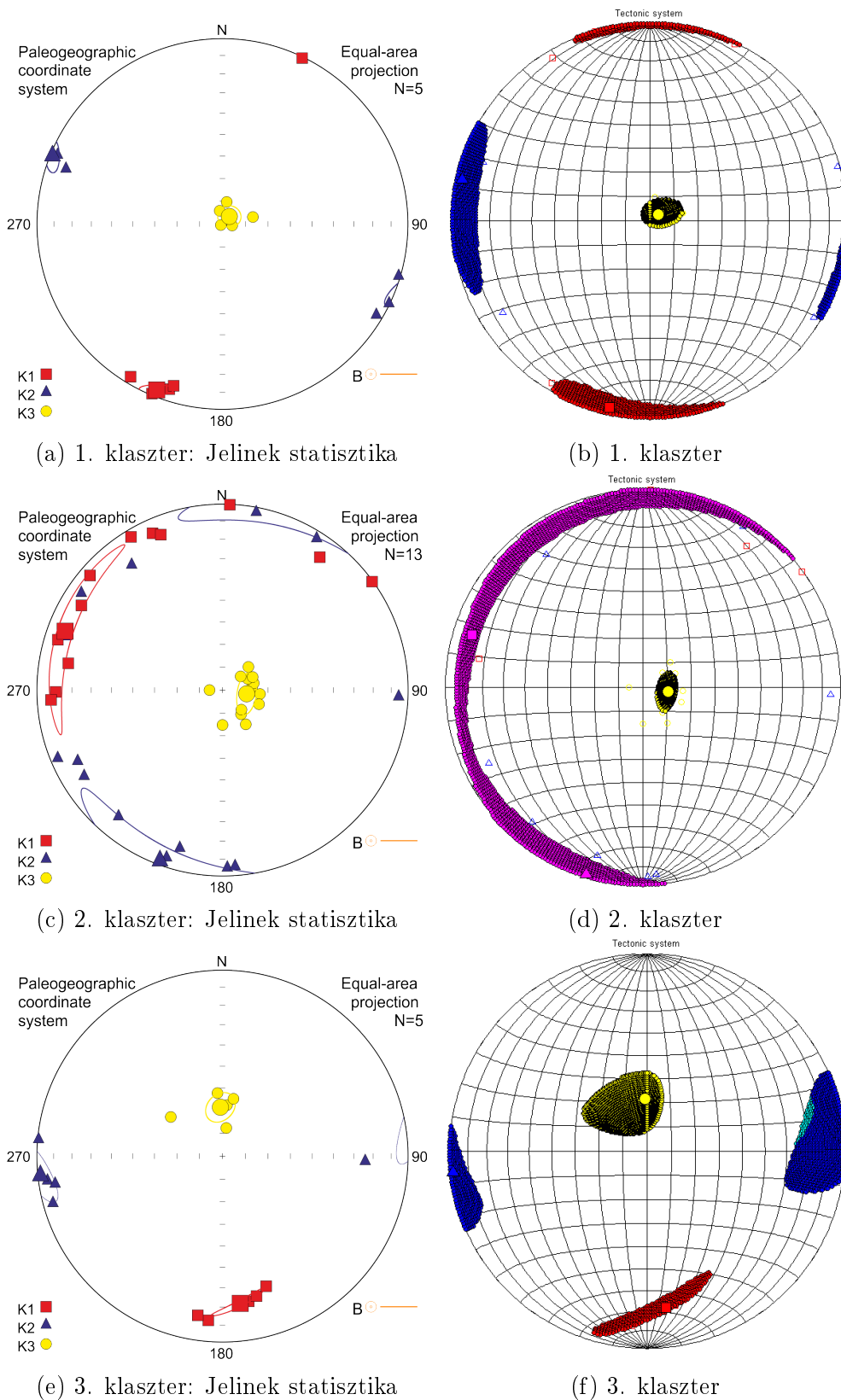


6. ábra. Orondpusztai mintacsoport

A normálatlan statisztikai minta klaszter analízise három csoportot különít el, ezek egy mérés kivételével (ami a kettes klaszter helyett az egyes klaszterbe kerül) megfelelnek a három földtani rétegnek, ahonnan a minták származnak. A 7. ábra mutatja a három csoport (külön-külön számított) eredő tenzorának pseudo-sajátirányait (résztetek a 2. fejezetben) és a szignifikánsan megkülönböztethető sajátértékeket.

4. Eredő tenzorok összehasonlítási lehetőségei

A 3. fejezet eljárása egyes mérési eredmények távolságán alapul, nem veszi figyelembe a mérési eredmények közötti szorosságot. Ezért a szétválasztás eredményét csak akkor fogadjuk el, ha statisztikai próbával is sikerül igazolni, hogy a megtalált klaszterek statisztikai alapon is különbözőek. Azonban az eljárás nem csak a klaszterek összehasonlítására használható. A paleomágneses vizsgálatok során gyakran az eredményül kapott szuszceptibilitási tenzort, vagy annak egyes jellemzőit (elsősorban a sajátvektorok irányait), más, nem mágneses vizsgálatokból kapott eredményekkel is összevetik. Jó példa erre a mágneses lineáció és a csapásirány, vagy az AMS tenzor és a mikrotektonikai feszültségtenzor összehasonlítása.



7. ábra. Az orondpusztai mintacsoport három klasztere megfelel a magminták forrásául szolgáló három földtani rétegnek

4.1. Tenzorok összehasonlítása közvetlenül az elemeik alapján

Tegyük fel, hogy a 2. fejezet szerinti \mathbf{k}_e tenzort és \mathbf{V} kovariancia mátrixát ismerjük. Adott egy 3×3 -as, szimmetrikus, valós elemű $\boldsymbol{\sigma}$ tenzor, egyenlőre ennek szórásától

tekintsünk el. Célunk olyan statisztikai próbák felállítása, amelyekkel a két tenzor azonosságát igazolni tudjuk. Mindenek előtt tisztáznunk kell, hogy pontosan mit értünk azonosság alatt. Már utaltunk rá, hogy a geofizikában a tenzorok sajátirányainak van kitüntetett szerepe, ezen túl a sajátértékből képzett arányok lehetnek még fontosak (pl: lineációs fok). A 2. fejezetben rámutattunk arra, hogy a sajátvektorok statisztikai elemzése nem triviális feladat. Tenzorok összehasonlításakor dönthetünk úgy, hogy a két tenzor ábrázolására szolgáló mátrixok azonosságát vizsgáljuk. Megmutatjuk, hogy a tenzorok elemenkénti összehasonlítása még akkor is járható út, ha a sajátvektorok azonos állását szeretnénk igazolni. A mátrixok összehasonlításának nehézsége abban rejlik, hogy a \mathbf{k}_e és a $\boldsymbol{\sigma}$ tenzor skalárinvariánsai (Itskov, 2007; Roman, 2005) akár jelentősen is eltérhetnek. (A tenzorok normálása kapcsán már érintettük ezt a problémát.) Olyan lineáris transzformációt keresünk, ami a a tenzor sajátvektorainak irányát nem változtatja meg, azonban a mátrix elemekben a lehető legkisebb eltérést eredményezi. A választott transzformációt a $\boldsymbol{\sigma}$ tenzoron mutatjuk be:

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = t_1 \boldsymbol{\sigma} + t_2 \mathbf{I}, \quad (23)$$

ahol \mathbf{I} az egységtenzor, t_1 és t_2 tetszőleges valós számok, $t_1 \neq 0$. Legyen a $\boldsymbol{\sigma}$ tenzor egy \mathbf{v}_i sajátvektorához tartozó sajátérték μ_i (Összhangban a (8). összefüggéssel: $\boldsymbol{\sigma} \mathbf{v}_i = \mu_i \mathbf{v}_i$). Vizsgáljuk $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ és \mathbf{v}_i szorzatát:

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{v}_i = (t_1 \boldsymbol{\sigma} + t_2 \mathbf{I}) \mathbf{v}_i = t_1 \mu_i \mathbf{v}_i + t_2 \mathbf{v}_i = (t_1 \mu_i + t_2) \mathbf{v}_i. \quad (24)$$

Tehát a transzformált tenzor megőrzi az eredeti $\boldsymbol{\sigma}$ tenzor sajátvektorait, i . sajátértéke pedig a $t_1 \mu_i + t_2$ értéket veszi fel. (Megjegyezzük, hogy a (23) transzformáció a szimmetrikus $\boldsymbol{\sigma}$ tenzorhoz a szimmetrikus $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ -t rendeli hozzá.) Kérdés, hogy hogyan vegyük fel a t_1 és t_2 szorzókat. Egyik lehetőség, hogy \mathbf{k}_e és $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ tenzor pontosan két skalárinvariánsát egyenlővé tesszük. Statisztikai szempontból azonban ez nem feltétlenül optimális. A \mathbf{k}_e és a $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ tenzorok elemei között legkisebb eltérését akkor kapjuk, ha t_1 és t_2 számokat legkisebb négyzetek módszere szerint vesszük fel (Timm, 2002).

A két, összehasonlítandó tenzor egyezését vizsgálhatnánk elemenként, mind a hat (normált esetben 5) paraméterre t -próbát illetve. Azonban ismeretes, hogy ez a megközelítés szorosabb összefüggést mutat, hiszen nem veszi figyelembe, hogy a 6 (normált esetben 5) paraméter egymástól nem független valószínűségi változó. Ezért a t -próba 2. fejezetben már bemutatott, több dimenziós változatát, a Hotelling féle T^2 eljárást használjuk. Nem normált vizsgálatnál \mathbf{k}_E és $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ elemeiből képezzük a következő vektorokat:

$$\tilde{\mathbf{k}} = [k_{11}, k_{22}, k_{33}, k_{12}, k_{23}, k_{13}]^T, \quad (25)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = [\hat{\sigma}_{11}, \hat{\sigma}_{22}, \hat{\sigma}_{33}, \hat{\sigma}_{12}, \hat{\sigma}_{23}, \hat{\sigma}_{13}]^T, \quad (26)$$

normált esetben pedig

$$\tilde{\mathbf{k}} = [k_{22}, k_{33}, k_{12}, k_{23}, k_{13}]^T, \quad (27)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = [\hat{\sigma}_{22}, \hat{\sigma}_{33}, \hat{\sigma}_{12}, \hat{\sigma}_{23}, \hat{\sigma}_{13}]^T. \quad (28)$$

A statisztikai próbához a H_0 nullhipotézis és a H_1 alternatív hipotézis:

$$H_0 : \tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \tilde{\mathbf{k}} \quad (29)$$

$$H_1 : \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \neq \tilde{\mathbf{k}}$$

A Hotelling-féle T^2 próbastatisztikát és az α szignifikancia szinten a T_0 küszöbértéket a következő összefüggések szolgáltatják:

$$T^2 = N(\tilde{\mathbf{k}} - \tilde{\boldsymbol{\sigma}})^T \mathbf{V}(\tilde{\mathbf{k}} - \tilde{\boldsymbol{\sigma}}), \quad (30)$$

$$T_0 = \frac{p(N-1)}{N-p} F_{1-\alpha, p, N-p}, \quad (31)$$

ahol $F_{1-\alpha, p, N-p}$ a p és $(N-p)$ paraméterű F eloszlás, $p = 6$ normálás nélküli és $p = 5$ normált statisztikai mintára. Amennyiben $T^2 < T_0$, a H_0 hipotézis elutasítására nincs okunk, a két tenzor statisztikai értelemben azonos, az azonosság szorosságát mérhetjük a

$$C = \frac{T_0 - T^2}{T_0} \quad (32)$$

hányadossal. (Ezt természetesen a cikkünkben szereplő összes próba esetén megtehetjük.)

Tegyük fel, hogy $\boldsymbol{\sigma}$ elemei \mathbf{k}_e tenzorhoz hasonlóan normális eloszlású valószínűségi változók. Legyen $\boldsymbol{\sigma}$ egy M mérésből álló adathalmaz várható értéke, a tenzorelemek kapcsolatát jellemző variancia-kovariancia mátrixot jelölje $\boldsymbol{\Theta}$! A (23). transzformáció lineáris, ezért $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ elemei is normális eloszlást követnek, kovariancia mátrixuk $\hat{\boldsymbol{\Theta}} = t_1^2 \boldsymbol{\Theta}$. Tegyük fel, hogy $\hat{\boldsymbol{\Theta}} \cong \mathbf{V}$ teljesül. A kétmintás T^2 próba végrehajtásához a következő összefüggések adódnak:

$$\mathbf{W} = \frac{(N-1)\mathbf{V} + (M-1)\hat{\boldsymbol{\Theta}}}{N+M-2}, \quad (33)$$

$$T^2 = \frac{NM}{N+M} (\tilde{\mathbf{k}} - \tilde{\boldsymbol{\sigma}})^T \mathbf{W}^{-1} (\tilde{\mathbf{k}} - \tilde{\boldsymbol{\sigma}}), \quad (34)$$

$$T_0 = \frac{p(N+M-2)}{N+M-p-1} F_{1-\alpha, p, N+M-p-1}. \quad (35)$$

Az imént ismertett próbákat közvetlenül a tenzorok elemein hajtjuk végre, ezért a H_0 hipotézis teljesülése a közel eső sajátirányok mellett a tenzorok skalárinvariánsainak közelségét is valószínűsíti. Ennek nyomán egyes, a tenzornak megfeleltethető ellipszoid jellemzők is közeli lesznek, mégha a főtengetyarányok a (23) transzformáció következtében eltérőek is. Jó példa erre a szerkezetföldtani irodalomban (Angelier, 1990) használatos, az ellipszoid lapultságát mérő következő skalár:

$$\Phi = \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{\lambda_1 - \lambda_3}, \quad (36)$$

amely (23) transzformáció alatt invariáns. A (29). próba H_0 hipotézise a sajátirányok közelségén túl azt is valószínűsíti, hogy a Φ skalár \mathbf{k}_e és $\boldsymbol{\sigma}$ tenzorokra nem mutat szignifikáns eltérést.

4.2. Tenzorok összehasonlítása sajátvektoraik alapján

A geofizikai gyakorlat számára talán természetesebb lenne, ha közvetlenül a sajátirányok alapján lehetne elvégezni a statisztikai összehasonlítást. Esetenként ez nem csak tenzorok összehasonlításakor jelentkezik, hanem például \mathbf{k}_e egyik, vagy másik sajátvektorát szeretnénk egy más forrásból ismert \mathbf{v} vektorral összevetni (például a földrajzi helyen mért csapásirány és a szuszceptibilitási tenzor maximális, lineációs iránya közötti egyezést szeretnénk kimutatni). Ennek nehézsége, ahogy azt már korábban

említettük abban áll, hogy a tenzorelemek mérési hibája ránézésre nem megjósolható módon befolyásolja a sajátvektorok pontosságát.

Akár a \mathbf{v} vektor, akár a $\boldsymbol{\sigma}$ tenzor sajátirányával dolgozunk, kézenfekvő a 2. fejezet módszerét felhasználni. Az ismert \mathbf{v} vektorról a 2. fejezet (15) próbájával tudjuk eldönteni, hogy lehet-e a \mathbf{k}_e valamely sajátvektora. Értelemszerűen ez a vizsgálat akkor jelent értékelhető eredményt, ha a \mathbf{k}_e sajátvektorának bizonytalansága kicsi. Azaz a próba elvégzésén túl szükségesnek látszik a 2. fejezetben részletesen ismertett módon a sztereogramon feltüntetni az összes pszeudo-sajátvektort. Amennyiben \mathbf{v} környezetében csak kis szögeltérésekkel helyezkednek el pszeudo-sajátvektorok, akkor joggal mondhatjuk, hogy \mathbf{v} a megfelelő sajátvektorral statisztikai értelemben megegyezik.

Tenzorok összehasonlításakor dönthetünk úgy, hogy $\boldsymbol{\sigma}$ sajátvektorait egyesével elemezzük. Ha egyik sajátvektor esetén sem tudjuk a (15) H_0 hipotézisét elvetni, akkor az α szignifikancia szint mellett a két tenzor különbsége nem állapítható meg (legalább is a sajátvektor irányaik alapján). Azonban ebben az esetben nem vettük figyelembe a (9) egyenletben definiált vektor elemei közötti kovarianciát. Ez a megközelítés azt a kritikát veti fel, hogy lényegében itt három, egymástól független vektorként tekintünk $\boldsymbol{\sigma}$ sajátvektoraira. Egzaktabb eljáráshoz elő kell állítani a $\boldsymbol{\sigma}$ tenzor minden egyes \mathbf{v}_i sajátvektorához ($i = 1, 2, 3$) az \mathbf{A}_i vektort és a 3×6 -os (normált esetben 3×5) \mathbf{B} mátrixot (lásd: (11,12,13) egyenletek). Legyen $\mathbf{A} = [\mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_2^T \mathbf{A}_3^T]^T$ és

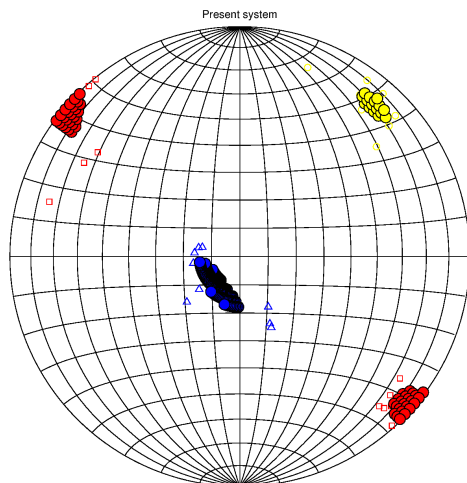
$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{B}_3 \end{bmatrix}. \quad (37)$$

Meg lehet mutatni, hogy \mathbf{v}_i tulajdonságaiból (ortogonális egységvektorok) következik, hogy \mathbf{B} rangja 3. A lineárisan függő sorokat törölve nyerjük az $\hat{\mathbf{A}}$ vektort és a $\hat{\mathbf{B}}$ mátrixot. A T^2 próbával vizsgálandó vektor pedig $\hat{\mathbf{e}} = \hat{\mathbf{A}} + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{k}_e$. Az $\hat{\mathbf{e}}$ vektor zérus voltát a (15) próbával analóg módon, $p = 3$ paraméteres vizsgálattal igazoljuk vagy vetjük el.

4.3. Példák

Egy vektor és a \mathbf{k}_e tenzor egy sajátirányának összehasonlítását a csapásirány és a maximális szuszceptibilitás (lineáció) összevetésén mutatjuk be. Az $N = 15$ elemű minta Lengyelországból, Chmiel helyiség mellől származik. A minta a 2. fejezet szerinti elemzéssel anizotróp (3C) osztály (8. ábra). A helyszíni mérési adatok szerint a vetősík ($220^\circ/80^\circ$)-as, ebből a csapásirány ($310^\circ - 130^\circ$)-nak adódik. A csapásirány vektora nagyon jó egyezést mutat az eredő tenzor lineációjával, a (32) egyenlet szerinti arányszám $C = 0.95!$

Ugyanezen minta esetén merült fel az a kérdés, hogy statisztikai alapon elkülöníthető-e az első $N_1 = 5$ mérés az utolsó $N_2 = 10$ méréstől, hiszen ezek ugyanazon mérési hely mélyebb rétegeiből származnak. A 3. fejezet szerinti eljárás szerint nem különíthető el két klaszter. Ennek ellenére vizsgáljuk meg a két részhalmaz eredő tenzorait! A 4.1. alfejezet szerinti összehasonlítás $C = 0.39$ -et eredményez, ami a két részhalmaz azonoságát mutatja. A sajátirányok összehasonlítása eltérő eredményre vezet: amíg az 5 elemes részhalmaz pszeudo-sajátvektorai tartalmazzák a 10 elemes részhalmaz eredő tenzorának sajátvektorait, addig a fordított vizsgálatnál ez nem igazolható. Mivel a 4.2 alfejezet vizsgálatainál \mathbf{v} és $\boldsymbol{\sigma}$ szórását nem vettük figyelembe, a próbák eltérő viselkedése nem meglepő. A két részhalmaz 2. fejezet szerinti ábrázolása minden kétséget eloszlat: amíg az 5 elemes részhalmaz kevés, és nagy szórású adata miatt forgási anizotrópiát mutat, addig a 10 elemes részhalmaz anizotróp. Összességében a statisztikai elemzés alapján nem lehet kijelenteni, hogy a két részhalmaz elkülöníthető (ennek elsődleges oka az ötelemes részhalmaz kicsiny elemszáma).



8. ábra. A Chmiel (Lengyelország) helyiségnél vett mintacsoport. A helyszínen mért csapásirány ($310^\circ - 130^\circ$) jól egyezik az anizotrópia tenzor maximális főirányával.

Befejezésként a 3. fejezetben bemutatott, orondpusztai mérést elemezzük (6. és 7. ábrák). A klaszterek száma $c = 3$. Az i . klaszter esetén megvizsgáljuk, hogy lehet-e azonos a j . klaszterrel ($i, j = 1, 2, \dots, c, i \neq j$). Ehhez a (33) összefüggésekkel adott próbát hajtjuk végre. (Mivel mindegyik klaszter adatait normáljuk, a (23) transzformáció alkalmazására nincs is szükség.) Minden esetben a próba H_1 hipotézisét kell elfogadnunk, azaz módszerünk valószínűsíti a három klaszter létét, a mérési eredmények különválasztását eljárásunk alátámasztja. A sajátvektorok 4.2. alfejezet szerinti vizsgálata ugyanezen eredményre vezet, amit a 7. ábra jobb oldalán szereplő sztereogramok vizuális összehasonlításával is könnyű belátni.

5. Összefoglalás

Cikkünkben közel izotróp, stohasztikus tenzorok sajátértékeinek és sajátvektorainak elemzésére szolgáló statisztikai módszereket ismertettünk. Rámutattunk arra, hogy amennyiben a tenzor ábrázolására használt mátrix elemei valószínűségi változók, akkor a sajátirányok elkülönülő halmazainak száma és a sajátértékek multiplicitása közötti kölcsönös összefüggés nem áll fenn. Ez drasztikusan eltér a determinisztikus tenzorok esetén megszokott képtől. A sztochasztikus tenzorokra bevezetett új osztályozás ígéretes alkalmazási területe a harmadidőszaki üledékeken mért mágneses szuszceptibilitási minták eddigieknél finomabb és részletesebb elemzése.

Köszönetnyilvánítás

Köszönöm Mártonné Szalay Emőnek (MFGI Paleomágneses Laboratórium) hogy felhívta figyelmemem a forgási anizotrópia problémájára és Sipos-Benkő Krisztinának hogy segített a terepi eredmények kiértékelésében. A kutatást az OTKA 105245 témája támogatta.

Hivatkozások

Angelier J., 1990: Inversion of field data in fault tectonics to obtain the regional stress-III. A new rapid direct inversion method by analytical means. *Geophys. J. Int.* 103, 363-376

- Borradaile, G. 2003: Statistics of Earth Science Data. Springer Verlag Berlin-Heidelberg.
- Ester M., Kriegel H.P., Sander J., Xu X., 1996: A Density Based Algorithm for Discovering Clusters in Large Spatial Databases with Noise. Proceedings of 2nd International Conference of Knowledge Discovery and Data Mining, 226-231
- Fisher N.I., Lewis T., Embleton B.J.J., 1993: Statistical analysis of spherical data. Cambridge University Press
- Henry B., Le Goff M., 1995: Application de l'extension bivariate de la statistique Fisher aux données d'anisotropie de susceptibilité magnétique: intégration des incertitudes de mesure sur l'orientation des directions principales. C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. Iia 320, 1037-1042
- Hext G.R., 1963: The estimation of second-order tensors, with related tests and designs. Biometrika 50/3-4, 353-373
- Itskov M., 2007: Tensor Algebra and Tensor Analysis for Engineers. With Applications to Continuum Mechanics. Springer Verlag, Berlin-Heidelberg
- Jelinek V., 1978: Statistical processing of anisotropy of magnetic susceptibility measured on groups of specimens. Studia geoph. et geod. 22, 50-62
- Jelinek V., 1988: The Statistical Theory of Measuring Anisotropy of Magnetic Susceptibility of Rocks and its Application. Geofyzika, Brno
- Roman S., 2005: Advanced Linear Algebra, 2nd. Ed. Springer
- Sipos-Benkő K., Márton E., Fodor L., Pethe M., 2014: An integrated magnetic susceptibility anisotropy (AMS) and structural geological study on Cenozoic clay rich sediments from the Transdanubian Range. Central European Geology. 57, közlésre elfogadva
- Timm N.H., 2002: Applied Multivariate Analysis. Springer
- Wetttl F., 2011: Lineáris Algebra. BME TTK
- Constable C., Tauxe L., 1990: The Bootstrap for Magnetic Susceptibility Tensors. J. Geophys. Res. 95, 8383-8395
- Tauxe L., Klystra N., Constable C., 1991: Bootstrap Statistics for Paleomagnetic Data. J. Geophys. Res. 96, 11723-11740
- Tauxe L., Constable C., Stokking L., Badgley C., 1990: Use of Anisotropy to Determine the Origin of Characteristic Remanence in the Siwalik Red Beds of Northern Pakistan. J. Geophys. Res. 95, 4391-4404

A. Appendix

A.1. 3x3 szimmetrikus tenzor kétszeres multiplicitású sajátértékekkel

Tekintsünk a forgási anizotróp \mathbf{k} tenzort, ennek kétszeres multiplicitású sajátértékét jelölje $\lambda_{12} = \lambda_1 = \lambda_2$ (a hozzá tartozó sajátvektorok: \mathbf{u}_1 és \mathbf{u}_2), az egyszeres multiplicitású sajátérték legyen λ_3 . Tegyük fel, hogy \mathbf{k} a (23) transzformáció eredményeként állt elő. $t_1 = 1$ és $t_2 = \lambda_{12}$ helyettesítéssel:

$$\mathbf{k} = \hat{\mathbf{k}} + \lambda_{12}\mathbf{I}. \quad (38)$$

Ekkor $\hat{\mathbf{k}}$ tenzor sajátértékei: $\hat{\lambda}_{12} = \hat{\lambda}_1 = \hat{\lambda}_2 = 0$ (kétszeres multiplicitású) és $\hat{\lambda}_3 = \lambda_3 - \lambda_{12} \neq 0$. A (8) definíció és a (23) transzformáció tulajdonságai alapján teljesül, hogy

$$\hat{\mathbf{k}}\mathbf{u}_1 = \hat{\mathbf{k}}\mathbf{u}_2 = 0, \quad (39)$$

azaz a $\hat{\mathbf{k}}$ tenzor sorvektorai az \mathbf{u}_1 és \mathbf{u}_2 vektorok által kifeszített síkra merőlegesek (ami egyben azt jelenti, hogy \mathbf{u}_3 skalárszorosa). Így

$$\hat{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{k}}_1 \\ p\hat{\mathbf{k}}_1 \\ q\hat{\mathbf{k}}_1 \end{bmatrix}, \quad (40)$$

ahol a $\hat{\mathbf{k}}_1$ vektor a tenzor első sora, p és q tetszőleges, nem zérus valós szám. Azonban a feltevéseink nyomán $\hat{\mathbf{k}}$ szimmetrikus, így (40) alapján elemeire a következő összefüggéseknek kell fennállni:

$$\hat{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} \hat{k}_{11} & p\hat{k}_{11} & q\hat{k}_{11} \\ p\hat{k}_{11} & p^2\hat{k}_{11} & pq\hat{k}_{11} \\ q\hat{k}_{11} & pq\hat{k}_{11} & q^2\hat{k}_{11} \end{bmatrix}, \quad (41)$$

ahol \hat{k}_{11} $\hat{\mathbf{k}}$ tenzor bal felső eleme. Így az eredeti, forgási anizotróp \mathbf{k} tenzor elemei között a teljesülnie kell, hogy

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{12} & k_{22} & k_{23} \\ k_{13} & k_{23} & k_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{k}_{11} + \lambda_{12} & p\hat{k}_{11} & q\hat{k}_{11} \\ p\hat{k}_{11} & p^2\hat{k}_{11} + \lambda_{12} & pq\hat{k}_{11} \\ q\hat{k}_{11} & pq\hat{k}_{11} & q^2\hat{k}_{11} + \lambda_{12} \end{bmatrix}. \quad (42)$$

Ismeretlenjeink: \hat{k}_{11} , λ_{12} , p és q . A $\hat{\mathbf{k}}$ tenzor k_{11} , k_{12} , k_{13} és k_{23} elemei az ismeretleneket egyértelműen meghatározzák ($p = k_{23}/k_{13}$, $q = k_{23}/k_{12}$, $\hat{k}_{11} = k_{12}/p$ és $\lambda_{12} = k_{11} - \hat{k}_{11}$). Ezek segítségével a következő, nemlineáris összefüggések adódnak:

$$k_{22} = p^2\hat{k}_{11} + \lambda_{12} = k_{11} + \left(\frac{k_{23}}{k_{13}}\right)^2 k_{11} - \frac{k_{12}}{k_{23}}k_{13}, \quad (43)$$

$$k_{33} = q^2\hat{k}_{11} + \lambda_{12} = k_{11} + \left(\frac{k_{23}}{k_{12}}\right)^2 k_{11} - \frac{k_{12}}{k_{23}}k_{13}. \quad (44)$$