Vekerdi László matematikatörténeti írásaiból

Válogatta és bevezette: Szabó Péter Gábor

Az online változatot készítette és a szerző kéziratban maradt jegyzeteit szerkesztette: Gazda István

Magyar Tudománytörténeti Intézet

Budapest, 2014

Az online összeállítás a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült

Válogatta és bevezette:

Dr. Szabó Péter Gábor

Szegedi Tudományegyetem
Számítógépes Optimalizálás Tanszék

Az online változatot készítette és a szerző kéziratban maradt jegyzeteit szerkesztette:

Dr. Gazda István

Magyar Tudománytörténeti Intézet

Szakszerkesztő:

Bodorné Sipos Ágnes

Magyar Tudománytörténeti Intézet

A digitális kiadás elkészítésében közreműködtek:

Tordas és Társa Kft.

Hungarus Bt.

Tartalom

Előszó

Ez az összeállítás Vekerdi László (1924–2009) magyar nyelvű matematikatörténeti írásaiból ad közre több mint félszáz dolgozatot, amely kiegészíti korábbi hasonló tárgyú gyűjteményes kötetét, Az újkori matematika és fizika megszületése című munkát. A számos különböző folyóiratban publikált, gyakran csak hosszadalmas könyvtári búvárkodással fellelhető tanulmányoknak újraszerkesztésével, úgy gondoljuk, nagy segítséget adhat ez a válogatás a Vekerdi-életműben tájékozódni kívánok számára. A jelen kiadás azért is érdekes, mert bizonyos esetekben az egyes tanulmányokhoz készített jegyzeteket a korábbi kiadók ilyen-olyan indoklással volt, hogy elhagyták, így Vekerdi László hagyatéka alapján néhány írása most először kerülhet eredeti formájában nyilvánosságra.

Szerencsés emberek, akik személyesen ismerhették és hallgathatták Vekerdi Lászlót, a hazai tudománytörténet-írás egyik legkiválóbb alakját. Hihetetlenül gazdag olvasottságú ember volt, akinek tárgyismerete az egyes témakörök specialistái számára is gyakran lényegesen újat, új látásmódokat tudott adni. Néha még egy-egy megjegyzése, ötletes szófordulata vagy akár lábjegyzete is hosszú időre biztosíthatott és biztosíthat ma is kutatási programot az arra rezonálók számára. Senkit nem ismerünk, aki ilyen szinten egyszerre volt irodalomtörténész és tudománytörténész, aki ennyire ismerte az orvostörténetet és ugyanakkor elképesztő tájékozottsággal bírt a matematika és annak történetének legkülönbözőbb területein is. Kis iróniával azt mondhatnánk, hogy ritka az olyan belgyógyász szakorvos, aki hosszú évekig a Matematikai Kutatóintézetben is dolgozott és aki irodalomtörténeti munkásságáért később József Attila-díjat is kapott. A huszadik századi magyar irodalomban talán csak Németh László volt még hozzá hasonlóan széles látókörű, akivel személyesen is jól ismerték egymást. A jelen válogatásban újra közzétesszük egy-két magánlevelüket, néhány érdekes és izgalmas levélrészletüket a Bolyaiakkal kapcsolatosan.

Vekerdi szerény ember volt, magát nem tartotta igazán tudósnak, hanem csak afféle rendes könyvtárosnak. Könyvtárosnak, aki nem csak beszerzi és a helyére teszi, de el is olvassa és át is gondolja a könyveket. Persze azért nem mindent, okosan válogatva azok közül is, csak a fontosabbakat olvasva, néhány ezret, tízezret...

A tudományok királynőjébe, a matematikába volt szerelmes. Kicsit hasonlított Erdős Pálhoz annyiban, hogy a matematikával nem foglalkozókat mondhatni „trivi” lényeknek tartotta, akik vagy megmaradnak a maguk szintjén, vagy ha nagyon akarnak, hát kénytelenek lassan, lépcsőkön bandukolva haladni a tudományok emeletei között és nincs meg az a lehetőségük, hogy a matematika liftjén gyorsítva kedvükre ide-oda utazgathassanak, ahogyan azt Benedek István fogalmazta meg egyszer oly frappánsan.

Vekerdi László hatalmas szellemi hagyatékot adott nekünk. Írásainak, interjúinak, televíziós és rádiós beszélgetéseinek összegyűjtése, feldolgozása, újragondolása megkerülhetetlen azoknak, akik ma Magyarországon komolyan akarnak tudománytörténettel foglalkozni. A jelen összeállításban a magyar nyelvű matematikai írásaira koncentráltunk, az idegen nyelvűeket itt nem közöljük. Fontos azonban felhívni a figyelmet arra, hogy Vekerdi sokat fordított is, köztük több matematikai tárgyú könyvet. Lefordította németről magyarra Dörrie kiváló művét A diadalmas matematika című kötetét. Így jelent meg akkoriban, ezen a címen, pedig mennyire szerette volna Vekerdi, ha a címből a névelőt elhagyja a kiadó. Régóta várjuk az újrakiadását Courant és Robbins Mi a matematika? című remek könyvének, ezt is ő fordította le, angolból magyarra. De fordított magyar nyelvű matematikai műveket is angol nyelvre, így Rényi Alfréd két valószínűségszámításról szóló kötetét, valamint Kárteszi Ferencnek a véges geometriákról írott könyvét is.

Örömmel tesszük most egy helyen elérhetővé sok matematikatörténeti tárgyú írását, annak reményében, hogy a világháló adta lehetőségeket kihasználva, minél több, a tudománytörténet iránt érdeklődő emberhez fognak azok eljutni.

Kelt Szegeden, 2014 decemberében

Dr. Szabó Péter Gábor

Vekerdi László matematikai írásaiból

Tudománytörténet-írás – matematikatörténet-írás

Lexikális tömörségű áttekintés a tudománytörténet-írásról[1]

A tudományok történetéről és a tudósokról úgyszólván azóta írnak, amióta tudomány létezik; a **tudománytörténet-írás** ellenben új tudomány: a XIX. század végén s a XX. elején keletkezett. Addig a szakmájuk múltbéli eredményei iránt érdeklődő tudósok többnyire úgy írtak a tudomány történetéről, mintha kortárs kollégáik munkásságáról tájékoztatnának: J. B. J. Delambre francia csillagász hatkötetes „Histoire de l'astronomie”-ja (1817–1827) például Ptolemaiosz nehéz égi geometriai konstrukcióit ugyanazzal a szakmai közvetlenséggel és ugyanolyan jellegű elméletként ismerteti, mint 18. sz.-i kollégáiét; A. G. Kästner göttingai matematikaprofesszor négykötetes „Geschichte der Mathematik”-ja (1796–1800) ugyanúgy élő tudományos mintaképként tárgyalja Euklidész és Arkhimédész matematikáját, mint két évszázaddal régebben az antik matematika reneszánsz restaurátora, F. Commandino tette volt; E. H. F. Meyer, aki Goethe támogatásával nyerte el a Königsbergi Füvészkert igazgatói posztját, máig nélkülözhetetlen négykötetes „Geschichte der Botanik”-jában (1854–1857) Theophrasztosztól Albertus Magnuson át Goethéig egyformán afféle idősebb munkatársaként tekinti a „scientia amabilis” minden művelőjét, de még J. V. Carus 1872-ben megjelent „Geschichte der Zoologie”-ja is ugyanazon szakmai szempontok szerint méltatja Arisztotelészt, mint Darwint.

Fel sem igen merült bennük, hogy a régmúlt tudományát a jelenkorétól esetleg merőben eltérő, önálló történeti szempontok szerint és speciális történész módszerekkel kell megközelíteni. Az első, aki ezzel az igénnyel közeledett régmúlt korok tudományához, P. Tannery volt. Tannery mintaszerű Descartes-, Diophantesz-, Fermat-kiadásaiban megalapozta a tudománytörténeti anyaggyűjtés, szöveggondozás, kommentálás és értelmezés máig érvényes módszereit és elveit; a Descartes-levelezéshez írt – gyakran tanulmány terjedelmű – jegyzetei minőségi vízválasztót képviselnek a 17. sz. tudománytörténelmében, a görög egzakt tudományokról szóló monográfiái és tanulmányai pedig megmutatták, hogy egy régmúlt kor mégoly töredékesen reánk maradt matematikai és csillagászati tudását is lehet és érdemes

[1] Forrás: Kulturális kisenciklopédia. Főszerk.: Kenyeres Ágnes, szerk.: Hargitai György. Bp., 1986. Kossuth. pp. 723–726.

rekonstruálni a források nyilván vitatható, de legalább explicit értelmezése alapján a kor saját tudásszintjének megfelelően. Amit Tannery a görög s a XVII. sz.-i tudomány, azt Duhem a középkori és a kora reneszánsz fizika és kozmológia vonatkozásában végezte el. Szövegkiadásai és értelmezései körültekintő gondosság tekintetében elmaradnak Tanneryéi mögött, viszont egymaga teremtett meg egy egész tudománytörténeti provinciát, a középkor – azóta hatalmassá duzzadt – át. Ugyanekkor A. Favaro húszkötetes Galilei-kiadásával (1890-1909), valamint Galileiről és koráról írt tanulmányaival és könyveivel megalapozta a modern Galilei-kutatást, s munkásságával mintát állított a tudós-filológiák elé általában. Jórészt épp a tudós-filológiákkal kapcsolatban (mint amilyen J. C. Poggendorff máig élő bio-bibliografikus vállalkozása volt vagy B. Boncompagni „Bolletino”-ja) vált a sz. utolsó harmada a nemzeti tudománytörténelmek megalapozásának a korává. R. Caverni megírta a kísérleti módszer történetét Itáliában (6 köt. 1891–1900), a Bajor Tudományos Akadémia Történettudományi Bizottsága pedig szakonként, külön kötetekben megíratta a tudományok történetét Németországban. Egyik nagy vállalkozás sem mentes elfogultságoktól; de míg Caverninek inkább csak némi ortodox Galilei-ellenesség vethető a szemére, addig a német sorozat akarva, nem akarva „annektálta” a tárgyalt tudományok jelentős darabjait, s módszereit tekintve is sokkal elmaradottabb. A franciákéhoz és az olaszokéhoz fogható metodikai eredményeket a német **tudománytörténet-írás** leginkább a matematikatörténetben ért el, M. Cantor grandiózus kompilációjának („Vorlesungen über Geschichte der Mathematik”, 3. köt. 1880–1898) kiegészítése, folytatása és kiigazítása során. Még maga M. Cantor elindított 1877-ben egy kötetlen időközökben megjelenő tanulmánysorozatot „Abhandlungen zur Geschichte der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen” címmel, G: Eneström stockholmi matematikaprofesszor pedig Cantor körével versenyezve „Bibliotheca Mathematica” címmel indított folyóiratot (1886–1914), amely alkalomadtán kérlelhetetlenül bírálta Cantor és körének tévedéseit. A nívós verseny számos nagy matematikus érdeklődését keltette fel a történetírás iránt; olyan művek születtek, mint H. G. Zeuthen monográfiái Apollóniosz kúpszeletelméletéről és az újkorelő matematikai tudományairól vagy J. Klein könyve a 19. sz.-i matematika történetéről. A német matematikatörténet-írás hamarosan az élre tört, színvonalát és helyét, a világháborúk tragédiái és a nácizmus grasszálása ellenére, generációkon keresztül megőrizte, s H. Wieleitner, J. Tropfke, O. Becker, O. Neugebauer, B. L. van der Waerden, J. E. Hofmann közvetítésével egész napjainkig (Cr. J. Scriba, E. A. Fellmann, H. J. M. Bos) hat.

O. Neugebauer, O. Toeplitz és O. Becker irányításával a 30-as évek elején igen magas színvonalú folyóirat indult „Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik" címmel; formálisan az ekkor két részre szakadt, 1908 óta megjelenő „Archiv für die Geschichte der Naturwissenschaften und Medizin" egzakt tudományokat tárgyaló részeként; valójában azonban ez az új folyóirat inkább az „Abhandlungen..." és a „Bibliotheca..." összekapcsolt újraélesztésének tekinthető. A „Quellen und Studien..." a kérlelhetetlen filológiai precizitást – legalábbis a csúcsain – egyesíteni tudta a fogalmak fejlődésének ötletes, olykor egyenesen szellemes elemzésével; s ez a precíz fogalmi analízis aztán váratlan összefüggéseket tárt fel és hirtelen érthetővé tett eladdig homályos részleteket; mint pl. O. Becker kutatásai az „Elemek" Euklidész előtti mélyrétegeiről. A folyóirat rövid virágzásának hamarosan véget vetett a nemzetiszocializmus; de szemlélete és módszerei akkorra elterjedtek, s később a német emigráció még inkább erősítette a hatását.

Napjaink legtekintélyesebb tudománytörténeti folyóirata, az 1960-ban indult „Archive for the History of Exact Sciences" (elsősorban Neugebaueren, van der Waerdenen és Hofmannon keresztül) máig őrzi a „Quellen und Studien..."-ben megteremtett nehéz (bár nem föltétlenül nehézkes), egzakt feltáró, elemző, magyarázó és értelmező tradíciókat. Az „Archive..." azonban már egy egészen másféle, megerősödött és nagyra nőtt **tudománytörténet-írás**t képvisel. A szakma megerősödéséért és terjedéséért tán senki annyit nem tett, mint G. Sarton. Sarton mindenekelőtt össze akarta fogni a szaktudományok és nemzetek szerinti tagolódásra hajló diszciplínát. Tervezett s elkezdett tehát egyrészt egy részletes bio-bibliografikus bevezetést, mely az összes tudományok történetét kronologikusan feldolgozná, másrészt indított 1913-ban egy nemzetközi általános tudománytörténeti folyóiratot „Isis" címmel. A „Bevezetés"-ből négy vaskos kötet készült el (1927–1948), melyben Sartonnak a 14. sz. végéig sikerült föltárnia az egyetemes tudománytörténet bio-bibliográfiai adatait. És a „Bevezetés" olykor szinte már zavaró részletességei ellenére is szükségképpen hiányos volt, szűk szakmai körökön túl nemigen hatott. Az „Isis" viszont változatos tanulmányaival, a szakma minden területét pásztázó recenzióival és kritikai bibliográfiáival hamarosan az egész tudománytörténet legkedveltebb orgánuma lett, s még szakmai körökön túl is meglehetős népszerűségre tett szert. Sarton köréje fonódó szervező, oktató és népszerűsítő munkásságával együtt az „Isis" minden addigi vállalkozásnál hatásosabban segítette a **tudománytörténet-írás** megerősödését és elfogadtatását. 1936-ban hosszabb tanulmányok közlésére és új irányzatok propagálására Sarton az „Isis" testvérperiodikájaként megindította az „Osiris"-t; 4. kötetében, 1938-ban jelent meg például R. K. Merton híres monográfiája a Royal Society működésének társadalmi és gazdasági meghatározóiról, egy egész új bőven termő irány, a történeti tudományszociológia megalapozásaként.

1936 egyébként is nevezetes esztendő volt a történetében. Ekkor indult meg Angliában kimondottan az újkori természettudományok történetének kutatására az „Annales of Science", jellegét tekintve nagyjából az „Isis" és a „Quellen und Studien..." közötti spektrummal, s ekkor jelent meg A. O. Lovejoy „The great chain of being" (A létezés nagy lánca) c. nagy hatású könyve, ami a természettudományos felfedezéseket és elméleteket nagyobb, általánosabb eszmék fejlődéséből próbálta eredeztetni. 1940-ben Lovejoy folyóiratot is indított az eszmetörténeti irány művelésére és propagálására, s ez a „Journal of the History of Ideas" a második világháború után népszerűség és tekintély tekintetében versenyre kelt az „Isis"-szel, ha ugyan meg nem előzte. Sikerét mindenesetre az is segítette, hogy szerencsésen interferált a második világháborút követő másfél-két évtized **tudománytörténet-írás**ának legvonzóbb és legdinamikusabb formájával, amely A. Koyré körül s nyomában nőtt fel. A tudománytörténet ekkorra – elsősorban Sarton szüntelen munkálkodásának köszönhetően – elismert nagy szakmává terebélyesedett, az amerikai egyetemeken s a nagyobb európaiakon külön tanszékkel, s a professzorok többsége az angolszász világban és Franciaországban közvetlenül vagy közvetve Koyré-tanítvány volt.

A második világháború után Koyré szellemi klímája alatt érett be Sarton vetése; a nagy amerikai egyetemeken – Harvard, Wisconsin, Princeton, Cornell – önálló és egyre aktívabb nagy iskolák keletkeztek (I. B. Cohen, Marshall, Clagett, H. Guerlac, A. Thackray, E. McMullin, R. S. Westfall); monumentális szövegkiadások szerveződtek (pl. Clagett középkori Arkhimédésze); és napjainkra megvalósult – C. C. Gillispie szerkesztésében – Sarton nagy álma, az összegező „Dictionary of Scientific Biography". Az életrajzi esszék azonban többnyire Koyré szelleméhez állanak közelebb, mint Sartonéhoz. Koyré Husserl tanítványaként indult, de „tények" és „lényeg" termékeny homályokkal teli husserli dialektikájából inkább csak a „jelentés" fontosságát hozta át a **tudománytörténet-írás**ba. Koyré fogalmak és érvek változó jelentéstartalmainak logikai-matematikai elemzésével világította át a teóriákat; a tudomány fejlődése nála nem – mint Sartonnál – a tudás kumulációjából kérlelhetetlenül következő progresszióként jelentkezett, hanem eszmék és elméletek hanyatlásokkal és forradalmakkal szaggatott dinamikájaként.

Így fedezte fel, még a 30-as évek második felében, Galilei matematikai fizikájában az esés és a hajítás egységes elméletét lehetővé tévő jelentéstranszformációk mögött a tér szigorú geometrizálását, amit viszont épp ezek a jelentésváltozások tettek megfogalmazhatóvá; később így nyomozta ki a kopernikuszi rendszer transzformáló hatását az univerzum végtelenné tágítására, amely nem-arisztotelészi univerzumban aztán Kopernikusz rendszere a maga logikus helyét megtalálhatta; így különítette el a Kopernikusztól Keplerig tartó csillagászati forradalomban a kumulálódó és interferáló jelentésváltozások sűrűsödését és kristályosodását egy új világképpé. Koyré tanítványának (az 50-es és a 60-as években többé-kevésbé minden valamirevaló tudománytörténész Koyré tanítványa volt), T. S. Kuhnnak már „csak” a változásokat létrehozó és akadályozó „struktúrákat” kellett felderítenie, hogy megírhassa a t hamarosan átalakító kis könyvét „A természettudományos forradalmak struktúrájá”-ról (1962). Hanem Kuhn nemcsak Koyré, az „Isis” tanítványa is volt. És Sarton nagy folyóiratából szinte még gyermekfővel megtanulhatta a tudományos intézmények, közösségek és normák jelentőségét a tudósok munkálkodásában. Az „Isis” és az „Osiris” azonban ezeket a „külső” tényezőket – noha inkább metodikai, mintsem elvi okokból – meglehetősen élesen elválasztotta az eljárások, eszmék és elméletek „belső” fejlődésétől; Kuhn viszont észrevette, hogy az intézményessé erősödött tudomány fejlődését éppen a „külső" faktorok „belsővé” válása strukturálja egymást váltó és egymásba átmenő „normál szakaszok" és „forradalmak” dinamikájára. Kuhn elmélete nem érvénytelenítette Sarton és Koyré nézeteit, munkásságukat nem tette meghaladottá, még a mai napig sem.

Folytatódtak L. Thorndike monumentális kéziratos forráskutatásai, és a legjobb „Isis”-tradícióknak megfelelően írja és szerkeszti ma is J. Needham Kína kimeríthetetlen természettudományos, matematikai és technikai tudását feltáró vaskos köteteit. Mégis Kuhn könyve óta átalakult a **tudománytörténet-írás**. Nincsen például többé semmi értelme „külső” és „belső" körülmények régebbihez fogható elválasztásának, bár elfogadható mechanizmust vagy éppen magyarázatot a „külső" tényezők „belsővé" válására, azaz a tudomány fejlődésének egységes, az összes feltételeket figyelembe vevő dinamikájára nem sikerült találni. Pedig – Kuhnt magát nem számítva – három nagy irány is specializálódott erre a feladatra. Az egyik R. K. Popperé, aki Kuhn ingere nyomán régebbi falzifikációs episztemológiáját az „objektivitás" három „világ”-ába hierarchizált kognitív struktúrában oldotta fel. A másik irány Lakatos Imre filozófiája, aki egymással versengő racionális „kutatói programok” rekonstruálásával vélte modellezhetőnek a tudományok fejlődését. A harmadik irányzat P. Feyerabend körül tömörült, aki megejtő tudománypszichológiai találékonysággal, pillanatnyi magyarázatok sikereinek bővülő, ám koronként egymással végképpen inkommenzurábilis köreivel értelmezi a tudományfejlődés forradalmakkal szaggatott „normál” dinamikáját.

A gombamód szaporodó tudománytörténeti tanszékekről és kutatóintézetekből származó töméntelen tanulmány és disszertáció többsége az utóbbi időkig Kuhn–Popper–Lakatos–Feyerabend koordinátáinak valamilyen kombinációja és változata szerint tájékozódott, s többnyire még a szigorúan adatokra koncentráló konkrét részletkutatások se kerülhették el vonzásukat. A tudományok fejlődésének megértésében remélt áttörés azonban elmaradt, s napjainkban egyre szélesebb körökben kezdi felütni fejét valamiféle „posztkuhniánus” elégedetlenség. A kutatók egy része új filozófiai vagy logikai kereteket keres. Megkísérlik például – az időközben igencsak megizmosodott tudományszociológia hatása alatt – valamiféle „erős” és lehetőleg logikailag is megfogalmazható visszacsatolásként értelmezni értékek és ideológiák érvényesülését, tudományos érvek és elméletek „igaz”-ként való elfogadására (D. Bloor, H. M. Collins, T. J. Pinch). Érdekesebbnek ígérkezik I. Hacking kísérlete, aki az angol analitikus filozófiák inspirációjára egyfajta experimentális aktus-elmélettel, az empirikus praxis racionalizálásával véli magyarázhatónak az újkori európai természettudomány bámulatos eredményeit. Ezekkel a filozófiai fogantatású próbálkozásokkal szemben a kutatók másik része inkább új kéziratos és nyomtatott források feltárásával, illetve már ismertek újraértelmezésével igyekszik bővíteni és szilárdítani az interpretációs bázist. Ez az irány kivált a Galilei-kutatásban, valamint a 70-es években megújuló biológiatörténeti kutatásokban hozott szép és olykor meglepő eredményeket.

A biológiatörténetet különben sem járta át annyira a tudományfilozófia, mint a **tudománytörténet-írás** egyéb ágait, jóllehet épp a kutatások szívét képező Darwin-kérdésben úgyszólván kezdetektől jelentkezett a természetes szelekció gondolatát, sőt egész elméletét közvetlenül társadalmi értékítéletekre és ideológiákra visszavezetni kívánó „erős” visszacsatolás kísértése. A szakma két nagy nemzetközi orgánuma, az 1967-től megjelenő „Journal of the History of Biology” és az 1977-től évkönyvszerűen publikált „Studies in History of Biology”, a maguk rendkívül jól dokumentált, a forrásokat körültekintően értelmező, részletekre figyelő és konstrukcióik tekintetében nagyon óvatos tanulmányaikkal azonban lényegében ma is a „klasszikus” irányt képviseli, ami Tannerytől Koyréig nevelte és erősítette a **tudománytörténet-írás**t. *Irod.:* Beiträge zur Methodik der Wissenschaftsgeschichte. Szerk. W. Baron. (Wiesbaden 1967); C. J. Scriba: Geschichte der Mathematik (1968); D. C. Stove: Popper and after. Four modern irrationalists (Oxford 1982). F. Russo: Nature et méthode de l'histoire des sciences (Paris 1983); Sarton, Science, and History. The Sarton centennial issue (Isis 1984/3.).

A tudománytörténet-írás történetéről[2]

A tudománytörténet-írás (a néven a természettudományok és a matematika történetét értem) új szakma. Kezdetei ugyan a XVIII. századra tehetők, de a XIX. század politikatörténetre és művészettörténetre koncentráló kutatása a XVIII. század végén, XIX. század elején elindult fejlődést megakasztotta. Csak a XIX. század végén indult el újból – most már a közben nagyra nőtt segédtudományok figyelembevételével – a tudománytörténeti munka.

Dolgozatomban az utóbbi periódusnak a történetét ismertetem. A XVIII. századi előzményekről, amelyek magukban véve a tudománytörténet-írás igen érdekes praehistóriáját jelentik, nem szólok.

Először nagy vonásokban ismertetem a tudománytörténet-írás legfontosabb elindítóinak a munkásságát, majd három kiragadott példán bemutatom a tudománytörténet-írás egy-egy vitatott kérdéskomplexumát, illetve munkamódszerét.

Áttekintésem a XIX. századvég nagy tudománytörténészének, *Paul Tanneryn*ek az ismertetésével kezdődik. Paul Tannery jelentőségét nehéz lenne túlbecsülni a tudománytörténet-írásban. Hatalmas tudása, emberfeletti szorgalma, segítőkészsége, szerénysége, nehéz sorsa és tragikus halála elengedhetetlenné teszi a rövid biográfiai ismertetést. Munkásságának az első részben inkább csak jelentőségét tárgyalom, életműve egy részének részletesebb ismertetését alább a prae-euklidészi matematikáról szóló részben adom.

A másik óriás, akit részletesen ismertetek, *George Sarton*. Ő a tudománytörténet-írás szakmává szervezője, ő teremti meg a tudománytörténet-írás első nagy nemzetközi folyóiratait, az *Isis*-t és az *Osiris-t.* Sarton szinte teljes ellentéte Tannerynek: Tanneryt a görög tudomány és a XVII. század vonzotta, Sartont az arab tudomány és a középkor. Tannery óriási kiadói munkát és kiterjedt archiválís kutatásokat folytatott. Sarton inkább összefoglal és szervez. A kettejük egymást követő munkája a tudománytörténet-írás történetében két egymást kiegészítő lépés.

Tannery és Sarton tárgyalása között röviden áttekintem az egyes szaktudomány-történeteket (matematikatörténet, fizikatörténet, kémiatörténet, gazdasági háttér), s megkísérlem annak a vizsgálatát, hogyan viszonylanak ezek az „egyetemes" tudománytörténethez.

[2] Forrás: Vekerdi László: A tudománytörténet-írás történetéről. In: Vekerdi László: Tudás és tudomány. Bp., 1994. Typotex. pp. 5–44.

Végül a fontosabb tudománytörténeti folyóiratok ismertetése során megismertetem az olvasót a legjelentősebb mai tudománytörténet-írói irányzatokkal.

Ezt követően két példában az új szakma egy-egy jól kidolgozott és erősen vitatott területét mutatom be, a harmadik példában pedig Newton „Principiá”-jának a kialakulására vonatkozó levelezést ismertetem.

*

Az első példa az Euklidész előtti matematika története körül kialakult kutatási irányokat tárgyalja. A probléma első nagy kutatója Paul Tannery volt, aki merész feltevések alapján az euklidészi „Elemek”-et felosztotta az Euklidészt megelőző századok egyes matematikai iskolái és matematikusai között. Ezekről a korai görög matematikai iskolákról és matematikusokról Tanneryig a nevükön kívül jóformán semmit sem tudtak. Tannery munkája érthetően nagyon frissítőleg hatott ezen a területen, ahol addig a filozófiatörténet és a népszerű mesék uralkodtak.[3]

Tannery ismerte fel, hogy a korai görög „bölcsek” voltaképpen tudósok voltak. Ez a tézise heves ellenkezést váltott ki kétfelől is. Az egyik támadás klasszika-filológiai oldalról indult. A klasszika-filológusok Platón matematikai érdemeit vélték veszélyeztetni Tannery által, s siettek igazolni Platón és „tanítványainak” matematikai érdemeit. Az irány szélső elfajulása az a felfogás volt, amelyik a húszas években még az „úgynevezett” (értsd: matematikus) pythagoreusokat is Platón kortársává és tanítványává tette.

A másik támadás épp ellenkezőleg, messze a Tannery által megjelölt V. századi görög kezdetek elé, Babilonba igyekezett visszavinni a tudományos matematika kezdeteit. Ez az irány – amelynek fő képviselője Otto Neugebauer – modern algebrai jelekkel interpretált át bizonyos ékírásos táblákat, s így az algebra születését véli bennük felismerni. A görög matematikát Neugebauer a babiloni algebra geometriai megfelelőjének tartja.

A görög matematika – s vele a tudományos matematika – kezdetének a kérdésével foglalkoznak Szabó Árpád vizsgálatai. Ő a görög matematika terminus technicusainak és bizonyítási módjainak gondos analízisével a görög gondolkozás egyes döntő fázisaihoz fűzte a matematika deduktív tudománnyá alakulását és korai axiomatizálódását.

A második példában a „Galilei és elődei” néven ismertté vált fontos történeti vitát ismertetem. Ez a vita Pierre Duhemnek, a tán legnagyobb XIX. századeleji

[3] Vö. Paul Tannery: La géométrie grecque, comment son histoire nous est parvenue et ce que nous en savons. Essai critique. Premiére partie. (Paris, 1887) és annak további kötetei. *(– a szerk. megj.)*

tudománytörténésznek hatalmas oeuvre-jéből nőtt ki. Duhem a párizsi egyetem XIV. századi professzorainál Galilei egyes tételeihez meglepően hasonló elméletekre bukkant, amik szerinte Leonardo és Tartaglia közvetítésével Galileihez jutva, tulajdonképpen megalapozták a modern fizikát.

Duhem tézisét éppúgy támadták és védték, mint Tanneryét, s a körülötte kialakuló vita a középkor-humanizmus-reneszánsz nagy témaköréhez kapcsolódva a tudománytörténet-írás egyik önálló fejezete lett. Ez a problémakör a maga homlokegyenest ellentétes, szubjektíven értelmezett állításaival egyben szép bizonyítéka a jelenkori nyugati történetírás jól ismert, relativista tendenciáinak is.[4]

A harmadik példa a forrásokig viszi el az olvasót: azt igyekszik bemutatni, hogyan lehet korabeli anyag alapján kisebb-nagyobb valószínűséggel megpróbálni rekonstruálni egy óriási jelentőségű mű, Newton *Principiá*jának keletkezési körülményeit.

I.

Tudománytörténet: a történetírás új ága

Új? Nem írt-e már az Kr. e. IV. században egy híres matematikatörténetet a rodoszi Eudemosz, Arisztotelész tanítványa? Ez ugyan elveszett, de Proklosz (Kr. u. V. század) Euklidész I. könyvéhez írott kommentárjában kivonatolta. Vajon hűségesen? Vagy egyáltalán látta-e Proklosz Eudemosz matematikatörténetét, s ha nem látta, akkor miből kivonatolta? És ha nem közvetlenül Eudemoszt kivonatolta, nem kell-e feltételezni, hogy Eudemosz hatása széleskörű lehetett, s akkor megint semmit sem bizonyít az, hogy egyéb, többé-kevésbé a Proklosz korából származó források az övével olyan jól megegyező véleményen vannak a görög matematika kezdeteiről… Mennyire megbízható forrás Proklosz, hogyan lehet adatait ellenőrizni és kiegészíteni, milyen forrásokat kell Proklosz és Eudemosz közt feltételezni?…

Ezekre, s ehhez hasonló kérdésekre először Paul Tannery próbált felelni a XIX. század utolsó negyedében; a források komoly kritikáján alapuló tudománytörténet-írás vele indul. Az általános történetírásban ekkor már jó 200 éve, Mabbilon és a bollandisták óta kötelezően a forráskritikára épült a történész munkája. A tudománytörténet-írás Tanneryig más, boldogabb mezőkön mozgott: a mese, a krónika, a hagiographia területein. Még Moritz Cantor is így

4 Lásd újabban: Pierre Duhem: A jelenségek megőrzése : értekezés a fizikaelmélet fogalmáról Platontól Galileiig. Ford.: Nemes Krisztina. Szerk.: Heidl György. Bp., 2005. Kairosz, 2005. 270, [7] p. (Hit és tudomány) *(– a szerk. megj.)*

kezdi nagy, máig nélkülözhetetlen *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*-ját: „Réges-régen kihűlt már a földgolyó, s a szilárddá vált felületen élőlények képződhettek. Hatalmas, a mi általunk büszkén történetnek nevezett – mintha csak az ember által történhetne valami! – időszaknál sokkalta nagyobb idők alatt élőlények új és új fajtái váltották egymást. S aztán egyszerre csak megjelent az ember, a minden élőlénynél fejlődőképesebb, a legkiszolgáltatottabb állapotban születő, s kifejlődése csúcsán a leghatalmasabb. Az egyes ember csak kicsinyített képe az emberiségnek…”[5] – nur das verkleinerte Bild des Menschengeschlechtes… És a matematika? Egyfajta „Erziehung des Menschengeschlechtes”… Ezzel az aufklärista, goetheista, häckeliánus imádsággal kezdődik a XIX. század legjelentősebb tudománytörténeti műve, s máig az egyetlen többé-kevésbé teljes, nagy matematikatörténet. Az általános történetírás ezen már mégiscsak túljutott, s legfeljebb H. G. Wells kezd ilyen fohászkodással a történetírásba. Még Toynbee is elhalasztja az imát híres Study-jában a VI. kötet végére, pedig ő szeret a História Főpapja szerepében tetszelegni, akinek Isten közvetlenül kinyilatkoztatta a történelem értelmét.

Moritz Cantor sokkal szerényebb. Történészi nagyságát bizonyítja, hogy – elsők között – felismeri: Tannery munkáival változás jön a tudománytörténet-írásba: „Paul Tannery úr a ’Revue philosophique’-ban és a ’Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques’-ben olyan tanulmányokat közölt a görög matematika történetéről, amiket ennek a kötetnek a legkülönbözőbb helyein feltétlenül említeni kellett volna…”[6] „Megváltoztatta volna felfogásomat Paul Tannerynek a *Bullet. d. scienc. math. & astronom.*-ban megjelent ’A quelle époque vivait Diophante?’ c. közleménye, ha előbb ismerem…”[7] Ebben a közleményben Tannery azt mutatja meg, hogy Diophantosz nem az Kr. u. IV. század második felében élt, mint eddig hitték, hanem a III. század végén.

Ugyan minek ilyen kronológiai finomságokból nagy ügyet csinálni? – kérdezhetné a nem-történész. A történész viszont épp az ilyen finomságoknál kezdődik. A tudománytörténészek, vagy a divatossá vált tudománytörténettel kacérkodó szaktermészettudósok nagy része – szemben a kortárs M. Cantorral – ma sem ért el a tannery-i álláspontig. Max von Laue kitűnő kis fizikatörténetében pl. Leonhard Euler „1800 körül mint kiforrott ismeretet mondja ki a tételt, hogy…”[8] …hogy mit, az most nem is fontos, mert ez magában véve is egyedülálló teljesítmény: ugyanis Euler 1783-ban meghalt. – Azoknak, akiknek a kronológiához nem sok érzékük van, hadd idézzek egy súlyos tárgyi tévedést. Egyik nagy francia

[5] Cantor, Moritz: Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Erster Band. Von den ältesten Zeiten bis zum Jahre 1200 n. Chr. Leipzig, 1880. Teubner. p. 3.

[6] Uo. p. VI.

[7] Uo. p. VII.

[8] Laue, Max von: A fizika története. Ford.: Svékus Olivér. Bp., 1960. Gondolat. p. 5. (Stúdium könyvek 17.)

matematikatörténész – sőt matematika-professzor –, Pierre Humbert írta az egyik legkiválóbb (csak elsőrendű művekből igyekszem idézni hibákat, rosszakból túl könnyű lenne) francia tudománytörténetben: „Egy ponton át egy adott egyeneshez csak egyetlen párhuzamost lehet húzni, mondotta Euklidész; nem, tételezi fel Lobatchevsky és Bolyai: végtelen sokat.”[9] Aki csak belepillantott az *Appendix*be, tudja, hogy erről szó sincs, ugyanis az *Appendix* legelső §-a azt mondja ki, hogy az *AM* félegyeneshez a sík bármely kívüle fekvő *D* pontjából csak egy *BN* párhuzamos félegyenes húzható. Végtelen sok olyan félegyenes van, amelyik *AM* felé hajlik, s mégsem metszi azt, de ezek közül párhuzamosnak Bolyai csak azt az egyet nevezi, amelyik először nem metszi!

Galileiről is a legkülönbözőbb legendák szállongtak egészen napjainkig a tudománytörténet-írásban. Számos könyv leírta pl. híres kísérletét: különböző súlyú golyók leejtését a pisai ferdetoronyból – némelyik igen színesen és határozottan: „…Egy reggel, diákok és professzorok, papok és filozófusok gyülekezete előtt felmászott a toronyba, magával víve egy 10 fontos és egy 1 fontos súlyt. A torony tetejéről leejtette őket…”[10] Egy híres tudománytörténész, Charles Singer még 1941-ben is ténynek veszi ezt a legendát és időzíti is 1591-re.[11] Az 1946-os kiadásban már lábjegyzetben hozzáteszi, hogy a történetet a tradicionális formájában mondotta el, amire „…nincs kielégítő bizonyíték”.[12] Épp az ellenkezőjére van bizonyíték, amire többek között egy történelem-professzor, Herbert Butterfield hívta fel a figyelmet hamar világhírűvé vált *The Origins of Modern Science, 1300–1800* (London, 1949) c. könyvében. – Egy érdekes, a tudománytörténetet rajzokban ismertetni próbáló könyv már egy hollandus ház padlásszobájába helyezi el Stevint, amint éppen a két golyó egyszerre való leesését konstatálva, a híres kísérletet végzi.[13] De a könyv szerzője, F. Sherwood Taylor nem számít a nagyon szavahihető tudománytörténészek közé.[14] A kísérletet valóban nemcsak Stevin végezte el, Alistair C. Crombie szerint hasonló kísérletet előtte is említenek, többen, pl. már az antikvitás végén Philoponosz, az Arisztotelészt cáfoló filozófus.[15] Crombie a középkori tudománytörténet specialistája; egy másik, ugyancsak világhíres, de az újkorra specializálódó tudománytörténet, a Stephen F. Masoné, még az 1961-

[9] Humbert, Pierre: Les mathématiques de la Renaissance à la fin du XVIII^{e} siècle. – Histoire de la Science. Volume publié sous la direction de Maurice Daumas. Paris, Gallimard ’Encyclopédie de la Pleiade’. 1957. p. 673.

[10] Macpherson, Hector: Makers of Astronomy. Oxford, 1933. The Clarendon Press. p. 34.

[11] Singer, Charles: A Short History of Science to the Nineteenth Century. Oxford, 1941. Clarendon Press. pp. 195–196.

[12] Uo. p. 196., 1. jegyz.

[13] Taylor, F. Sherwood: An Illustrated History of Science. New York, 1953. [1955]. Praeger. 178 p.

[14] Archives d’Histoire des Sciences, 1950. No. 28. pp. 200–202., R. Hooykaas: Aldo Mieli. In: Panorama General de Historia de la Ciencia. Vol. III. Buenos Aires, 1951. p. 4.

[15] Crombie, A. C.: Histoire des sciences de Saint Augustin à Galilée (400–1650). Tome 2. Paris, 1959. Presses universitaires de France. p. 343.

es német kiadásában is Stevint idézi a kísérlet kigondolójaként.[16] Azt azonban, hogy a kísérlet pisai Galilei variánsa legenda, amely 60 évvel Galilei halála után születik, már 1909-ben hangsúlyozta Emil Wohlwill Galilei-monográfiájában.[17] Függ a „tények” elfogadása az interpretációtól is. Az *Encyclopédie de la Pléiade*[18] tudománytörténetében a filozófiatörténész Robert Lenoble például azt írja Galileiről, hogy a matematikai fizika megteremtője,[19] ugyanott a matematikatörténész Pierre Humbert, hogy a kísérleti fizikáé, s elhiszi a torony-kísérletet.[20]

Lényegtelen apróságok? – A történetírás azonban éppen az apró, pontos, finom részleteken alapszik. – A nagy vonalakkal való munkát csak a történetfilozófia engedheti meg magának.

A „forráskritikátlanság” csúcsát talán Joseph F. Scott *A History of Mathematics* (London, 1958) c. műve tartja. „Zénón (Kr. e. 495–435) sztoikus filozófus volt és Parmenidész tanítványa. Híres paradoxonai Arisztotelész fizikájának a 6. könyvében maradtak fenn” – írja.[21] Joseph F. Scott pedig igen jó nevű matematikatörténész (ha nem is annyira, mint Proklosz volt a maga korában), és sok megbízható segédeszköz áll rendelkezésére, mégis összekeveri a stoa megalapítóját (Kr. e. III. század) az eleatával (Kr. e. V. század).

Nemde jogos volt Tannery kételkedése Proklosz közléseivel szemben?

Tannery vezette be a tudománytörténet-írásba a forráskritikai módszereket, s ezáltal lehetővé tette a tudománytörténetnek, mint tudománynak, a létrejöttét.

II.

Harc egy szakma megteremtéséért. Tannery élete és műve

Paul Tannery 1843-ban született Mantes-la-Jolie-ban, Párizs közelében. Középiskoláit Caenban végzi, 17 éves korában – apja kívánságára, aki mérnök volt a nagy vasútépítkezéseknél – az École Polytechique-re iratkozik be, bár ő maga az École Normale-ba

---

16 Mason, S. F.: Geschichte der Naturwissenschaft in der Entwicklung ihrer Denkweisen. Stuttgart, 1961. Kröner. p. 183.

17 Wohlwill, Emil: Galilei und sein Kampf für die copernicanische Lehre. Erster Band. Hamburg und Leipzig, 1909. Voss. p. 115.

18 Lásd: Humbert, Pierre: Les mathématiques de la Renaissance à la fin du XVIII^{e} siècle. – Histoire de la Science. Volume publié sous la direction de Maurice Daumas. Paris, Gallimard ’Encyclopédie de la Pleiade’. 1957. p. 673.

19 Encyclopédie de la Pleiade, p. 467.

20 Encyclopédie de la Pleiade, p. 550.

21 Scott, Joseph F.: A History of Mathematics. From antiquity to the beginning of the nineteenth century. London, 1958. Taylor & Francis. p. 246.

kívánkozott, mert már gyerekkorában a humanioriák, a görög irodalom és filozófia érdekelték. Az École Polytechnique elvégzése után az École d’application des Manufactures de l’État-ba iratkozik be, ennek elvégzése után a Lille-i dohánygyárba helyezik. Egész életében ezen a pályán marad, Franciaország számos vidéki városában és Párizsban dolgozik a francia dohányipar fellendítéséért… A XIX. századi Franciaországban nem volt olyan távol egymástól gyakorlati élet és tudomány, mint ma. Igaz, hogy Tannery korában az École Polytechnique már nem az volt, mint a század elején, amikor a francia értelmiség legjavának szigorú, katonás fegyelemben történő nevelését szolgálta a kor legmagasabb elméleti, matematikai-természettudományos szintjén, és a kikerülő mérnökökből egy valóságos műveltség-hálót font az ország összetartására. De még a századfordulón is, a nagy vidéki városokban és Párizs szalonjaiban École-t végzett egyetemi professzorok, orvosok, mérnökök hada – egy valóságos értelmiségi noblesse de robe – tekinti továbbra is legfőbb szórakozásának a tudományt.

Legfeljebb a hangsúly tolódott el a természettudományok felől a történelem és a klasszika-filológia felé, amint az École Polytechnique elsőbbségét is felváltja lassan az École Normale és az École des Chartes egyre növő tekintélye.

Csak ebben a francia polgárságban, amelyikben Viète és Fermat óta otthonos – nem: nélkülözhetetlen – a tudomány, lehet elképzelni Paul Tanneryt. Első bordeaux-i tartózkodása alatt (1874–1878), Armingaud doktor szalonjában születik meg a bordeaux-i egyetem filozófia professzorával, Louis Liard-ral való beszélgetéseiben a nagy kritikai Descartes-kiadás gondolata – a VI. kötetig jut el, de a halála után megjelenő kötetekben is sok munkája fekszik. Ez a Descartes-kiadás átalakította a Descartes-ról alkotott képet, s ma egyetlen XVII. századdal foglalkozó kutató sem nélkülözheti. Bordeaux-ban az *Annales de la Faculté des Lettres*-ben jelennek meg első tanulmányai a görög filozófia történetéről, és a *Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux* köteteiben a görög matematikai tudományokról.[22]

1880-ban megnősül. Menyasszonyának felajánlja, ha kívánja, az ő kedvéért lemond legnagyobb szórakozásáról: a tudományról. Dehogy kívánja! Nemcsak leghűségesebb munkatársa lesz felesége; halála után hosszú éveken át ő gondoskodik művei összegyűjtéséről, kéziratban maradt munkái kiadásáról (16 kötet 1912 és 1943 között). Jórészt M^{me} Tannery gondos kiadói munkájának köszönhető Tannery nagy, napjainkig tartó hatása.

Második bordeaux-i tartózkodása idején (1886–1890) érik meg Tannery-ben, Mersenne Bordeaux-ban található levelezésének összegyűjtése során, a hatalmas Mersenne-levelezés

[22] Ezek a dolgozatok a Mémoires Scientifiques első kötetében vannak összegyűjtve.

kiadásának a terve; a kiadás csak jóval halála után valósul meg a fáradhatatlan Marie Tannery jóvoltából Cornelis de Waard segítségével.[23] A XVII. század első felének francia természettudománya Mersenne kezében fut össze: érthető a Mersenne-i corpus kiadásának óriási jelentősége. Ennek alapján már a negyvenes évek elején teljes átírásra szorult a XVII. század francia tudománytörténete.[24]

A fiatal tudósnak egyelőre külföldön nagyobb híre volt, mint otthon. Láttuk, milyen jó véleménnyel volt M. Cantor már az első műveiről is, köztük az 1879-ben megjelent Diophantosz-tanulmányáról.[25] A Teubner kiadó Tanneryt bízza meg híres kritikai sorozatában Diophantosz műveinek kiadásával. Diophantosz-kéziratok nyomában sok európai könyvtárat – Róma, Madrid, Escurial – bejár. Diophantosz vezeti a XVII. század nagy francia matematikusához, Fermat-hoz, aki ott folytatja a számelméletet, ahol Diophantosz abbahagyta. Fermat összes műveinek kiadásából három kötet jelenik meg még Tannery életében, a negyedik – de ez is az ő műve – csak halála után. Messze halála utánra mutat egy másik elkezdett munkája, Georgiosz Pakhümeresz bizánci matematikus műveinek a kiadása is.

Tannery sohasem jutott egyetemi katedrára, holott a Collège de Francéban volt tudománytörténeti tanszék. Ennek megüresedésekor, 1903-ban, a professzorok s a Tudományos Akadémia egyaránt Tanneryt terjesztik fel – de a közoktatásügyi miniszter egy pozitivista filozófust nevez ki. A kinevezés híre külföldön óriási botrányt kelt, s barátai – Antonio Favaro, Gustav Eneström, M. Cantor – a miniszterhez intézett tiltakozó levelet juttatnak el M^{me} Tanneryhez. Paul Tannery azonban energikusan elutasítja: „Semmiféle külföldi beavatkozást nem fogadhatok el. Akárhogyan is, Chaumié mégiscsak az én hazám minisztere."

Tovább folytatja a munkát és a terveket. 1904 februárjában a Colin Kiadóházzal szerződést köt egy nagy, általános tudománytörténet („Discours sur l'Historie générale des sciences") megírására. 1904 őszén pár hétig tartó betegség után meghal. Barátja, Pierre Duhem mondotta reá emlékezve, hogy a befelé sírt könnyek a szívre hullanak. S ő csak tudta, mert őt is egész életére egy vidéki katedrára száműzte a Harmadik Köztársaság kormánya, s hatalmas művének fele kéziratban maradt, amit csak évtizedekkel halála után adott ki leánya.

---

23 Correspondance du R. Marin Mersenne, Religieux minime. Paris, Tom. I. 1932., Tom. II. 1937.

24 Lenoble, Robert: Mersenne ou la naissance du mécanisme, Paris, 1943. Vrin. LXIII–633 p.

25 A quelle époque vivait Diophante? = Bulletin des sciences mathématiques, 2^{me} série, Tom. III. 1879. pp. 261–269. – Mémoires Scientifiques de Paul Tannery, publiés par J. L. Heiberg & H. G. Zeuthen, I. Sciences exactes dans l'Antiquité, 1876–1884. Toulouse-Paris, 1912. pp. 62–73.

III.

Szaktudomány-történetek: a tudománytörténet részei vagy alapjai?

A tudománytörténetet Tannery tette a történetírás speciális, sajátos módszerekkel dolgozó ágává, és ő harcolta ki, hogy a történészkongresszusokon külön szekcióban ülésezzenek a tudománytörténészek. Az 1903-as római nemzetközi történészkongresszuson a tudománytörténet már elismert szakma.[26] Tervezte egy tudománytörténeti folyóirat megteremtését is. Váratlan halála a tudománytörténetnek, mint külön szakmának, alig kibontakozó körvonalait újra feloldotta. Duhem visszavonult bordeaux-i magányába, vállán egy emberfeletti nagy mű terhével,[27] a forráskritikai munka fontosságát őrizve meg Tannery példájából.

a) Matematikatörténet

Moritz Cantor (1829–1920) a harmadik kötettel abbahagyta nagy matematikatörténetét, s az 1750 utáni idők megírását másokra bízta. A tudománytörténet-írásnak Cantor matematikatörténete talán a hiányosságaival tette a legnagyobb szolgálatot. Fiatal matematikusok és filológusok egész csoportja Gustav Eneström (1852–1923) köré tömörülve, több mint egy évtizeden át boncolgatta a nagy művet, kritizálta és javítgatta a hibáit. Ez a vállalkozás – a „Bibliotheca Mathematica" (1886–1914) – mély nyomot hagyott a matematikatörténetben. Eneström „kérlelhetetlen szigorúsággal a legnagyobb pontosságot követelte meg minden bibliográfikus-biográfikus adatban, amiket pedig csak a milieu-ábrázolás eszközeinek tekint; mindenekelőtt a gondolatok és problémák története érdekli, amiket keletkezésükben és kibontakozásukban akar ábrázolni. Sajnos Eneström kritikai vénája végül is leterítette alkotóerejét, s így tollából csak érdekes esszék születtek, s nem egy 'Ideengeschichte der Mathematik'…"[28] Ezt a jellemzést Eneström egy késői tanítványa, Joseph Ehrenfried Hofmann írta, aki némiképp pótolta, amit mestere elmulasztott. Idézett, Oscar Beckerrel közös művén kívül a Göschen-gyűjteménybe is írt egy kis háromkötetes matematikatörténetet, amit egyik Eneström-iskolabeli fegyvertársa, Carl B. Boyer joggal nevezett „kis gyöngyszemek"-nek, kiemelve a pontos név- és irodalomjegyzéket – „in the usual, and admirable Hofmann manner".[29]

---

26 Loria, Gino: Paul Tannery, engineer and histórian. = Scripta Mathematica, 1947. No. 13. pp. 155–162.

27 „Le Système du Monde: Histoire des doctrines cosmologiques de Platon a Copernic" tíz hatalmas kötete. Az első öt kötet 1913 és 1917 között jelent meg, a többi öt kéziratban maradt, s csak 1954 után tudja kiadni leánya.

28 Becker, O. – Hofmann, J. E.: Geschichte der Mathematik. Bonn, 1951. pp. 258–259.

29 Isis Vol. 49. (1958) pp. 350–352.

Carl B. Boyer maga is a legjobb eneströmi tradíciók folytatója. Nagy műve az analitikus geometria kezdeteiről és kifejlődéséről[30] és a *Scripta Mathematica*-ban erről a tárgyról évek során át megjelenő hosszú közleményei megváltoztatták Descartes-nak az analitikus geometria kialakításában tulajdonított szerepéről vallott nézeteket. Nemcsak Fermat és Viète érdemét emelte ki ezen a területen, hanem megszüntette a koordináta-geometria és algebrai geometria azonosításából és összekeveréséből származó téves történelmi koncepciók uralmát is. Ő mellette e téren Hieronymus Georg Zeuthen, Heinrich Wieleitner, Gino Loria, Julian Lowell Coolidge és H. de Vries munkái fontosak még. Coolidge szerint Apollonius geometriája voltaképpen már a mi analitikus geometriánk; ebben megegyezik Zeuthen véleményével. H. de Vries egy igen jelentős tanulmányában amellett tör lándzsát, hogy az analitikus geometria mint tudomány csak a XIX. század elején indul el, s még Descartes és Fermat ez irányú munkái sem jelentenek semmit. Az analitikus geometria szerinte elsősorban annak köszönheti tudomány-nívóra való emelkedését, hogy olyan éles eszű és erélyes támadója akadt, mint Poncelet.[31]

Az infinitézimális matematikai módszerek történetének nincs olyan értékű összefoglalása, mint amilyen az analitikus geometriáról Boyer-é. Ottó Toeplitz: *Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung*-ja (Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1949), ami a Springer-Verlag közkedvelt „Sárga könyvei”-ben jelent meg, nem több, mint amit alcíme ígér: „Eine Einleitung in die Infinitesimalrechnung nach der genetischen Methode” – az infinitézimális számításba való bevezetést akarja megkönnyíteni a történeti út segítségével.

A matematikatörténetnek ez a pedagógiai célja lebegett a nagy amerikai matematikatörténész, David Eugene Smidt szeme előtt is meglepően gazdagon illusztrált kétkötetes matematikatörténetének a megírásakor. Emellett egy jelentősnek bizonyuló módszertani újítást is bevezetett a tárgyalásba: két kötetbe választva, külön tárgyalta a matematika fejlődésének biográfikus adatait, és külön a matematikai gondolatok, ideák fejlődéstörténetének a vázlatát.

Az infinitézimális módszerek eredetének legjobb tárgyalása még ma is H. G. Zeuthen: *Geschichte der Mathematik im 16. und 17. Jahrhundert* (Leipzig, 1903) c. műve, s egyben ez tekinthető az azóta is néha-néha új adatok érveivel, de mindig ugyanolyan elfogultsággal feléledő Newton–Leibniz vita legjobb összefoglalásának is. Zeuthen megoldása a legkézenfekvőbb: Newton a Galilei-Torricelli módszert fejleszti tovább, amit mestere, Barrow közvetített, Leibniz pedig a Pascal-féle differenciális háromszögből vonja le a végső

[30] History of Analytic Geometry. New York, 1956.
[31] How Analytic Geometry Became a Science. = Scripta Mathematica, 1948. No. 14. pp. 5–15.

következményeket. Nem Newton és nem Leibniz az infinitézimális számítás felfedezői, de bennük megy végbe – egymástól függetlenül – a nagy fordulat, ami ezt a módszert a természettudomány pár excellence nyelvévé teszi: a két művelet, integrálás és differenciálás inverz voltának a felismerése.

Azóta nem nagyon írtak erről a kérdésről ilyen elfogulatlanul, mint Zeuthen. Még olyan kiváló és kritikus matematikatörténész is, mint J. E. Hofmann, azt írja pl. az egyik „kis gyöngyszem”-ében: „Die mathematische Hochleistung des Spätbarocks ist die Erfindung des Calculus. Sie ist das ausschliessliche Verdienst, des Leipziger Professorensohnes G. W. Leibniz.”[32]

Két kitűnő dolgozat és egy monográfia mutatja, milyen óriási hiányosságok vannak az infinitézimális módszerek történetének a területén.

René Taton *L'Œuvre scientifique de Monge* (Paris, 1951) c. műve Monge-ot nem annyira mint az ábrázoló geometriának, hanem éppen mint az infinitézimális számítás háromdimenziós alkalmazásának a megteremtőjét mutatja be. Ezek a munkái legalább olyan nagy lendületet adtak a mérnöki tudományoknak, mint ábrázoló geometriája. Taton azonban nem elégszik meg egyszerű ideatörténeti analízissel: megmutatja, milyen erősen hatott a tudomány, mégpedig a tiszta tudomány tekintélyére és növekedésére a francia ipar gyors fejlődése, amit a háború és a blokád tett szükségessé. Másfelől ezt a fejlődést az ország legnagyobb tudósai – Monge, Lagrange, Laplace, Berthollet, Carnot – széleskörű nevelői és gyakorlati munkájukkal segítették elő.

A másik fontos munka: Dirk J. Struik, „Outline of a history of differential geometry”.[33] Ez a közlemény lényeges új momentumot hozott a tudománytörténetbe: felfedezi – ha szabad gazdaságtörténeti kifejezéssel élni – a kishullámú periodicitást. Felismeri, hogy már egy évszázadon belül milyen nagy ingadozás van egy olyan szűk tudományágban is, mint a differenciálgeometria. A XVIII. század nagy kezdeti lendülete után a fejlődés elakad, s amíg Monge ezen a holtponton túl nem lendíti, a legnagyobb matematikusok, egy Euler és Lagrange se hoznak semmi jelentőset. Ilyesféle hanyatlásokat a XVIII. századi analitikus geometriában is észlelt Boyer és arra vezette vissza, hogy a túl gyorsan fejlődő infinitézimális módszerek elvonták az analitikus geometriától az erőket.

Struik extramatematikai okokat keres: a hanyatló feudalizmust teszi felelőssé a pangásért. „Euler sok tekintetben a feudális rendszernek ezt az utolsó periódusát reprezentálta, amelyik intellektuális téren oly tagadhatatlan bájjal tűnt tova. Euler műveihez a legjobb

---

[32] Hofmann, J. E.: Geschichte der Mathematik. Vol. II. Berlin, 1957. p. 62.

[33] Isis Vol 19. (1933) pp. 92–120., Vol. 20. (1933) pp. 161–191.

párhuzam talán Mozartban található.” – Gaussban a német kisvárosi Biedermeier óriást, Riemannban Darwin és Marx kortársát, az induktív dialektikus módszer matematikába való bevezetőjét ismeri fel – de nem szavakban, hanem matematikájuk különbözőségén át bemutatva. Ez a közlemény és Fleckenstein „Leibniz”-e máig az egyetlen számottevő hozzájárulás egy esetleges tudománytörténeti „stílus”-analízishez.

A harmadik nagy kezdet az infinitézimális számítás történetében Alexandre Koyré közleménye, ami a Lucien Febvre tiszteletére kiadott emlékkönyvben jelent meg: „Bonaventura Cavalieri et la Géometrie des continus”.[34] Cavalieri nehéz, éppen ezért félreismert és lebecsült művét veszi Koyré vizsgálat alá, s megvetett indivisibiláiban a differenciálhányados egyfajta előfutárát ismeri fel. Akár elfogadjuk ezt az interpretációt, akár nem, a közlemény egy valamit – s ez nagyon fontos nemcsak matematikatörténeti, hanem általános tudománytörténeti szempontból is – kétségkívül bizonyít: azt, hogy Galilei környezetében mélyen behatoltak már az infinitézimális geometria módszereibe.[35]

A matematikatörténet még ma is a legfontosabb – vagy inkább tán legszínvonalasabb – ága a tudománytörténetnek. Matematikatörténeti cikkeket időnként csaknem minden nagy matematikai folyóirat közöl, s van egy igen magas színvonalú, kifejezetten a matematika történetének és „filozófiájának” szentelt folyóirat: a *Scripta Mathematica. A quarterly Journal devoted to the Philosophy, History and Expository Treatment of Mathematics* (New York). 1932-ben alapította Jekuthiel Ginsburg (1889–1957). Matematikatörténeti cikkeken kívül matematikai „szórakozásokat” és az ötvenes évek elején-közepén a matematika absztrakt művészetben való alkalmazását propagáló cikkeket is közölt.

A következő nagy terület, a fizika és kémia történetének területe mutatja legszebben, mit jelentett a matematikatörténetnek Moritz Cantor nagy műve: biztos alapot, aminek egyes adatait cáfolni, javítani lehetett. A fizika- és kémiatörténet elején nem áll ilyen mű.

b) Kémiatörténet

A múlt század híres, 1843-ban megjelent kémiatörténete, Hermann Kopp: *Geschichte der Chemie*-je[36] nehéz feladat elé állítja azt, aki véleményt akar mondani róla. Kopp atya, aki maga is jelentős kémikus volt, a kémiatörténet-írás különleges nehézségét abban látja, hogy míg a többi tudományok mindegyikének állandó célja van, pl. a medicinában a gyógyítás, a leíró tudományokban a természet tárgyainak megismerése és osztályozása, a kémiában ez

---

[34] Évantail de l’histoire vivante. Tom. I. Paris, 1953. pp. 319–340.

[35] Lásd újabban: Alexandre Koyré: Tanulmányok a tudományos gondolkodás történetéről. Ford.: Szigeti Csaba. Bp. – Szeged, 2010. L'Harmattan – SZTE Filozófia Tanszék. 377 p. (Rezonőr) *(– a szerk. megj.)*

[36] Kopp, H.: Geschichte der Chemie. Neudruck der Originalausgabe. Leipzig, 1931. p. 4.

nincs így. Koronként változik a kémia nemcsak az alkalmazott eszközeiben, hanem céljaiban is: egyszer az aranycsinálás, máskor a gyógyítás, megint máskor a gázok osztályozása stb. lesz a célja.

Kopp után szétesik a kémiatörténet az ő általa jelzett célok szerint. Többé az övéhez fogható nagy kémiatörténeti kézikönyv nem születik. Adatait máig idézik, többnyire kritikátlanul. Ahelyett, hogy a nagy művet kritizáló monográfiák sorában egy új szintézis alapjait raknák le – mint a matematikatörténetben történt –, sokszor még a monográfiákat is lényegében Koppból ollózzák ki. Ilyen pl. a Günther Bugge kiadásában megjelent *Das Buch der grossen Chemiker* (Weinheim-Bergstr. 1929). A sok kitűnő arckép se tudja megmenteni Rudolf Sachtleben és Armin Hermann *Von der Alchemie zur Grossynthese. Grosse Chemiker* (Stuttgart, 1960) című kémiatörténetét. Ezzel a kitűnő kiállítású művel csak felfogása miatt kell itt foglalkozni. A könyv kétharmadát modern – túlnyomórészt német – szerzőkkel, ill. tudósokkal töltik meg. Az igaz, hogy a nagyipari szintézisnek valóban nem sok elődjét lehet találni a XVII. vagy XVIII. században, de volt akkor is – s hozzá nem is akármilyen – kémia.

Egy másik érdekes véglet a „psychokémia". így lehetne nevezni Carl Gustav Jung kémiatörténeti kirándulásait. Jung egy betege sorozatos álmai segítségével „érti" meg az alkímia bonyolult történetét. Szerinte az alkímia sokkal több, mint egyszerű tudomány. Az alkímia a kereszténységnek megfelelő földalatti mozgalom (Unterströmung), ami úgy viszonylik a kereszténységhez, mint álom az ébrenléthez.[37]

Jung könyvének egyetlen érdeme az volt, hogy felhívta a figyelmet az alkímiatörténet bonyolultságára. Ezt a tudománytörténészek már régen tudták; az alkímia nagy történetírója, Edmund Oscar von Lippmann (1857–1940) a század első évtizedeiben sokszínű, egyiptológiai, klasszika-filológiai, filozófiai, vallás-, technika-, és tudománytörténeti szempontok figyelembevételével próbálta magyarázni az alkímia kezdeteit.[38] Lippmann előkelő helyet foglal el az alkímia- és technológiatörténet-írás történetében: ő alkalmazta először ezen a bonyolult területen a forráskritikai módszereket a Marcellin Berthelot-féle (1827–1907) szabad szövegszétdobálás és interpretálás helyébe. Akárcsak Tannery, ő sem jutott soha megfelelő kutatási körülményekhez: egész életében hallei cukorgyári igazgató maradt.[39]

---

[37] Jung, C. G.: Psychologie und Alchemie. Zürich, 1944.

[38] Lippmann, E. O. von: Entstehung und Ausbreitung der Alchemie, Berlin, Vol. I. 1919., Vol. II. 1931., Vol. III. Weinheim/Bergstr. 1954.

[39] Berthelot módszereire lásd: Lippmann: Entstehung… Vol. I. pp. 647–659. Berthelot a kémiatörténet-írás területén is úgy tett, mint ahogy J. Jaques szerint a szintetikus kémiában: mint közoktatásügyi miniszter, csak egy feltartóztathatatlan folyamatra adja áldását s úgy tesz, mintha ő hozta volna létre. Jaques, J.: Le vitalisme et la chimie organique pendant la première moitié du XIX^{e} siècle. = Revue d'Histoire des Sciences, 1950. No. 3. pp. 32–66

Az alkímia történetének a kutatása ma már – akárcsak az asztrológiáé – túllépett a szorosabb értelemben vett tudománytörténet keretein. Annyi speciális szaktudást, annyi különleges ismeretet követel, hogy a tudománytörténet-írás külön (a babonatörténettel, filozófiatörténettel, irodalomtörténettel, vallástörténettel és furcsaságtörténettel szoros kapcsolatban álló) ágának tekinthető.[40]

Az alkímia, asztrológia, mágikus természetrajz és egyéb pseudotudományok Lynn Thorndike személyében találtak példátlanul alapos és lelkiismeretes kutatóra. Thorndike ma a középkori természettudományos kéziratok legnagyobb ismerője. A harmincas és negyvenes években egymásután adta ki az *Isis* és egyéb folyóiratok hasábjain érdekes kézirat-felfedezéseit. 1923-tól kezdve jelennek meg *A History of Magic and Experimental Science*-ének vaskos kötetei. Valóságos tárházai ezek az emberiség furcsa bölcsességének Pliniustól–Keplerig.

Thorndike nagy történész, s ez talán túlságosan is elnézővé teszi a – mégiscsak ez a legjobb neve – butasággal szemben. Az első kötetben még a pliniusi „minden hazugságra akad egy tanú" attitűddel áll a mágiával szemben. Ahogy azonban múlnak az évek és vastagodnak a kötetek, ahogy közeledik a XVII. század felé, egyre elnézőbb lesz a természetes mágia iránt, s végül, mint Plinius, ő is tisztelni kezdi. Végül az asztrológiában a Newton előtti természettudományos fejlődés nagy, általános természettörvényét ismeri fel, amit csak a gravitációs törvény képes felváltani.[41] E szerint a felfogás szerint az asztrológia a természettudomány útját készítette elő, sőt: az asztrológia, az alkímia és a természetes mágia voltak még a XVI. században is az experimentális módszerek – ilyen vagy olyan, de – őrizői. A természettudomány elleni reakciót nem a mágikus tudományok jelentik, hanem az egyház, amelyik koronként üldözi az asztrológiát, és a humanizmus, amelyik feloldja terméketlen szkepszise savában.[42] A természettudomány reménye nem bullákban, üldözésekben, szkepticizmusban, ateizmusban volt, hanem „a természettudományos kérdések felé fokozottan irányuló figyelemben".[43] Galilei is „jobban tette volna, ha provokáló dialógusai helyett egy rendszeres kézikönyvet ír a kopernikánus elméletről".[44] Csakhogy Galilei nem protestáns,

---

[40] Lásd pl.: Festugière, A.-J.: La Révélation d'Hermes Trismégiste. I. L'astrologie et les sciences occultes. Paris, 1942.

[41] Thorndike, Lynn: The Place of Astrology in the History of Science. = Isis Vol. 46. (1955) No. 46. pp. 273–278. Mark Graubard ezzel a cikkel vitázva kimutatja, hogy az asztrológia nem hirtelen tűnt el Newton gravitációs törvényének a hatására, hanem lassan hanyatlott, és nem általános természettörvény volt, hanem vallás. Graubard, M.: Astrology's Demise and its Bearing on the Decline and Death of Beliefs. = Osiris Vol. 13. (1958) pp. 210–257.

[42] Thorndike, Lynn: A History of Magic and Experimental Sciences. Vol. VI. New York, 1941. MacMillan. pp. 392–465.

[43] Uo. p. 573.

[44] Uo. p. 62.

neopozitivista hajlamú tudós volt Amerikában!

Páratlan ismeretanyag, elsőrendű szövegkritikai módszer, történész intuíció… minden együtt van Thorndike nagy művében. Csak abból a – ha kell, arrogáns – tűzből hiányzik legalább egy kevés, ami Galileiben olyan elfojthatatlan erővel lobogott: az értelem tiszteletéből.

A kémiatörténeti monográfiák özönéből – csak a Lavoisier–Priestley–Scheele vitába is mennyi erőt öltek! – egyetlen könyvet kell kiemelni: Mary Elvira Weeks, *The Discovery of the Elements*-ét (Easton, Pa. 1934, 1960.). Dióhéjban egy egész kis kémiatörténet, s ezen felül egy „keretelbeszélés” lehetősége. A keret: a 92 meg egynéhány elem, amelyik kiválaszt kb. 300 embert. Az egyes elemek felfedezése lassan indul, évezredeken át alig változik az ismert elemek száma, s ezek se mint elemek ismertek. Az elem még absztrakt, titokzatos, „filozófiai” fogalom. A fordulópontot a Phosphor felfedezése jelzi a XVII. század második felében. A XVIII. században egyre több gázt és fémet izolálnak és ismernek fel elemként. A XVIII. század végén, a XIX. század legelején az elemek az egész kémia és fizika központi kérdésévé válnak: Lavoisier, Davy, Dalton, Cavendish, Berzelius, Priesley, Klaproth, Scheele… Az elem-felfedezési láz átcsap a perifériákra is. A természettudományoknak és irodalomnak ezt a XIX. század eleji „demokratizálódását” és „földrajzi terjedését” Németh László legutóbb a Bolyaiakról szóló tanulmányai során hangsúlyozta;[45] ugyanez a periferizálódás észlelhető az elemek felfedezésének a történetében is. Spanyolország, Mexikó, Finnország, Oroszország – s méghozzá itt is (akár a matematikában) éppen Kazán! –, Magyarország, Erdély egymásután, ellenállhatatlanul vonzódnak a tudomány bűvkörébe. A svéd tudomány egyenesen az elemek analízisén nő naggyá. A fejlődés töretlen lendülettel ível, a csúcsán Mengyelejev, akit élete utolsó erejével hozott volt egykor fel nagyszerű anyja a pétervári iskolába, megoldja az elemek összefüggésének csodálatos, egyszerű rejtélyét.

Az elemek felfedezéséről írva, önként kopogja az ember gépe – persze lehet, hogy a történész-kritikus szempontok szerint helytelenül – a romantika szót.

Mary Elvira Weeks könyvének lefordítása könyvkiadásunk egyik sürgető feladata lenne. Természetesen képanyagával együtt, nem, mint a Struik könyvét, „kiképlelve”.

[45] Németh László: A Bolyaiak a matematikatörténet világában. (Részlet). In: Németh László: Sajkódi esték. Bp., 1961. Magvető. pp. 127–141.

c) Fizikatörténet

A XIX. század fizikatörténetei lényegében nem voltak egyebek nagyobb távolságra – esetleg pár ezer évre – visszatekintő, többé-kevésbé pontos irodalomismertetéseknél. Tulajdonképpeni történész-munka, forráskritikai, filológiai vagy forráskritikán alapuló interpretáció és múltmegelevenítés nem volt bennük. Az első továbblépést Ernst Mach könyvei jelentik a mechanika, a hőtan és a fénytan fejlődéséről.[46] Mach szempontjai sem forráskritikaiak. Ezt maga is hangsúlyozza a *Wärmelehre* előszavában: „Ebben az írásban, bár számos forrást használok, nem szabad levéltári kutatás eredményét keresni. Inkább gondolatok növekedéséről és összefüggéséről lesz szó, semmint érdekes különlegességekről…”[47]

A *Die Mechanik in ihrer Entwicklung* még ilyen gondolattörténeti szempontból sem nevezhető történeti műnek: Mach ebben a könyvében a mechanikát mint „gondolkozás-ökonómiai példatárt” tekinti. A gondolkozásökonómiai elvnek meg nem felelő, „apriorisztikus” fizikusokat, amilyen pl. szerinte Arkhimédész, elítéli. Hangoztatja, hogy vélt axiómáik sem egyebek a tapasztalatból leszűrt konvencióknál, csak éppen – nem elég „kényelmesek”, s azért egyszerűbb szükségszerűeknek tekinteni őket.

Mach a mechanika csúcsát Stevin értékes, de még ösztönös, öntudatlan előkészítő munkája után Galilei és Huygens műveiben látja. S itt sok utódnál lényegesen tisztábban lát. Igaz, hogy őket is megpróbálja felhasználni gondolkozásökonómiai példatára számára, s munkamódszerként megfelelően nagyszámú tapasztalat elméleti megfogalmazásának kísérleti ellenőrzését erőszakolja rájuk. De észreveszi, hogy Galileivel, Galileiben valami egészen új kezdődik. Észreveszi, részben bizonyosan Wohlwill hatására, a fiatal és az érett, a pisai és a padovai Galilei közötti különbséget, s hogy mechanikáról, mint tudományról, csak ettől a pillanattól, Galilei „megérésétől” kezdve beszélhetünk. Tudja – hányan felejtik ezt el utána! –, hogy Galilei előtt *erőről* szó sincs, csak nyomásról, s hogy Galilei implicite, anélkül hogy a nevét kimondaná, megteremti a differenciálhányados fogalmát. Nehézkesen, körülményesen, németesen, professzorosan, sokszor pongyola stílusban nagyon sok mindent elmond Galileiről abból, amit Koyré csaknem egy fél évszázaddal később, ragyogóan és francia világossággal tár majd egy egyre jobban terjeszkedő tudománytörténész generáció elé.

---

[46] Mach, Ernst: Die Mechanik in ihrer Entwicklung. Historisch-kritisch dargestellt. Leipzig, [1]1883, [7]1921.; Die Prinzipien der Wärmelehre. Historisch-kritisch entwickelt. Leipzig, [1]1896, [4]1923.; Die Prinzipien der physikalischen Optik. Historisch und erkenntnispsychologisch entwickelt. Leipzig, 1921.

[47] Die Prinzipien der Wärmelehre. 1896-os kiadásának előszavából.

S mindezt akkor, amikor nemcsak hogy tudománytörténész generációról, de még tudománytörténészekről sem nagyon lehetett – legalábbis többes számban – beszélni. S ehhez mégiscsak történésznek kell lenni, ilyesmi, hogy az ő kedvenc, gyakran használt szavával éljek, „lässt sich nicht herausphilosophieren". Műveit a mai tudománytörténészek nagy része tévedések tárházának tartja, amiket csak az ment valamennyire, hogy „egy történelem iránt kevéssé fogékony matematikus és természettudós generáció" érdeklődését felkeltette a fizikatörténet iránt.[48] A kritikai tudománytörténet-írásnak ezt az „antimachianizmusát" részben a mechanikatörténet-írás érdeklődési iránya indokolja. A mechanikatörténet-írásban ugyanis csaknem kizárólagosan két nagy problémakomplexum köré csoportosult a kutatók érdeklődése: a középkori mechanika fejlődése és a newtoni mechanika kialakulása köré. Kétségtelen, hogy ezen a két területen elért eredmények jelentik a prae-euklideszi matematika történetére vonatkozó kutatások mellett a tudománytörténet-írás eddigi csúcsteljesítményeit.

A nagy mechanikatörténeti iskola 1950-ig elért eredményeit Eduard J. Dijksterhuis *Die Mechanisierung des Weltbildes* (Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1956) c. munkája foglalja össze. A könyv 1950-ben jelent meg először, holland nyelven. Arisztotelésztől a newtoni mechanikával bezárólag tekinti át a mechanika fejlődését, a filozófiai és asztronómiai határproblémák bevonásával. Az új kutatások zömének megfelelően, a „világkép" mechanizálódását egy nagy, egyre duzzadó, feltartóztathatatlan folyamatnak tekinti, s a gondolkozástörténeti kontinuitás elvének implicit alkalmazásával kiiktatja a Mach által a Galilei-Huygens párnál felismert cezúrát. Galileiben a Janus-arcú, múltba és jövőbe néző óriást látja,[49] amilyennek az elmúlt két-három évtized kultúrtörténészei a renaissance nagy alakjait szerették látni. A múlt, ami felé a Janus-arcú Galilei tekint, a közvetlen múlt, melynek az antikvitással az addig gondoltnál sokkal szorosabb kapcsolatait derítette fel az eltelt fél évszázad. Huygenst Dijksterhuis túl nehéznek minősíti ahhoz, hogy szélesebb olvasóközönségnek szánt könyvében ismertesse.[50] S így a közel 600 nagy oldal átolvasása után azt az érzést kelti, hogy a „világkép" mechanizálásáért a XIV. század skolasztikusai ugyanannyit tettek, mint „az antiarisztoteliánus Galilei és az atheista Huygens."

---

48 Reinmann, Dora: Historische Studien über Ernst Machs Darstellung der Entwicklung des Hebelsatzes. = Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Asronomie und Physik. B: Studien, 1936. No. 3. pp. 554–592.

49 „…Eine Situation wie die oben beschriebene (ti. hogy különböző kutatók szerepét és jelentőségét oly különféleképpen értékelik) wäre nie enstanden, wenn Galilei nicht die zentrale Figur des Überganges vom antik-mittelalterlichen zum klassischen naturwissenschaftlichen Denken gewesen wäre…" Dijksterhuis, E. J.: Die Mechanisierung des Weltbildes, Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1956. pp. 371–372.

50 Uo. p. 410.

Egyben mégis követi Machot: éppen úgy mindenütt modern fogalmakat és jelöléseket alkalmaz, mint Mach, és a vastag könyvben nem sok helyet ad emberi vagy társadalmi vonatkozásoknak, alig engedi szóhoz jutni a szereplőket magukat. Úgy fejlődnek az „ideák", egyik a másikból, mint a szappanbuborékok: színesek, csillognak a napfényben, s miközben a világkép mechanizálódik, a mechanizálódás részletei elpukkannak az olvasó fejében.

Mach könyvében legalább kötötte az „ideákat" – ha téves is, de – következetes szempont: a gondolatökonómia elve. Dijksterhuis objektív, s mint az objektivitás általában, kicsit unalmas.

Dijksterhuis könyvét feltétlenül ki kell egészíteni René Dugas *Histoire de la mécanique*-jával (Paris–Neuchatel, 1950, angol fordítás: London, 1957). A könyv egyének nagy teljesítményein alapul, nagyon sok idézettel, valóságos mechanikatörténeti olvasókönyv, mondják recenzensei.[51] Az angolszász bírálók franciákkal szembeni elfogultságot vetnek a szemére, de ez semmi esetre sem nacionalizmus, hanem inkább egyfajta nagyon intenzív biografikus érdeklődés, amely pl. egyenesen hátborzongató közelségbe hozza Pascalt, s méghozzá nem valami olcsó pszichologizáláson, hanem kizárólagosan fizikai munkáin keresztül. De Galileit színtelennek ábrázolja, Newtont kifesti egy kis misztikával… nem, távolról sem nacionalizmusból, hanem mély, néhol már a teológia határát súroló „mélyfrancia" kartéziánizmusból.[52]

A fizikatörténet többi szakágai messze elmaradtak a mechanikatörténet fejlődése mögött, többnyire még a monografikus előkészítés állapotáig sem jutottak el.

Az optikatörténet régibb szakaszának a legjobb összefoglalását Vasco Ronchi, a firenzei optikai intézet igazgatója írta.[53] A XIX. és a XX. századi fizika szempontjából oly jelentős fénytani elméletek nem találtak megfelelő ismertetésre sem, nemhogy történeti feldolgozásra. A terület leghíresebb monográfiája, Edmund Taylor Whittaker rendkívül nagy anyagot felölelő, gondos munkája a múlt százai „irodalomreferáló" szinten mozog, a XIX. század optikájára modern fogalmakat és jelölést kényszerít, a XX. század fizikájával szemben nem tudja levetni a kortárs-fizikus elfogultságát.[54]

---

51 Carl B. Boyer. = Scripta Mathematica, 1960. No. 25. pp. 71–72.; Pierre Costabel.= Revue d'Histoire des Scientes, 1953. No. 6. pp. 72–74.

52 La mécanique au XVII^e siècle. Des antécédents scolastiques á la pensée classique. Neuchâtel-Paris, 1954.

53 Ronchi, Vasco: Historie de la lumière. Traduit de l'italien par Juliette Taton. Paris, 1956.

54 Whittaker, Sir Edmund: A History of Theories of Aether and Electricity. Vol. I. The Classical Theories. London, 1910., ²1951.; Vol. II. The Modern Theories 1900–1926. London, 1953. A második fejezetben tárgyalja a relativitáselméletet „The Relativity Theory of Poincaré and Lorentz" cím alatt. Einstein 1905-ös munkájáról: „Einstein published a paper which set forth the relativity theory of Poincaré and Lorentz with some amplifications, and which attracted much attention…" Vol. II. p. 40.

A termodinamika történetéről szóló, viszonylag nagyon kevés mű közül mint metodikai újítást kell kiemelni Thomas S. Kuhnnak az energiamegmaradás elvének felfedezéséről szóló közleményét. Az elv tizenkét egymástól független felfedezőjének munkáját analizálva, három csoportba sikerült őket besorolnia: az egyikben az elektromos árammal való experimentális munka jelentette a döntő inspirációt, a másikban a gőzgéptechnika, egy harmadikban a német Naturphilosophie.[55]

Kuhn tanulmánya igen nagy apparátussal dolgozó, komoly munka. – És ha most az ember visszalapoz egy réges-régi *Isis* számba – sajnos nem Kuhn nyomán, mert ő erre elfelejti felhívni a figyelmet –, ott találja Sarton egy kis, apparatúra mentes közleményét, három rövid facsimilével Joule, Sadi Carnot és Robert Mayer műveiből. S ez éppen a fenti három csoport: az elektromos-experimentális, a gőzgép-technikai és a naturphilosophiai.[56]

d) Asztronómiatörténet és orvostörténet

Ezt a két szaktudományt történetük korábbi szakaszaiban összeköti az asztrológia és a mágikus természetrajz. Asztronómiatörténet és orvostörténet a matematikatörténet mellett a legrégibb szaktudomány-történetek. Bizonyos fokú tudományos szintet már a Tannery-reform előtt elértek, viszont rájuk hatott legkevésbé a kilencszázas évek elején megindult fejlődés. Mindkét szakma könnyen válik – túl nagy a csábítás – érdekességtörténetté. A csillagászat legnagyobbjai – Galilei, Kepler, Newton, Laplace, Gauss, Einstein, Eddington – fizikusok vagy matematikusok, Kopernikusz pedig éppen mint szakcsillagász nem számítható a legnagyobbak közé.[57] A monografikus, részleteket feldolgozó irodalomból messze kiemelkedik – túlzásai ellenére is – A. Koyré könyve: *From the Closed World to the Infinite Universe* (Baltimore, 1957.) Ebben az 1939-es Galilei tanulmányai tézisére tér vissza: a XVII. század természettudományos forradalmának két legnagyobb jelentőségű faktora a kozmosz kitágítása és a tér geometrizálása volt.

Az orvostörténet-írás Henry E. Sigerist (1891–1957) munkáitól eltekintve nem sok egyetemes, tudománytörténeti szempontból értékelhetőt produkált. Nagy múltú, külön, önálló (és kissé önelégült) szakma; afféle konzílium régi kollégákkal. Majdnem kizárólag orvosok művelik, pedig az orvostörténet nagyjai közül sokan nem férnek el a medicina keretei között.

---

55 Kuhn, Thomas S.: Energy Conservation as an Example of Simultaneous Discovery. In: Critical Problems in the History of Science. Ed. by. M. Clagett. Madison, 1959. pp.In: Critical Problems in the History of Science. Ed. by. M. Clagett. Madison, 1959. pp. 321–356.

56 Isis Vol. 13. (1929) pp. 18–34.

57 A „copernicusi forradalom”-ról legalább annyi téves nézet kering, mint Galileiről. Az első szakszerű, az újabb kutatásokon alapuló értékelése, ill. ismertetése: Kuhn, Thomas S.: The Copernican Revolution. Cambridge, 1957.

Cardano és Johann Bernoulli pl. gyakorló orvosok voltak, de a matematika története őrzi a nevüket, Pasteur pedig, akinek a gyakorlati és az elméleti orvostudomány egyaránt a legtöbbet köszönheti, nem volt orvos. Az orvostudomány és az asztronómia történetének szorosabban kellett volna fonódnia a többi szaktudomány-történetekhez, és a gazdaságtörténethez, mint bármely más szaktudomány-történetnek. Talán éppen ennek a nehézségnek az elkerülésére alakították ki tradicionális struccpolitikájukat a többi szaktudományok felé?

A leíró természettudományok történetének irdatlan irodalmából kiemelkedik Rapaics Raymund *A magyar gyümölcs*-e (Budapest, 1940). Takáts Sándor-ízt érez rajta az ember, s ilyesféle alcímet kívánna neki adni: kis dolgok nagy története. Nem hasonlóképpen kellene-e írni a biológiai tudományok történetéről – legalábbis Cuvier–Darwin koráig? A Cuvier, Darwin, Mendel, Morgan munkája körül felburjánzott hatalmas irodalmat annyira nem történészszempontok vezetik, hogy egy ilyen, elsősorban ezek iránt érdeklődő közleményben bízvást eltekinthetünk tőle.

Annál bővebben kell foglalkozni egy, a harmincas években kialakuló és egyre fontosabbá váló csoporttal, ami a második világháború utáni periódusban a tudománytörténet-írás egyik uralkodó iránya lesz. Erről szól a fejezet következő, utolsó pontja.

e) A természettudományok háttere: társadalmi, gazdasági, szervezési viszonyok hatása a természettudományokra

Láttuk már, hogy a XVIII. és XIX. század fizikájának története jóformán feldolgozatlan. S ennek jó okai vannak. Ahogy közeledtünk a jelen felé, annál nagyobb szerepet játszanak a tudományok fejlődésében tudományon kívüli tényezők, annál szemmel láthatóbbá lesz ez a szerep. Régóta emlegették a XVII. századi tudományos társaságok szerepét, de Martha Ornstein (1878–1915) posztumusz művéig – *The Role of Scientific Societies in the Seventeenth Century* (Chicago, 1928) – a témának átfogó feldolgozása nem volt. S az ő műve is inkább felvetett, mintsem megoldott kérdéseket. Máig eldöntetlen pl., hogy mi volt a szerepe a Royal Society keletkezésében Comeniusnak, Samuel Hartliben keresztül, vagy közvetlenül, s ha volt, hogyan olvadtak fel az ő pedagógiai-utópisztikus szempontjai a Társaság utilitarisztikus, baconiánus vonalában.[58]

[58] Stimson, Dorothy: Comenius and the Invisible College. = Isis Vol. 23. (1935) pp. 373–388.; Barnett, Pamela R.: Theodore Haak and the Early Years of the Royal Society. = Annals of Science 13 (1957) pp. 205–218. A Royal Society-ről is számtalan, a Heroic Age-ekre általában jellemző, nagyrészt egykorú történet és legenda ismert. Tom Sprat History of the Royal Society-jének (1667) dicsekvése: „Invention is an heroic thing, and placed above the reach of a low and vulgar genius" nagyon jellemző a virtuózi hangulatára, de nem biztos, hogy „készpénzének vehető. A Royal Society-ben nagy szerepet játszottak low and vulgar anyagi érdekek is. Hiszen már a Társaság „védőszentje", Bacon lord, nagy fontosságot tulajdonított ezeknek. A „Ballad of Gresham College" (Simson, D.: Isis Vol. 18. (1932) pp. 103–117.) is számos „gazdaságtörténeti

Hatott-e, s hogyan a Royal Society kísérleti irányának a kialakulására a Firenzében Leopold nagyherceg segítségével, Galilei tanítványok által létrehozott Accademia del Cimento (Kísérleti Akadémia)? Azt kell-e hangsúlyozni, amint Abraham Wolf teszi,[59] hogy az Accademia közleményeit már 1684-ben lefordítják angolra, vagy, mint Martha Ornstein véli, hogy csak ekkor jutnak angol földre?[60] És a francia Académie des Sciences (Természettudományos Akadémia) angol-itáliai hatás eredménye-e, vagy, mint Frances A. Yates állítja, közvetlenül a XVI. századi francia irodalmi akadémiákból alakult ki, s ez a körülmény még a XVIII. században is rányomta a bélyegét?[61]

A XVII. század természettudományos társaságai mind uralkodói védnökség alatt nőnek naggyá, a bennük való részvétel „becsület és dicsőség" dolga és – talán éppen ezért? – működésükről sok és elég részletes feljegyzés áll a történész rendelkezésére. Más a helyzet az angol vidéki városokban a XVIII. század végén nem fejedelmi, hanem „iparbárói" patronage alatt alakuló társaságok esetében. Ezekről igen kevés a megbízható korabeli leírás. Talán, mert létrejöttükben a haszon a motiváló tényező, s erről az emberek nem írnak olyan szívesen, mint a dicsőségről.

Már Paul Mantoux, a századeleji nagy francia gazdaságtörténész felveti klasszikus művében[62] a birminghami Lunar Society (minden holdtöltekor gyűltek össze – innen a név) szerepének a kérdését az ipar és a természettudomány fejlődésében. Felismeri, hogy éppen a XVIII. és XIX. század fordulóján milyen jelentőssé válik a tudomány az ipar fejlődésében. Leírja, hogyan váltja fel az ipari forradalom empirikus szakaszát a tudományos.[63]

De a tudománytörténészeket nem nagyon vonzotta a téma, s egész a legutóbbi időkig jóformán még azt se tudtuk, kik tartoztak a „lúnátikusok" közé.[64] S a Lunar Society még aránylag elég sok történész-figyelemben részesült. De a többi angol vidéki város társaságai? És az ugyanakkor Európa-szerte ipar és felvilágosodás egyesült hatása alatt keletkező, sokszor kérész életű társaságoknak mi a szerepe a természettudomány fejlődésében?

---

vonatkozású" versszakot tartalmaz, amiket az ilyesmi iránt érdeklődő tudománytörténészek ki is használtak. Csak egyre nem figyelnek: arra a döcögősségében is könnyed, szárnyaló hangulatra, arra a jókedvre, tréfára és játékosságra, ami minden nagy emberi vállalkozás egyik alapfeltétele.

59 Wolf, Abraham: A History of Science, Technology and Philosophy in the 16th & 17th Centuries. London, 1935.

60 Ornstein, Martha: The Role of Scientific Societies in the Seventeenth Century. Chicago, 1928. pp. 89–90.

61 Yates, Frances A.: The French Academies of the Sixteenth Century. London, 1947.

62 Mantoux, Paul: La Révolution Industrielle au XVIIIe siècle. Paris, 1906.

63 Uo. p. 393, 316.

64 Schofield, R. E.: Membership of the Lunar Society of Birmingham. = Annals of Science 12 (1956) pp. 118–136.; The Industrial Orientation of Science in the Lunar Society of Birmingham. = Isis Vol. 48 (1957) pp. 408–415.

A wolfram felfedezőit, Don Juan José de Elhuyar y de Zubicot és öccsét, Don Faustot a Sociedad Vascongada de Amigos del Pasis, a baszk hazafiak társasága küldi a XVIII. század végén távoli, sokba kerülő tanulmányutukra.[65]

A műszertörténet a tudománytörténet viszonylag jól kidolgozott ágai közé tartozik. Különösen a csillagászattörténészek időznek szívesen az obszervatóriumok felszerelésénél, és már Rudolf Wolf *Geschichte der Astronomie*-ja (München, 1877) egy egész fejezetet szentel a XVIII. század mérőműszereinek. Sokkal kevésbé tisztázott kérdés, milyen összefüggés volt a XVIII. század második felétől meglepő gyorsan fejlődő műszerpark, és az ugyancsak ettől az időtől nekilendülő ipari fejlődés között. Pedig Maurice Daumas a francia és angol műszergyárosok társadalmi és anyagi helyzetének utóbbiak javára fennálló nagy különbözőségében az angol XVIII. századi empirikus tudomány uralkodó túlsúlyának egyik fontos tényezőjét véli felismerni.[66] És bizonyos, hogy a kémiai ipar XVIII. századi fellendülésének a kémiai eszközkészítésre, s ennek megint a kémiára, s ezen keresztül újból a kémiai iparra való hatását sokkal érdemesebb vizsgálni,[67] mint folytatni a végtelen vitákat arról, hogy ki fedezte fel az oxigént.

A gazdasági és társadalmi tényezők hatásának a vizsgálata azonban nagyon nehéz kérdés; módszeres megközelítéséről ma még aligha szólhatunk. A tárgykör máig klasszikus alapművének Robert K. Merton, „Science, Technology and Society in Seventeenth Century England”-ját[68] tartják. Valójában azonban ez a hosszú és nehéz közlemény inkább csak Max Weber protestantizmus-kapitalizmus elméletét és a harmincas években a nagy válság hatására divatba jött cikluselméletet alkalmazza – minden különösebb tudománytörténeti vonatkozás nélkül – egy tudományos „háttér” körvonalazására.

De a gazdaságtörténész feladata nem a tudományos, hanem a gazdasági háttér megrajzolása lenne, ebből sokkal többet nyer az illető kor tudományának a rajza is. Nem mond sokat, ha a Royal Society keletkezésében egy félig gazdasági, félig pszichológiai determináltságú, a tudományos „szellem” kialakulására kedvező „puritanizmusra” hivatkozunk. Annál érdekesebb viszont minden adat, ami a természettudománnyal foglalkozó személyeknek a részvételéről szól pl. a haditengerészet és az ágyúipar,[69] a kereskedelem- és pénzügyletekben. Nagyon hasznosak a tudósok megélhetési és kereseti lehetőségeire vonatkozó adatok is, és nagy kár „szemérmesen” elsiklani Newton pénzverdéi igazgatósága

[65] Weeks, Mary Elvira: Discovery of the Elements. Easton, 1960. p. 285.

[66] Daumas, M.: Les instruments scientifiques aux XVII^e^ et XVIII^e^ siècles. Paris, 1953.

[67] Robinson, E.: The Lunar Society and the Improvement of Scientific Instruments. = Annals of Science 12 (1956) pp. 296–303., 13 (1957) pp. 1–8.

[68] Osiris Vol. 4. (1938) Part. 2. pp. 360–632.

[69] Webb, H. J.: The Science of Gunnery in Elizabethan England. = Isis Vol. 45. (1954) pp. 10–21.

fölött. A *Principia* tételeire valóban nem sok hatása lehetett annak – mint George Norman Clark, a híres oxfordi történészprofesszor hangsúlyozza oly gyakran és ironikusan a marxista és fizikus Boris Hessennel szemben –, hogy Newton az „emelkedő burzsoázia tipikus tagja volt”. De vajon létrejöhetett volna-e egyáltalában a *Principia*, ha ez az „emelkedő burzsoázia” nem támogatja, s hozzá nagyon is kézzelfogható módon Newtont? Valóban minden, a végsőkig vitt rendszeres kidolgozás is, ami mégiscsak egyik legfontosabb sajátsága a *Principiá*nak, még ártatlan ifjúsága hajnalán, a híres nagy pestistől való menekülés alatt született meg Newtonban, mint a legenda tartja?

A tudománytörténet egyik kedvenc témája lett a *Principia* első és későbbi kiadásai között való párhuzamvonás.[70] A különbségeket rendszerint Newton vallási életének változásaiban keresik, vagy a kartéziánizmus elleni fokozódó gyűlöletében.[71] Miért indokolnák ezek a nagy mű alakulását jobban, mint Hessennek a harmincas évek elején bevezetett burzsoázia-hipotézise? Egy ilyen nagy mű fejlődésének belső törvényszerűségei vannak, amik előtt a tudománytörténész épp olyan tehetetlenül áll, mint a gazdaságtörténész.

De annál inkább hozzáférhetnek ketten, közös erővel, a nagy mű keletkezésének előfeltételeit megszabó társadalmi-tudományos tényezőkhöz, és a mű társadalmi gazdasági hatásához. John Desmond Bernal, akiben a fizikus, a tudománytörténész és gazdaságtörténész egyesült bizonyos fokig, egy úttörő tanulmányában pl. az elméleti elektromosságtan, az elektromos ipar és az elektromos energia piacra való termelésének a megoldása közötti igen szoros összefüggésekre hívta fel a figyelmet.[72] Ugyancsak Bernal nevezte néven a legújabbkori természettudományos fejlődés egyik legjellegzetesebb vonását: a természettudomány egyre inkább *intézménnyé* válik.[73] S ezzel a történetírás nagy múltra visszatekintő, régi szakának, az intézménytörténet-írásnak a kipróbálására csábít ezen az új területen. S itt újra termékeny kérdések özöne előtt állunk. Mi volt például a szerepe a holland egyetemek kísérleti fizikai iskoláinak a francia XVIII. századi fizika kialakulására? Erre a kérdésre próbált felelni klasszikus kis tanulmányában még 1926-ban Pierre Brunet.[74] Brunet ismeri fel, milyen fontos a természettudomány és a társadalom közötti kapcsolat – ő még nem használja az intézmény elnevezést – rendszeressé válása szempontjából a XVIII. században a

70 A Newton körülményeivel és „személyiségével” foglalkozó nagy irodalomból egyik legújabb népszerű, de kritikus mű: Crowther, J. G.: Founders of British Science. London, 1960.

71 Cohen, I. B.: Franklin and Newton. An Inquiry into Speculative Newtonian Experimental Science and Franklin’s Work in Electricity as an Example Thereof. Philadelphia, 1965. p. 126., pp. 138–139.

72 Bernal, J. D.: Science and Industry in the Nineteenth Century. London, 1953.

73 Bernal, J. D.: Science in History, London, 1954. – Magyar fordításban: John D. Bernal: Tudomány és történelem. Ford.: Szalai Sándor, Salgó László, Félix Pál. Bp., 1963. Gondolat. XXVII, 846 p., 2 t. *(– a szerk. megj.)*

74 Brunet, P.: Les physiciens hollandais et la méthode expérimentale en France au XVIII[e] siècle. Paris, 1926.

francia kísérleti fizikai és kémiai oktatás és népszerűsítés megszervezése. S azt is látja, milyen bonyolult folyamat ez. Mert a holland iskolákon és gazdasági tényezőkön kívül messzemenően irracionális és kiszámíthatatlan dolgok is inspirálják: szép nők szemei. S maga az a tény, hogy a fizika az udvarláshoz szükséges divat lett, az – akkor még – könnyebb kísérleti irányba tolta el a fizikát. Ez az empiricizált, szentimentális hangnembe áttett newtonizmus lesz a XVIII. század pár excellence tudománya – írja Carl L. Becker, amerikai történész-professzor, *The Heavenly City of the Eighteenth-Century Philosophers*-ében (New Haven, 1932). Ezt a fizikát és kémiát táplálja Diderot közismert matematika-ellenessége is, ez kerül be az *Encyclopédie*-be; majd a század második felében uralkodó rousseau-izmus is erősíti, és a forradalom alatt, nem utolsó sorban, épp ez a pseudo-newtonizmus vezet az Akadémia bezárására, az akadémikusok üldözésére, a valódi newtonizmus legyőzésére.[75]

A forradalom nagy természettudományos és pedagógiai létesítményei – elsősorban az École Polytechnique és a Museum National d'Historie Naturelle – már „az első modern természettudományos intézetek. A professzoroknak külön kutató laboratóriumaik vannak, ahol kutatásaikat végzik asszisztensek és tanítványok segítségével".[76] Hamarosan a laboratórium lesz a természettudományos munka pár excellence kerete. Hiába próbálkozik pl. az angol társadalom a forradalom veszélyes hatásainak kivédése céljából afféle munkásszelídítő munkásfőiskolának tervezett Royal Institution felállításával, alig pár év alatt ez is szabályos kutatólaboratóriummá válik, a XIX. és XX. században oly nagy jelentőségű angol Research Institutionok prototípusává.[77] Az angol és francia természettudományos fejlődést másolják a század közepétől – hátat fordítva saját, egészen más irányba mutató természettudományos lehetőségeiknek[78] – a németek is, s csakhamar elérik, némely területen túl is szárnyalják mintáikat.[79]

---

75 Gillispie, Ch. C.: The Encyclopédie and the Jacobin Philosophy of Science. In: Critical Problems in the History of Science. Ed. by. M. Clagett. Madison, 1959. pp. 255–283.; Gillispie, Ch. C.: The Natural History of Industry. = Isis Vol. 48. (1957) pp. 398–407.

76 Daumas, M.: Esquisse d'une histoire de la vie scientifique. In: Encyclopédie de la Pléiade. Histoire de la Science. Paris, 1957. pp. 1–192. Idézett szöveg: p. 150. De ezzel szemben lásd: Williams, L. P.: Science, Education and Napoleon I. = Isis Vol. 47. (1956) pp. 369–382.

77 Foote, G. A.: Sir Humphry Davy and his Audience at Royal Institution. = Isis Vol. 43. (1952) pp. 6–12.

78 Sarton, George: „Why Isis?". = Isis Vol. 44. (1953) pp. 232–242.; Stauffer, Robert C.: Speculation and Experiment in the Background of Oersted's Discovery of Electromagnetism. = Isis Vol. 48. (1957) pp. 33–50.; Gillispie, Ch. C.: The Edge of Objectivity. An Essay in the History of Scientific Ideas. Princeton, 1960. pp. 192–201.

79 A német ipar, természettudomány és egyetemi oktatás egymással kapcsolatban álló, századközepi előretöréséről lásd: Bernal, J. D.: Science in History. London, 1957. pp. 192–196.

A XX. században azután az ipar, a középfokú és felsőfokú természettudományos oktatás, a természettudományos népszerűsítés, a tudományos kutatóintézetek és folyóiratok mellé egyre súlyosabban járulnak új faktorok: a hatalom tényezői. A háborúk, a kormányok, a tervezés természettudományokra való hatásának nehéz kérdései.

Ennyi sok részlet felsorolásával – ha ugyan követte – nyilván teljesen összezavartam az olvasót. Nemcsak a fejezetcímben felvetett kérdést hagytam megválaszolatlanul: részei vagy alapjai-e az egyes szaktudomány-történetek a tudománytörténetnek, de elromboltam még azt a képet is, amit talán az első két fejezetben a tudománytörténetről, mint amit „Tannery tett a történetírás speciális, saját módszerekkel dolgozó ágává", felépítettem. Hogy lehet része vagy alapja, vagy bármicsodája is ennyi össze nem tartozó dolog valaminek? Mit lehet ezzel az olla podridával kezdeni? Azt, amit minden olla podridával: meg kell enni. Azután meg kell emészteni. Nem ennyit, persze, hanem sokkal-sokkal többet. Ezen kell élni csaknem kizárólagos táplálékként. El kell hitetni másokkal is, hogy ez jó étel, egyenesen nélkülözhetetlen az egészséghez. Ez megint lehetővé teszi egy csomó új nyersanyag és kész étel eladását. S ha a vigéc megöregedett, s benne él már az egész forgatag, akkor, mint Krúdy Gyula úr, már csak ízekre, szagokra és arcokra emlékezve, egyaránt közömbösen a túlságos részletekbe veszés vagy az elnagyolás veszélyei iránt – megírhatja a XIV. század, a renaissance, vagy éppen az első természettudományos renaissance nyomtatványok tudománytörténetét. De ez már nem olyan lényeges. A lényeges maga a szervezőmunka volt, folyóirataival és társaságaival, szempontjaival és vitáival, recenzióival és szövegkiadásaival. Ez kovácsol az egyébként menthetetlenül széthulló szaktudomány-történetekből értelmes egészt, ami több mint az őt felépítő részek, s ha azokon alapul is, egyre inkább ő is alapja lesz amazok speciális kutatásának, egyre inkább körülhatárolódik, úgyannyira, hogy a század közepén szabályos, egyetemeken tanított tantárggyá emelkedik vagy züllik – egyszóval: tudománytörténetté.

IV.

George Sarton és a tudománytörténet-írás szakmává-szervezése

Mikor George Sarton 1913 elején elindította az első tudománytörténeti folyóiratot, az *Isis*t, akkor az egyetemes tudománytörténet még nem létezett. Volt már egy, az egyes szakmák fontosabb eseményeit korok és szakmák szerint felsoroló, pedagógiai célú, nem nagy igényű, de a kitűzött pedagógiai cél szempontjából egyáltalán nem hasznavehetetlen összeállítás

Friedrich Dannemanntól,[80] volt egy nagy, sajnos inkább csak népszerű, mint tudományos igényeket kielégítő, a természettudományok klasszikusait, tartalmazó sorozat, az „Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften", és volt egy (többnyire megbízhatatlan) kronológiai összeállítás a fontosabb természettudományos és technikai felfedezésekről.[81] Ezek mellett meg kell említeni egy, még csak nem is a népszerűsítés, mint inkább a természettudományokról szóló mese szintjén mozgó, de kitűnő (a forrás megadásával közölt) képanyaggal ékes vállalkozást, a *Weltall und Menschheit* hat kötetét.

Mindebből sohasem lett volna tudománytörténet, ha George Sarton ezekből az elég gyarló próbálkozásokból és az ekkor már sokkal magasabb szinten álló szaktudomány-történetekből a mester biztos kezével ki nem válogatja az egyetemes tudománytörténet megteremtéséhez felhasználható anyagot.

George Sarton 1884-ben született Gentben, Belgium flamand részének ősi városában, ahol a századfordulón az újabb történetírás legnagyobb mestereinek egyike, Henri Pirenne volt történelemprofesszor. Sarton életét könnyű vázolni, mert sokat, érdekesen és hozzáértéssel írt magáról. Az *Isis* egyes évfolyamaihoz – és a harmincas években egy évben két évfolyam jelent meg – sokszor két előszót is írt, és ezek mind személyes természetűek. Magáról beszél, de sohasem magáért; az egész életét átlelkesítő, izgató témáról ír folyton: a tudománytörténetről. Saját maga nehézségein át látja legjobban szakmája bonyodalmait és buktatóit. 1911-ben, friss doktorátussal a zsebében, a fiatal matematika-fizika szakot végzett tudós az egész természettudomány történetét akarja megírni, elejétől 1900-ig. A természettudósok ugyanis – írja sok évvel később – „nem értenek a történész-módszerekhez, azt hiszik, hogy a történész munkája puszta kompiláció, és hogy a természettudós munkájának a végső fázisához hasonlítható. Pedig csak az egészhez fogható…"[82] A tudománytörténet rendszeres feldolgozásában nem is jut túl a XIV. századon. Nagy, módszeres bevezetésének, az *Introduction to the History of Science*-nek első kötetére (Homérosztól Omar Khayyamig, 1927) kilenc, a másodikra (Rabbi ben Ezrától Roger Baconig, 1931) tizenhárom, a harmadikra (XIV. század, 1947–48) huszonhét évet fordított.

Ez a beosztás, a 9, 13, 27 éves periódusokkal mutatja, hogyan lett Sarton mediaevalista. Nagy lendülettel át az antikvitáson, s aztán azt hitte, hogy mint a legtöbb tudománytörténész, ő is egyenesen a XVI. század végére ugorhat. „De ekkor már jól ismertem – írja – Pierre Duhem középkortanulmányait és Paul Tannery Bizáncról szóló munkáit. Elhatároztam, hogy

[80] Die Naturwissenschaften in ihrer Entwicklung und ihrem Zusammenhange. 4 Bände., Leipzig und Berlin, 1910–1913.
[81] Ludwig Damstaedters Handbuch zur Geschichte der Naturwissenschaften und der Technik. Berlin, 1908.
[82] Sarton, George: Introduction to the History of Science Vol. III. Part 1. Washington, 1947. p. 3.

mindenről saját szememmel győződök meg.”[83] S ez pokolian időrabló foglalkozás. Az a csoda, hogy Sarton a XIV. századig eljutott benne. „Kettős életet éltem – írja az *Introduction* harmadik kötetének a bevezetésében – egy középkorit, egy jelenkorit. A huszadik század jelenségei segítettek a tizennegyedik század eseményeinek a megértésében, és fordítva.”[84]

Később szemére vetik, hogy viszonylag keveset dolgozott kéziratokból.[85] Kétségtelen, hogy a latin középkor kéziratanyagát nem ismerte annyira, mint pl. Thorndike. De az arab kéziratok ismerete terén elsők között tartották számon. És ő a középkor szempontjából az arab tudományt mindennél fontosabbnak ítélte. S talán nem nagyképűség, ha kezdő arab-filológusoknak a szakmában való eligazodásra a következő utat ajánlja: „1., Először vegyük Sarton ’Introduction to the History of Science’-ét, és olvassuk át gondosan, ceruzával a kézben a fejezetek minket érdeklő részeit…”[86]

Az *Introduction* fontosságát valóban nehéz lenne eltúlozni. Nemcsak mint adatgyűjtemény, mint a tudománytörténet elvi megfogalmazása is jelentős. Felfogása szerint a tudománytörténetnek szerves egésznek kell lennie ahhoz, hogy az európai történelem legalapvetőbb, legfontosabb jelenségét, a természettudomány szétágazásaiban is egységes fejlődését megmagyarázhassa. Különleges helyet foglal el a történetírásban, mert tárgya, a természettudomány is különleges helyet foglal el a történelemben. A természettudomány – ezt számtalanszor hangsúlyozza – kumulatív és progresszív. A művészet nem lett Aiszkhülosz óta gazdagabb, de több ember élvezheti, s ez nem kis mértékben éppen a természettudomány fejlődésének az érdeme, a fejlődés egyik melléktermékе.[87] A tudománytörténész a természettudományban az ember haladásának az eszközét kell lássa; „a természettudományt nem szakmai-technikai, hanem emberi vonatkozásaiban értelmezi” – írja már 1920-ban, az *Isis* harmadik kötetének előszavában.[88]

Ezt a véleményét ismétli meg harminchárom év múlva, a hetedik, jeruzsálemi nemzetközi tudománytörténész-kongresszuson: „A tudománytörténet jelenti az egyetlen hidat a természettudományok és a humaniórák között.”[89]

Sarton történetfelfogása kiemeli a tudomány fejlődését addigi passzív szerepéből. Ezentúl nem elegendő egy kor tudományát „beilleszteni” az illető kor történelmi „hátterébe”. Azt kell megkeresni és kimutatni, milyen pontokon, s hogyan hatott a történelem alakulására a

83 Uo. p. 5.
84 Uo. p. 7.
85 Clagett, M.: George Sarton: Historian of Medieval Science. = Isis Vol. 48. (1957) pp. 320–322.
86 Sarton, G.: Arabic Scientific Literature. In: Ignaz Goldziher Memorial Volume. Part I. Bp., 1948. pp. 55–72.
87 Sarton, G.: The History of Science and the New Humanism. New York, 1956. pp. 10–12. (1930 és 35-ben tartott előadás.)
88 Uo. p. XI.
89 Actes du VII^{e} Congrès International d’Histoire des Sciences. Jérusalem, 1953. p. 104.

természettudományok kumulatív, progresszív fejlődése. A természettudomány kivételes helyzetét éppen ez a progresszivitás magyarázza. Ezáltal lesz a természettudományból a történelem zsinórmértéke. Egy-egy filozófiai rendszer, nép vagy kultúra azon mérhető le legmegbízhatóbban, hogyan viszonylik a természettudományokban megnyilvánuló progresszív, kumulatív, rendezett, pozitív ismeretekhez. E szerint a szempont szerint az emberiség fejlődésére igen fontos volt a görög és arab tudomány, és bizonyos kezdeti periódus után nagy gátat jelentett a skolasztika. India és Kína megrekedését a skolasztika ottani formáinak a rögzülésére lehet visszavezetni, Európát az menti meg, hogy a XVII. században legyőzi a skolasztika „betegségét". Ezeket Sarton még az *Introduction* első, 1927-ben megjelent kötetében írja.[90] Élete végén, alig érezhetően, mégis nagyon jelentősen módosulni fog a véleménye. Közben hihetetlen részletességgel megismeri és megismertetni igyekszik a középkort.

Az *Introduction* következő köteteiben ez az intenzív megismerési vágy messze túlviszi a természettudomány „progressive cumulative, positive knowledge" definíciójának az érvényességi körén. Túlságosan sok és sokféle adatot halmoz fel, s a mű menthetetlenül széthulló, adatgyűjtemény-jellegű lesz.[91]

Érezhette ezt ő maga is, mert a harmadik kötet befejezése után nem az *Introduction*-t folytatta, hanem elkezdte az egészet – elölről. Az új tudománytörténetének első kötetét: *A History of Science. Ancient Science Through the Golden Age of Greece* (Cambridge, Mass.. 1952) nem lehet túlságosan sikerültnek nevezni.

Egészen más a már csak halála után három évvel megjelent második kötet: *Hellenistic Science and Culture in the last Three Centuries B. C.* (Cambridge, Mass., 1959). Ez a könyv a tudománytörténet-írás egyik nagy klasszikusa. Az antikvitás kisebb és nagyobb szerzőinek az első renaissance-kori kiadásain keresztül ismerjük meg ebben a különös könyvben a hellénizmus tudományát. Nem egy vagy két korról szól ez a könyv. Arról a különös találkozásról, amelyik hely, idő és nyelvek elválasztó örvényein át, mint magasfeszültségű helyek között a szikra, jön létre tizennégy-tizenöt évszázad „progresszív és kumulatív pozitív ismereteinek" mérhetetlen tömegű, és mégis üres halmazán: a középkor természettudományán át.

---

90 Sarton, George: Introduction... Vol. I. pp. 15–29.

91 Pl. mikor ennek a közleménynek a kedvéért újból belelapoztam az Introduction harmadik kötetébe, Pietro Paolo Vergerio-ra, Zsigmond király udvari humanistájára vonatkozó adatokon kívül önkéntelenül azt is megtudtam, hogy „jóllehet a macskákat emberemlékezet óta ismerték… a régi Egyiptomban, az angol irodalomban első megjelenésük Chaucernek köszönhető." (Introduction... Vol. III. p. 1186). Tudni kell, hogy Sarton nagyon szerette a macskákat, de még ezt figyelembe véve is, az Introduction nem szűkkeblű a tudománytörténet határainak a megvonásában. Az Introduction valóban több mint széthulló. Egy meglehetősen mesterkélt, kronológiai, szakmák szerinti és biográfikus beosztás nyűgébe szorított adattömeg, amin az időnként közbeiktatott háttérfestő fejezetek nem sokat segítenek.

Nem, Sarton nem tagadta meg fiatalkorának tudománytörténet-fogalmát. Az 1956-ban megjelent, végtelenül érdekes, könnyed, helyenként már egyenesen elbűvölő, a nagy vonalakat merész képzelettel rajzoló renaissance-tudománytörténetében[92] rögtön az első oldalon a természettudomány progresszív és kumulatív jellegét és történelmi iránytű szerepét hangsúlyozza. De most már többet is jelent neki a természettudomány, mint pozitív ismeretek kumulatív szerzését. A természettudomány a racionalizmus lassú, nehéz, de végül is feltartóztathatatlan diadala.

Sarton legnagyobb hatását nem könyveivel, hanem szervező, kiadói és nevelő munkájával érte el. Az 1913-ban megindított *Isis* a német megszállás miatt csakhamar megszűnik, Sarton menekülni kényszerül, és a Carnegie Intézet jóvoltából a Harvard egyetemen talál új otthont. A Carnegie Intézet, ha nem is anyagi gondoktól mentes, mégis legalább teljesen a tudománytörténetnek szentelhető életet teremt számára. Ezt később, hírneve csúcsán is, mindig hálával említi: a Carnegie Intézet tette lehetővé először, hogy egy ember teljes munkaerejét a tudománytörténetre fordíthassa. Az *Isis* hasábjain időről időre olvashatók az ő és munkatársa, A. Pogo munkabeszámolói: „Jún. 15-től dec. 15-ig – hogy legalább egy példát kiragadjak – Dr. Pogo hosszú vakációt vett ki. Dr. Sartonnak meg kellett szakítania munkáját a felgyülemlett gondok és kifáradása miatt, nov. 24-től dec. 28-ig; utazott és Nyugat-Indiákon, elsősorban Jamaicán talált felüdülést. Június 20-án Brooklynból Norvégiába hajózott, hogy Skandináviában, Belgiumban és Angliában töltse a nyarat. Az út célja elsősorban pihenés, de Dr. Sarton felhasználja a skandináv múzeumok tanulmányozására, különös tekintettel a középkori és keleti anyagukra.”[93]

Csak ilyen körülmények között, sokszor szó szerint a Harvard könyvtárában élve, sokszor utazva, végezhette Sarton a magára vállalt óriási munkát. Mert hatalmas *Introduction*-ján, kiadói munkáján és egyetemi előadásain – ahol többnyire a modern kor természettudományának a történetéből adott elő – kívül kongresszusokon, a nagy amerikai és európai egyetemeken, ahol csak tehette, mindenütt agitált a tudománytörténeti oktatás és kutatás megszervezése mellett. Szinte szimbolikus, hogy a halál is előadásra indulás közben érte, 1956. március 22-én.[94] Az előadás címe: „The History of Science and the New Humanism” régi, kedvenc gondolatát idézi. De az utóbbi években ez új színekkel gazdagodott. „A természettudománynak békére van szüksége ahhoz, hogy fejlődhessék” – hangoztatja újra és újra.[95] A háborút mint a tudományellenes erők, az irracionalitás, a

[92] Six Wings. Men of Science in the Renaissance. Bloomington, 1957.
[93] Isis Vol. 22. (1935) p. 435.
[94] George Sarton 1884–1956. = Isis Vol. 47. (1956) pp. 90–100.
[95] Science and Peace. The Development of International Law. = Isis Vol. 42. (1951) pp. 3–9.

babonák, az értelmetlenség tömeges elterjedésének az eredményét fogja fel, nem mint elkerülhetetlen sorscsapást. A második világháború alatt és után racionalizmusa új, harcos színt kap, a türelmetlenségig küzd a mágia, az áltudomány, az irracionalizmus minden jelenben vagy múltban jelentkező formája ellen. Ő nem ismer olyan mágikus természettörvényt, mint Thorndike: a tudomány a múltban is a racionalizmus harcát jelenti az irracionalizmus erőivel szemben; „az igazság keresése a tévedések és babonák elleni küzdelemmel jár”.[96]

A babiloni tudomány nagy patrónusa, O. Neugebauer meg is sokallta az asztrológia elleni agitálását.[97] Mások is támadják, egyre többen, a „gondolatszabadság” nevében. De Sarton nem retten meg, sőt egyre határozottabban foglal állást. „Archibald MacLeish amerikai költő azt állítja – mondotta Sarton a jeruzsálemi tudománytörténész-kongresszuson –, hogy a szabadság a választás joga. Ez a definíció nem kielégítő, sok esetben tévedésre vezethet. Sohasem áll szabadságunkban azt állítani, hogy a fehér fekete, sem tagadni egy bebizonyosodott igazságot; ugyanígy nem áll szabadságunkban megtagadni az egyszer már meglátott szépséget és igazságot, nem áll szabadságunkban, hogy komoly dolgokban szeszélyesek legyünk… Nincs jogunkban soha vadakként viselkedni ahelyett, hogy kiművelt emberfőkként viselkednénk… Nous ne sommes jamais libres de nous conduire comme des sauvages au lieu d’être des hommes civilisés…”[98]

Bizonyos, hogy ez a viselkedés nem olyan „gazdaságos”, „sikeres” és „eredményes”, mint az, amit a menagerismus gombamód szaporodó tankönyvei hirdetnek. Sarton maga két örökséget költött az *Isis*-re, és volt idő, hogy felesége keresetét is reá fordította. Mert úgy tartotta, hogy az emberiség sorsa most már egyre inkább azon múlik, mit tanul meg elébb: természettudományos kultúrájához méltóan, kiművelt emberfőként viselkedni, vagy jelenlegi, többé-kevésbé vad, állapotában nagy hatékonysággal kezelni a természet erőit.[99]

Az *Isis*t Sarton nemzetközi folyóiratnak szánta, de voltaképpen csak a két világháború között volt az. Fénykorát a koraharmincas évek jelentik. Ekkor jelenik meg Struik alapvető közleménye a differenciálgeometria fejlődéséről, ekkor hívja fel a figyelmet néhány közlemény egy meglepően korai arab hatásra,[100] ekkor képezi az *Isis* egyik fő feladatát számos nehezen hozzáférhető vagy kiadatlan szöveg kiadása. Érdekes, új irányok jelentkeznek, pl. a

---

96 A History of Science. Hellenistic Science and Culture in the last Three Centuries B. C. Cambridge, 1959. p. X.

97 Neugebauer, O.: The Study of Wretched Subjects. = Isis Vol. 42. (1951) p. 111.

98 Sarton, G.: Les Sciences et les Humanités: l’Histoire des Sciences. In: Actes du VIP Congrès International d’Histoire des Sciences. Jérusalem, 1953. pp. 97–114.

99 Introduction... Vol. III. p. V.

100 Welborn, Mary Catherine: Lotharingia as a center of Arabic and scientific influence in the eleventh century. = Isis Vol. 16. (1931) pp. 188–199.

tudománystatisztikai,[101] és egy újfajta összehasonlító módszer, amelyik nagy tudósok közös gondolatait nem prioritás-harcra, hanem a kor kollektív tudományos gondolatvilágának a vizsgálatára kívánja felhasználni.[102] Magának George Sartonnak egy közleményével indul egy fontos új módszer, amelyiknek a lényege művészettörténeti adatok tudománytörténeti szempontból való interpretációjából áll.[103] Az irány a Warburg Intézet tudománytörténeti hatásaként fogható fel. Aby Warburg és a Warburg Intézet munkája a 20. század történetírásában nagyon előkelő helyet foglal el, hatása a művészettörténet keretein túl, a történetírás csaknem minden ágában érezhető. A második világháború utáni kor egyik nagy warburgistája, Ervin Panofsky, Galilei képzőművészeti kapcsolatainak az analízise során arra hívta fel a figyelmet, milyen nagy hatással lehet egy kor művészi felfogása tudományos elméletek alakulására.[104]

Az *Isis* a harmincas évek második felétől kezdve valahogy hanyatlik. Nagyobb igényű tudományos tanulmányok közlésére Sarton egy külön évkönyv-szerű folyóiratot alapít, az *Osiris*t, aminek első kötete 1936-ban jelenik meg. Az *Isis* igen nívós népszerűsítő jelleget ölt, csak kritikai bibliográfiái és könyvismertetései maradnak a régi, szigorú szinten. Vannak évfolyamok, amiket majdnem teljesen ezek töltenek meg, s Sarton is egyre nagyobb súlyt helyez rájuk. A második világháború utáni korban az *Isis* azután egyre inkább elveszti internacionális és szigorú jellegét, s egyre amerikaibbá és közérthetőbbé válik.[105]

V.

Tudománytörténet-írás a második világháború után

A második világháború utáni időszak történetírásában kivételes hely illeti meg Franciaországot. Ennek a történettudományi virágzásnak a gyökerei messze a kilencszázas évek elejéig nyúlnak. Ekkor indítja meg Henri Berr egy új, átfogó, az elért eredményeket összegző és a hiányosságokat feltáró, ugyanakkor a rendszerek merev dogmatikáját elkerülő történetírói módszer kialakítására és fejlesztésére a *Revue de Synthèse Historique*-jét.

101 Sorokin, P. A. and R. K. Merton: The Course of Arabian Intellectual Development, 700–1300 A. D. A Study in Method. = Isis Vol. 22. (1935) pp. 516–524.

102 Pelseneer, J.: Gilbert, Bacon, Galilée, Kepler, Harvey et Descartes; leurs relations. = Isis Vol. 17. (1932) pp. 171–208.

103 Sarton, G.: Aristotle and Phyllis. = Isis Vol. 14. (1930) pp. 8–19.

104 Panofsky, E.: Aesthetic Attitude and Scientific Thought. = Isis Vol. 47. (1956) pp. 3–15.

105 Sarton, G.: The Critical Bibliographies of Isis. = Isis Vol. 41. (1950) pp. 291–296.; Note on the Reviewing of Learned Books. = Isis Vol. 41 (1950) pp. 149–158.

Ugyancsak ekkor tervezi e mellé a folyóirat mellé egy nagy, monográfiákból álló, az egyetemes történelmet felölelő könyvsorozat kiadását. Ez a sorozat, az „Evolution de l'Humanité" kezdettől nagy teret szentelt a tudománytörténetnek. Tanneryt, sajnos, idő előtti halála meggátolta az őt oly sokra tartó Berr-rel való együttműködésben. Az ő munkamódszerét követő Abel Rey lépett a *Synthèse*-nél helyére.

Henri Berr ad helyet a *Synthèse-ben* a tudománytörténet-írás Sarton melletti legaktívabb szervezőjének, Aldo Mielinek (1879–1950), mikor 1928-ban a fasizmus elől Franciaországba menekül. Mieli vegyésznek készült, Willhelm Ostwald és Cannizzaro mellett tanult. De már ekkor a tudománytörténet érdekli, és egy általános tudománytörténet akar írni, a források alapján, a kezdetektől a XIX. század közepéig, akárcsak Sarton. Ő is alapít 1919-ben egy tudománytörténeti folyóiratot: *Archeion. Archivo di Storia della Scienza* címen, ami csakhamar nemzetközivé válik. Az *Archeion* és Mieli igazi nagy „formája" azonban csak Párizsban, a *Synthèse* keretében bontakozik ki.

Az 1928-as, más szempontból is igen fontos oslói nemzetközi történészkongresszuson – elsősorban Berr és Mieli munkája nyomán – egy „Comité International d'Histoire des Sciences" alakul, ami egy évvel később az első nemzetközi tudománytörténész-kongresszuson, Párizsban, „Académie International d'Histoire des Sciences"-é alakul át, s ennek első állandó titkára Mieli lesz, Pierre Brunet (1894–1951) és Hélène Metzger (1889–1994) az állandó segítői, s persze segíti a *Synthèse*, amelynek az Académie-vel való kapcsolatai egyre szorosabbak.

A második világháború megszakítja ezt a szépen induló fejlődést. Mieli 1938-ban Argentínába emigrál, ahol a tudománytörténet professzora lesz, de az 1943-as események során elveszti katedráját, nagy nyomorba jut, s most, ilyen körülmények között valósítja meg régi nagy álmát, egy egyetemes tudománytörténet megírását. Az így születő *„Panorama General de Historia de la Ciencia"* öt kötete (Buenos Aires, 1945, 1946, 1951, 1952) a szakirodalom fölényes ismeretében megírt óriásesszé. A görögöktől az arabokon és latinokon át a renaissance-szal bezáródó kör tudománya nagy, természetes egységként jelentkezik ebben az öt kötetben, mint függvénye, indikátora és néha már mint módosítója az egyetemes történelem menetének.

A háborúban megszűnt Académie-t és az *Archeion-t* az UNESCO éleszti újjá 1947-ben: Union Internationale d'Histoire des Sciences, illetőleg *Archives Internationales d'Histoire des Sciences* néven. A lap *Isis* tradíciókat és módszereket követ, igen magas népszerűsítő és valóban internacionális szinten.

Az új utat a tudománytörténet-írásban nem ez a lap, hanem a *Synthèse* másik, közvetlenebb hajtása jelzi, az 1947-ben indult *Revue d'Histoire des Sciences et des leurs Applications*, Suzanne Delorme és René Taton szerkesztésében. A lap a *Synthèse* tudománytörténeti szekciójának az orgánuma.

A *Synthèse* maga sok változáson és fejlődésen ment át 1900-tól, és szerencséjére máig sem rögzítették, mit értenek a névadó fogalmon. Mindenesetre a legkülönbözőbb szakmájú és világnézetű okos emberek – az *Annales* nagy elindítói: Marc Bloch és Lucien Febvre; a marxista Gérard Vassails és Georges Lefebre; a (platóni értelemben) idealista Emile Brehier; a megtévesztően világos Alexandre Koyré, a finom Susanne Delorme, a szellemes Jean Itard, a nehézkes filozófiatörténész Robert Lenoble, René Taton, a nagy matematikatörténész – fértek el az Henri Berr nagy szíve által csodálatosan tágan értelmezett *Synthèse* szellemi és anyagi fedele alatt.

A tizenötödik *Synthèse*-napok (1929-től a háború megszakításával évenként tartott szimpóziumok, amik egy-egy központi témát vitatnak meg) a synthèse fogalmáról vitatkozott. Emile Brehier exposéja utáni vitában Ferrier a synthèse-t a système-mel állítja szembe. A système lezár, ellenben a „synthèse állandóan változó gondolat, egyre tökéletesebb módszerekkel, amik rendszert képeznek, de azzal a tudattal, hogy le is rombolják azt.[106]

Bréhier: a synthèse végül is az analízis győzelme lenne?

Ferrier: Igen, alapjában véve az.

Berr: Ez bizonyos, ez kétségkívül így van…

Le Lionnais: …az igazi synthèse, az a Mendeleieff periódusos rendszere volt.

Bréhier: Valóban!"

Most, hogy nagy alapítója már nem él, és a *Synthèse* is valószínűleg túljutott csúcsán, talán nem szentségtörés azt állítani, hogy az egész voltaképpen ürügy volt, egyfajta nagyon nemes csalás, egy (szándékosan?) sohasem definiált és sohasem definiálható alap, ami – szellemileg és anyagilag egyaránt – lehetővé tette nagyon különböző véleményű, okos és jó szándékú emberek együttműködését hosszú éveken át. A *Synthèse* egy barátságos, kedves emberi sziget volt az intellektuelek egyre sivárulló és egyre széthullóbb XIX. századi világban.

Mi újat hozott a *Synthèse* a tudománytörténet-írásnak mint szakmának? Elsősorban a nagy szimpóziumokat az Encyclopédie-ről, Gassendiről, Fontenelle-ről. A *Synthèse* jellegzetes munkamódszere: egy centrális téma körül rendezett előadások, viták. A *Synthèse* Encyclopédie szimpóziuma pl. hosszú, a *Revue* több számát teljesen kitöltő mű, számos

---

[106] Quinzième Semaine de Synthèse. La Synthèse: Idée-force dans l'évolution de la pensée. Paris, 1951. pp. 17–19.

szerző munkája, és mégis teljesen egységes összhatású, s hitelesen – vagy legalábbis elhihetően – tudja idézni az Encyclopédie és kora hangulatát.

A *Revue*, ellentétben az *Isis*-szel és az *Archives*-val, magasan a népszerűsítő nívó felett mozog – és mégsem teljesen érthetetlen nem-szakembereknek sem. Közleményeire nem – az úgysem elérhető – filológiai „tökéletesség" a jellemző, hanem az ötletek, a kombinációk, a nyitottság az új próbálkozások felé. Mintha csak a *Revue*-nek írta volta Koyré Borelli égi mechanikáját tárgyaló cikkében, tanulságként: „…túl sok aggodalom néha sikertelenségre vezet, és az elméletről való bölcs lemondás zsákutcába."[107]

A *Revue*-ben, akárcsak a *Synthèse*-ben, a legkülönbözőbb ideológiák férnek meg egymás mellett. Jean Rostand támadja a szovjet biológiát és mellette Gérard Vassails folytatja érdekes marxista történetinterpretációit.[108] Mentes a *Revue* továbbá a nemzeti elfogultságtól. Pl. René Dugas kiváló mechanikatörténete, amit minden külföldi bíráló dicsért, itt nem menekül meg a súlyos bírálattól: hogy lehet mechanikatörténetet írni így anélkül, hogy még csak nem is érinti a technikatörténetet? A szokásos francia sorbonne-ista korlátoltság uralkodik a könyvön – írja a bíráló, Pierre Costabel.[109]

S ha ezek után, mint Sartonnál is tettük, a *Revue* által képviselt tudománytörténet-fogalmat keressük? De hiszen a *Revue* a *Synthèse* hű leánya, és a *Synthèse* – láttuk – ürügy, ami túlmutat önmagán… Merre? Úgy hiszem, erre is felelhetünk: az *Annales* felé. A francia történetírás új és folyton megújuló útja felé.

Anglia is kivette a részét a tudománytörténet fejlesztésében. Nagyon jó másodrendű nívón, kitűnő pedagógiai érzékkel. A nagy kiugrásokat – mind a két irányban – az angolok tudománytörténeti folyóirata, az 1936 óta megjelenő *Annals of Science* kerüli el leginkább. Lassan, sokszor éves, másféléves késésekkel kiadott évfolyamait nyugodtan lapozgathatja az ember: semmi meghökkentőt, felháborítót, lelkesítőt vagy izgatót nem talál. Ha angol tudománytörténészek shocking-gyanús dolgot írtak, azt elküldték Sartonnak az *Isis*-be.

És a németek? Akiknél a századfordulón az egyetemes tudománytörténet csírái már kialakultak? A harmincas években létrehoztak egy kitűnő, sok szempontból többé sehol el nem ért folyóiratot: Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik, Otto Neugebauer és O. Töplitz irányítása alatt. A legnagyobb kritikai szigorúságot egyesítette a legnagyobb elméleti bátorsággal. Ha a hitleri Németország ki nem irtja, ma talán a legkitűnőbb tudománytörténeti szaklap lenne.

---

107 Koyré, A.: La mécanique céleste de J. A. Borelli. = Revue d'Histoire de Sciences Vol. 5. (1952) pp. 101–138.
108 Vassails, G.: Le poids du feu. = Revue d'Histoire de Sciences Vol. 4. (1950) pp. 222– 241.
109 Revue d'Histoire de Sciences Vol. 6. (1953) pp. 72–74.

A másik világháború után, 1955-ben induló *Archiv für Begriffsgeschichte* nem a *Quellen und Studien* tradícióit követi. Az amerikanizálódó német életnek megfelelően ez is amerikai mintát követ, a Columbia egyetem égisze alatt álló *Journal of the History of Ideas*-t.

Ez a jellegzetesen amerikai történetírás Arthur O. Lovejoy „The Great Chain of Being”-jében (Cambridge, Mass., 1936) jelentkezik először. Nagyjából ugyanazzal az anyaggal dolgozik, mint a gondolkozástörténet egyéb ágai, csak más, az analitikus vegyészhez hasonló módon: szétszedi egy gondolkozó vagy egy iskola rendszerét „egység-ideákra”, s akkor rögtön kiderül, hogy a rendszer „újságja” régi-régi elemekből, máshogy összerakott „ócskaság” csupán.

Ha a *Synthèse* pontosabban definiálható lenne, az ideatörténetet anti-Synthèse-nek is lehetne nevezni. Az idea-analízis savával digerált gondolatokból hosszú fonalakat fonnak Platóntól Copernicusig, Galileitől Goethéig, a kőbaltától az esztergapadig; a fonalakat kötegekké egyesítik, a kötegek diffundálnak térben és időben, megint kiszakadnak belőlük egyes szálak, ezek más kötegekbe integrálódnak stb. Az ideák valahogy önálló életbe kezdenek; emberektől, társadalomtól, környezettől függetlenül. Még nem Lovejoynál, aki igen nagy történész, és módszere ellenére számos finom, éles szemre valló megfigyelésre jut; de pl. Galileit már csak ilyen „idea-lysálással” lehet – mint John Herman Randall jr. teszi a *Journal of the History of Ideas* első, 1940-es évfolyamában – a padovai arisztotelianizmus követőjeként feltüntetni.

Mégis gazdagította a tudománytörténet-írást az ideatörténeti irányzat: nyomatékosan felhívta a figyelmet az emberi gondolkozás lustaságára, tehetetlenségére. A tudomány a *Journal* szerint nem „kumulatív, progresszív, pozitív ismeretek” halmaza, hanem új mezbe kényszerített ősi hiedelmek szívós, csaknem kipusztíthatatlan élete és túlélése is. Progresszív, kumulatív, pozitív ismeretek – mondotta Sarton a természettudományról; lustán változó, széthulló és szinte megölhetetlen elemekből összeszövődő gondolatrendszerek, amiknek az elemei között nagyon-nagyon ritkán jelentkezik új, mondja az ideatörténet. Dinamikus fejlődés sartoni értelemben; struktúra – kedvenc szavuk – az ideatörténészek szerint.

S a konstansa ennek a „történelemtudományi határozatlansági relációnak”? Az ember, aki állandóan építi és rombolja önmagát, környezetét, világát… Az építés és rombolás leghatalmasabb eszközévé az elmúlt 150–300 év alatt a természettudomány vált. Ezt a gyors dinamizálódást több mint két és félezer éves latencia-periódus előzte meg. A tudománytörténet feladata ennek a hosszú latencia-periódusnak és az azt követő gyors dinamizálásnak a leírása. A XVI. és XVII. század történetírásának túlnyomó része egyháztörténet jellegű volt. A XX. században szükségképpen kerül előtérbe a tudománytörténet, ahogy a XIX. század a politikai történetírás klasszikus periódusa volt. Ilyen értelemben is új ága a tudománytörténet a történetírásnak: segítség egy egyre inkább természettudományossá-techikaivá váló világnak az önmegértésben.

Irodalom

A nékem hozzáférhető tudománytörténeti szakirodalomban a tudománytörténet-írás történetét ismertető művet nem találtam. Az „Encyclopédie de la Pléiade" sorozatban megjelent „Histoire de la Science" (Publié sous la direction de Maurice Daumas. Paris, 1957. Gallimard) egy hosszú előszóban rövid áttekintést ad a tudománytörténet-írás fejlődéséről és szervezeti kérdéseiről. Az ismertetésben a nagyobb részt a Tannery előtti kor foglalja el; sokra tartja a századfordulón jelentkező német kezdeményezéseket. Az újabb tudománytörténészek közül Duhemet, Tanneryt és főleg Sartont ismerteti.

Az egyes tudománytörténészekre vonatkozó ismeretek tekintetében hasznosan egészíti ki ezt az áttekintést – s a jelen összegezést is – Pierre Sergescu, „Coups d'œil sur les origines de la Science exacte moderne" (Paris, 1951). Ez a kis könyv második részében sok tudománytörténészről közöl biografikus adatokat.

Ugyancsak Sergescu a hetedik nemzetközi tudománytörténész kongresszus Aktáiban az „Académie Internationale d'Histoire des Sciences" 25 évének a történetét foglalja össze. Ezt és Sergescu Mieli-életrajzát (Archives Internationales d'Histoire des Sciences, 1950. pp. 519–535.) használtam fő forrásként, kiegészítve Mielinek a Brunettel közösen írt „Histoire des Sciences. Antiquité" (Paris, 1935) elején közölt önéletrajzi jellegű adataival a Mieliről és az Académie-ről szóló részhez.

Sarton életének a tanulmányozásához a legjobb bevezető az *Isis* Sarton-emlékszáma (Vol. 48. 1957. pp. 283–389). Innen vettem a Sartonra vonatkozó bibliografikus adatokat. Valószínűleg kedvezőtlenebb képet fest Sartonról a valóságosnál: inkább a nagy szervezőt és pedagógust emeli ki, a tudós rovására. A fénykép oldalon a Fig. 2. aláírása téves: „George Sarton, Abbé Marcel and Lucien Lefebre…" A képen Lefebre jellegzetes profilját láthatjuk. A Sarton-emlékszám feltétlen kiegészítendő a közvetlen halála után megjelent megemlékezéssel (*Isis.* Vol. 47. 1956. pp. 99–100.) és főleg Sarton számos, az *Isis* és az *Introduction* előszavaiban közölt önéletrajzi jellegű adataival.

A standard Tannery életrajz az *Osiris*ben névtelenül jelent meg (*Osiris.* Vol. 4. 1938. Part. 2. pp. 633–689.) Rövidebb, megbízható összefoglalást adott életéről és működéséről

Gino Loria („Paul Tannery, engineer and historian." *Scripta Mathematica*, 1947. No. 13. pp. 155–162.). Sajnos Tannery művei közül nálunk nagyon kevés van meg, a *Mémoires scientifiques…*-nek csak az első két kötete, a *Pour l'histoire de la science hellène* (Paris, 1887) és a *Recherches sur l'histoire de l'astronomie ancienne* (Paris, 1893).

Mire jó a tudománytörténet-írás?[110]

Azon túl persze, hogy majdnem minden tudományosan és technikailag fejlett országban megél belőle egy csomó egyetemi professzor, docens, intézetigazgató, kutató, s számos tekintélyes és többnyire igen csinos küllemű szakfolyóirat siet szellemi termékeik közlésére.

Azon túl, hisz nálunk a tudománytörténet-írás még nem érkezett el az elfogadott egyetemi és kutatóintézeti szakmák sorába; nemhogy folyóirata nincs, de a meglevő s egyáltalában nem kicsiny tudományos és népszerűsítő folyóiratparkban is igen csekély hely jut tudománytörténeti írásoknak. A tudománytörténet-írás – ezt talán senki sem fogja tagadni – nem éli ma nálunk „virágkorát”.

Akad persze *egyéb* is, amiről ugyanezt elmondhatjuk, például a labdarúgás, pedig a labdarúgásról igazán nem állítható, hogy ne lett volna nálunk egyetemi, sőt még magasabb szinten támogatott *szakma.* A honi tudomány-történetírásról viszont azt nem mondhatjuk, hogy sohasem rúgott labdába; felsorolhatnánk egy-két tizenegyesét, amit a legünnepeltebb s legjobban szubvencionált világcsatárok is megirigyelhetnének, Thomas S. Kuhn professzor például, vagy Joseph Ehrenfried Hofmann, a matematikatörténet-írás pápája.

Csakhogy faluszéli gyöpön a legpazarabb lábból sem válhat csodacsatár; a szakmához óhatatlanul hozzátartozik a pálya, a csapat, az edző, a tréning, a lelkes drukkerek, az országos és a világmérkőzések lehetősége és – luxusa. A labdarúgás esetében persze senki sem kétli, hogy mindez (s még sokkal több) „megéri”; egyetlen józanul gondolkozó ember sem fogja kérdezni, hogy mire jó a labdarúgás? Mit ér azonban kutatni, pláne ismerni a tudományok történetét, mikor átlag öt-tíz évenként úgyis elavul minden szakmai eredmény, s világszerte gyorsuló ütemű küzdelmet vívnak, hogy idejében értesülhessenek az új természettudományos és technikai eredményekről? S a szakma külföldi divatja amúgy is irdatlan tudománytörténeti irodalmat produkált, aminek egy csekély töredéke is évezredekre biztosítja a honi napisajtó, valamint a népszerűsítő *és* szakfolyóiratok évforduló- és nekrológkeresletét, az ifjúsági irodalom regényes-életrajz-igényét, a Gondolat és az Akadémiai Kiadó tudománytörténeti tervét. Nem tudománytörténeti kutatás kell, hanem jó fordítások és intelligens kompilációk, ehhez pedig bőven elég néhány szakember (természettudós és történész) alkalmi kiruccanása a tudományok történetébe.

[110] Forrás: Vekerdi László: Mire jó a tudománytörténetírás. = Természet Világa 101 (1970) No. 9. pp. 419–422.

S ez az álláspont, bármilyen merev és elavult is, legalább következetes és racionális. S a közöny eme légkörében, perifériára szorítottan, itt-ott még lélegezhetett a tudománytörténet-írás. Az igazi nagy veszély tulajdonképpen most kezdődik, a lassan meginduló szervezett „támogatással”

A részletezés helyett azonban vegyük elő újra a futballpéldát. Képzeljük el, hogy egy tsz a kiöregedett, meg a tisztességes termelőmunkára valami miatt nem alkalmas fiatal tagjaiból futballcsapatot szervez; részben önkéntes jelentkezés, részben enyhe irányítás (aspiránsképzés, ösztöndíj) alapján. A fiúk szorgalmasan nézik a tv-n a nagy meccseket, járnak szorgalmasan a mérkőzésekre, és egyikük a legtekintélyesebb, el is magyarázza nekik a rúgásokat Hozatnak bakancsokat is, nem éppen huszonkettőt, de legalább a csatároknak, a centerhalf meg a kapus a saját cipőjében is ugrálhat. Az egyen-trikót a tsz melléküzeme termeli, az jut mindenkinek. Szakavatott edzőre persze nem futja a költségvetésből, de a csapat tagjaiban töretlen kritikai szellem él, s lelkesen figyelik, ugyanakkor szüntelenül bírálják és elemzik a leghíresebb kapitányok ás edzőik működését. Természetesen kongresszust is rendez a Labdarúgó Társulat, amit a tsz-elnök – a társulat tiszteletbeli elnöke – nyit meg, s külföldi szakembereket is hívnak, akik lelkesen megússzák a tájjellegű borokat és méltányolják a honi lábakat (nem föltétlenül a labdarúgókét és a tsz-elnökét). Megy is minden, mint a karikacsapás, amíg a csapat be nem nevez (nehezen kiépített személyes jellegű összeköttetései alapján) az országos bajnokságra. Akkor azután azonnal fölmerül bennük a kétely; mire jó a labdarúgás?

*

Először is azt kell hangsúlyozni, hogy ma már nem beszélhetünk csak úgy „globálisan” tudománytörténet-írásról. A szakma rengeteg változatra és válfajra hasadt, s művelőik még csak nem is igen értik, mit csinálnak kollégáik. S ezt nemcsak úgy kell érteni, hogy a kémiatörténész például teljesen tehetetlenül áll a matematikatörténész képletei előtt, s megfordítva; hanem úgy is, hogy különféle „irányok” kristályosodtak ki, s képviselőik idegenül vagy éppen gyanakodva szemlélik egymás tevékenységét Ha a tudománytörténet-írás lehetőségeit keressük, a válfajok és irányok ismerete nélkülözhetetlen, mert úgyszólván mindegyikük másra-másra használható és különböző föladata lehet.

Néhány fontosabb irány, illetve mű kritikai ismertetése megtalálható egy amerikai tudománytörténész, Joseph Agassi hosszú tanulmányában.[111] A tanulmányban kivált a történeti

[111] Agassi, J.: Towards an historiography of science. ’S-Gravenhage, 1963. Mouton. 117 p. (History and Theory. Studies in the Philosophy of History. Betheft 2.)

példák, az utalások és a jegyzetek értékesek, ezekben is főképpen az idézett esetek és a címek. Ami Agassi értékeléseit és kritikai megjegyzéseit illeti, nem szabad elfelejteni, hogy milyen nagy mértékben használja ő emésztése megkönnyítésére a popperiánizmus sósavpepszinét.

Agassi „induktívista” és „konvencionalista” irányokra osztja a tudománytörténet-írás hatalmas anyagát, „induktivistának” nevezve lényegében mindenkit, aki a tudomány fejlődése szerint rendezte s értékelte az anyagát. és „konvencionalistának” azt, aki régmúlt korok fölfedezéseit és elméleteit önálló, a maiakkal egyenértékű s ezeket esetleg megelőző tudományos teljesítménynek tekintette. Ezáltal azonban a tudományos megismerés Popper-féle modelljét vetítette rá a tudománytörténetírásra. Popper szerint ugyanis az intellektuális tevékenység „adott problémák” megoldási kísérleteiből, megoldásaiból és a megoldások „kritikájából” áll, ez a kritika pedig újabb „problémákhoz” vezet. Mármost az „induktivistákat” főleg az a hibájuk jellemzi, hogy a megoldási kísérleteket eleve „helyesre” és „tévesre” osztva, kirekesztették koncepciójukból a választás, a „kritika” lehetőségét, s ezáltal mintegy „automatizálták” a tudomány fejlődését. A „konvencionalisták” pedig egyformán „tudományosnak” tekintve minden megoldást, megfosztották rendszerüket attól a lehetőségtől, hogy a „kritika” állandóan új és új „problémákat” teremtsen benne.

Ha a tudomány tényleg a Popper-féle modell szerint fejlődött, akkor Agassi beosztása kétségkívül indokolt. Egyelőre azonban semmi okunk sincs föltételezni a Popper-féle modell általános érvényességét.

A tudománytörténet-írás használhatóságát keresve nem sokat ér az annyira általános beosztás, mely egyazon „induktivista” kalap alá veszi pl. dr. Thomas Thomson remek kémiatörténetét,[112] William Whewell hihetetlenül lapos művét az induktív tudományok történetéről,[113] George Sahon alapos bio-bibliográfiai köteteit[114] és J. D. Bernal szenvedélyes írását a tudomány- és a társadalomtörténeti összefüggéséről. Hasonlóképpen nincs sok értelme „antikonvencionalistaként” állítani szembe Alexandre Koyrét a „konvencionalizmus” prototípusaként bemutatott (s szidott) Pierre Duhem-mel és Hélène Metzgerrel, hisz bármennyire is különböztek egyébként, abban mind megegyeztek. hogy önálló, önmagában és önmagáért vizsgálandó teljesítményeknek tekintették a múlt nagy fölfedezéseit és elméleteit.

Más beosztást kell tehát keresni, s a legegyszerűbbnek, mint annyiszor, most Is a történeti út látszik.

---

112 Thomson, Th.: History of Chemistry. Vol. 1–2. London, 1830–1831. Colburn & Bentley. 349, 325 p.

113 Whewell, W.: History of Scientific Ideas. The third ed. Vol. 1–2. London, 1858. Parker and Son. 386, 324 p.

114 Sarton, G.: Introduction to the History of Science. Baltimore, 1927–1947. (Három hatalmas kötet, a harmadik két vaskos részkötetben.)

A 18. és 19. századi tudománytörténet-írásban a szakmatörténet uralkodott. A nagy, reprezentáns műnek Jean Étienne Montucla (1725–1799) matematikatörténete[115] tekinthető, ezt követték később a többi szakmák történészei is. Montucla a Nagy Enciklopédia szellemében, racionálisan, az eredmények szakszerű egymásba *fűzésével* ismertette a matematikát, kicsit tanárosan bontva ki a tárgy egyre bővülő szépségeit s lehetőségeit. A. C. Crombie, a kiváló oxfordi tudománytörténész-professzor Voltaire, Hume, Robertson, Gibbon történetírásához hasonlította Montucla munkáját,[116] és a kor nagy élményét: az értelem diadalát meg korlátlannak vélt lehetőségeit látta tükröződni benne. A tudománytörténet-írás – hangoztatja Crombie – a Fény századának szülötte, a Fényé, melyből Európa legeldugottabb helyeire is jutott legalább egy csepp „fölvilágosodás”. Ebből a fényből a tudománytörténet-írás még akkor is sokat megőrzött, amikor a szellemi élet egyéb területein már más divatok járták. Az egész szakmatörténet-írás máig meg nem ismételt csúcsteljesítménye, Jean Baptiste Joseph Delambre monumentális csillagászattörténete[117] például már az 1810-es évek legvégén jelent meg, a kezdődő „historizmus” korában.

A historizmus erősen politikai-történeti tendenciája és egyoldalúan levéltári metodológiája egyaránt kedvezőtlenül hatott a tudománytörténet-írásra. A szakmatörténetekről lekopott a 18. századi racionalista történetírás fénye. s elébb öntudatlanul, majd A fajok eredete (1859) után mind tudatosabban az empirikus tudományfejlődés eszméje váltotta fül. A mélypontot talán Whewell „induktív tudományok” történetéről írt könyve képviseli, a tudományfejlődés elvére (vagy dogmájára?) alapuló új szakmatörténeti csúcsot pedig Moritz Cantor (1829–1920) három meg egy hatalmas kötetből álló matematikatörténete.[118]

Mint történészteljesítmény Cantor műve bizonyosan nem hasonlítható Delambre remekéhez. a kortárs szakmatörténetek között is akad jobb nála, hatását s jelentőségét tekintve azonban egyik sem fogható Cantor könyvéhez. Ez a könyv ugyanis kiprovokálta a tudománytörténészek kritikáját az *egész* szakmatörténet-írás – a felvilágosult. az induktív és az evolucionista periódus – ellen. Legkorábban és legerősebben természetesen a matematikatörténet-írásban jelentkezett a kritika; a matematikától távoli területeken, például a kémiatörténet-írásban még ma is „szalonképes” az evolucionista szakmatörténet.[119] A modern

[115] Montucla, J. É.: Histoire des Mathématiques. Vol. 1–2. Paris, 1758. Jombert. – Második kiadása: J. J. Lalande kiadásában: Vol. 1–4. Paris, 1799–1802.

[116] Crombie, A. C.: Historians and the scientific revolution. = Endeavour 19 (1960) No. 1. pp. 9–13.

[117] Delambre, J. B. J.: Histoire de l'astronomie ancienne. Paris, 1817. Corcier. Histoire de l'astronomie du moyen age. Paris, 1819.

[118] Cantor, M.: Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik. Vol. 1–4. Leipzig. Vol. 1.: 11880, 21894, 31907; Vol. 2.: 11892, 21899–1900; Vol. 3.: 11898, 21900–1901; Vol. 4.: 1908.

[119] Multhauf, R. P.: The origins of Chemistry. London, 1966.; Ihde, A. J.: The development of modern chemistry. New York, 1964.

matematikatörténet-írás azonban – mintha csak a tudományos megismerés Popper-féle modelljét akarta volna igazolni – teljességgel a „nagy Cantor” három első kötetében található hibás tények, s főleg a tévesnek ítélt nézetek kritikájából s korrigálásából nőtt ki; mindenesetre néhány nagy magányostól, mint pl. Th. L. Heath[120] és Felix Klein[121] eltekintve. A kritikusok első generációját Gustav Eneström kitűnő folyóirata tömörítette „iskolává”;[122] innen Heinrich Wieleitneren,[123] Otto Toeplitzen[124] és Oscar Beckeren[125] keresztül közvetlenül eljutunk a mai matematikatörténet-írás fővonalát képviselő problématörténeti irányig, ahol három nagy frakció figyeli egymást: a babilónisták,[126] a görög matematika kutatói,[127] s mindenekelőtt a J. E. Hofmann körül sorakozó, kora újkori matematikára specializálódott problématörténeti iskola.[128]

A Hofmann-iskola természetesen már nem a „nagy Cantorral” vitatkozik, de máig megőrizte az első Cantor-kritikák munkamódszerét: keres valahol, elődben vagy kortársban néhány hibát vagy hiányt, ezt azután a források s lehetőleg kéziratos kiegészítések alapján korrigálja, s az így nyert korrekcióból meg töménytelen precíz utalásból és jegyzetből gondosan megszerkeszti a korrigált részlet problématörténeti modelljét, modern matematikai nyelvre lefordítva. A közben fölmerült új problémákat pedig kiosztják arra érdemes fiataloknak. Hasonlóképpen dolgozik a másik két „frakció” is, s mivel a módszer a hibákon s korrigálásukon keresztül a kutatás korkereteit is örökíti, s mert a „nagy Cantor” súlypontja a görögség előtti, a görög és az újkor elei matematika volt, érthető, hogy ennek a három korszaknak a matematikáját dolgozták föl legrészletesebben. Így azután A. P. Juskevics középkori matematikát föltáró fundamentális kutatásai[129] nélkül nem sokat tudnánk ennek a számolás és az algebra fejlődése szempontjából oly fontos kornak a matematikai problématörténetéről.

---

[120] Heath, Th.: A history of Greek mathematics. Oxford, 1921.

[121] Klein, F.: Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert. Berlin, 1926–27.

[122] Bibliotheca Mathematica. (1884–1915)

[123] Wieleitner, H.: Gesichte der Mathematik. Von Cartesius bis zur Wende des 18. Jahrhunderts. Leipzig, 1911–1921.

[124] Toeplitz, O.: Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung. Berlin, 1949.

[125] Becker, O.: Das mathematísche Denken der Antike. Göttingen, 1957.

[126] Neugebauer, O.: The exact sciences in Antiquity. 2nd ed. Providence, 1957. (Magyar fordításban: Egzakt tudományok az ókorban. Ford.: Guman István. Jegyz.: Gazda István. Bp., 1984. Gondolat. 260 p., [16] t. *(– a szerk. megj.*)

[127] Van der Waerden, B. L.: Science awakening. Groningen, 1954. (Magyar fordításban: Egy tudomány ébredése. Egyiptomi, babiloni és görög matematika. Ford.: Pollák György. Bp., 1977. Gondolat. 479 p. *(– a szerk. megj.*)

[128] Scriba, Ch. J.: Über Aufgaben und Probleme mathematikhistorischer Forsehung. In: Beiträge zur Methodik der Wissenschaftsgeschichte. Wiesbaden, 1967. pp. 54–80.

[129] Juskevics, A. P.: Isztorija matematiki v szrednie veka. Moszkva, 1961. (Magyar fordításban: A középkori matematika története. Ford.: Nagy Imre, Wirth Lajos. Bp., 1982. Gondolat. 474 p. *(– a szerk. megj.*)

A problématörténet-írás nem korlátozódik a matematikára, de sehol egyebütt nem virágzik annyira. A szakmatörténet-írás kritikája egyebütt másfelé vezetett. A legfontosabb utat Pierre Duhem (1861–1916) törte a középkori párizsi egyetem természetfilozófiai kéziratainak a kiadásával s kommentálásával.[130] Duhem kéziratkiadásai és kommentárjai nyomán s az újraéledt mediaevalisztikai érdeklődéssel párhuzamosan a két világháború közötti időben hirtelen fölnőtt a középkor tudomány-történetírása,[131] s ezzel együtt egy újfajta tudománytörténet-írás eszméje. Ebben az újfajta tudománytörténet-írásban nem s szakma fejlődését kellett elbeszélni vagy rekonstruálni, hanem gondolatok, fölfedezések és elméletek önálló, „saját” helyét kellett megkeresni a kölcsönhatások gazdag rendszerében. A „sajáthely” vonatkozhatott egy korszakra (mely akár néhány évtizedre vagy évre is korlátozódhatott) vagy valamilyen tágabb „eszmerendszerre” (vallási, világnézeti, társadalmi, gazdasági stb. összefüggések); ez a fajta történetírás rengeteg ágra hasadt a keretek szerint, melyek között a vizsgált rendszert el kellett helyezni. Így ellentétben a „problématörténet” konvergáló és egységesítő tendenciáival, ez a fajta történetírás rengeteg, többé-kevésbé önálló és független ágra hasadt.

De egyébként is, szinte minden tekintetben valóságos ellentéte ez a „sajáthely-kereső” és kontextust-föltáró tudománytörténet-írás a problématörténelemnek. A problématörténelem elszigetelő és gyakran száraz, de majdnem mindig precíz elemzései helyett itt az összefüggések és az általánosítások uralkodnak, noha az általánosítások nemritkán fölületesek, s az összefüggések inkább a jelen vágyait tükrözik, mint a múlt kontextusát.

Ez a fajta tudománytörténet-írás továbbá nem is csatlakozik annyira simán és konzekvensen a duhemi módszerekhez és gondolatvilághoz, mint a problématörténet az eneströmi hagyományokhoz; s nagyobbrészt nem is Duhem folytatásaként vagy kritikájaként nőtt naggyá. Inkább csak a helykijelölő forráskritikai tudománytörténet-írás eszméjét örökölte Duhemtől, megőrizte a módszer és a kidolgozás szabad változatosságát. Éppen ezért ezt az Irányt nem is lehet a problématörténelemhez hasonlóan néhány művel jellemezni; de tán legnagyobb képviselőit és egyben legfontosabb válfajait megjelölhetjük Anneliese Maier, Hélène Metzger, Eduard Jan Dijksterhuis. A. R. Hall, Robert Lenoble és Alexandre Koyré nevével.

Sok tekintetben rokon ezzel a helykijelölő, kontextust föltáró forráskritikai iránnyal az a fajta tudománytörténet-írás, amely Paul Tannery (1843–1904) munkásságával kezdődött. Paul Tannery is a szakmatörténet-írás forráskritikai elemzéséből indult el, s ő sem keresett

[130] Duhem, P.: Le système du monde. Paris, 1913–1954.; Les origines de la statique. Paris, 1905.

[131] Hartner, W.: Remarques sur l'historiographie et l'histoire de la science du moyen âge. In: Actes du IX Congrès International d'Histoire des Sciences, Barcelona–Madrid 1959. Paris, 1960. pp. 69–87.

„hibákat” és nem gyártott a hibák „korrigálásával” új „problémákat”. De nem is a fölfedezések. gondolatok vagy elméletek „sajáthelyét” kereste. Őt a tudomány „humán” lényege érdekelte, ezt azonban véletlenül sem szabad bio-bibliográfiai vagy éppen holmi karakterológiai érdeklődésként félreérteni. Inkább magatartást és szemléletet kell érteni rajta, azt a fajta „humanitást”, amely például Jacob Burckhardt történetírását a kortárs és elõd historizmus könyvrengetege fölött a 18. század nagy angol és francia történészeihez közelítette, Tannery is, akárcsak a bázeli mester, föladatokkal bajlódott, amiket sors és szerencse vetett elébe. Ha kellett, matematikatörténetbe mélyedt el, ha kellett fizikatörténetbe, de nem félt a biológiatörténeti, zenetörténeti, irodalomtörténeti vagy filozófiatörténeti analízisektől sem. Levéltárakban kutatott és kódexekkel bíbelődött, forrásként használta a szöveg szakkifejezéseit és ábráit, s értett hozzá, mint szólaltassa meg a legreménytelenebbnek látszó vonatkozásokat is. Nem korlátozták korok és kultúrák, a görög matematika kutatóinak ugyanúgy nélkülözhetetlenek a munkái, mint a „természettudományos forradalom” specialistáinak vagy a bizantinológusoknak?

Tannery példáját sohasem követték sokan, számuk meg sem közelíti a szakmatörténészekét, a problématörténészekét és a kontextusok kutatóién. Az is szükségképpen következik a föladat-centrikus módszerből, hogy őket még kevésbé lehet egyetlen közös „irány”-ként említeni. De ha mégis névvel akarjuk jellemezni ezt a fajta tudománytörténet-írást is, leginkább tán Giorgio de Santillana, Willy Hartner és Szabó Árpád nevét említhetnénk.

A „besorolások” azonban végül is lényegtelenek, hiszen a legtöbb történész úgysem sorolható határozottan egyik vagy másik irányhoz. A keresztezések és vonatkozások gazdag lehetőségeire figyelmeztetett már Agassi is idézett monográfiájában; ezek nélkül moccanni sem tudott volna két popperiánus kategóriájával.

Napjaink tudománytörténet-írásában a leghatásosabb s legéletképesebb hibrid a Koyré nyomán tájékozódó kontextus-kutatás és a szakmatörténet evolucionista válfaja közötti termékeny keresztezésből keletkezett, Thomas S. Kuhn híres és gyakran idézett monográfiájában.[132] A monográfia a természettudományos forradalmak struktúrájáról szól, s amint már a cím többes száma Is jelzi, forradalmi és „normál” periódusok váltakozásával magyarázza a tudomány fejlődését. A „normál tudomány” struktúráját a „talánymegoldás”, a „forradalmi tudományét” a normál tudomány gondolkozásmintáit („paradigmáit”) kikezdő kritika által teremtett új problémák határozzák meg de tán felesleges folytatni, hisz

[132] Kuhn, Th. S.: The structure of scientific revolutions. Chicago, 1962. (Magyar fordításban: A tudományos forradalmak szerkezete. Ford.: Bíró Dániel. Bp., 1984. Gondolat. 321 p.; 2000-ben és 2002-ben is megjelent. *(– a szerk. megj.)*

visszaérkeztünk, nagy kerülővel és szép elnevezések tűzijátékain át a Popper-féle modellhez.

A Popper–Kuhn–Agassi-féle modell azonban csak egyike a napjainkban divatozó sokféle strukturalista tudományfejlődési modellnek. Egy másik, sajnos erősen hatni kezdő formáját August Nitschke stuttgarti tudománytörténet-professzor fogalmazta meg[133] divatos formában elevenítve föl benne a kultúrmorfológia avult kísérteteit Spengler nagy művészete- és sodró szenvedélye nélkül.

Legalább Agassiéhoz hasonló vastag monográfia kellene hozzá, hogy akárcsak név szerint is rnegemlítsük a legfontosabbakat a mai tudománytörténet-írás sokféle változatából. Csak utána következhetne, hogy felsoroljuk a tudománytörténet-írás sokféle és mind fontosabbá váló kapcsolatát a „határterületekkel”: technikatörténet-írással, orvostörténelemmel, irodalomtörténettel, művészettörténettel, a gazdaságtörténet-írás különféle ágaival és a tudományszociológiával. Annál is inkább szükséges lenne ez, mert a közeljövőben a tudománytörténet-írás súlypontja előreláthatóan a határterületek felé tolódik el. De annyi tán a fönti hézagosnak is túl rövid fölsorolásból is sejthető, hogy ma a tudománytörténet-írás nagy és nehéz *szakma,* amelynek egyetlen pici részletében való eredményes munkálkodás is teljes embert kíván, s nem lehet csak úgy „hobby”-ból, amatőrként művelgetni.

Illetve a labdarúgáshoz hasonlóan, a tudománytörténet-írásnak is szigorúan elválasztandó a hivatásos játékosok, az amatőrök és a drukkerek szerepe. Akárcsak a labdarúgás, a tudománytörténet is a „drukkereknek” készül, ahhoz azonban, hogy a „profiktól” eljusson a „drukkerekhez”, sokkal több és finomabb közvetítés szükséges, mint a futballszakmában. S ami még fontosabb, a tudománytörténet-írásban sohasem szabad (vagy nem volna szabad) annyira simává és rutinossá degradálni ezt a közvetítést, mint a labdarúgásban. Profik és drukkerek ellentéte ugyanis termékeny feszültségek forrása, a nagy és ezer ágra szakadt szakma fő éltetője, s ez őrzi, nehogy végleg magasrendű és erősen szakosodott profi játékosok zárt körű és megközelíthetetlenül nehéz akadályversenyévé fajuljon el, a labdarúgó-bajnokságok mintájára. A tudománytörténet-írásában nincs helye a speakereknek, a managereknek, a sport-tudósítóknak, a sport-sajtónak; csak akkor őrizheti meg az értelmét, ha megőrzi a közvetlen párbeszéd lehetőségét történetírók, tudósok és közönség között.

„Ezek a tanulmányok – írta C. Truesdell, a modern mechanika egyik fontos ágának megalapítója és legfőbb művelője a Mechanikatörténeti esszéi előszavában[134] – aligha nyerik meg a hivatásos tudománytörténészek tetszését, s ha igen, hát megköszönöm türelmüket, de

[133] Nietschke, A.: Naturwissenschaftliche Revolutionen und Wandel der Gesellschaftsstruktur. = Sudhoffs Archiv 53 (1970) No. 4. pp. 337–361.

[134] Truesdell, C.: Essays ín the History of Mechanics. Berlin, 1968.

akkor sem nekik készültek. A tudománytörténészek, miközben Igyekeznek megmagyarázni, miként használták például a 17. század tudósai a 16. századi örökséget, lényegtelennek tekintik, hogyan gondolkozik egy mai tudós a tudományról, mit köszönhet 8 tudománya múltjának s hogyan reagál reá. Az ilyen tudománytörténészek arra a tán csak mesebeli botanikusra emlékeztetnek, aki egyetlen növényt sem ismer meg, amíg meg nem látja élettelenül, szárazon, herbáriumba ragasztva. Én a matematikai tudományoknak nemcsak a legfrissebb hajtásait érzem ma is élőnek, hanem a múltjába nyúló ágakat is. Ismerek ifjakat, akik Gibbs, Kelvin, Stokes és Cauchy, de még Euler és Newton műveit is olvassák, nem azért, hogy saját dolgozataikat díszítsék korai adatokra való hivatkozással, se nem azért, hogy történelmet írjanak, hanem mert módszert keresnek s meg akarják érteni a lényeget, az óriások szavából, a törpe közvetítőket megkerülve. Az ilyen embereknek, az ilyen mai tudósoknak írtam ezeket a tanulmányokat."

Truesdell könyvéről Willy Hartner irt igen elismerő recenziót,[135] Willy Hartner, aki talán a legnagyobb „mesebeli botanikus" a mai hivatásos tudománytörténészek között. Nem is állhatta meg, hogy meg ne jegyezze Truesdell itt idézett szavairól, hogy „eszerint pofonegyszerű elkülöníteni a tudománytörténet-írásban a jót a rossztól; csak az a kérdés, miért közölt akkor Truesdell az általa szerkesztett, tíz éve virágzó *Archive for the History of Exact Sciences* című folyóiratban annyi sok kitűnő, tagadhatatlanul antikváriusi jellegű dolgozatot. De örvendjünk csak nyugodtan a következetlenségének, melynek ezeket a tanulmányokat köszönhetjük."

Az efféle „következetlenség" – Truesdell és Hartner „szembesítésével" ezt szeretném illusztrálni – a tudománytörténet-írás lényegéhez tartozik. A modern, gyorsan fejlődő mechanika lelkes művelője, Truesdell majdnem Willy Hartnerhez hasonlítható gondosságú „antikváriussá" válik, ha a mechanika történetéről ír, vagy ha erről szóló dolgozatokat közöl. Willy Hartner, a nagy „antikvárius" pedig réges-régi eredmények interpretálásakor is a mai tudomány lehetőségeit és veszélyeit érezteti és hangsúlyozza.[136] Truesdell és Hartner persze Ideális „szélső eset", de közöttük helyezkednek el, széles skálán, a tudományuk története iránt érdeklődő kutatók és a mai tudomány nagy föladatait idegeikben érző történészek. Az ő „ellentétük" és „következetlenségeik" nélkül aligha érthető meg a nagy szerep, amit a természettudomány a mai civilizációban betölt. Nem kell talán külön hangsúlyozni, hogy a fentebb „feladat-centrikus"-ként jellemzett tudománytörténet-írás szinte predestinált erre a munkára.

135 Hartner, W.: Die Naturwissenschaften 57 (1970) No. 7. pp. 362–363.

136 Hartner, W.: Oriens–Occidens. Ausgewahlte Schriften zur Wissenschafts- und Kulturgeschichte. Hildesheim, 1968.

A múltjában a jelen lehetőségeik csíráit tisztelő természettudomány és a múlt lelkiismeretes föltárásából a jelen felelősségét megérző történetírás találkozásának feszültségtől terhes zónájában keletkezhetnek leginkább egy-egy ország tudományos fejlődését föltáró monográfiák is; Gombocz Endre[137] és Zemplén Jolán[138] könyveiből pl. szépen látható, hogy a botanika és a fizika története ugyanolyan fontos hazánk szellemi életében, mint az irodalomé. Legfőképpen azonban Benkő Samu gyönyörű Bolyai-könyvét[139] kell itt említeni. Ez a könyv példa rá, hogy becsülettel megmutatva a tudományok szükségképpen nemzetközi fejlődését, a népek egymásra utaltsága világlik ki, amely alól a legnagyobb országok sem kivételek. A nagy fölfedezések keletkezése és jelentősége sokféleképpen értelmezhető, azonban létük s ritkaságuk egyértelműen demonstrálja a népek közös és oszthatatlan érdekeit. Holmi prioritásharcok helyett ezt megmutatni: elsőrendű kötelessége a mai tudománytörténet-írásnak.

Ezzel azonban még távolról sem soroltuk föl mind a tudománytörténet-írás föladatait. A „drukkerek" köre például semmiképpen sem korlátozható a természettudományok aktív művelőire – önmagában is tekintélyes szám egyébként –, hisz a mai civilizációban így vagy úgy mind többen kerülnek közvetlen vagy közvetett kapcsolatba a kutatómunkával, s kényszerülnek új tudományos eredmények naponkénti alkalmazására. Az ő életüknek már része a természettudomány, s a tájékozódásukhoz szükségképpen hozzátartozik szakmájuk történeti szemlélete, hisz enélkül elsüllyednek a naponként változó új tények özönében.

De hogyan képzelhető el ez a tájékozódás, ha – mint nálunk ma – az oktatás még tervéből is teljesen kihagyja a tudománytörténetet? Mert az, hogy középiskolai és egyetemi tankönyveinkben rövid életrajzi vázlatokat és néhány gyatra képet közlünk a tudomány „nagyjairól", inkább zavarja a tájékozódást, nemhogy segítené. Azt a tévképzetet kelti, hogy a tudománytörténet-írás valamiféle múzeum vagy temető, tiszteletreméltó és élettelen történelmi arcképcsarnok. Pedig látszólag könnyen megváltoztatható lenne ez a téves kép, ha a középiskolákban olyasféle tankönyvek alapján oktatnának, mint pl. Fülöp Zsigmond[140] régebbi vagy Balázs Loránd[141] új kémiatörténete. Agassi is megmutatta egy kitűnő kis

---

[137] Gombocz Endre: A magyar botanika története. A magyar flóra kutatói. Bp., 1936. MTA. 636 p. (Új kiadása: Sopron, 2007. Berzsenyi Dániel Evangélikus Gimnázium, Kollégium és Szakképző Iskola. [8], 636, XXIV p. *(– a szerk. megj.)*

[138] M. Zemplén Jolán: A magyarországi fizika története 1711-ig. Bp., 1961. Akadémiai. 317 p.; A magyarországi fizika története a XVIII. században. Bp., 1964. Akadémiai. 495 p.

[139] Benkő Samu: Bolyai János vallomásai. Bukarest, 1968. Irodalmi Könyvkiadó. 280 p.

[140] Fülöp Zsigmond: A bölcsek köve. A vegytan története. 2. átdolg. kiad. Bp., 1957. Műszaki Könyvkiadó. 343 p., 1 t.

[141] Balázs Lóránt: A kémia története. Bp., 1968. Gondolat. 703 p. (1–2. köt. bőv. kiad.: Bp., 1996. Nemzeti Tankönyvkiadó. 1075 p. *(– a szerk. megj.)*

képeskönyvben,[142] miként lehetne a fizika történetét sikerrel oktatni akár az általános iskola fölsőbb osztályaiban is.

Csakhogy ehhez nem elegendőek a jó könyvek. Az is kellene, hogy a tanárképző főiskolán és az egyetemeken tisztességes és elismert tantárgyként tanítsák – mint több országban – a tudományok történetét. Ez sem lenne tán lehetetlen, hisz erre a célra, kezdetben legalábbis, megfelelhetne a tudománytörténet-írás legegyszerűbb válfaja, a problématörténeti „körítéssel" tálalt szakmatörténet. Az egyetemi oktatás színvonalát azonban itt is csak aktív kutatómunka garantálhatja, s így ez a tudománytörténeti oktatás nélkülözhetetlen alapföltétele.

S csak tényleges tudománytörténeti oktatás alapján képzelhető el a népművelés és a tömegkommunikációs nevelés tudománytörténeti programja. Enélkül a legjobb szándék is többnyire torz megoldásokra kényszerül, hisz hogyan lehetne például irodalomtörténetről beszélni embereknek, akik Goethéről, Shakespeare-ről vagy Thomas Mannról a nevükön kívül soha semmi egyebet nem hallottak? Csoda-e, ha szegény Bolyai Jánosnak ott kell utolsót rúgnia a néző szemé láttára a tv-színpadon ahhoz, hogy az ismeretterjesztő film „hatásos" legyen?

142 Agassi, J.: The continuing revolutlon. A history of physics from the Greeks to Einstein. New York, 1968.

A honi tudománytörténet-írás gondjairól[143]

A tudománytörténet-írás egyik alapelve, hogy a legkisebb helyi jelenség tárgyalását is meg kell próbálni beágyazni az általános fejlődés kereteibe. Kivált, ha gondokról akar szólani az ember, hiszen a szakma honi helyzetét megítélni sem lehet anélkül, hogy be ne illesztenénk a világszerte érvényesülő és ható trendekbe. Erről természetesen ilyen szűkre szabott keretben szó sem lehet, vállalni kell tehát a túlzott egyszerűsítés veszélyét s esetleges igazságtalanságát is.

A tudománytörténet-írás – hasonlóan szerencsésebb s gazdagabb bátyjához, a művészettörténethez – amatőrök munkásságából keletkezett, Montucla és Kaestner – ketten együtt a matematikatörténet-írás (gyengébb kiadású) Vasarija – a francia világosság és a német felvilágosodás neves matematikusa volt, Johann Beckmann – az első nagy technikatörténet szerzője – az ökonómia professzora a göttingai egyetemen; Dr. Thomas Thomson – az első jelentős kémiatörténet szerzője – kémikus volt, Dr. Priestley maga is jelentős felfedező az elektromosság területén, melynek történetét megírta. Jean Baptiste Joseph Delambre – aki a máig legjobb csillagászattörténetet írta – csillagvizsgáló volt, Ernst Meyer – a botanikatörténet-írás nagy korának elindítója – botanikus, akit még Goethe neveztetett ki (1826) a königsbergi botanikus-kert igazgatójául; akkoriban ugyanis még nem választotta el, s nem gyötörte az embereket a „két kultúra" rémképe. A XIX. századi tudomány első történetét megíró Wallace biológus volt, az evolúciós-elmélet társfölfedezője. A kor egyik jelentős matematikatörténésze, H. G. Zeuthen ma is jól ismert alkotásairól a geometriai transzformációk elméletében; át is alakította XIX. századivá a görög matematikát úgy, hogy görög legyen, aki abban ráismer az eredetire. S ugyanezt tette Ferdinand Rosenberger a XVII. századi fizikával, s e tekintetben mit sem különbözött tőle a folyóiratáról s tudós-biográfiájáról ma is általánosan ismert Poggendorff, Ma már épp pregnánsan XIX. századi szemléletük miatt értékes – lassan forrás-értékű – vaskos fizikatörténetük. Mondanom sem kell, hogy mindketten aktív fizikusok volta, aminthogy aktív szerves vegyész volt Kopp atya, akinek vaskos köteteiből máig puskáznak a kémiatörténészek, Koppnál sokkal híresebb vegyész-szakember volt persze a nagy Berthelot, akitől azonban ma már nemhogy puskázni nem divat, de még kritizálni is illik őt jobb körökben.

143 Forrás: Vekerdi László: A honi tudománytörténetírás gondjairól. In: A magyarországi tudomány- és technikatörténet konferencia. Budapest, 1972. november 23–25. Szerk.: Rajnai Rudolfné. Bp., 1973. MTESZ. Tudomány- és Technikatörténeti Bizottság. pp. 467–474.

Megvan egyébként annak is az oka, hogy miért, Berthelot ugyanis olyan korban élt, amikor a nagy amatőrök történetírása – mint történetírás, s nem mint forrás – idejét multa, s fölváltotta két másik irány, Az egyik, a hasonlíthatatlanul fontosabb, a kritikai szövegkiadás volt, s épp e téren követett el Berthelot a történetírás akkori standardja szerint megbocsáthatatlan vétségeket. Persze, akkoriban még olyan tudósok mérték a standardot, mint Paul Tannery, Pierre Duhem és Antonio Favaro, akiket joggal tekintünk a modern tudománytörténet-írás megteremtőinek, s munkáik nélkül moccanni sem tudnánk ma sem. Jelen összefüggésben azonban – sajnos – nem kell foglalkoznunk velük, mert honunkban irányuk mindig is csak elszórtan talált követőkre, jelenleg pedig – néhány újabb, örvendetes kivételtől eltekintve, mint amilyen Wigner s Planck levelek publikálása a Fizikai Szemlében, a Lengyel Imre és Tóth Béla-féle Maróthi levelezés-kiadás, Sarlóska Ernő és Fráter Jánosné közlései az akadémiai Kézirattár Bolyai-gyűjteményéből – nagyobb szabású editios munkáról egyáltalában nem beszélhetünk. Pedig erkölcsileg – s talán anyagilag is – fölmérhetetlen például az a kár, ami a teljes kritikai Bolyai-kiadás elmulasztása miatt érte hazánkat s a történettudományt. Az utóbbi tekintetben persze sokat pótolt a hiányból Benkő Samu – Bukarestben megjelent – gyönyörű Bolyai-könyve, ami nemcsak az egész kor pompás áttekintése, de valósággal Bolyai-breviáriumként is forgatható, Annál fájóbb s csodálatosabb azonban, hogy ez a remek könyv sem ösztökélte a honi tudományos hatalmakat még csak előmunkálatokra sem a teljes Bolyai-kiadás érdekében. Ennyire nem él nálunk Tannery, Duhem, Favaro nagy tradíciója.

Annál élénkebben él viszont még ma is errefelé a másik korabeli – illetve valamivel korábbi – irány hatása vagy legalábbis emléke. Ez a másik irány Németországban keletkezett, közelebbről Münchenben, ahol egy grandiózusnak tervezett vállalkozásban megpróbálták feldolgozni, illetve feldolgoztatni a különféle szaktudományok történetét Németországban. A vállalkozás résztvevői már nem voltak amatőrök; de még nem is voltak történészek, akik a tudománytörténet-írással hivatásszerűen foglalkoznának, mint Tannery, Duhem vagy Favaro, A feldolgozandó szakma többé-kevésbé ismert művelői voltak, akik vagy nyugdíjasként, vagy a vállalkozás tartamára egyéb kötelezettségeik alól fölmentetten dolgoztak a nagy terv megvalósításán. A szempontjaik tehát már nem az amatőr elegáns és nagyvonalú szempontjai többé, módszereik viszont – kellő történész-képzettség hiányában – teljességgel amatőrök, vagy ami még rosszabb; tudományoskodók. Így jött létre Münchenben egy elsősorban könyvtörténetre alapított s kifejezetten művelődéstörténeti célzatú és rendeltetésű tudománytörténet-írás, mely szükségképpen elhanyagolta – már csak képzettség- s idő hiánya miatt is – az editios munkát, s a tudománytörténet saját szempontjainak kidolgozása helyett megelégedett többé-kevésbé laza művelődéstörténeti és filozófiatörténeti kategóriák alkalmazásával s teremtésével, Könyvek tartalmi – néhol tartalomjegyzéki – ismertetése és szakmai kommentálása, az előforduló műszerek leírása és magyarázata, a fontosabb személyiségek életrajzi adatai, időrendbe rázva, művelődés- és intézménytörténeti keretekbe foglalva: ilyesmi ez a félig szakmai történetírás, melynek tán egyetlen előnye, hogy itt-ott eligazít a forrásmunkák megkeresésében, Persze néha, ha egy-egy nagy szakember szuverénül, amatőrként merte kezelni az anyagát – pl. Julius Sachs az újkori botanikát –, akkor még ebben a müncheni sorozatban is keletkezhetett maradandó mű.

A tudománytörténet-írás fő folyama azonban – szerencsére – másfelé haladt, illetve másfelé ágazódott el, Folytatódott, s napjainkig egyre szélesebb mederben folyik az editios munka és a hozzá tartozó kommentár-irodalom; a sok szép eredmény közül ki kell emelni A, P, Juskevics munkásságát az iszlám matematika, Marshall Clagettét s iskolájáét a középkori latin tudomány, és J. E. Hofmann tanítványaiét a XVII. századi európai matematika területén, Kialakultak persze egészen új irányok is (mégpedig annyi, hogy mindet felsorolni nem 15 perc, de 15 óra sem lenne elég); az egyik legpregnánsabb s legnépszerűbb a gazdaságtörténeti s társadalomtörténeti irány, mely F. von Borkenau, R. K. Merton és G, N. Clark fundamentalis – harmincas években megjelent – tanulmányaiból kiindulva s az Annales-kör szemléletével s módszereivel kiegészülve nemcsak egyik fő vonala a modern tudománytörténet-írásnak, hanem jelentős szerepet játszik – kivált S, D. Price, J, Ben-David és Th. S, Kuhn tudományszociológiai jellegű vizsgálatain keresztül – a történeti megalapozottságú futurológiai extrapolációkban is. A jövő elképzelése s tervezése szempontjából – pozitív s negatív irányban egyaránt – legalább ennyire jelentős volt az a kollaboráció is, amely az irodalommal s irodalomtörténet-írással alakult ki; az előbbi a tudományos-fantasztikus irodalom különféle válfajaiban, az utóbbi az utópisztikus gondolkozás és a teremtő képzelet elemzésében érte el tán legismertebb eredményeit.[144]

Külön irányként, s kivételesen nagy súllyal jelentkezett a harmincas-negyvenes években a szakmán belül a tudománytörténeti medievalisztika, amely a „nagy” medievalisztika hatására indult, de sok tekintetben túlnőtt rajta, pl, Anneliese Maier, A. C, Crombie s W. Hartner munkáiban. A második világháború után világszerte föllendülő reneszánsz-kutatás és XVII. század kutatás már jórészt tudománytörténeti inspirációra indult és fontosabb alkotásaiból – például Heller Ágnes szép könyvéből – sohasem hiányozhatott a tudománytörténeti orientáció.

---

[144] A jövő-centrikus tudománytörténeti szemlélet kitűnő példája alább Marx professzor előadása *(– Terts István megj.)*

A második világháború utáni másfél-két évtized volt a tudománytörténet-írás nagy pillanata, s egyáltalában nemcsak az atombomba s a számítógép hatására. A nemrégen még lenézett, kicsi szakma hirtelen világszerte (extra Hungariam persze) az egész történetírás élvonalába került, s ennek egyik jele – s távolról sem oka – volt Herbert Butterfield Cambridge-i történész-professzor híres kollégiuma 1948-ban Az újkori tudomány eredetéről; s nálunk – valamivel korábban – Hajnal István tudomány- s technikatörténeti tájékozódása, valamint Csapodi Csaba fundamentális fizikatörténeti dolgozatai.

Az „igazi" történészek lelkesedése azonban – nagy s szerencsés kivételektől, mint nálunk Makkai László, eltekintve – világszerte hamarosan lelohadt; végül is nagyon-nagyon kevesen adták fejüket még időszakosan is tudománytörténet-írásra. Ekkorra azonban már nagyon sok országban létezett, elsősorban George Sarton önzetlen szervezőmunkája s a kivételes kondíciójú Alexandre Koyré szellemi „propagandája" következtében, külön egyetemi tantárgyként s szakként tudománytörténet-írás, s szakdolgozatok, doktorátusok, szemináriumok, docensek, professzorok, kutatóintézetek, folyóiratok segitségével fölzárkózott korunk szellemi „céheihez": a kutatók, kongresszusok, lektorálások, különlenyomatok, ösztöndíjak, intrikák és fúrások által összetartott kollégiumaihoz, Önálló – s öntudatos – szakmaként persze (a kutatás Parkinson-törvénye szerint) maga is egyre jobban szakosodik és földarabolódik; ezért azonban egyelőre még kárpótol a föltárt anyag gazdagsága és az új forrásterületek sokasága; a tudománytörténet-írás ma a prehistóriától és a mítoszkutatástól a futurológiáig, a generatív nyelvészettől az ipari archeológiáig úgyszólván mindenütt talál anyagot s inspirációt. A legfontosabb új forrásterületek közül még ilyen kutyafuttábani összefoglalóban is ki kell emelni a tudománytörténet-írás fontosságát a jelenkutatásban, nemcsak a tudományszociológiát értve alatta, hanem a nagy tudományos felfedezések még élő tanúinak – a tudomány valóságos „élő kövületeinek" – olyasféle kikérdezését, amint azt Thomas S, Kuhn valósította meg egy grandiózus vállalkozásban korunk legnagyobb szellemi kalandja, a kvantummechanika történetének tisztázására. Hasonló lehetőségünk, ha szerényebb keretek közt is, nekünk is lenne; van is: mert ide kell sorolni a Televízió nagy tudósainkkal készített remek interjúit, A vállalkozás jelentősége fölmérhetetlen, s kibővítése nagyon is indokolt és elsőrendű „tudománytörténész" feladat volna.

Tán mutatja a fenti – találomra kiragadott – néhány példa, mennyire kibővült az utóbbi évtizedben a tudománytörténet-írás forrásvilága s mennyi új adat áramlott be mindenfelől, S a gazdag új anyag alapján lassan kezd kibontakozni egy új összefoglalás igénye inkább, semmint lehetősége, Tán nem kell külön hangsúlyozni, hogy ez az összefoglalás nem „művelődéstörténetinek" kívánkozik.

Erről azonban a jelen összefüggésben legfeljebb mint hiányról szólhatnánk. Nálunk ugyanis a tudománytörténet-írás legtöbb területén az újabb eredményekkel meglehetősen ellenségesen szemben álló „modell” uralkodik, amit leginkább a föntebb említett „müncheni irány”-hoz hasonlíthatnánk, Meg kell azonban rögtön említeni néhány nagy kivételt, Az editios munkában elsősorban Sarlóska Ernő nevét, akinek néhány újabb publikációja is mutatja, mit fog veszíteni a Bolyai-kutatás, ha évtizedek óta dédelgetett s kimunkált tervét, a teljes Bolyai-kiadást nem sikerül megvalósítania, Tán nem kell mondanom, hogy nem rajta múlik, A tudománytörténet-írás, de általában az egész ókortudomány meglepően új s gazdag útjait nyitották meg Szabó Árpád szótörténeti és fogalomtörténeti elemzései s módszerei, melyek a forráskör nagy bővítésének éveiben, a legszerencsésebb pillanatban csatlakoztak a világ kutatásának első vonalához, Ugyanakkor itthon az eredeti források szerint tájékozódó tudománytörténeti esszé kiemelkedő, ragyogó példái voltak Benedek István könyvei és tanulmányai, Kétségkívül ők képviselik ma nálunk a szakma új irányok felé orientálódó élvonalát; de föltétlenül meg kellene említeni mellettük néhány nagy amatőr munkáit; Tasnádi-Kubacska Andrásét például, vagy Jávorka Sándor kitűnő Kitaibel-monográfiáját, mely a legjobb Gombocz Endre-i hagyományokat folytatja. A korunkban újra előtérbe kerülő, jövő iránt tájékozódó történeti esszék kitűnő példái Rényi Alfréd és Marx György írásai, amelyek Szent-Györgyi Albert és Gábor Dénes hasonló természetű s hasonlóan inspiráló műveihez csatlakoznak,

Végeredményben tehát ma meglehetősen élesen szemben állnak egymással a régi iskola s az uj törekvések képviselői, Hangsúlyoznunk kell persze, hogy ez nem honi specialitás, így van ez világszerte, másutt még sokkal élesebben is, mint itt. Speciálissá, hazaivá ezt a szembenállást a gondok teszik, a lehetőségek szűkössége, A publikálás és a publicitás lehetőségeié például; hiszen néhány nem-történész profilú s túlnyomórészt népszerűsítő folyóirat – illetve szerkesztő – néha valósággal hősies és megható segítőkészsége nem pótolhatja az önálló szakmai fórumot, Megfelelő publikációs lehetőség hiányában persze érvényes dokumentációs munkáról még csak nem is beszélhetünk, Hiszen ki tudja, hány cikk porosodik – úgy lehet örökre – szerzők türelmetlen s szerkesztők végtelenül türelmes íróasztalaiban? Nyilvánvaló az is, hogy egy amúgy is „perifériás” szakma – amilyen nálunk a tudománytörténet-írás – „perifériásabb” szerzőit a különben is rendkívül hosszú „átfutási” (kétszeresen is rossz szó, nemcsak nyelvtani szempontból! Mert hogyan beszélhetünk a publikálással kapcsolatban „futásról”?) idők „preferáltan” sújtják; mire egy ilyen szerző korrektúrát kap, többnyire a cikk felét ki szeretné igazítani. De hát akkor meg mit szól a szerkesztő? Nem szól: a papírkosarat használja.

Külön tanulmányt, sőt külön konferenciát kívánnak meg a könyvbeszerzés gondjai, ami szintén nem tisztán anyagi kérdés, hanem összefügg valahogyan a tudománytörténet-írás említett „müncheni” koncepciójával, Nyilvánvaló ugyanis, hogy a szakma önállóságát – „kompetenciáját” és „performanciáját” – tagadva, illetve nem hangsúlyozva, föl sem merül önálló szakkönyvtár igénye, Márpedig a nagykönyvtárak amúgy is szűkös kapacitása képtelen kielégíteni egy ennyire könyvigényes szakma könyvéhségét, A nagy reprint- kiadások miatt az elmúlt években kitűnő alkalom kínálkozott hiányzó, alapvető primér és szekundér források beszerzésére; ám nemcsak ezt mulasztottuk el, hanem még a meglevő – s részben igen értékes – régi könyvanyag nagy részéhez sem tudunk hozzáférkőzni. Mondják, hogy a sok hurcolás, meg a rossz raktározási lehetőségek miatt ez is pusztulgat szép csendesen. Nem egyszerűbb hozzájutni a kéziratos anyaghoz sem, egyébként is ha valami, hát a levéltári munka teljes embert és nagy gyakorlatot kíván, S hozzá nemcsak egy levéltárban, vagy általában a honi levéltárakban való jártasságot. A magyarországi tudománytörténet természete miatt nélkülözhetetlen a rendszeres külföldi kutatás; nélkülözhetetlen Bécs levéltárai, a szomszéd államokéi, S ki juthat el ide? Vagy Th. S. Kuhn kvantummechanika-történeti archívumába, mely a magyar elméleti fizika szempontjából is oly sok értékes anyagot tüntet föl? A kérdés szónoki, hiszen jól tudjuk, hogy még a „nagy” történetírásban is mekkora a hiány a használható tudományos ösztöndíjakban. Persze egy nemzetközi rangú, a honi tudománytörténet-írás egész spektrumát befogadó – s emelő – folyóirat hozhatna külföldi meghívásokat is. Ez azonban már a futurológia, s nem a tudománytörténet-írás gondjaihoz tartozik.

A matematika és a technika története[145]

Mikor Északnyugat-Európa még a megalit kőóriások történelem előtti mesevilágában szunnyadt, a Földközi-tenger keleti csücskében és Nyugat-Ázsiában már réges-régen számon tartották és följegyezték a véres háborúkat, a békekötéseket, a természeti csapásokat, földi és égi hatalmak tetteit. S amióta följegyzésekről tudunk, tudunk a matematika közvetlen vagy közvetett „alkalmazásáról" is. Például naptárszámításokról s hatalmas templomok építéséről, amihez már bizonyosan kellett matematikai ismeret is. Hisz „ezeknél az építkezéseknél sok száz ember munkáját kellett megszervezni s irányítani – írja V. G. Childe. – Mielőtt a falakat rakni kezdték, kötéllel jelölték ki a templom körvonalait. Az erechi mesterséges dombra épített templom bitumen padlójában valóban meg is találták az archeológusok a templom pirossal vázolt alaprajzát."

Azt azonban még találgatni sem igen tudjuk, miféle matematikát „alkalmazhattak" az erechi templom építői az i. e. IV. évezredben. Évezredekkel későbbi korok, a késő-egyiptomi és a babilóni birodalom matematikájáról is sokáig inkább csak elképzelések és hiedelmek éltek történészek s laikusok körében, s az utóbbi évtizedekben föltárt hatalmas anyag megbízható történeti értelmezése még ma is hiányzik, a ma divatos magyarázatok értéke pedig erősen vitatható, bár sajnos nem eléggé vitatott. A matematikatörténészek ugyanis óhatatlanul a mi mai számolási technikánk csíráit vélik fölfedezni – s tán nem is egészen jogtalanul – az egyiptomi papiruszokon s mezopotámiai agyagtáblákon, s a róluk kibetűzött alkalmazásokból azután szépen rekonstruálják, milyen lehetett az a „tiszta" matematika, amit egyiptomi és babilóni kollégáik évezredekkel ezelőtt „alkalmaztak".

A matematikatörténészek, akik többnyire maguk is matematikusok, az emberiség történetét tulajdonképpen két részre osztották, egy sajnálatos matematika előtti periódusra s a matematika fejlődésére. Éppen arra való volt szerintük a technika, hogy az emberiség lassan, hosszú évezredek alatt megtanulja általa a legegyszerűbb matematikai fogalmakat s a mennyiségtan elemeit. Ezért azután a matematikatörténészek mindig nagy tisztelettel meglengetik a kalapjukat, mihelyt technikatörténeti részlethez érnek – s nagy ívben elkerülik. Az udvariasságot a technikatörténészek is viszonozzák: a munka izzadságosan művelt völgyeiből kegyelettel mutatnak a „tiszta" matematika hófödte csúcsaira, s nem mulaszthatják el soha, hogy figyelmeztessenek az „alkalmazások" fontosságára.

145 Forrás: Vekerdi László: A matematika és a technika története. In: Vekerdi László: Befejezetlen jelen. Bp., 1971. Magvető. pp. 86–110. (Elvek és utak)

Tudós dolgozatok és vaskos monográfiák születtek így az egyiptomiak „geometriájáról” és a babilóniak „algebrájáról”, s az sem igen zavarta a történészeket, hogy az ezekben rekonstruált „tiszta” geometriát és algebrát sohasem sikerült megtalálni. Minden eddigi lelet arról tanúskodik, hogy ami matematikát az egyiptomi írnokok s a babilóni papok és kereskedők használtak, az csupa „alkalmazás” volt: gyakorlati föladatok megoldása az összeadás, kivonás, szorzás és osztás többé-kevésbé célszerű módszereivel. Sem a matematikára annyira jellemző „levezetések” és „bizonyítások”, sem a fogalmi általánosítások s szabályok nem találhatók sehol. Persze nagyon sok babilóni föladatmegoldásra igen jól alkalmazhatók a *mi* algebrai képleteink *is,* hisz kettő meg kettő végül is Babilónban és Princetonban egyaránt négy, csakhogy a babilóni kettő egyáltalában nem azonos ám a princetoni 2-vel. Babilónban a kettő – vagy a többi szám – először is mindig két dolog: vagy ember, vagy egyszerűen két jel volt; s ami még fontosabb különbség, eme konkrét jelentésen kívül és túl többnyire fontos „varázstulajdonságok” hordozója. A számok és a számolás alkalmazása Egyiptomban és Babilónban sohasem korlátozódott a technikára és a gazdasági életre; elsőrendű – ha ugyan nem a legfontosabb – „alkalmazási területe” volt a varázsolás, a bűbájosság, a jóslás, a csillagimádás: mindaz a különös és sokféle technika, amit summásan „mágiának” nevez a történetírás. Mi több, ami matematikát a gazdasági és technikai életben alkalmaztak, a nagy piramisépítkezéseknél például vagy a templomgazdaságokban, közvetve az is majdnem mindig vallási-mágikus célokat szolgált, az ősi „varázstudomány” része volt.

Írnokok, papok, varázslók ismerték ugyan a számolást, s használták is, azonban sohasem „alkalmaztak” az újkori mérnökökhöz hasonlíthatóan „matematikai” szabályokat vagy éppen elméleteket. S nem is kerestek soha ilyesmit, nem a jövő deduktív matematikájához gyűjtögették ők az „empirikus” alapokat. Mind ez idáig semmiféle adat sem került elő, amely azt mutatná, hogy a matematika axiomatikus, deduktív rendszere lassan, évezredek próbálgatása alapján keletkezett. Ellenkezőleg, minden jel arra mutat, hogy a matematikát úgy fedezték fel, hirtelenül és kicsit váratlanul, mint Kolumbusz Kristóf Amerikát.

*

Szabó Árpád gondos filológiai és szótörténeti vizsgálatai derítették ki, hogy a „bizonyítás” fogalmát s fundamentális módszereit az i. e. V. században kölcsönözték a matematikusok a kortárs eleai filozófusoktól. A matematika ettől kezdve létezik úgy, ahogyan lényegében mi ismerjük: bizonyító és deduktív tudományként. Nyugodtan lehetne úgy is írni, hogy ettől a perctől kezdve, hisz a matematika meglepetésekben s fölfedezésekben mérhetetlenül gazdag két és fél évezredéhez képest igazán meglepően rövid idő az a néhány évtized, ami alatt – valamikor az i. e. V. században – a miáltalunk ismert euklidészi tökéletességre emelkedett. Meglepően rövid és meglepően termékeny idő; épp ezt a hihetetlenül gyors növekedést nem akarták elhinni a matematikatörténészek, s ezért kellettek nekik a babilóni s egyiptomi „empirikus" matematikafejlődés évezredei.

Azonban egy híres amerikai tudománytörténész-professzor, Thomas S. Kuhn a hatvanas évek elején egy világszerte igen nagy föltűnést keltő könyvben igazolta, hogy a tudományok fejlődése sohasem volt egyenletes; a „tudomány" távolról sem az a folyton gyarapodó „kumulatív" folyamat, aminek addig hitték. Kuhn szerint a tudományok fejlődésében „normál" és „forradalmi" periódusok váltakoznak, s a kétféle fázisban jól megkülönböztethető, jellegzetes „struktúra" ismerhető föl; ahhoz hasonlóan, ahogyan a gazdaságtörténetben váltakoznak az expanziók és a kontrakciók jól megkülönböztető struktúrái. A lassú, „normál" periódusok struktúráját elsősorban a „stabilitás" jellemzi, a „normál tudomány" nemhogy áttörni, észrevenni sem képes a saját korlátait, s elégtelenségét mindig csak valami egészen újfajta gondolkozás világíthatja meg. Például az eleata lét-metafizika a matematika, a racionális, illetve az induktív kutatási módszer a természettudomány esetében. A két nagy „forradalmi" periódus, a görög matematika s az újkori természettudomány tehát nagyobb, általános gondolkozástörténeti változás része volt.

A nagy változás a társadalmi, gazdasági, technikai s szellemi élet minden területén hatott, az egész életet formálta; a szakmákra tagolódott történetírás azonban megtartja a kötelező udvariassági és óvatossági távolságokat, s így azután csupán a társadalomtörténet, gazdaságtörténet, technikatörténet, matematikatörténet, vallástörténet, mágiatörténet, orvostörténet, ártörténet, kémiatörténet, logikatörténet, botanikatörténet, s még egy sor szakmatörténet részletes inventárjait s jobb-rosszabb rekonstrukciók ismerjük; a változás aspektusait a különféle szakmatörténetek szemszögéből, s Arkhimédész például a technikatörténetből többnyire nagy tisztelettel köszönti matematikatörténeti önmagát anélkül, hogy legalább megpróbálná megérteni a saját levezetéseit. A tudomány- és technikatörténet-írásba még alig hatolt be Lucien Febvre és Marc Bloch szelleme, itt szilárdabban állanak a szakmákat elválasztó falak, mint valaha, s egy George Sarton vagy Alexandre Koyré kapcsolatokat kutató kísérleteit elnyeli a mindent megemésztő hallgatás vagy – tisztelet.

*

Ami mármost a görög matematika történetét illeti, mégis tán szerencsésebb a helyzet. Először is Szabó Árpád említett vizsgálataiban nemcsak azt fedezte föl, hogy a matematikát valósággal föl kellett fedezni, ki kellett találni, hanem azt is rekonstruálta, hogyan kezdődhetett ez a „kitalálás”. Szaknyelven, de pontosabban: tisztázta a görög (s ez előtt *más* nem volt!) deduktív matematika „logikai-heurisztikai” alapjait. Tisztázta, miként juthatott a görög gondolkodók eszébe, hogy „alkalmasan”, egyébként azonban „tetszőlegesen” választott alapelvekből ellentmondásmentes gondolati rendszert, deduktív matematikát építsenek föl. Tóth Imre paradoxonokról szóló könyvéből azután az is megérthető, hogyan s miért vezette épp az *ellentmondás* az „alkalmas” helyekre inkább, semmint elvekre a szellemet, s hogyan teremtett a világosan föltárt paradoxonok által sarkallt gondolkodás a tagadás (meta) logikai műveletével újabb s újabb ellentmondásmentes rendszereket a szükségképpen ellentmondásos – hiszen új – célokhoz s alapokhoz. Új célokat s fogalmakat teremteni, tehát teremteni – ezt mutatta meg Tóth Imre könyve – ugyanis csak tagadás, minél radikálisabb tagadás által lehet.

S hol a tagadás lábát megveti, ott a mágikus praktikák, s boszorkányság, a varázsolás világát mindig visszaszorítja, ha teljesen meg nem is dönti soha. Egy kivételesen tisztán gondolkodó német klasszika-filológus, Karl Reinhardt mutatta meg, miként váltotta föl, illetve gyöngítette a görög városállamokban a korábbi világban uralkodó varázstudomány erejét a mítosz. Nem hiányoztak persze a mítoszból sem a régebbi varázslatos elemek, de hiányzott vagy fölismerhetetlenségig átalakult benne a varázstudomány „gyakorlati” része: az emberek és a természet kényszerítésére szolgáló kegyetlen és durva praktikák. Varázslatos világ a mítoszé is, de nem varázsoló; a mítosz varázsa a megismerést és a megértést szolgálta, nem a gyilkolást és az erőszakot.

A mítosz által vezérelt szellemi világban a technikai és gazdasági élet, mely Mezopotámiában és Egyiptomban teljesen az állami varázstudomány szolgálatában állott, hirtelen fölszabadult. Látták ezt persze a technika- és matematikatörténészek is, s nem győzték korholni a „gőgös” matematikát, amiért nem sietett tisztességes „alkalmazott tudományként” frissen fölszabadult testvérei segítségére. Mások meg a „társadalmat” ócsárolták, amiért – úgymond – „játékszerekre és szemfényvesztésre pazarolta” egy Arkhütász vagy akár egy Héron technikai géniuszát. S Arkhimédész páratlan tudomány- és technikatörténeti hírnevét nem kevéssé növelte a monda, miszerint csodálatos, soha nem látott hadigépeket szerkesztett Szirakuza védelmére. S ezt a mondát egyáltalában nemcsak az antik mondacsináló mesterek keltették, legalább annyira a „tényeikre” és „szövegkritikáikra” büszke modern technika- és tudománytörténészek is, akik inkább szemet hunytak a hitelesség, sőt a hihetőség kérdése fölött is, csakhogy annál jobban dicsőíthessék Arkhimédészben az „alkalmazott tudomány” hősét. Korunk hősét.

A görög világ hősei azonban másfélék voltak; Kerényi Károly, illetve a Svájcban lehiggadt és bölccsé öregedett Karl Kerényi mutatta tán meg legszebben gyönyörűséges Hérosz-könyvében, hogy milyenek. Ezt a könyvet a tudomány- és technikatörténészek természetesen nem ismerik, azonban egy hírneves, de széles látókörű tudománytörténész, Giorgio de Santillana (aki a hírnevét persze nem a látókörével szerezte) Karl Reinhardt fundamentális Parmenidész-monográfiája nyomán fölvázolta a korai görög természetkép mitikus vonásait. Az ő természetszemléletük ugyanis, akárcsak emberszemléletük, lényege szerint „heroikus” volt; a teremtés, a pusztulás, a lét nagy, életes mítoszaiba mentette a jelenségek tűnő és zavaros látszatvilágát. Hérakleitosz mindent teremtő s megemésztő tüze ugyanott lobogott, Démokritosz oszthatatlan kemény atomjai ugyanott zuhantak, ahol Parmenidész oszthatatlan és tökéletes „Egy”-e létezett: a mítoszteremtő tündér-képzelet világában. S ahol mi a halmazelmélet irtózatosan nehéz acélszerkezeteiből verünk hidat, ott a görög szellem hihetetlenül könnyedén és elegánsan átlebegett – Tóth Imrének köszönet érte, hogy megmutatta – Akhilleusz és a teknősbéka paradoxonán.

Matematika- vagy technikatörténeti tanulmányban most részletesen, vaskos lábjegyzetekkel („ez a szó!” s nem a magyarul helyesebb „széljegyzet”, mely valami játszi könnyedséget sugalmaz, óhatatlanul) és mázsás „belégekkel” kellene igazolni, hogy ... stb. De ez itt nem matematikatörténeti tanulmány, és az égvilágon semmit sem igazol (a szerző sokoldalú tájékozatlanságán kívül). Így hát korunk strukturalista és ál-matematizálgató divatját követve, nyugodtan szerkeszthető a matematika, a technika, a későbbi természettudományok s a gazdasági élet kapcsolataiból egy kis táblázat, amit a széleken akár ki is egészíthetünk a mítosz kapcsolatait föltüntető oszloppal és sorral. A „kapcsolatokat” erősség szerint keresztekkel jelölhetjük: + = gyenge, ++ = erősebb, +++ = erős és ++++ = igen erős kapcsolat. Az így keletkező négyzetes szkéma vagy „mátrix” diagonális elemei természetesen maga a matematika (m), a természettudományok (tt), a gazdaság (g) a technika (t) és – a jobb alsó sarokban – a mítosz (mi). Ezeknek az erőssége, helyesebben fejlődése is jelölhető, mondjuk, pontokkal. Az így szerkesztett „művelődéstörténeti mátrix” (hadd nagyképűsködjem jó strukturalistához illően) tömören és felületesen szemlélteti a föntebb mondottakat: a matematika és a mítosz nagy fontosságát, a mítosz igen erős és a matematika gyengébb (noha nem föltétlenül gyengédebb) kapcsolatát a természetértelmezéssel; az elég élénk gazdasági és technikai fejlődést, amely azonban gyengén kapcsolódik egymáshoz, hisz a görög gazdasági élet – örök panasza ez a technikatörténészeknek – sohasem hasznosította igazán technikai lehetőségeit. Elég erősen kapcsolódott viszont a monumentális építészet révén (amely természetesen egészen más szellemi szférába is tartozik) a mítosszal. Természettudomány, ahogyan ma értjük, még nincs, csak a „kapcsolataiban”: matematikához és mítoszhoz kötődve; ami természetesen nem újság, hisz mindig is ezzel a kettősséggel szerette jellemezni a tudománytörténet-írás a görög tudomány kezdetén Püthagoraszt s végén Ptolemaioszt.

	m	tt	g	t	m
m	. . . .	+ +	+	+	+ + +
tt	+ +				+ + + +
g	+		. . . .	+	
t	+		+	. . . .	+ +
mi	+ + +	+ + + +		+ + +	. . . .

Hasonló szkémában summázva az egyiptomi-mezopotámiai tudományfejlődést, itt a mítosz helyére lépő varázstudomány erősségét kell elsősorban hangsúlyozni, s igen erős kapcsolatát technikával s gazdasági élettel. Matematika s természettudomány itt még majdnem teljesen csak „mágikus” kontextusban létezik, a mindent magába ölelő varázstudomány részeként.

	m	tt	g	t	v
m		+	+	+	+ + +
tt	+				+ + + +
g	+		. .		+ + + +
t	+			. . . .	+ + + +
v	+ + + +	+ + + +	+ + + +	+ + + +	. . . .

A szkémát az előbbivel összehasonlítva azonnal szembetűnik a hatalmas változás, amit a görög matematika megjelenése okoz a képben, s ez természetes is, hisz tulajdonképpen az egész mátrixábrázolás értelme s célja a matematika megjelenésével keletkezett hirtelen változás szemléltetése volt.

*

Ha a római s a véle egybeolvadt későhellenisztikus civilizációt akarnánk hasonló szkémában ábrázolni, először is megint újra kellene keresztelni a széli oszlopot és sort. Nem mintha a mítosz vagy akár a mágia nem hatott volna itt is igen erősen az élet egészére, azonban a tudomány, a technika s a gazdaság fejlődése szempontjából nem volt már többé egyik sem irányító vagy éppen döntő tényező. Hogy mi lépett a helyére, azt még a mezopotámiai és a görög szkémához használt szegélynél is bizonytalanabbul lehet csak megnevezni, hisz a római s a későhellenisztikus tudomány története sokkal kevésbé ismert mint a görög vagy akár a mezopotámiai. Két nagyon nagy ókortörténész, M. V. Rostovtzeff és W. W. Tarn fundamentális könyvei alapján tán mégis az sejthető, hogy a tudományos, technikai és gazdasági élet „széli" irányítójaként a kultusszá és vallássá alakított állam (illetve konzekvens „tagadása", az állammá tett vallás) szerepelhetne.

Természetes joggal háborodik föl bárki, aki akárcsak fölületesen is lapozgatott már Burckhardt remek Konstantin-könyvében, az efféle szkematikus megállapítások durvasága miatt. Azonban hasonló (netán háromszögletű) szkémákkal találkozhat jó nevű és szakmailag megbízható szerzők műveiben is, az ilyen szkémák hozzátartoznak korunk szellemi divatjához. Nyugodtan fölvázolható tehát a római-hellenisztikus mátrix:

	m	tt	g	t	ákv
m	. . .	+		+	+ +
tt	+	.		+	+ +
gt			. .		+ + +
	+	+		. . . .	+ + + +
ákv	+	+ +	+ + +	+ + + +	. . . .

Az államkultusz-államvallás mindenütt jelenvalósága ellenére fontossága legföljebb nyolc ponttal jelölhető, hisz mellette, vele keveredve, s gyakran ellene kétségkívül hatott a matematika s tudomány fejlődésére a mítosz és a mágia is; Lynn Thorndike monumentális mágiatörténete bizonyítja, milyen erősen. Részben tán a görög matematika megmaradása is a misztikus és a mágikus kapcsolatoknak, neopüthagoreizmusnak és asztrológiának köszönhető, bár végig az antikvitáson át sejthető inkább, mint követhető a genuin, „klasszikus" matematika is, noha csak elvétve akadtak nagy és eredeti képviselői, mint Diophantosz, Proklosz vagy Papposz. Külön magyarázatot igényelne a természettudomány „bejelölése”; erről persze, éppen úgy, mint a matematika megmaradásáról, nem a rómaiak tehetnek, hanem a görög, elsősorban az alexandriai tudósok, akik (az élettanban, anatómiában és földméréstanban bizonyosan, s valószínűleg a fizika néhány területén is) csináltak olyasmit *is,* amit későbben experimentális és mérő tudományoknak neveztek. Ez azonban inkább csak minket, késői utódokat érdekel, akik a jövőt látjuk az első tétova lépésekben; az akkori emberek nem sokra becsülték a kortárs természettudósokat s matematikusokat, hacsak történetesen nem voltak *sikeres* építészek, orvosok, haditechnológusok, asztrológusok, mágusok vagy államférfiak is. S a hangsúly itt a „sikeres” jelzőre esik, mert építész, orvos, asztrológus, főleg azonban hadvezér és államférfi akadt a hellenisztikus civilizációban elég; az éles szemű Rostovtzeff nemhiába hasonlította az erősen kompetetív amerikai civilizációhoz. S azt is ő vette észre, hogy a hellenisztikus államokban az államhatalommal szövődött technika: a haditechnika és a tömegek megtévesztését szolgáló „szemfényvesztés-technika” volt a „közművelődés” leglényegesebb tényezője. Héron „játékszerei” nagyon is komoly és nagyon is praktikus célokra készültek: csodatevő helyek ajtaját nyitogatták, csodatevő isteneket mozgattak, hogy bámulja a nép a hatalmasok erejét. S Arkhimédészt is gyilkos eszközöket föltaláló hadmérnökként kellett dicsőíteni ahhoz, hogy becsülje Róma, hol a legfőbb érték a hatalom volt.

Lewis Mumford a városok sorsáról szóló nagy könyvében[146] elborzadva ír a római technika hatalmas alkotásairól; a Cloaca Maximáról, a Colosseumról, a vízvezetékek és a diadalívek súlyos kőboltjairól, a vég nélküli utakról, melyeknek hatalmas kövei mindenünnen Rómába vezettek. Persze nem a méretek miatt háborog Mumford, hanem azért, mert mindez a súlyos és monumentális hatalmasság jórészt céltalan s értelmetlen volt: a szemetet a város legnagyobb részében sohasem ürítették a több milliós modern városnak is tán túlméretezett Cloaca Maximába, hanem bűzös küblikben tárolták, s a város közvetlen szomszédságában vagy épp a városon belül halmozták föl; a hatalmas diadalívek, melyekkel megspékelték a meghódított Európát, Afrikát s Ázsiát, kapuk voltak, melyek nem határoltak el semmit, s hidak, melyek nem íveltek át semmit: valósággal szimbólumai lehetnének a kőbálvánnyá vált hatalom mélységes értelmetlenségének. S az utak, a híres utak, melyeknek kerek kövein állandóan katonák kemény sarui kopogtak értelmetlenül; ezek a tökéletes és folyton dicsért római utak kevesebb kereskedőt láttak, mint a középkori Európa poros és sáros, alig járható, útonállóktól s rablólovagoktól fenyegetett földútjai.

[146] Magyar fordításban is megjelent: Mumford, Lewis: A város a történelemben. Létrejötte, változásai és jövőjének kilátásai. Ford.: Félix Pál. Bp., 1985. Gondolat. 614 p., [64] t. *(– a szerk. megj.)*

*

A középkor technikai tudása semmi esetre sem hasonlítható a római-hellenisztikus világéhoz, sem mennyiség, sem szakmai színvonal tekintetében. De ez a volumenre s szakmai szintre nézvést lényegesen alacsonyabb rendű középkori technika elképesztően kapcsolatgazdag s szívvidámítóan funkcionális „szektor” volt. Itt azután nem építettek semmit, amit ne használtak volna; a gótikus székesegyházak fönséges tere például ugyanúgy s ugyanolyan hatásosan szolgálta az emberek „üdvösségét” (azaz jó közérzetét), mint az ezerféleképpen hasznosított vízikerekek az anyagi jólétüket.

A vízikereket természetesen igen jól ismerték az antikvitás mérnökei is, a rómaiak néhol valóságos „óriásmalmokat” üzemeltettek velük hatalmas katonai gabonaraktáraik mellett. Technikai megoldás tekintetében pedig az antik vízikerekek sokkal tökéletesebbek voltak XII–XIII. századi utódaiknál. Az antikvitásban azonban a vízikerék sohasem fejlődött igazi munkaforrássá, a középkorban pedig, miután a parasztok s mezővárosi polgárok megnyerték nagy harcukat, amit a földesurakkal vívtak a vízimalomért, hirtelen roppant sokféle munka elvégzésére alkalmas eszközzé vált a vízikerék: öntöztek, fűrészeltek, érceket zúztak, szivattyúztak, fújtatókat s mindenféle gépeket hajtottak a segítségével. Marc Bloch alapvető vízikerék-tanulmánya nyomán egy amerikai technikatörténész, Lynn White Jr., egész nagy középkori „munkagép-technológiát” rekonstruált, melynek anyaga a fa, munkaforrása pedig a „vízikerék-erőmű” volt; s föltárta eme fa- és vízikerék-technológia meglepően gazdag gazdasági kapcsolatait. Egészen másféle középkor bontakozott ki ezekből a vizsgálatokból, mint amilyent a háborúk s a hatalmasok történetéből addig ismertünk. Kiderült, hogy a kor hősei nem a fényes lovagok, sem a kövér papok, de még csak nem is a királyok vagy pápák voltak, hanem a kicsi folyóparti városokban bütykölő mesterek, a bányákat mívelő vájárok, az ércet zúzó s olvaszt& kohászok, a poros utakon poroszkáló kereskedők. Egyre vidámabban s gyorsabban poroszkáltak egyébként, mert – amint egy kitűnő nyugalmazott francia lovastiszt, Lefebre des Noëttes földerítette – a középkori Európában fölfedezték a ló *gazdaságos* befogását, ami – Lucien Febvre elemzése szerint – valóságos szállítástechnikai forradalomhoz vezetett. Végül azután (ritka kivételként) egy tudománytörténész, A. C. Crombie is észrevette a középkori technológia kivételes jelentőségét, s gondosan elemezte a technika és különféle experimentális tudományok – igen gyakran, először szinte szabályszerűen, csak a képzelet s az utópia világában élő – kapcsolatát. Mint minden nagy vállalkozás, a középkori technológia is hihetetlenül fantáziagazdag világ volt, a sci-fi írók elbújhatnak a középkori mesterek mellett, s sápadozhatnak az irigységtől fantáziáikat olvasva. A középkori mesterek fantáziái azonban, ellentétben a sci-fi írók papirosízű koholmányaival, valóságosak voltak akkor is, ha megvalósíthatatlanok, hisz összességükben, trendjükben az újkori természettudomány irányába mutattak. Ma már aligha kételkedhetünk, hogy a görög matematika óta a középkori technológia volt a legfontosabb lépés az újkori természettudomány megszületése felé vezető úton. Ezt persze már csak mi látjuk, a középkori mesterek nem is sejtették a matematika és a technika előre megállapított harmóniáját.

*

A tudást nemcsak megszerezni, alaposan elfelejteni is nehéz. Izidor, sevillai püspök (560–636) enciklopédiájából jól látható, hogy császárok, népvándorlás, kereszténység ellenére mennyi sok megmaradt, romokban, összefüggés és értelem nélkül, az antik tudás nagy eredményeiből még a legsötétebb középkorban is.

Ami a matematikát illeti, az oktatás rendszeressé válásától kezdve, tehát úgy a XI. századtól, Eukleidész első könyvei, Arkhimédész körkvadratúrája s az elemi számolási ismeretek a kötelező tantárgyakhoz tartoztak. S a XII. század végén, a XIII. században a középkor nagy, különleges, lényegében máig ismeretlen művelődési intézményeiben, az egyetemeken mindenütt fontos, néhol alapvető volt a matematika szerepe. Ezt a reánk maradt matematikai kéziratok tömegéből tudjuk, amelyek azonban Euklidész- vagy Arkhimédész-kommentárok alakjában íródtak, s így sokáig azt hitték, hogy nincs bennük egyéb jól-rosszul megemésztett antik anyagnál.

Pierre Duhem (1861–1916) kutatásai óta azonban megtanulták a történészek, hogy a középkor tudománya a rejtőzködés művészete; valósággal titkosírásként kell megfejteni. Már Duhem utalt rá, de tudni csak a legnagyobb kéziratmegfejtő, Anneliese Maier munkái óta tudjuk, hogy volt a középkori egyetemeknek saját, s méghozzá igen nevezetes matematikai problematikája is. A szerény kommentárok és kérdések mögött sokszor az újkori matematika alkalmazások szempontjából máig legfontosabb módszere, az „infinitezimális számítás” rejtőzködik. Pontosabban csak az „infinitezimális”, a „számítás” hozzáírása középkori-reneszánsz kontextusban anakronizmus. De ez a modern név érzékelteti leginkább az óriási különbséget, mely a primitív középkori infinitezimális megfontolásokat a tökéletes eudoxoszi-arkhimédészi „exhaustios módszertől” elválasztja. Az utóbbi nehéz, bonyolult, minden esetben külön-külön fölépítendő indirekt bizonyítás, teljesen alkalmatlan arra, hogy könnyű számolási szkéma fejlődjön ki belőle. Márpedig éppen ez a nagy műveleti könnyedség s általános érvény az újkori infinitezimális számítás nagy előnye, ezáltal válhatott a fizikai és technikai alkalmazások par excellence eszközévé. S ennek a fejlődésnek a gyökerei kétségkívül a középkori kéziratokban találhatók.

H. L. L. Busard például kiadta néhány éve a középkori matematika egyik igen érdekes kézikönyvét, Nicole Oresme *Questiones super geometriam Euclidis* című „előadási jegyzetét”, s le is fordította. A fordítást itt kettős értelemben kell érteni, s nem a nyelvi, hanem a matematikai része a fontosabb. Ugyanis modern analitikus jelölésekre fordítva le az antik geometrikus írásmódot, azonnal kiderül, hogy a néven s a jelöléseken túl a könyvnek nincs sok köze az euklidészi geometriához. Voltaképpen olyan kérdésekről szól a könyv, amiket mi az infinitezimális számítás megalapozásához sorolnánk: végtelen sorok összegéről, adott szabály szerint, folytonosan változó mennyiség adott határok közé eső nagyságának a kiszámításáról, egy adott számérték különféle végtelen sorozatokkal való megközelíthetőségéről s hasonlókról. Mindezt természetesen euklidészi formában és a skolasztikus filozófia kontextusában közli a könyv, úgyhogy Busard matematikai fordítása nélkül elég nehéz lenne megérteni a szöveget. Pedig Oresme ugyancsak igyekszik megkönnyíteni a fejtegetéseit. Úgyannyira, hogy – amit Euklidész soha nem tett volna – a könnyítéssel *indokolja* az ábrázolást: „És ami a legfontosabb – írja –, ennek az ábrázolásnak a segítségével könnyebben meg lehet érteni az uniformisan difformis kvalitásokról mondottakat, következésképpen az ábrázolás jó.” Így lopódzott be a középkori egyetemeken a görög matematika szigorú köntösébe bújva a könnyebbség és az alkalmazhatóság igénye, s ez ugyan olyan fontos volt, mint a folytonosan változó mennyiségek fogalma, s a velük való munkát lehetővé tevő „infinitezimális *számítás*” kidolgozása.

Ha nem is lehet a középkori skolasztikus matematikusokat – mint Duhem nagy fölfedezése hevében tette volt – „Galilei elődeinek” tekinteni, annyi kétségtelen, hogy az egész mai fizikára és technikára alkalmazott matematika elképzelhetetlen azok nélkül a – sokszor primitív és többnyire zavaros – fogalmak és módszerek nélkül, melyeket, a klasszikus görög geometriától tanulva, ők találtak ki. Azt is el kell mondani, hogy indítékaik éppoly kevéssé voltak gyakorlatiak, mint az euklidészi matematikáé. Isten dicsőségét akarták szolgálni s megkönnyíteni a tanítást, mi sem állott tőlük távolabb, mint a gyakorlati alkalmazás szelleme. A kegyelem végső fokát akarták kiszámítani, de az általuk elindított matematikai fejlődés hosszú és kanyargós út után az atomenergia fölszabadításához vezetett.

*

Egy francia tudománytörténész, Serge Moscovici, a hatvanas években, Amerikában, vaskos könyvet írt a természetszemlélet történetéről. A könyv Fernand Braudel, tehát majdnem az *Annales* égisze alatt jelent meg; majdnem, mert a nagy történész sohasem forrott annyira össze a nagy folyóirattal, mint Marc Bloch és Lucien Febvre, maradtak mindig *Annales*-on túli szabad vegyértékei.

Moscovici könyve például inkább emlékeztet a német eszmetörténészek legjobbjaira – Meineckére, az öreg, amerikai Kantorowiczra, a két Schrammra vagy Willy Hartnerre –, mint az Annales „törzsgárdájára". Komoly, nehezen érthető s mély a priori történeti konstrukciókon nyugvó könyv ez, hatalmas apparátust *mozgató,* hihetetlenül gondosan „belegt", s még azt a nehéz veretű ulánus-eleganciát sem nélkülözi, amit más klíma alatt (Hóman Bálint próbálkozásaiból is látható) nagyon nehéz felölteni.

Van azonban ebben a komoly és vaskos könyvben egy kitűnő fejezet, mely épp a matematika s a technika találkozását dokumentálja, s megmutatja, miként született ebből a drámai összeütközésektől sem mentes találkozásból a *mechanika*, amely azután a mechanikus természetszemlélet s az egész ún. „természettudományos forradalom" alapja volt.

A milánói székesegyházat – kezdi Moscovici a „világkép-mechanizáció" elbeszélését – először *ad quadratum* akarták építeni, azaz széltében-magasságában egyforma nagyra. Azonban építés közben az *ad triangulum* formát gondolták megfelelőbbnek, amely szerint az oromzat magasságát egy egyenlő oldalú háromszög határozta meg, melynek az oldala az épület szélessége. A hajó magasságának a kiszámítására azonban már nem futotta az építőmesterek tudományából, s fölkértek egy matematikust, név szerint Gabriele Stornacolót, az elvégzésére. „Stornacolo számításai alapján azután – már ahogy azt akkoriban, a XIV. század végén szokták – megbíztak egy főmérnököt (maximus inzignerius), hogy valósítsa meg. A maximus inzignerius az építőmesterek s a többi mérnök elé terjesztette a terveit, miként szándékozik a székesegyházat befejezni. A megvalósításhoz csak akkor kezdhetett hozzá, ha a többiek a tervet elfogadták."

A milánói székesegyház építőmesterei Jean Mignot-t választották főmérnöknek, s e miatt meséli el s elemzi olyan részletesen Moscovici a történetet. Jean Mignot ugyanis az addigi szokástól eltérően geometriai elvekre alapította a terveit, tudományosan akart építkezni. *„Ars sine scientia nihil est"* – „a mesterség semmi a tudomány nélkül", fejezte be ezzel a büszke mondattal, összefoglalásként, a tervek bemutatását. A befejezés vagy a geometria miatt-e, a milánói mesterek igen megharagudtak a főmérnökre, s parázs vita kerekedett. A lombárd mesterek évszázados tapasztalatukra és fölényes anyagismeretükre, no meg – lényegesen kevesebb joggal – Arisztotelészre hivatkoztak, s visszájára fordították

Mignot matematikai követeléseit: „A mesterség nélkül – summázták érvelésüket – nincsen tudomány.”

„Jean Mignot, a mérnök – összegezi az eset elemzését Moscovici – geometriai normáknak akart engedelmeskedni, rendszert akart, egyedi alkotást kívánt az építésben, nem pedig másutt már sikerült eljárások mesterről tanítványra hagyományozott megismétlését. A milánói mesterek viszont az építőmesterség szokásait védték, mely az empirikus szabályokat minden esetre kiterjesztette, s mit sem törődött a fizikai és mechanikai feltételek elemzésével; ők a konvencionális, megtanult ügyességükben bíztak. Amikor azt hangsúlyozták, hogy mesterség nélkül nincs tudomány, tulajdonképpen magát a tudományt is elutasították.”

Ekkor – a XIV. század végén – Nyugat-Európában a mesterek már régen a termelés és a társadalom tekintélyes tényezői, a tudományra hivatkozó „mérnökök” működése viszont a termelés szempontjából még elhanyagolható, s bár maguk gyakran jelentős egyéniségek, társadalmi jelentőségük csekély a mesterekéhez képest. Sokuk valósággal a társadalmon kívül állt, s mind jóformán a társadalom szélén, „marginális helyzetben”. De tán éppen ez a marginalitás kényszerítette őket szempontjaik pontos megfogalmazására s álláspontjuk szilárd megalapozására. A mesterek tapasztalati ismereteivel s szabályaival ellentétben ők a *bizonyító* tudományokra hivatkoznak, a geometriára s nemsokára a mechanikára; úgy, ahogyan azt az antik szerzőktől tanulták, elsősorban Euklidésztől és Arkhimédésztől. A XVI. században a mérnök-matematikusok legnagyobb dicséretének számított, ha „sienai” vagy „firenzei” „Arkhimédészeknek” nevezték őket.

Az antikvitás azonban csak példa volt, a mérnök-matematikusok hamarosan messzebb jutottak mintaképeiknél, s nem is mindig az általuk jelzett irányban. Ahogyan a művész-matematikusok a tér geometrizálásával a perspektivisztikus festészetet és az új építészetet, azonképpen a mérnökmatematikusok a *mozgás* geometrizálásával megteremtették a *mechanikát* a szó elméleti s gyakorlati értelmében: azaz a mozgás matematikai értelmezését és a gépek-műszerek föltalálását, tökéletesítését egyaránt értve alatta. Moscovici találó példák tömegével mutatja meg, mennyire lehetetlen a XVI–XVII. században a kettőt elválasztani egymástól. S azt is megmutatja, hogy miért: mindkettő egyazon mechanikus természetképben gyökeredzett, s egyazon „mechanikus filozófiába” torkollott. Ha valamit, érvel Moscovici, hát ezt a „mechanikus filozófiát” nevezhetjük a XVII. század nagy szellemi „forradalmának”; a tudománytörténet-írásban meghonosodott „természettudományos forradalom” helyett a XVII. században tulajdonképpen „filozófiai forradalomról” kellene beszélni. Ez a XVII. századi „filozófiai forradalom” a mérnökök természetképéből következő elveket összegezte; s ahhoz hasonlóan, ahogyan a mérnök kivált a mesterek közül, s ellenükre a geometriára hivatkozott, a mechanikus filozófia is a mesterek empirikus-arisztoteliánus világképének a tudatos *tagadásából* származott. Kész formájában, a XVII. századi mechanikus metafizikában azután a mérnökök filozófiája már az *egész* addigi természetképet érvénytelenítette. Nemcsak a skolasztikáét, hanem az antikvitástól örökölt természetfilozófiát, a természet organikus képét is, az egész antik kozmoszt. A természet mechanikussá változott, artefaktummá, amelyet csak matematikai elvek szerint lehetett – s *kellett* – megérteni. „Jean Mignot vagy Brunelleschi küzdelme a kőművesmesterek munkamódszere és szelleme ellen lényegében nem különbözött Galilei vagy Descartes küzdelmétől a skolasztika ellen. Csak az előbbi ürügye egy katedrális volt, az utóbbi kerete pedig az Univerzum." A Világ nagy óraművé vált, melyet Alkotója egyszer elindított, s a többit rábízhatta a „mozgás törvényeire", hisz „az artefaktum, a műtermék, az automata független alkotójától, és semmiféle intelligens erőt sem követel mozgásához". A mérnök-filozófusok természete műtermék volt, „kontra-natura", melyet meg kellett konstruálni, alapelvekből axiomatikusan le kellett vezetni, „ki kellett találni". Mert a „mechanikus filozófus föltaláló. Nem elégszik meg azzal, hogy megérti és megvizsgálja, amit a mesterektől vagy a többi tudóstól tanult, azonnal tökéletesíteni is akarja, geometriai arányokat akar megállapítani, meg akarja javítani az ismert műszereket. Nem elégszik meg mások kísérleteinek az interpretálásával, maga is kísérletezik, de nem azért, hogy a már ismertet vagy sejtettet igazolja, hanem hogy új következményeket találjon. Az eszközök, melyekre rábízza magát, arányok föltalálására alkalmasak, az erők s hatásuk viszonyítására. A mechanikus filozófus föltétlenül bízik a mérésekben, az eszközök kombinálásával kapott információban."

*

„A technológia, melyet ma bénultan figyelünk, hogyan őrli – nem tudni még, apróra-e vagy durvára – az emberiséget, nem experimentális. Nem is racionális. A technológia a méhkas sötét és kérlelhetetlen törvényei szerint, matematikai szabályok vak alkalmazásával ismétli milliószor a kísérletek eredményeit. Napjaink óriás számítógépei természetes folytatásai s bővítései csupán ama számtalan rajztáblának s logarlécnek, melyek egy-két generációval ezelőtt hidakat, vasutakat, erőműveket építettek. Más civilizációk is építettek erős, sima utakat, melyek nem vezettek sehová, fölhalmoztak hatalmas nyomornegyedeket, s készítettek az emberek tömeges összezúzására, leszúrására, megégetésére szolgáló eszközöket. De csak a mienk csinálta mindezt a matematika segítségével. Ha kísérleti módszeren tekintély helyett gyakorlati próbálgatáson alapuló tudást értünk, nincs mit dicsekednünk, hisz ilyen ismeret minden kor föltalálóinak s mestereinek sajátja. A nyugati kultúra technológiája éppen azáltal különbözik a többitől, hogy matematikát alkalmaz a természettudományban, a mesterek hagyományos tudását számítással helyettesíti.”

Tán nem nehéz megismerni, hogy az utolsó idézet már nem Moscovicitől való. C. Truesdell írta, Leonardo da Vinci mechanikájáról szóló szép esszéjében. Nem fölösleges talán megemlíteni, hogy Truesdell nem holmi technika- és matematikaellenes „széplélek”. A modern technikai mechanika egyik fontos, új ágának a megteremtője s aktív művelője, és egy személyben a mai legtekintélyesebb tudománytörténeti folyóirat főszerkesztője.

*

És itt abba is hagyható a mese, Moscovicinak és Truesdellnek bizonyosan mindenki el fogja hinni, hogy az újkori nyugati civilizációban matematika és technika összekapcsolódása esszenciális, jellegzetes és sorsterhes elem. S most már elég sok szép komoly idézet sorakozik itt ahhoz, hogy megbocsátható legyen a fenti fejtegetések felelőtlen összefoglalása, mondjuk egy XII–XIII. századra s egy XVII. századra vonatkozó mátrixban.

	m	tt	g	t
m	.	+ +	+	
tt	+ +	.		
g	+		. . . .	+ + + +
t			+ + + +	. . . .

	m	tt	g	t
m	. . . .	+ + + +	+	+
tt	+ + + +	. . . .	+ +	+
g	+	+ +	. . . .	+ + + +
t	+	+	+ + + +	. . . .

A mátrixelemek külön magyarázata fölösleges, hisz csak a fenti szövegben részletesen elmondottakat ábrázolják. Meg kellene azonban még határozni, mi szerepelhetne most a tudomány s a technika fejlődését irányító széli sor s oszlopként? A római és a hellenisztikus államkultuszhoz hasonló tényezőről a feudalizmus korában nyilván szó sem lehet, de a XVII. századi Európa nemzeti állam rendszere is egészen más elvre, az „államraison" elvére alapult. A mágia természetesen élt s hatott még a XVII. században is; a XV. és XVI. században pedig valóságos reneszánsza figyelhető meg a középkori viszonylagos föld alá szorítottsága után. A tudománytörténet-írás, kivált Lenoble abbé kitűnő könyvei óta, jól ismeri a mágiának ezt az újra megerősödését, s gyakran segítségül hívja nehéz „problématörténeti" helyzetekben megmagyarázhatatlan tények megmagyarázására. A mágia – kivált asztrológia és alkímia formájában – kétségkívül sokszor és igen sok helyütt hatott a reneszánsz századai alatt, azonban a technika s tudomány szempontjából már éppoly kevéssé vagy csak annyira számított irányító erőnek, mint a középkor századai alatt a mindenütt jelenlevő vallás. Az asztrológusok, alkimisták és papok szerepe természetesen igen fontos a matematika, természettudományok s technika fejlődésében, de mint egyéneké, s nem mint az asztrológia vagy a vallás képviselőié.

Matematika, technika és természettudomány most már mindinkább kölcsönös kapcsolataiból élt vajon, s legfőbb ösztönzőjükké a gazdasági fejlődés kezdett válni? Vagy éppen most, önállósulásuk és gyors növekedésük korában kellene föltárni s igazán figyelni sokfelé ágazó vonatkozásaikat a szellemi s társadalmi élet mind összetettebbé váló világában? Kapcsolataikat, melyek teológiához, építészethez, festészethez, szerencsejátékokhoz, hitvitákhoz, filozófiákhoz, könyvnyomtatáshoz, klasszika-filológiához, regényekhez, versekhez, utópiákhoz fűzik őket, elválaszthatatlanul? Néhány nagy irodalomtörténész, elsősorban Marjorie Nicolson, Jacques Roger, Benkő Samu könyvei mindenesetre szépen igazolják, hogy valójában vonzások és választások kimeríthetetlenül gazdag rendszere rezonál minden, mégoly „szakmainak" látszó nagy fölfedezésre. A napjainkban divatos „kétkulturológia" és „művelődésintegráció" akadémikus frázisai és üres általánosításai ellenére: matematika, technika, természettudományok, irodalom, művészetek története meghatározások és szerepek, zaklatottság és megnyugvás, való és látszat, utópia és tényszerűség alig kibogozható kavargásába rejtőzik a mindent megmagyarázó „Problemgeschichte" és a legkisebb részletnek is beláthatatlan nagy feneket kerítő „korszellemeskedés" elől. Jó, ha legalább a rejtekhelyeit sikerül kinyomozni.

A tudományfejlődés kérdőjelei[147]

Gondolatok Fehér Márta könyvéről

Az egész tudományfilozófia és az egész tudománytörténet-írás erősen átalakult a hatvanas és a hetvenes években. De a nagy változás, amit Kuhn, Feyerabend és Lakatos nevével szokás szimbolizálni inkább, mintsem jellemezni, nem szorítkozott erre a két – önmagában is ugyancsak szerteágazó – diszciplínára: áthatotta úgyszólván a modern kutatómunka egész gyakorlatát. Hiszen melyik magát (úgylehet a kelleténél is többre) becsülő tudós nem kezd mindjárt „paradigmák"-ról beszélni, mihelyst eltöpreng felette, hogy mit csinál, s ki nem könyveli el „természetes"-ként, hogy „teoretikus elkötelezettsége" szükségképpen kiterjed megfigyeléseire? És akad-e még akár a legmegátalkodottabb empiristák között, akit zavar ez a teoretikus teher, hiszen réges-rég megtanulta mindenki elválasztani – módszerétől függetlenül vagy épp ellenére – a dolgok „megfigyelhetőségét" a rájuk vonatkozó terminusok „jelentésétől", hogy így saját „kutatási program"-ját többé-kevésbé kifejtett „jelentésváltozások"-on keresztül hozzápasszíthassa mások szimbolikusan vagy effektíve „versengő" kutatási programjaihoz. Igen, a kutatók – még ha maguk tán nem is akarták vagy nem is tudtak róla – jól megtanulták a Kuhn, Feyerabend és Lakatos. feladta leckét. Így hát már pusztán emiatt széles körű érdeklődést kellene keltenie Fehér Márta könyvének. De a kicsi könyv igazi nagy érdeme mégsem ez az óhatatlanul divattól függő aktualitás. Az inkább, hogy ahhoz a nagyon kevés – úgylehet fél kézen megszámolható – könyvhöz tartozik a beláthatatlanná duzzadt tudományfilozófiai és tudománytörténeti irodalomban, aminek csakugyan van mondandója a tudomány tényleges gyakorlatáról.

Nyilván sok minden magyarázhatja a kis könyv ritka értelmességét; nem utolsósorban az, hogy elsőrendűen képzett és kivételes képességű filozófus írta. A recenziónak azonban parlagibb érvekkel illik haladnia, említsünk ezért inkább három jól elkülöníthető szempontot a könyvben tárgyalt megoldás sikerének indokaként. Az első a szerencsés témaválasztás, a második a választott terület szakszerű történeti rekonstrukciója, a harmadik a releváns rekonstruált történet ügyes beágyazása egy (ugyancsak fejlődésében tekintett) jelentéselméletbe.

[147] Forrás: Vekerdi László: A tudományfejlődés kérdőjelei. Gondolatok Fehér Márta könyvéről. [Fehér Márta: A tudományfejlődés kérdőjelei. A tudományos elméletek inkommenzurábilitásának problémája. Bp., 1983. Akadémiai. 191 p.] (Ism.) = Természet Világa 114 (1983) No. 8. pp. 375–376.

Mármost ami az első szempontot illeti, a témaválasztás azért mondható rendkívül szerencsésnek, mert a szörnyen szerteágazó és a gyakran önellentmondásokkal teli kuhni–feyerabendi problematikából sikerült elhatárolnia egy viszonylag jól megfogalmazható koherens területet, amely bár rész, magába sűríti valamiképpen az egész kérdéskör főbb erővonalait. Ilyen jól meghatározható és centrális téma ugyanis a tudományos terminusok jelentésváltozásának kérdése a tudomány fejlődése során. Ha erre a kérdésre sikerül megnyugtatóan válaszolni, joggal várható, hogy értelmezhetővé válik a kuhni „paradigmaváltás", illetve a feyerabendi „elmélet-inkommenzurabilitás-, a postpopperiánus tudományfilozófiák Kuhnnál és Feyerabendnél egyaránt valósággal „deus ex machina"-ként fellépő centrális dogmái. A jelentésváltozás kérdésére azonban nem lehet pusztán logikai, illetve tudományelméleti elemzéssel felelni, hanem csakis az egész témakör gondos történeti rekonstrukciójával.

A neopozitivizmus (illetve a maga módján vele párhuzamosan haladó Popper) örökölte a századvégi-századeleji klasszikus pozitivizmustól az ahistoricitást és az érzet-mitológiát, de a rohamosan fejlődő matematikai alapkutatások (Frege, Russell, az ifjú Wittgenstein) hatására – és nem kis mértékben mintájára – empirikusan verifikálható (illetve falzifikálható) elméletek generálására alkalmas „univerzális tudományos nyelv" kidolgozását tűzte ki célul maga elé. Csakhogy minél pontosabban megfogalmazódott a munka során a cél, annál inkább kiderült a használt fogalmak és eljárások elégtelensége. Ezek az imponálóan körülményes logikai módszerek egyszerűen alkalmatlannak bizonyultak még a legegyszerűbb tényleges kutatómunka modellezésére is, nemhogy a tudományfejlődés bonyolult kérdésében eligazíthattak volna. Minél tüzetesebben megfogalmazódtak ugyanis az empirikus ellenőrizhetőség (igazolhatóság vagy megcáfolhatóság) feltételei, annál inkább megmerevedett a módszer, míg végül formalizált zártságába immár semmi be nem juthatott, ami eleve benne nem volt. Azaz a tökéletes tudományos módszer eleve kizárta még a lehetőségét is minden váratlannak és újnak. A filozófusok és tudománytörténészek többsége roppant elégedett volt ezzel az eredménnyel, és. csak nagyon kevesen – elsősorban a késői Wittgenstein és Norman R. Hanson – igyekeztek kitörni ebből a verifikációs, illetve falzifikációs paradicsomból (nyelvjátékok, theoryladenness). A késői Wittgenstein gondolatai azonban olyan nehezek és homályosak voltak, hogy még félre is csak páran ha tudták érteni, Hanson pedig a megfigyelések elméletfüggőségét (voltaképpeni nagy új gondolatát) a régi verifikációs módszerekre emlékeztető leképezési elméletbe ágyazta be. Érthető, hogy valóságos felszabadulásként hatott szinte mindenfelé a tudomány világában Thomas S. Kuhn kicsi könyve *A természettudományos forradalmak struktúrájáról*.[148] Az azonban már eléggé meglepő, hogy Kuhn tézisei (a most recenzeált könyv roppant tömörsége ellenére is talál rá időt, hogy kellően megvilágítsa) milyen jól alkalmazhatók a tudományfilozófiára magára: a klasszikus tudományfilozófiák és kivált a logikai empirista tudományelmélet „belső problémái" bár egy részük különféle ad hoc korrekciókkal kiküszöbölhető volt – addig-addig halmozódtak, hogy „Kuhn könyve valóságos krízist váltott ki (és tudományfilozófiai paradigmaváltást követelt)". A paradigmaváltás rekonstruálásával tehát mintegy át lehet világítani Kuhn tudományfejlődés-elméletét, meg lehet vizsgálni, vajon csakugyan olyan ugrásszerű volt-e ez a paradigmaváltás, afféle látásmegváltozás (Gestalt-switch), amilyennek Kuhn a paradigmaváltásokat általában ábrázolta? És csakugyan annyira merőben különbözik egymástól a régi és az új paradigma, hogy valósággal összehasonlíthatatlan a kettő? Úgy van-e csakugyan, ahogyan – eme inkommenzurabilitás következményeit radikálisan levonva – Feyerabend hirdette: a tudományos elméletek idegen és önmagukba zárt világok, terminusaik nem fordíthatók le egymásba, jelentésük szigorúan a saját elméletükre korlátozódik, melyek éppen ezért nem hasonlíthatók össze. S mivel minden megfigyelés elmélettől függő, semmi esély sincsen rá eldönthetni, hogy melyik elmélet „igaz", vagy hogy az egyik kevésbé téves, mint a másik. Az áttérés egyik elméletről a másikra irracionális aktus, a tudomány fejlődése nem ismer racionálisan megfogalmazható szabályokat: minden megteszi, csak beváljék.

Látszólag aligha érzékelhető nagyobb ellentét, mint ezé a szélsőséges „metodikai anarchizmus"-é és a hagyományos (pozitivista és popperiánus) racionalizmusé. Csakhogy Feyerabend hiába különítette el – nagyon helyesen – a „megfigyelhetőség"-et az „igaz"-tól, a jelentés"-t (anélkül, hogy mélyebben megvizsgálta volna) ugyanúgy meghagyta az „igaz" érték vonzáskörében, akár a logikai racionalizmus. Így a szíve mélyén megőrizte a hagyományos tudományfilozófiák értékrendszerét, és szélsőséges irracionalizmusa, úgy-lehet, éppenséggel szélsőséges racionalizmusának terméke; meglehet, tán el is kerülhető a „jelentés" és az „igaz" viszonyának gondosabb megvizsgálásával.

Ez a jelentéselméleti vizsgálódás a könyv lényege, s egyben legragyogóbb része. Érdembeli recenzeálása azonban sajnos reménytelen; a szakmában nem eléggé jártas olvasó amúgy is csak akkor fog belőle megérteni valamit, ha elolvasása előtt (vagy első elolvasása után) átnéz egy alapos tudományfilozófiai bevezetést, mondjuk Wartofsky magyarul is megjelent könyvét.[149] Csak ha elsajátította úgy-ahogy a logikai racionalizmus végletekig (és

[148] Magyar fordításban: Thomas S. Kuhn: A tudományos forradalmak szerkezete. Ford.: Bíró Dániel. Utószó: Fehér Márta. Bp., 1984. Gondolat. 321 p. (Társadalomtudományi könyvtár) (2000-ben és 2002-ben is megjelent.) *(– a szerk. megj.)*

[149] Marx W. Wartofsky: A tudományos gondolkodás fogalmi alapjai. Bevezetés a tudományfilozófiába. Ford.: Vámosi Pál, Békés András. Bp., 1977. Gondolat. 484 p. *(– a szerk. megj.)*

végletesen) kifinomult szellemi eszköztárát, csak akkor fogja méltányolni tudni ezt a hallatlanul körültekintő és pontos rekonstrukciót, mely a terminusok „értelmé"-nek és „jelentés"-ének eredeti fregei megkülönböztetésétől elvezet – Carnap és Quine vitájával a középpontjában a „jelentés" bonyolult modern nyelvelméleti megközelítéseiig.[150] Frege a matematika (tehát egy elvben kifogástalanul felépíthető deduktív „nyelv") megalapozására gondolt, amikor egy terminus – vagy terminusokból összetett kijelentés – „értelmé"-ül két „érték", az „igaz" és a „hamis" egyikét jelölte ki, a „jelentés"-t pedig egyszerűen azonosította a jelölt „dolog"-gal, melyre „vonatkozott" (reference). A „jelentés" így egyszerű névreláció a (matematikai) nyelven *belül*. A logikai pozitivizmus ellenben Fregét utánozva fából vaskarikát faragni kényszerült, hisz végül mindig a „megfigyelés"-re (tehát egy rendszeren *kívüli* adottságra) kellett „hivatkozzon" (refer) minden ki-„jelentés" „igaz"-olása gyanánt. Ahogyan Keats a görög vázához, úgy kényszerült énekelni a logikai racionalizmus „szépség" helyett „jelentés"-sel: „Meaning is truth, truth meaning, – that is all/Ye know on earth, and all ye need to know." És hiába volt Carnap és Quine egymásnak feszülő elméje, hiába próbálkoztak az „elméleti" és a „megfigyelési" nyelv, az „analitikus" és a „szintetikus" gondos szétválasztásával, a rafináltan kigondolt dichotómiáik alól a végén mindig kikandikált a „jelentés" és az „igaz" racionálisan meg nem indokolható azonosítása. Minden logikai racionalizmus alapvető korlátja ez az azonosítás, ennyiben Feyerabend is logikai racionalista.

Mégsem volt Carnap és Quine sok fáradozása és vitája hiábavaló. Eredeti célkitűzésük ugyan szükségképpen kudarcot vallott, ám közben olyan fogalmi eszköztárat dolgoztak ki, ami alkalmasnak bizonyult a jelentés szerkezetének vizsgálatára. Az alap Carnap lángeszű fogása volt, aki extenzióra (azon dolgok halmaza, amelyekre a terminus helyesen alkalmazható) és *intenzióra* (durván szólva a terminus és egy dolog viszonya) osztva fel a terminus „értelmé"-t, úgyszólván „becsempészte" ebbe, az elvben legalábbis formalizálható részbe a jelentést. A logikai pozitivizmus további története azután éppen a formalizálás heroikus kísérleteiről és kudarcáról szól. Ámde a tarnapi tett egyúttal fel is szabadította a régi fregei „jelentés"-t, a referenciát, amely így mintegy megüresedve, új értelmezések hordozójává válhatott. Legelsőként Bence György figyelmeztetett rá még 1965-ben, hogy az így felszabaduló referencia alkalmas lehet igazságértéktől független vonatkozások jelölésére: vonatkozhat olyan dolgokra is, amikről a terminus értelme nem egészen igaz módon állítható. Szétválasztható tehát a jelentés és az igazság kérdése.

[150] Lásd újabban: Forrai Gábor: Rudolf Carnap. Bp., 1984. Kossuth – Zrínyi. 122 p. (A polgári filozófia a XX. században) *(– a szerk. megj.)*

És ezzel eljutottunk a tényleges tudományos munkára vonatkoztatható filozófiai megfontolások küszöbére, hiszen „egy (tudós-) közösségben sikeres lehet a referálás olyan objektum(ok)ra is, amely(ek)re a sense-ben adott azonosító deskripciók valójában nem igazak, sőt – hozzátehetjük – a terminus használói esetleg nem is hiszik, hogy igazak. A deskripció igazsága (igaz módon való állíthatósága a referensről) kétféle értelemben is irreleváns a referálás sikeressége szempontjából, illetve nemcsak az a lényeges, hogy (a mindenkori legújabb elmélet szerint) a referens valóban rendelkezik-e a deskripcióban megadott tulajdonságokkal, hanem az sem, hogy a referáló úgy vélje, hogy a deskripció ráillik a referensre. Ez utóbbi azonban általában fennáll: a referáló igaznak hiszi a referensről az általa használt terminus sense-ében adott deskripciót. A referálás tanúja vagy tanulmányozója azonban, az, akinek számára a referálási aktus lezajlik – nevezzük a referálás címzettjének –, már nem kell feltétlenül higgyen az adott deskripciónak a referensről való igaz állíthatóságában ahhoz, hogy sikerrel, a referáló szándékainak megfelelően azonosíthassa a referenst, tehát *ismernie* kell a terminus értelmét, de nem kell *igaznak* tartania a referensről. Azaz tudhatom jól, hogy miről beszél valaki, anélkül, hogy egyetértenék vele, anélkül, hogy igaznak kellene tartanom. Vagy részben egyetérthetek vele, és megpróbálhatom a magam szempontjainak megfelelően átalakítani, mintegy. „átfesteni" a régi témát az újabb tudományos elmélet „stílus"-ában. S mindezt azért, mert a referencia azonosítása a sense-től nagyrészt függetlenül megvalósítható. Nem csoda, hogy ez a felszabadult és újraértelmezett referencia lett valamiképpen minden modern „reformista" tudományfilozófiai (és tudománytörténeti) törekvés éltető bőségszaruja. És ugyan mi más a racionalitás velejét képező „kétely"?

De a tudomány történeti fejlődése szempontjából úgylehet még többről van itt szó. Ez a nem-egyet-értés ugyanis nem holmi „lefordítás" kérdése, a dolgokhoz pontosan hozzárendelt terminusok értelmében. „A tudomány feladata ugyan a (terminusok által jelölt) létezők (dolgok, tulajdonságok, viszonyok) sajátosságainak és összefüggéseinek megállapítása, s ez – mivel a létezőket a terminusok képviselik – szemantikai síkon ekvivalens a jelölő terminusok jelentésének kidolgozásával, ez a folyamat azonban nem teszi lezárttá, teljesen determinálttá a tudományos nyelvet; a tudomány fejlődésének lehetőségét – többek között – az biztosítja, hogy a használt terminusok jelentése homályos...". Homályos, tehát eleve félreérthető. A tudomány fejlődése, úgylehet, ugyanúgy alkalmas félreértések sorozataként értelmezhető, mint minden más emberi érintkezésé, ahol minden megértés mélyén rendszerint valamilyen félreértés rejlik, és minden félreértésben lehet valamicske megértés. Efféle félreértéseken alapuló szüntelen újraértelmezések bővítették nemzedékek számtalan során át az emberi érintkezések világát. Tán éppen ezt gyanította a késői Lakatos Imre, és ezért szállt egyre erélyesebben síkra a matematika nyílt „empirista” értelmezése mellett. De tán Feyerabend polgárpukkasztó módszertelenkedései megett is ez a (fel nem ismert) hermeneutikai homály rejtőzködik? És vajon nem erre a többféle értelmezés lehetőségét rejtő homályra utal-e éppen Mary Hesse – ha ugyan jól értem félre – a maga modalista módján: „Az elméletek nem nyelvi entitások; inkább tekinthetők lehetséges világok modellcsaládjaiként, melyeknek empirikus részstruktúrái jelenségeket reprezentálnak.”

De hagyjuk a „félreértést”, nem ez a recenzió dolga. Az ellenben igen, hogy ismét, nyomatékkal figyelmeztessen a kicsi könyv nagyságára. Ne féljünk a szótól: Kuhn könyve óta – Lakatos munkássága mellett – ez a legfontosabb lépés a tudomány – a *tényleges* tudományos munka – fejlődésének megértéséhez. A kevésbé félreértéséhez.

Diszciplinaritás és interdiszciplinaritás a tudománytörténet-írásban[151]

Húsz-huszonöt éve nem tűnt még képtelen vállalkozásnak áttekinteni a tudománytörténet-írás főbb irányait. Ma már nyilvánvalóan lehetetlen. Az időközben bekövetkezett diszciplínarobbanás miatt az is erősen kétséges, hogy beszélhetünk-e még egyáltalában „tudománytörténet-írás"-ról. Abban a jól meghatározható, vagy legalábbis körülírható értelemben, mint húsz-huszonöt éve, bizonyosan nem. De nem azért, mert az – egyéb területekéhez hasonló – exponenciális publikációnövekedés eleve meghiúsítja a személyesen értékelt áttekintésnek még a reményét is. Kétségkívül nagy baj ez is, hiszen e nélkül legfeljebb komputerizált eklekticizmusra futja, de ez legalább afféle fáradt kollektív bölcsesség formájában még lehetséges. A tudománytörténet-írásban ellenben még efféle diszciplináris szintézisre is legfeljebb népszerűsítő szinten és dilettáns formában kerülhet sor napjainkban. A megszámlálhatatlan diszciplínára hasadt tudománytörténet-írásban sokkal könnyebbnek ígérkezik ma már valamilyen „külső" – művelődés-, eszme-, társadalom-, technika-, problématörténeti – kapcsolódást keresni, mintsem megkísérelni akár egy kor vagy egyetlen tudomány történetének az áttekintését a vonatkozó részletkutatásoknak megfelelő szakmai szinten. A részletkutatások ugyanis annyira nehezekké és ezoterikusakká váltak, hogy mondjuk egy Galilei-kutató aligha remélheti, hogy érdemlegesen hozzászólhasson valamilyen Leibniz-problematikához. Az elmúlt húsz-huszonöt esztendőben páratlan mérvű szakmai elkülönülés és ezoterizáció zajlott le a tudománytörténet-írásban, és egyáltalában nem csupán a nagy tradicionális csomópontokban, mint amilyen a galileológia, a darwinológia vagy a newtonológia.

Látszólag tán nem lenne túlságosan nehéz tudományszociológiai okokat keresni ehhez a kérlelhetetlen – és úgy látszik megfordíthatatlan – differenciálódáshoz: a disszertációk és docentúrák szaporodása, a publikációs lehetőségek kisebb mértékű, de állandó bővülése, új (és olykor meglepően gazdag) forrásanyag forgalomba kerülése, a természettudományok (helyeselt vagy támadott) jelentőségnövekedése, a könyvpiac – népszerűsítő irodalommal felpumpált – érdeklődése valamiképpen mind ezt a specializációt segítette. De a folyamat ott is óhatatlanul lezajlott, ahol ezek a külső okok nem, vagy alig jelentkeztek; létezniük kell tehát valamilyen genuin belső jellemzőknek is, valamilyen inherens paramétereknek, melyeknek függvényében a változás legalább nagy vonalaiban leírható.

[151] Forrás: Vekerdi László: Diszciplinaritás és interdiszciplinaritás a tudománytörténet-írásban. In: Vekerdi László: Tudás és tudomány. Bp., 1994. Typotex. pp. 430–438. – A szöveg eredetije 1984-ben íródott, de először 1994-ben jelent meg.

Ezeket a paramétereket azonban se izolálni, se elemezni nem könnyű. A szakma aktív művelői ugyanis nem efféle paraméterek szerint tájékozódnak. Ők a maguk „témáikban” és „tényeikben” gondolkoznak, és legfeljebb „elkötelezettségüket”, illetve a „tények” „elméletfüggőségét” ismerik el, illetve fel. Továbbá az se remélhető, hogy sikerül csalhatatlanul meghatározni a paraméterek rendszerét úgy, hogy terükben világosan elkülönüljenek a differenciálódás főbb csomópontjai, illetve „clusterei”. Valószínűleg nincs is efféle koordinátarendszer: egy diszciplína differenciálódása nem bontható fel lineáris komponensekre. Inkább – hogy a matematikai képnél maradjunk – valamiféle bonyolult „bifurkációs” illetve „branching” dinamika tételezhető fel, látványos nem-lineáris ugrásokkal.

De akkor ebben a képben ki nem küszöbölhető strukturális szerephez jut a véletlen. A diszciplína-differenciálódás sztochasztikus folyamat, amelyben legfeljebb tendenciák specifikálhatók, méghozzá ezek sem egyértelműen.

A tudománytörténet-írás mai gyors differenciálódásában még a felületes szemlélőnek is nyomban szembetűnő tendencia a tudományfilozófiák kihívása. Lakatos Imre híres aforizmája óta alig akad tudománytörténész, aki valamilyen tudományfilozófiára ne hivatkozna, illetve *merne* ne hivatkozni, s a lehetséges tudományfilozófiák nagy száma és meglehetős különbözősége miatt ez a hivatkozás érthetően erős szegregálódásra vezet. Mert bár például a szabadesés törvénye mindenképpen a *mi* $s = \frac{g}{2} \cdot t^2$ képletünknek megfelelő matematikai alakban írható csak fel, a törvény története, és így értelmezése merőben más lesz aszerint, hogy popperiánus, kuhniánus, lakatosinánus vagy feyerabendiánus filozófia szerint nézi valaki.[152] És nemcsak azért, mert az egyes filozófiákban másként jelentkezik a felfedezés; ez különben úgy nagyjából még érthető és elfogadható. A baj az, hogy a képletben szereplő fogalmak – az út, az idő, a sebesség, a gyorsulás – jelentése más és más az egyes filozófiákban, s a nyert eredmények így nem, vagy csak óriási erőfeszítések árán

---

[152] Magyar nyelven *(– a szerk. kieg.)*:
Lakatos Imre: Bizonyítások és cáfolatok. A matematikai felfedezés logikája. Ford.: Boreczky Elemér. Bp., 1981. Gondolat. 244 p. (2. kiad.: Bp., 1998); Kuhn, Th. S.: A tudományos forradalmak szerkezete. Ford.: Bíró Dániel. Bp., 1984. Gondolat. 321 p. (2000-ben és 2002-ben is megjelent); Popper, Karl R.: A historicizmus nyomorúsága. Ford.: Kelemen Tamás. Bp., 1989. Akadémiai. 165 p. (Hermész könyvek); Popper, Karl R.: A tudományos kutatás logikája. Ford.: Petri György, Szegedi Péter. Bp., 1997. Európa. 509 p.; Popper, Karl R.: Megismerés, történelem, politika. Válogatott írások és előadások. Ford.: Darai Lajos Mihály. Bp., 1997. AduPrint. 267 p. (Megújuló világképek); Lakatos Imre tudományfilozófiai írásai. Ford.: Benedek András, Forrai Gábor. Bp., 1997. Atlantisz. 188 p. (Kísértések); Popper, Karl R.: Szüntelen keresés. Intellektuális önéletrajz. Ford.: Pintér G. Gábor, Pintérné Lederer Vera. Bp., 1998. Áron. 229 p.; Popper, Karl R.: Test és elme. Az interakció védelmében. Ford.: Káldy Zsuzsa. Bp., 1998. Typotex. 171 p. (Test és lélek); Feyerabend, Paul: Három dialógus a tudásról. Ford.: Tarnóczi Gabriella. Bp., 1999. Osiris. 234 p. (Horror metaphysicae); Popper, Karl R.: A nyitott társadalom és ellenségei. Ford.: Szári Péter. Bp., 2001. Balassi. 720 p.; Feyerabend, Paul: A módszer ellen. Ford.: Mesterházi Miklós, Miklós Tamás, Tarnóczy Gabriella. Bp., 2002. Atlantisz. 649 p. (Kísértések)

hasonlíthatók össze, illetve vonatkoztathatók egymásra. Az erőfeszítések azonban nem igen fizetődnek ki, így aztán inkább párhuzamos diszciplínák alakulnak ki magán a galileológián belül is, a találkozás minden reménye nélkül. Tisztán szakmai szempontból persze ez se haszontalan, hisz meg lehet írni – meg is írták – a kérdés „problématörténetét”, és fel lehet tárni a különböző Galilei-képek episztemológiai inkommenzurabilitását, illetve összehasonlíthatóságát; ezzel azonban újból csak egy új diszciplína keletkezett: a tudománytörténet-írás problématörténet-írása, ami lehet érdekes vagy érdektelen, de Galilei szempontjából, a primer történet szempontjából mindenképpen irreleváns. Annyit mindenesetre megmutatott ez az önmagára reflektáló diszciplína, hogy a különféle tudományfilozófiák frazeológiája és eszmerendszere inkább csak a kort tükrözi, melyben keletkeztek, és eredeti céljuk, az egykori történés jobb megértése céljából meglehetősen érdektelenek.

Érdektelenek és mégsem nélkülözhetők. Mert bár Feyerabend Galilei-képe lehet merőben téves és félrevezető, de át- meg átjárta a kor egész tudományfilozófiáját és ezáltal másodlagosan tudománytörténet-írását, el egészen a látszólag legszigorúbban empirikus kéziratkutatásokig, és a hatás ismerete nélkül többnyire csak a téves értelmezések tömege szaporítható. Ha tetszik, ha nem, a nagyfokú reflektáltság ma már nem irtható ki a historiográfiából, a tudománytörténet-írásból úgylehet a legkevésbé. És ez nem egyszerűen azt jelenti, hogy ismerni kell a tárgyra vonatkozó másodlagos forrásokat, lehetőleg mindet, de a legfontosabbakat mindenképpen, ami mellesleg önmagában is elég kemény követelmény. A tudománytörténet-írás önreflexiója annyi filozófiai és logikai elemet tartalmaz, hogy szükségképpen önálló diszciplínaként művelhető csak eredményesen – jó példa rá Mary Hesse, vagy még inkább Fehér Márta munkássága –, és ez a diszciplína kívülállóknak többnyire meg sem közelíthető. Az avatott, illetve a dologhoz értő tudománytörténészek tehát elbizonytalanodnak vagy eleve visszahúzódnak, és megnyílik az út a dilettánsoknak: megszállottaknak és karrieristáknak. S még jó, ha – mint Asimov – megállnak az úgynevezett „magas” népszerűsítésnél, s nem pályáznak – mint Silló-Seidl – kutatói babérokra.

De sajnos ma már nem megoldás az sem, ha valaki elegáns grandezzával néz el a tudományfilozófiák kihívása felett, és a megszokott magas szakmai szinten folytatja a mesterségét. A legszebb példa erre az előkelő elzárkózásra a matematikatörténet-írás két nagy öregének, Otto Neugebauernek és Bartel Laendert van der Waerdennek az újabb munkássága. Harminc-negyven évvel ezelőtti könyveik méltán számítódnak a szakma nagy klasszikusaihoz, van der Waerden – magyarra jó nagy késéssel lefordított – *Erwachende*

Wissenschaft-ja (1956)[153] hasznos és inspiráló összefoglaló volt a maga idejében, Neugebauer *Exact science in Antiquity*-je (1957)[154] pedig – a maga mozaikszerű elrendezésében – rendkívül hatásosan figyelmeztetett tudományos részletek és töredékek bámulatosan szívós életére. Újabb műveik ellenben fárasztó és lehangoló olvasmányok. De nem azért, mert nem vették, szükségszerűen nem vehették kellően figyelembe az időközben rettentően elszaporodott részletkutatásokat. Ezt különben – legalábbis az idézés, ha nem is mindig a megértés szintjén – még igyekeztek is megtenni. A szemlélet okozza a hiányérzetet. Az, hogy ma is, akár harminc-negyven évvel ezelőtt, magától érthető magabiztossággal tulajdonítanak suméroknak-babilóniaknak-görögöknek mai matematikai és csillagászati fogalmakat és gondolkozást; meggondolás nélkül megajándékozzák őket algebrai egyenletekkel és függvényekkel. Persze nem a csontig lerágott inkommenzurabilitás-probléma felemlegetése hiányolható, ami – Fehér Márta könyve pompásan mutatja – egyébként is legalább akkora képtelenség, mint a mienkével azonosnak tekinteni a régiek észjárását. Összemérhetetlenség és fogalomazonosság voltaképpen két oldala egyazon absztrakt, változtathatatlanságra építő tudományfelfogásnak. A valódi tudomány elemei ellenben állandóan változnak, és ennek a változásnak a figyelembe nem vétele miatt annyira sivárak Neugebauer és van der Waerden – vagy mutatis mutandis Feyerabend – konstrukciói. Harminc-negyven évvel ezelőtt, amikor a tudománytörténet-írás a maihoz képest gyerekcipőben járt (a mai méregdrága Adidas-versenycipőnél a maga nemében sokkal jobb gyerekcipőben úgylehet), még inkább azt kellett felfedezni és tudatosítani, hogy ama régi idők tudása is *tudomány* volt, s ehhez cseppet sem volt felesleges a hasonlóságok hangsúlyozása. Ma ellenben képtelenség nem figyelni a különbségekre; sok esetben éppen az esszenciális különbségekre kell elsősorban figyelni és figyelmeztetni, legalábbis ha a tudomány fejlődését, illetve változásait kívánjuk interpretálni.

Két nagy bőven termő irány specializálódott és kanonizálódott a változások vizsgálatára: a *Begriffsgeschichte* és a *History of ideas.* A kettő azonban nem különíthető el élesen; kivált nem a nevüket viselő két nagy folyóiratban. A *Journal of the History of Ideas*-ban mondhatni több a szabályos *conceptual history*, mintsem az ideatörténet olyan formában, ahogyan azt az irány – és a folyóirat – nagy megalapozóinak egyike, Arthur O. Lovejoy megálmodta. Ha mégis meg kell különböztetni, és jellemezni kell őket – s meg kell, mert sokáig egy különös és igen értékes ötvözetük hatott legerősebben –, akkor ezt mondhatjuk (a kellő fenntartásokkal), hogy a *Begriffsgeschichte* elsősorban logikai és episztemológiai

[153] van der Waerden, B. L.: Egy tudomány ébredése. Egyiptomi, babiloni és görög matematika. Ford.: Pollák György. Bp., 1977. Gondolat. 479 p. *(– a szerk. megj.)*

[154] Neugebauer, O.: Egzakt tudományok az ókorban. Ford.: Guman István. Jegyz.: Gazda István. Bp., 1984. Gondolat. 260 p., [16] t. *(– a szerk. megj.)*

koordinátákban mozog, az ideatörténet pedig főként eszme- és mentalitástörténeti irányokban tájékozódik; és ebben a különbségben az igékre („mozog" és „tájékozódik") legalább akkora hangsúly helyezendő, mint a „műfaji" jelzőkre. Mondottuk már, hogy a klasszikus Begriffsgeschichte legszebb és legfejlettebb példányai az ideatörténet-írás Leibjournaljában találhatók, és a két irány csaknem mindig átfedi egymást kisebb-nagyobb mértékben. Azonban ötvözni a kettőt úgy, hogy az ötvözet mérhetetlenül használhatóbb és nemesebb legyen az elemeknél egyetlen történésznek sikerült: Alexandre Koyrénak.

Koyré jelentőségét nem lehet eltúlozni a modern tudománytörténet-írás kialakulásában. Kicsi túlzással akár azt is mondhatjuk, hogy ő teremtett egy érdekes, de gyakran a dilettantizmus határát súroló szerteágazó „hobby"-ból valódi tudományos szakmát, autochton történeti diszciplínát, amellyel nem lehetett többé nem számolni a historiográfia egyéb ágaiban. Sokszor próbálták megfejteni – kivált amíg szinte bálványozásig menő tisztelete nem csapott át a mai fenntartásokba és elutasításba –, hogy valójában mi volt a „titka". Valószínűleg – mint minden valamirevaló titok – megfejthetetlen Koyré varázsa. Mindenesetre afféle született historikus volt; Marc Bloch, Lucien Febvre vagy Fernard Braudel fajtájából. Bámulatosan érzékelte, szinte tapintotta a múltat, s eleven életet tudott lehelni régi szövegekbe. Csodálatosan értett az idézés – a *jól* idézés – nagyon bajos mesterségéhez; a kontextusokból óhatatlanul kiragadott szövegek és fogalmak az ő kezétől nem hullottak szárnyaszegetten földre, hanem felröppentek és fújták a maguk dalát, mintha ez lenne a legtermészetesebb. Ma már, hogy elmúlt a Koyré-varázs, látjuk persze, hogy mennyire nem volt ez természetes, és gyanítjuk, hogy az ének is betanított volt olykor; de akibe egy csepp érzék szorult a historiográfia iránt, ma sem tagadhatja a dal, s a röpülés szépségét.

Koyré pillanata nem tartott sokáig. A diszciplinarizációnak, az önálló történettudományi szakmává válásnak megvoltak a logikus és szükségképpen bomlasztó következményei. Mindenekelőtt hihetetlen mértékben megnőtt a publikálatlan, főként a kéziratos források jelentősége. Itt most zajlott le az a forrásforradalom, ami a múlt század elején-közepén a politikai történetírást rázkódtatta meg. A tudománytörténet-írás egyre keményedő börzéjén ma már csak azok remélhetnek jegyzést, akik kiadatlan, vagy legalábbis ismeretlen szövegek alapján dolgoznak, vagy akiknek sikerül ilyenre bukkanniuk és kiadniuk. Megvolt ennek a divatnak a haszna: hatalmasan megnőtt a tudománytörténeti források köre a tradicionális kulcspontokban és a perifériális területeken egyaránt. Ennek a gazdagodásnak azonban szükségképpen erősödő szakmai feldarabolódás és elszigetelődés volt az ára. Hiszen aki Galilei vagy Darwin nehezen megfejthető kézirataira áldozott éveket, attól joggal aligha várható, hogy saját választott témakörén túl különösebben tájékozódjék. Az utóbbi évek tán legjelentősebb tudománytörténeti munkái mondjuk Richard S. Westfall Newtona vagy Dov Ospovat Darwin-könyve – többnyire efféle termékeny izolációból származtak. S még az is inkább haszonként könyvelhető el, hogy gyakran ugyanazon kézirat-bázis alapján merőben különböző, sőt ellentétes interpretációk születnek. Egy tudósnak a maga számára készült és gyakran csak odavetett feljegyzései nem oklevelek, végleges és biztos megfejtésüket elvárni éppoly botorság volna, mint a babiloni csillagászati táblázatokét. Éppen mert – mondjuk – Galilei ugyanazon kéziratát olyan különbözően értelmezi két olyan kitűnő galileológus, mint Drake meg Naylor, éppen azért remélhető, hogy ez az enigmatikus följegyzés megfelelő kontextusba helyezve egyszer mégiscsak elárul majd valamit az újkori mechanika megszületéséről. Hiszen már így is, az ellentétes és igen valószínűen téves interpretációk alapján is elárult valami nagyon lényegeset; mutatja azt a bizonytalanságot és töprengést, ahogy Galilei eligazodni próbál az öröklött tudás radikális átalakításával az általa felismert vagy gyanított új összefüggések reá zúduló áradatában. Mivel csak így magának vetette papírra a legfontosabbakat, többnyire tőlünk fog függeni, hogy mit tekintünk „öröklött tudásának", „átalakításnak" és „új összefüggésnek"; már csak ezért se képzelhető el *egyetlen* megfejtés. De *megoldás* mégis csak egyetlen egy van: az, ahogyan Galilei akkor gondolkozott és dolgozott, amikor az illető jegyzeteket leírta. És eleve egyáltalában nem lehetetlen, hogy ez a megoldás konvergáló megfejtésekkel tán megközelíthető. Nem kell tán mondani, hogy egy-egy ilyen megközelítés mit jelenthet a mechanika fejlődésének a megértése szempontjából. De azt se, hogy milyen szigorú és következetes szakmai munkát és diszciplináris fölkészültséget igényel. Winifred L. Wisan monumentális monográfiája Galilei mechanikájának fejlődéséről egyaránt jól demonstrálja a lehetőségeket és a nehézségeket: elvezet a fogalmak és a kérdések állandó termékeny átalakításának a sűrűjébe, szinte bepillanthatunk a gondolatok görgésébe, de persze a rekonstrukció követelése kegyetlen erőfeszítést igényel, és szinte bizonyosak lehetünk, hogy így, ilyen körülményesen nem dolgozott Galilei. Hiábavaló munka tehát? Egyáltalán nem! A rekonstrukció természetéből következik, hogy többnyire óhatatlanul bonyolultabb – mert szigorúan *exact* – utat követ, mint a fölfedezés.

Efféle egzakt rekonstrukciók útján halad ma kétségkívül – ezerféle és soha nem találkozó irányban – a tudománytörténet-írás legjava. Az irány centrális fóruma a hihetetlenül tekintélyes *Archive for the History of Exact sciences* és a neki több szempontból is megfelelő *Journal of the History of Biology*. A közölt tanulmányok többsége természetesen nem éri el a wisani vagy – mutatis mutandis – ospovati szintet; gyakran nem is egyebek nyakatekert próbálkozásoknál, hogy hogyan lehetne minél nehezebben érthetően újrafogalmazni valamilyen könyvet vagy fölfedezést. És nem csupán arról van itt szó, hogy a tudománytörténet-írást is elérte a korunkat nyakon öntő szemiotikai homály. Ezek a tudománytörténész értekezések – már a rosszabbja – másként érthetetlenek, mint mondjuk az irodalomelméletiek. A homály itt többnyire tényleg takar valamit, nem a puszta semmitmondás rejtőzködik mögötte. Még a leggyöngébb exact rekonstrukció is közvetít valamit – hacsak nem rugaszkodott el végképp a tárgytól – azokból a transzformációkból, melyek a tudomány egy-egy területén a fejlődés megvalósítói, illetve megnyilvánulásai gyanánt racionálisan megközelíthetők. Ezeket a transzformációkat persze az egyes kutatók tudományfilozófiai alapállásuknak megfelelően nagyon különböző köntösökbe bújtatják, ez azonban inkább csak a megérthetőség nehézségét fokozza, a lényeget nem érinti. A lényeg az, hogy ezek a transzformációk soha többé nem lesznek már felfűzhetők afféle lineáris füzérre, mint mondjuk a matematika Morris Kline mázsás matematikatörténetében a suméroktól napjainkig. Az egyes szaktudományok efféle „lamarckiánus" fejlődésvonala az exact rekonstrukciók fényében merő képtelenségnek bizonyult; egymásból következő, egymást folytató transzformációk mindig csak hosszabb-rövidebb szakaszokon belül konkretizálhatók. De – hogy biológiai hasonlatunknál maradjunk – ezek a transzformációs szakaszok nem egyesíthetők valamiféle evolúciós fává; az efféle „darwiniánus" próbálkozások tán még látványosabban hamisak, mint a klasszikus matematika-, biológia-, fizika- stb. történeti fejlődési vonalak. A tudományfejlődés valódi transzformációs szakaszait semmiféle „természetes szelekció" nem egyesíti „törzsfává". Legalábbis egyelőre. És – legalábbis jelenleg – a tudománytörténet-írás igazán értékes hányada ezeken az egymástól elszigetelt transzformációs szakaszokon bütyköl. Klasszikusan szép példái ennek Szabó Árpád – szerencsére nálunk is egyre jobban megismert és elismert – kutatásai a görög matematika kezdeteiről, s jelen vizsgálatai a görög csillagászat kezdeti szakaszáról. Ő az irány legelső – és legfontosabb – megalapozóinak egyike, még az ötvenes évek végén elkezdett kutatásaival. Kicsit szerencsésebb körülmények közepette iskola nőhetett volna fel körülötte, s ma nem csak ő egyedül haladna hazánkból a tudománytörténet-írás meredek élvonalában. Ma már késő; de így is maximális támogatást érdemelne minden ilyen irányú törekvés, például Horváth Miklós alapos Leibniz-kutatásai.[155]

Mindez természetesen nem azt jelenti, hogy másféle tudománytörténeti törekvéseknek ne lenne értelmük és létjogosultságuk. A szintézis iránti igény nem szűnt meg, és egy-egy nagy tudós szakmájáról szóló szubjektív áttekintése – mint például Simonyi professzor fizikatörté-

[155] Lásd újabban: Gottfried Wilhelm Leibniz válogatott filozófiai írásai. Vál.: Márkus György. Utószó: Horváth Miklós. Jegyz.: Fehér Márta, Keszthelyi András. Ford.: Endreffy Zoltán, Nyíri Tamás. Bp., 1986. Európa. 414 p. *(– a szerk. megj.)*

nete vagy Ernst Mayr biológiatörténete – lenyűgözően érdekes és máig fontos részleteket feltáró olvasmány. Pillanatnyilag épp az efféle nagylátószögű és nagyszívű áttekintések tűnnek a legjobb *lehetséges* korrekciónak a szakma „élvonalának" óhatatlan felaprózódásával szemben.

A kiemelés arra kíván utalni, hogy létezik „lehetetlen" korrekció is, többnyire többkötetes, sokszerzős összefoglalások formájában. Ezek a grandiózus vállalkozások azonban óhatatlanul szétesnek szerzők szerint, s még az a legszerencsésebb formájuk, ha egy sorozat lazán összefüggő köteteiként jelennek meg az egyes szerzők részlet-munkái. A tudománytörténet-írás személyekre koncentráló klasszikus sartoni alakja a *Dictionary of Scientific Biography* monumentális 16 kötetének a megjelenése óta amúgy is legfeljebb rossz népszerűsítő-szinten vegetál; némi művelődés- vagy mentalitástörténeti mázba mártogatott tudósok kronologikus sorakoztatásával aligha lehet többé fölidézni a tudományfejlődés látszatát, noha épp a *Dictionary*, a maga bőséges és könnyen hozzáférhető anyagával érthetően csábít ilyesmire. Ma még egy-egy nagyobb korszak globális tudományos tevékenységének az áttekinthetősége is kérdésesnek tűnik, nemhogy a tudomány egész fejlődéséé. Harminc-negyven évvel ezelőtt viszont még épp az efféle áttekintések keltették a legnagyobb érdeklődést. Jól mutatja a mentalitás megváltozását A. Rupert Hall újraírt „Természettudományos forradalmá"-nak a hűvös fogadtatása.

Amikor 1954-ben Hall könyve *The scientific revolution 1500–1800* címmel megjelent, egyöntetű szakmai elismerés fogadta, és nemzetközi közönségsikert aratott. Széles szakmai körben hatott inspirálólag; a „tudományos forradalom" nevet és fogalmat is elsősorban ez a könyv terjesztette el. Amikor ellenben Hall gondos és részletes újraírás után 1983-ban, *The revolution in science 1500–1750* címen újra kiadta a könyvét, már csak fanyalgás fogadta. Pedig ez a második könyv hasonlíthatatlanul jobb az elsőnél. Gazdagon kamatoztatta benne Hall az időközben megjelent részletkutatások eredményeit, újraértékelte, illetve áthelyezte a megváltozott részletek alapján a fejlődés dinamikáját meghatározó hangsúlyokat, lecsiszolta – már maga a címváltozás is erre utal – az első könyv merész általánosításait. Egészen új és sokkalta hitelesebb például a Kopernikusz vagy a Galilei munkásságáról vázolt kép; az őt megillető helyre jut a reneszánszkori csillagászatban a megfigyelés, a biológiában az új utak keresése. Úgyszólván minden megváltozott a könyvben, csak a keret maradt nagyjából ugyanaz: a szakmatörténetek beágyazása egy széles eszme-, társadalom- és intézménytörténeti háttérbe. És talán éppen ez a keret az, ami napjainkra menthetetlenül elavult. S tán nem is csak azért, mert mintha ezeken a területeken a szakmatörténeti irodalomban feltűnően jól tájékozott Hall kevésbé követné az újabb eredményeket. Inkább azért, mert napjainkra maga az efféle beágyazás vált kétségessé.

Nem hisszük többé, hogy „külső” és „belső” tényezők gondos kiegyensúlyozásával és szembesítésével valóban meg lehet közelíteni a tudomány és a technika fejlődését, a maguk problémáival küszködő tudósok és mesterek egymásba fonódó vállalkozásait. Túl „internal” és „external” mesterkélt keretein létezik valamiféle globális dinamika, ami meghatározza a tudományos és technikai megoldásokat, és amit ugyanakkor ezek a megoldások határoznak meg; a visszacsatolások bonyolult rendszerében értelmét veszíti „ok” és „okozat”, és a folyton váltakozó követelményekhez alkalmazkodó vállalkozások többé-kevésbé észlelhető áttételeken keresztül éles határ nélkül simulnak a történelem nagy hullámaiba.

Egy efféle történetírás csírája – inkább, mintsem példájaként megemlíthető – tán Charles Webster *A nagy Instauráció*-ja, Richard Olson *Science deified and science defied*-je, Geoffrey Ernest Richard Lloyd *Sciences, folklore and ideology*-ja; leginkább azonban itt is egy szűk időszakra korlátozódó könyv: Adrian Desmond *Archetypes and ancestors*-a, amely a paleontológia kibontakozását és hatását mutatja be a Viktoriánus Angliában.

Ha egyáltalában van ezen a területen jó értelme az „interdiszciplinaritás”-nak, úgy az valószínűleg ebben az irányban keresendő. Mindenesetre itt látszik ma leginkább a szakmatörténetek és a kéziratos kutatások mértéktelenné dagadó káosza releváns történeti koordináták szerint rendezhetőnek.

A klasszikus századok matematikája

A matematikai absztrakció történetéből[1]

Sík Eszternek

I.

Méltóságteljes képleteibe burkolódzva, a beavatottak kis körén kívül mindenkinek érthetetlenül, idegen és titokzatos világként él a matematika. A természettudományos műveltség elemei lassan közkinccsé válnak, a matematikában azonban nehezebb a helyzet. Néhány kitűnő történész és matematikus népszerűsítő munkái ellenére is könnyen tekintjük a matematikai törvényeket valami abszolút, e világon kívüli rend megnyilvánulásának, s nemcsak mi, laikusok.

Tényleg meglepő, hogy annyira absztrakt elmélet, mint a matematika, olyan sokféleképpen s oly sikeresen alkalmazható a gyakorlatban. Nem is érthető ez meg másképpen, csak a matematika történelmi és társadalmi vonatkozásainak elemzésével. Hosszú évszázadok fejlődése s hosszú nevelési hagyomány szükséges egy-egy jelentős matematikai felfedezés megszületéséhez. A matematika története, még inkább, mint az egyéb tudományoké, bővelkedik párhuzamos felfedezésekben. A nem-euklidészi geometria csak egyik példa. Az ókortól napjainkig majdnem minden fontosabb matematikai felfedezéshez több név is tartozik. Ez a tény egymagában figyelmeztethet, hogy a matematika fejlődésében egyéni momentumokon kívül kollektív, társadalmi tényezők is érvényesülnek, s válogató, szelektív hatásukkal sokszor éppen ezek döntik el egy korszak matematikai fejlődésének az irányát.

Az egyiptomi matematika kialakulása szorosan összefügg a fáraó-centrikus államháztartás feladatait ellátó kaszt, az írnokok tevékenységével. Ők intézték a nagy építkezéseken és a bányákban dolgozó rabszolgaseregek élelmezését, nyilvántartását,

---

[1] Forrás: Vekerdi László: Kalandozás a tudományok történetében. Művelődéstörténeti tanulmányok. Bp., 1969. Magvető. pp. 147–282. Ismét megjelent önálló kötetként a Kriterion gondozásában: Vekerdi László: A matematikai absztrakció történetéből. Bukarest, 1972. Kriterion. 183 p. Az ókorra vonatkozó rész korábban külön tanulmányként is megjelent: Vekerdi László: A matematikai absztrakció fejlődéstörténetéből. = Valóság 6 (1965) No. 6. pp. 347–354.

különféle munkákra való elosztását. Ők tartották számon és hajtották be az adót. A Nílus évenkénti áradásai után ők állapították meg újra az egyes földtulajdonok nagyságát. Már Hérodotosz arról értesít, hogy az egyiptomiak azért találták fel a geometriát, mert a Nílus áradásai után mindig újra kellett mérjék a földeket. Mindezek a matematikai feladatok egyszerű számolást igényeltek, nagyon sokszor pusztán a „megszámlálás” értelmében. Lényegében az egész egyiptomi számolástechnika a megszámoláson alapult. S mert általában nagyon sok dolgot, embert, állatot vagy valamilyen mértékegység szerint beszolgáltatott terményt kellett megszámolni, az egyiptomi írnokok a számok írásában eljutottak a millióig. A számok gyakorlati jelentőségének megfelelően tíz minden hatványát *külön* jellel jelölték. Pl. a százezer jele ebihal volt, mert ebihal „nagyon sok” volt a Nílusban, a millió jele pedig a levegő vagy a végtelenség istene volt. Ebben az írásmódban pl. 2300000 a következőképpen írható le:

Ilyen számokkal természetesen igen egyszerű az összeadás, csak nagyon sok írást követel. A szorzás sem egyéb ismételt megduplázásnál, az egyszeregyet nem ismerték. Az osztás, ha maradék nélkül befejeződik, az egymás utáni megduplázásokként értelmezett szorzás megfordítása. Ha nem végződik maradék nélkül, törtekre vezet. A törtek és a velük való számolás az egyiptomi matematika legnagyobb felfedezése. Csak a törzstörtekkel való számolást ismerték, azaz olyan törtekkel dolgoztak, amelyeknek a számlálója az egység. A 2/3-nak és a 3/4-nek külön neve volt: „Két rész” és „három rész”, jelölve, hogy a „harmadik rész” és a „negyedik rész” egészíti ki őket 1-re. Az egységre való kiegészítés ebben a törtekkel való számolásban alapvető volt. Minden bonyolultabb feladatuk az egység valamilyen felosztása, s a felosztandó mennyiséget akkor is egységnek tekintették a feladat megoldásában, ha eredetileg nem az. Így a számolás egység számlálójú törtekkel az egyiptomi írnokok matematikájában hasonló szerepet töltött be, mint a mienkben a százalékszámítás, csak sokkal bonyolultabb volt, s így érthető, hogy az eredményeket hosszú táblázatokba foglalták, generációk munkáit összegezve.

A megoldandó feladat többnyire adott mennyiségű kenyér, zsír, sör vagy adott mennyiségű takarmány szétosztása adott számú rabszolga vagy állat között. A rabszolgákra vonatkozó számításokban gyakori probléma, hogy különböző minőségű kenyerekből mennyit kell sütni meghatározott számú ember ellátására. Gyakran található példa különböző erősségű sörök átszámítására is. Pénzre vonatkozó számítások nem szerepelnek az iratokban. Az egyiptomi rabszolgatartó társadalom még nem érte el a pénzgazdálkodás fokát, az úr természetben gondoskodott rabszolgáiról. A piramisépítkezéseknél és a bányákban dolgozó munkáshadakat a kenyéren kívül sörrel, hallal, hagymával és retekkel táplálták: mindez osztási műveletet igényelt. Ugyancsak osztási feladat volt a nyersanyagok szétosztása az udvartartás mesteremberei között. Ugyanígy számították ki a munkaerő-szükségletet és a munkások termelékenységét is.

Gyakran található egy különös osztási feladattípus, amelyben adott törtmennyiségek *összegéből* kell kiszámítani valamely törtmennyiséget, azaz egy bonyolult módon összetevődő mennyiségből egy adott hányadot. Egyesek szerint ezek a feladatok az írnoktanulók gyakorlatai voltak, s ezért hiányzik belőlük a mennyiségek konkrét megjelölése. Ez az egyiptomi matematika legérdekesebb fejezete. Egyesek a mi elsőfokú egyismeretlenű egyenletünk őseit vélik felismerni ezekben a számításokban. Ha ez igaz, akkor az egyiptomi matematika a társadalom által kívánt legfontosabb alkalmazások területén érte el az első, kis jóindulattal elméletinek nevezhető eredményeket.

*

A *Tigris* és az *Eufrátesz* síkságán elterülő államok életén a természet vadsága és az egymással vívott kegyetlen háborúk uralkodtak. A folyók hordaléka nem termékeny iszap volt, mint a Nílus esetében, hanem kavics, és csak szervezett munkával létrehozott és fenntartott csatornázással lehetett termésre kényszeríteni. A sumér városállamok magja a gazdasági funkciókat betöltő templom volt. A templom és a föld a város isteneé volt, az ő szolgái voltak a város királya és a templomgazdaság ügyeit intéző papok. Általuk az állam lakói nagy, kozmikus erők rabszolgái voltak, amiknek áldozatokkal, imával és mindenekelőtt engedelmességgel tartoztak. Az egyén feladata a városállam hatalmának és gazdaságának a növelése volt. Ezt a célt szolgálta a földművelés meg a kereskedelem és erőszakos eszközökkel való folytatása: a háború.

Földművelés, kereskedelem és háború problémái uralták a babiloni matematikát. A feladatok nagy része különféle területszámításokkal és terület-átalakításokkal, valamint csatornák méretezésével foglalkozik. Olyan problémákat tárgyalnak, amiket ma többnyire „másodfokú algebrai egyenletekkel” oldanánk meg, s azért a táblákat először megfejtő matematikusok azt hitték, hogy a babiloniak Kr. e. 2000 körül az egyenletek megoldásait rendszerező matematikai diszciplínát, az algebrát sejtették meg. Valójában a babiloni matematikusok sohasem jutottak el az absztrakció ehhez szükséges fokára, területszámításaik egyedi feladatok, s évezredek alatt az azonos típusúakat hosszú és unalmas táblázatokba foglalták össze. Többnyire arról van szó ezekben a feladatokban, hogy adott nagyságú és alakú területet kell felosztani több részre vagy átalakítani azonos nagyságú, de más alakú területté. Elsőrendű szerepet játszanak ebben a területmatematikában azok az idomok, amiket mi „derékszögű háromszögeknek” és „trapézoknak” nevezünk. A babiloni matematikusoknak természetesen ismeretlenek voltak ezek a fogalmak, már csak azért is, mert nem ismerték a „szög” fogalmát, őket, akár később az európai parasztokat, csak a (föld) *terület nagysága* érdekelte, ehhez tapadtak geometriai fogalmaik és elnevezéseik. A területet így is nevezték: „föld”.

Egyik legfontosabb alapfeladatuk a trapéz alakú, adott nagyságú földterület felezése. Ezt a feladatot és a megoldására szolgáló eljárást általánosították felezés helyett más arányú elosztásra és kettő helyett több részre osztásra. Az ókori matematika egyik legismertebb tankönyve, a B. L. *van der Waerden*é, ezt az eljárást teljesen a mi általános algebrai módszereink szerint értelmezi, de a könyv orosz fordításában a fordító ismertet egy, a leningrádi Ermitázsban található agyagtáblát, ami húsz egymásra következő trapéz *egyedi* felezési adatait adja meg, mégpedig a püthagoraszi számhármasok segítségével, babiloni „divatnak” megfelelően, táblázatban összeállítva.

Különösen érdekesek azok a feladatok, amik a munkabér és a norma kiszámításával foglalkoznak. Utóbbi feladatokban a babiloni matematikusok minden meggondolás nélkül adnak össze inhomogén mennyiségeket, mint pl. a munkások száma, a felhasznált téglák száma és a munkanapok száma. Ez az eljárás azért fontos, mert modern történészek a babiloni matematika „algebrai jellegét” vélték felfedezni abban a tényben, hogy a területszámítási feladatokban a babiloniak minden meggondolás nélkül adnak egymáshoz területet és hosszúságot, akárcsak mi az algebrában x^2-et és x-et, amit a „geometriai jellegű” görög matematika sohasem tesz meg. Valójában azonban ez az eljárás nem az algebrai, hanem az *empirikus* jelleget bizonyítja: a babiloni matematikusok nem elvek miatt adták össze a területfeladataikban a területet és a hosszúságot kifejező számokat, hanem ugyanazért, amiért a munkásokat is összeadták a téglákkal: ha a tapasztalat szerint valamilyen használható eljárásra akadtak, az elvekkel nem sokat törődtek. A matematika nekik a gyakorlati élet: földművelés, kereskedelem, hadászat mindennapos segédeszköze volt.

A mezopotámiai civilizációkat mélységesen vallásos mágikus elképzelések szövevénye fonta be. A templomok és papjaik kezdettől fogva nagy szerepet játszottak a város és később az állam egész gazdasági életének szervezésében és irányításában. Nem lehet azt állítani, hogy gátolták volna a gazdasági élethez nélkülözhetetlen számítások fejlesztését. Mégis az a szellemi légkör, amit minden gyakorlatiasságuk és prakticizmusuk ellenére is teremtettek, alkalmatlan volt a transzcendens magyarázatoktól független, egyedül az emberi észre építő tudomány kialakulására. Az embereknek nem volt szükségük bizonyításra, mert inkább hittek a felbontott áldozati állat májának, mint saját értelmüknek. Papjaik a titkok és a rettegés mágikus-babonás hálóját fonták köréjük, amin nem tudott áthatolni a bizonyító értelem. A babiloni civilizációban sem volt ismeretlen az értelem lázadása a kegyetlen kozmikus és társadalmi rend ellen, erről tanúskodnak a *Gilgames-eposz* és – közvetett úton – az *Ószövetség* legnagyszerűbb részletei. De ez a lázadás Jób lázadása volt: az ember, igazának tudatában, megtört az áthághatatlan és megérthetetlen hatalom igája alatt.

*

Mire a görög világban meghonosodott a matematika, a görög történelem túl volt nagyobb s talán sorsdöntőbb és érdekesebb felén. Rég lezárult első nagy, s már akkor a legendák ködébe vesző kulturális fázisa, a mükénéi civilizáció, régmúlt volt a nagy gyarmatosítások első, kisázsiai ión periódusa, az ún. „görög középkor”, aminek az emlékét máig elevenen őrzi az *Iliász,* lezajlottak vagy stabilizálódtak a görögség első nagy államforma-kísérletei: a spártai konzervatív „Lykurgoszi” királyság, a nemesség uralmát sok helyütt felváltó Türannis és a rabszolgatartó demokrácia.

Vége felé tartott már a görög történelemnek – talán az egész világtörténelemnek – az a legfontosabb két-három évszázada is, ami az Kr. e. VIII–VI. században görög városok koszorújával kerítette be a Földközi-tenger északi partvidékét Ibériáig és a Fekete-tenger partjait, az ún. második görög gyarmatosítás időszaka. Ennek a periódusnak a kezdeteit írja le az *Odüsszeia,* s a kb. egy évszázaddal előbb írt *Iliász*-szal összehasonlítva jól látható belőle az a nagy életforma-változás, ami egy évszázad alatt a görög világban végbement. A hősiesség, bátorság, harc kalandjait felváltotta az ész, ravaszság, kíváncsiság, bolyongás kalandvilága. A földbirtokos katonanemesség világát a gyarmatosítás kereskedő-kalandorainak a világa.

Az új város polgárai az anyaváros legvállalkozóbb kedvű, legértelmesebb, legszabadságkedvelőbb egyéneiből verbuválódtak. A városalapítás közös kalandjai nemcsak összeforrasztották, egyenlőbbekké is tették őket. A legutolsó görög kézműves is magasabb rendűnek érezhette magát a környező érthetetlen nyelvű barbárok hercegeinél. Az idegen és ellenséges környezetben az otthon gyakran civódó görögöket összefűzte a pánhellén öntudat.

Az új város politikailag teljesen független volt az anyavárostól, de számos érzelmi, kulturális és gazdasági szál fűzte hozzá, s rajta keresztül az egész görögséghez. Azonos témára felépített változatosság addig példátlan megvalósulása volt a görög városok világa. A gyarmatokhoz képest egyöntetűbb anyaország fejlődése kezdetben visszamaradt; a kisázsiai partvidék és a szigetek meg Dél-Itália városai kerültek a gazdasági és kulturális haladás élére. Különösen Milétosz, ahol a legendás hírű Thalész és követői – az első természettudósok – merész, racionális magyarázatot próbáltak találni a világ felépítésére. Ugyanakkor a milétoszi Hekataiosz olyan pontos térképet készített a Földközi-tenger és a Fekete-tenger vidékéről, amilyent a Római Birodalom hanyatlása után nem látunk a késő reneszánszig.

A közeli Számosz szigeten Kr. e. 530 körül a megarai Eupalinosz 1000 m hosszú, két oldalról megkezdett alagutat épített, amely bizonyítja a VI. századi mérnök-matematika magas színvonalát. A VII–VI. században tértek át a görög városokban a faépítészetről a kőre: az ehhez szükséges mérőmódszerek és műszerek kidolgozásában a hagyomány különösen nagy szerepet tulajdonít a számoszi Theodorosznak. Theodorosz nevéhez fűződik a hatalmas ephezoszi Artemisz-templom építése, ami a mocsaras talajon különösen nehéz feladat volt. S ugyancsak számoszi mérnök, az Eupalinosznál kb. egy emberöltővel fiatalabb Mandroklész építette a Boszporuszon keresztül azt a híres hidat, amin át Dárius király hatalmas serege a szkíták elleni hadjáratban Európába özönlött.

Ez a néhány, Hérodotoszból ismert adat kellően illusztrálja a VI. századi görög technika magas színvonalát, a mérnökök nevének a megőrzése pedig mutatja, hogy a kor görög társadalma nagyra becsülte a munkájukat. Megbecsült, szabad és jól fizetett foglalkozásként létrejöhetett az első szakma, amihez rendszeres és többé-kevésbé alapos matematikai ismeretekre volt szükség. S ami még sokkal fontosabb, a mérnök csak egyike volt a számos új, megélhetést biztosító szabad intellektuális szakmának. A görög városok kiterjedt világában még a kereskedelem és a kézművesség is jelentős ismereteket és értelmi képességet igényelt, s teljesen átalakult és racionális tudásra építő mesterség lett az orvosi is. A görög városokban valamilyen formában mindenütt érvényre jutó törvénytisztelet nélkülözhetetlenné tette a törvényt csűrni-csavarni tudó jogászokat és szónokokat. A szobrász az építésszel együtt külön foglalkozásként vonult be a megszülető szakmák kollégiumába, de a drámaírók és lírai költők is, szinte olyan feltételek mellett, mint ma, a görög városok fizetett polgáraihoz tartoztak. S végül a görög város hozta létre, szabad foglalkozásként, a pedagógust.

Mindezen „szabad szakmák” jövedelmező műveléséhez több-kevesebb értelemre volt szükség. A görög város teremtette meg az eszéből élő ember típusát. Az egyiptomi társadalom a fáraó és szolgái iránti engedelmességet premizálta, a nyugat-ázsiai társadalmak az Isten irántit. A görög városok világa az első, amelyik az értelmet juttatta kiváltságos helyzetbe.

*

Nem tudjuk, hogyan honosodott meg Görögországban a matematika, sem azt, hogy mik voltak az első nagy eredményei. A korai görög matematikát kevésbé ismerjük, mint az egyiptomit vagy a mezopotámiait. Az első két ránk maradt forrástöredék már olyan magas színvonalú, hogy feltétlenül hosszabb fejlődésnek kellett megelőznie. De erről a fejlődésről – egy nevek felsorolására szorítkozó listától eltekintve – csak Arisztotelész rosszindulatú feljegyzései és késő hellenisztikus legendák tanúskodnak. Ezeknek a legendáknak a centrumában a milétoszi Thalész és a Számosz szigetéről a dél-itáliai Krotónba vándorolt Püthagorasz áll. Azonkívül, hogy bizonyosan éltek, egyikükről sem tudunk semmi bizonyosat. Thalészből a történészek komoly, XIX. század végi német egyetemi magántanárt faragtak, Püthagoraszból a felvilágosult és megszállott bölcs keverékét, afféle matematikus Szarasztrót. Pedig az „apokrif” thaletikus legendák között található egy édes kis mese, Naszreddin Hodzsához illő, arról, hogyan tolt ki Thalész makacs szamarával, Püthagoraszról meg számos zavaros nőügyet jegyeztek fel a legendák.

Az első két forrás, amit többé-kevésbé hitelesnek tekinthetünk, a khioszi Hippokratész holdacska-kvadratúrája és a tarentumi Arkhütász kocka-megkettőzése. A korai görög matematika egyéb forrásait illetően egyedül Euklidész *Elemek* c. munkáját említhetjük és Arkhimédész nagyon értékes utalását, ami szerint az általa használt szellemes terület- és térfogat-számítási módszert az abderai Demokritosztól tanulta.

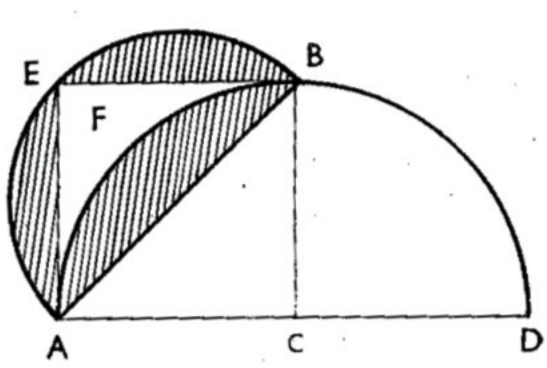
A khioszi Hippokratész (Kr. e. 430 körül) szofista volt, azokhoz a szegény vándor bölcsekhez tartozott, akik az Kr. e. V. században szerte a görög világban pénzért tanítottak mindenféle hasznos ismereteket, leginkább azt, hogyan lehet különféle igaz és hamis érvekre hivatkozva rávenni az embereket arra, hogy azt tegyék, amit a beszélő szeretne. A szofisztikát a történetírás jelentéktelennek ítéli a matematika fejlődése szempontjából, egyedül D. J. Struik áll ki mellettük magyarul is megjelent kis könyvében:[2]

[2] Struik, Dirk J.: A matematika rövid története. Ford.: Auer Kálmán. Bp., 1958. Gondolat. 218 p. *(– a szerk. megj.)*

„Először fordult elő a történelemben – írja –, hogy a bíráló elmék egy csoportja, a szofisták, akiket kevésbé gátolt a hagyomány, mint előttük a tanult emberek bármely csoportját, a matematikai természetű problémákhoz inkább a megértés, a tudásvágy, mint a hasznosság szellemében nyúltak. Ez a szellemi beállítottság lehetővé tette a szofisták számára, hogy megközelítsék az egzakt gondolkozás alapjait…”

Struik a méltatlanul elhanyagolt plebejus gondolkozók védelmében valószínűleg túloz. Kétségtelen, hogy a szellemi életnek ezeket a szabad kalandorait semmiféle hagyomány nem kötötte, de őket is kötötte valami, s hozzá keményen: a megélhetés kényszere. A tanítás és a gondolkozás nekik szó szerint mesterség volt, ebből éltek, s ugyanazzal a szóval is jelölték, mint a kézművesek a maguk mesterségét: techné. Nem az „egzakt gondolkozás alapjait” keresték szegények, hanem a kenyerüket, s a tanításban és meggyőzésben bevált módszerüket alkalmazták a matematikában is. Nem a „tiszta” matematika megteremtői ők, matematikájuk a legteljesebb mértékben „alkalmazott” matematika, csak az alkalmazás nem technikai-természettudományos, hanem retorikai-pedagógiai jellegű volt.

Hippokratész a holdacskák – azaz két körív által határolt idomok – területének meghatározásában következőképpen jár el: először bebizonyít egy segédtételt, azt, hogy két kör területe úgy aránylik egymáshoz, mint az átmérőikre emelt négyzetek. Ebből következik, hogy hasonló körszeletek úgy aránylanak egymáshoz, mint az alapjaikra emelt négyzetek, mert „hasonló körszeletek ugyanúgy aránylanak egymáshoz, mint a megfelelő körök, lévén hasonlóak azok a szeletek, amelyek a megfelelő köröknek ugyanannyiad részét képezik”. Legyen adva a továbbiakban egy olyan holdacska, amelyiknek a külső határ *AEB* félkör, belső határa *AFBR* körív.



1. ábra. A holdacska területe egyenlő a háromszög területével

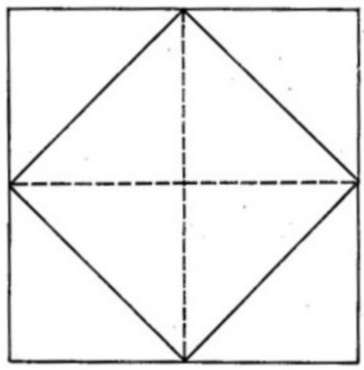
Keressük a területét. Rajzoljunk a félkörbe *AEB* egyenlőszárú derékszögű háromszöget. Az *AE és EB* húrokhoz tartozó körszeletek a szerkesztés szerint hasonlóak az *AB* átmérőhöz tartozó *AFB* körszelettel (lásd 1. ábra), s így, mivel Püthagorasz tétele szerint az átfogó fölé emelt négyzet területe egyenlő a befogók fölé emelt négyzetek területének az összegével, „az átfogóhoz tartozó körszelet *(AFB)* egyenlő a két befogóhoz tartozó körszelet összegével (*AE*-hez tartozó körszelet + *EB*-hez tartozó körszelet). Ebből következik, a háromszög átfogójához tartozó körszelet területével egyenlő két kisebb körszeletet hozzáadva a két befogónál a háromszögéhez, hogy a holdacska területe egyenlő a háromszög területével".

Még más alakú holdacskák kvadratúrájával, területszámításával is foglalkozik Hippokratész töredéke, s méltán írja róla Struik, hogy „az egész értekezés, mondhatnánk, Euklidész szellemében íródott, holott több mint száz esztendővel megelőzte Euklidészt". Valóban, a hagyomány Hippokratésznek tulajdonítja az első *Elemek* megírását, amit azután számos ilyen című mű követett Euklidész híres és elsőként fennmaradt *Elemek*éig. A hippokratészi *Elemek* módszere feltehetően ugyanaz volt, amit a holdacska-kvadratúrában is használt, s ami az euklidészi *Elemek*-et a matematikai gondolkozás iskolapéldájává és páratlan értékű gyakorlati didaktikai művé tette: a posztulációs módszer. Didaktika és meggyőzés az V. század szofistáinál ugyanannak a mesterségnek, ugyanannak a technének voltak elválaszthatatlan részei. A „tiszta" matematika pár excellence módszereként elismert posztulációs módszer az V. század nem sokra becsült vándortanítóinak a mesterségbeli fogásaiból nőtt ki.

*

A szofisztika halálos ellensége, Platón is az ő posztulációs módszerüket használja, pl. *Menon* című dialógusában, következőképpen bizonyítva a matematikai tételek gondolkozásunktól független, abszolút voltát: Szókratész a geometriában teljesen tanulatlan rabszolga ifjútól megkérdezi, tudja-e, mi a négyzet? A fiú igennel válaszol. Szókratész akkor lerajzolja a négyzetet, és négy egyenlő részre osztja azáltal, hogy összeköti a szemközti oldalak felezőpontjait. Így olyan négyzetet kap, amelynek minden oldala két hosszegységnyi, területe pedig négy egység. Szókratész megkérdezi a fiút, így van-e ez, s hogy vajon kétszer akkora négyzet nyolc egységnyi lenne-e? A fiú igennel válaszol. Szókratész erre felszólítja, szerkesszen ilyen négyzetet. A fiú megkétszerezi a négyzet oldalát, de azt találja, hogy a négyzet területe nem nyolc, hanem tizenhat egységnyi. A négyzet oldalának tehát nagyobbnak kell lenni kettőnél, de kisebbnek négynél: a fiú megpróbálkozik hárommal. A terület ebben az esetben kilenc területegység lesz, még nem nyolc, de már jobb, mint az előbb. Szókratész most a következő javaslattal áll elő: ne a szemben fekvő, hanem az egymás melletti oldalak középpontjait kösse össze a fiú. Ezek az összekötő egyenesek a szemközti oldalak felezőpontjainak az összekötésével kapott négy kis négyzet mindegyikét felezik. Így az egymás melletti oldalak összekötésével olyan négyzetet kaptunk, melynek a területe fele az eredeti négyzet területének. Ennek a négyzetnek az oldala a négy kis négyzet átlójával egyenlő, ennek az átlónak a négyzete tehát egyenlő a kis négyzetek közül kettőnek az összegével:

$$a^2 = b^2 + b^2$$



2. ábra. Az oldalak felezésével leírt négyzet területe fele a szaggatott vonallal jelölt négy kis négyzet területének

Szókratész most Menonhoz fordul, és ezt kérdezi tőle: „Anélkül hogy valaki is tanította volna, megfelelően kérdezve, felfedezte-e ez a fiú saját magától ezt a geometriai tételt?”

Menon: „Igen.”

Szókratész: „És nem visszaemlékezés-e ez a spontán felfedezés?”

Menon: „Valóban.”

Visszaemlékezés, azaz az abszolút létezők e világ zavarain kívül álló törvényeinek újra megsejtése. Ezeket nem kell tanulni, hiszen egykor mindnyájan részesei voltunk az ideák abszolút világának, s csak földi létünk barlangjába zárva veszítettük el tiszta megismerésük lehetőségét; de homályosan, árnyékként még így is átderengenek földi létünk fátyolán. Az abszolút világ létezésének legerősebb bizonyítékai éppen a geometria tételei. Hiszen hogyan tudná enélkül a geometriában teljesen járatlan rabszolgafiú levezetni Püthagorasz tételét, amelynek a felismerését az antikvitás legendás hírű bölcse olyan nagy dolognak tartotta, hogy – a neopüthagoreus hagyomány szerint – ökröt áldozott örömére.

*

Nem Platón volt az első, aki összekapcsolta a matematikai és logikai bizonyíthatóság meg a valóság létezésének a fogalmát. A szofisztikát nem nagyon érdekelte az embertől függetlenül létező valóság, nekik az ember volt a mértéke mindennek, a létezők létének és a nem létezők nemlétének. A Kr. e. V. század másik két fontos görög gondolkozási iránya, az eleata filozófia és a püthagoreizmus azonban annál nagyobb jelentőséget tulajdonított annak a kérdésnek, mi a létezés kritériuma, mi is létezik „valójában”? A kérdésre különböző módon válaszolt mind a két iskola, s a két válasz, pontosabban a két válasz meglepő ötvöződése alapvető volt a matematika fejlődésében.

Az eleaták ugyanolyan „ittas bolondjai” voltak a gondolkozásnak, mint a szofisták, s tanaikat talán még azoknál is szorgosabban igyekeztek terjeszteni. Az iskola egyik nagy elindítója, Parmenidész hosszú tankölteményben foglalta össze elméletüket, s ami a mi szempontunkból fontosabb, módszerüket. Szerinte a valóság létezésének a vizsgálatakor nem szabad érzékszerveinkre hallgatni. Egyes-egyedül a gondolkozás döntheti el, mi létezik, mi nem. A gondolkozás csalhatatlan kritérium. Ha sikerül egy fogalomról vagy tételről bebizonyítani, hogy ellentmondással terhelt, ezzel egyúttal azt is bebizonyítottuk, hogy nem létezhet a valóságban, csak látszat, érzékszerveink csalóka játéka. A valóságosan létezőnek az ellentmondás-mentesség az egyedüli kritériuma. Az ellentmondás-mentesség szigorú kritériumát alkalmazták a szám fogalmára is, ami az eleata filozófia testvériskolája, a püthagoreusok szerint a világ lényegét alkotta. Érthető hát, hogy a tradíció szerint nagyon nagy botrányt okozott annak a felfedezése, hogy a szám fogalma ellentmondással terhelt. S méghozzá ennek a bizonyítása nem is nehéz, elvégezhető a legkorábbi püthagoreusoknak tulajdonított primitív számelmélet keretei között.

Legyen ugyanis $a:b$ a négyzet átlójának és oldalának az aránya, a legkisebb számokkal kifejezve, úgyhogy az arány tovább már nem egyszerűsíthető, a két szám nem osztható egymással, ún. relatív prímszámok. Mivel – a Püthagorasz-tétel szerint – az átló négyzete egyenlő az oldalak négyzeteinek az összegével, s az oldalak egyenlők, az átló négyzete egyenlő kétszer az oldal négyzete, azaz 2 = átló négyzete: oldal négyzete, vagy mivel utóbbi arány $a^2 : b^2$, $2 = a^2 : b^2$ vagy $2b^2 = a^2$. Mármost a és b nem lehet egyszerre páros, mert akkor az arány újból egyszerűsíthető lenne, számláló és nevező osztható lenne pl. kettővel. Tehát a és b valamelyike páratlan kell legyen. Legyen mondjuk a páratlan. Akkor a^2 is páratlan, és mivel $2b^2$ feltétlenül páros, akármilyen is b, páros szám páratlannal lenne egyenlő, ami lehetetlen. Tegyük fel most, hogy b lenne páratlan. Akkor b^2 is páratlan, és $2b^2$, tehát a vele egyenlő a^2 is páros. Akkor a is páros, így feltétlen osztható 2-vel, a^2 pedig 4-gyel. De akkor ½ a^2 is osztható kell legyen 2-vel. Azonban ½ $a^2 = b^2$, és b^2 feltevésünk szerint páratlan. Tehát újból páros szám (½ a^2) egyenlő páratlan számmal (b^2), ami lehetetlen. Mivel ellentmondáshoz jutunk, helytelen a kiinduló feltevésünk, hogy a négyzet átlójának és oldalának a viszonya egész számokkal kifejezhető *arány,* ahogy a görögök mondották, „logosz”. A 2 négyzetgyöke nem fejezhető ki ilyen logosszal, a 2 négyzetgyöke *alogon* (nem-arány), irracionális.

Először is maga a módszer, az ún. *indirekt bizonyítás* fontos. Ez a módszer ugyanis – amint Szabó Árpád vizsgálatai bebizonyították – semmi egyéb, mint az eleata ellentmondás-mentességi követelmény, létezés és nemlétezés helyett matematikai tétel igaz és nem igaz értékeire alkalmazva. Euklidész *Elemei*nek nagyon sok tételét bizonyítja indirekt bizonyítással, s ez a módszer azóta is a matematika legfontosabb és legjellemzőbb eszközeihez tartozik.

Igen nagy jelentőségű volt azonban ez a felismerés a módszertől függetlenül is. Ennek a birtokában ugyanis teljesen újra kellett fogalmazni a számról vallott nézeteket. A számok nem egyszerű és engedelmes segédeszközök többé gyakorlati feladatok vagy a világmindenség titkainak a megoldására, olyasvalamik a számok, amiknek a tulajdonságait ellentmondást nem tűrő módon kell bizonyítani, logikailag megtámadhatatlan módszerekkel. A görög matematika legfontosabb feladata a következő száz évben éppen a számok tulajdonságainak a megismerése lett. Ez a számelmélet Platón fiatalabb kortársának, Eudoxosznak a munkásságában olyan fokot ért el, amelyet a matematika ezen a területen nem ért el újra a XIX. század végéig.

Először azonban azt kellett bizonyítani, hogy ilyen irracionális aránnyal kifejezhető mennyiségek, mint amilyen a négyzet átlója, valóban léteznek, azaz megszerkeszthetők. A hagyomány szerint Hippokratész mutatta meg először, hogy ugyanez a probléma a kockamegkettőzés tradicionális feladatában is: két irracionális mennyiséget kell találni két másik racionális mennyiséghez. Nem sokkal azután Arkhütász fedezett fel szellemes és mai matematikusnak is fejtörést okozó *szerkesztést* ennek a két irracionális mennyiségnek a megtalálására.

Maga a szerkesztés bonyolult, ahogy ma neveznénk, „ábrázoló geometriai” eljárás, többszörös „képsíkba forgatással”. A mi számunkra újból a módszer a lényeges benne, amely szerint a *szerkesztés lehetősége* egy matematikai fogalom *létezésének* a kritériuma. A szerkesztés, mint egzisztenciakritérium a posztulációs módszer és az indirekt bizonyítás mellett a matematika harmadik nagy alapvető eszköze máig.

Arkhütász az ókor egyik legügyesebb, talán csak Arkhimédészhez hasonlítható mechanikai lángelméje volt. Diogénesz Laertius szerint ő írta az első matematikai mechanikát, s Aulus Gellius értesít, hogy önmagától repülő fagalambot szerkesztett. Megmaradtak töredékek a hang fizikai természetére vonatkozó vizsgálataiból, s tőle származik az Euklidész *Sectio Canonis*-ában található aritmetikai zeneelmélet. így az egyetlen korai püthagoreusnál, akiről biztos történelmi képünk van, semmiféle „hasadás" sem észlelhető tiszta elmélet és alkalmazás között. Ez a hasadás, ami később annyira jellemző a görög matematikára, az V. században még ismeretlen. Egy generációval Arkhütász után, tanítványa, Platón már világosan az előkelő, alkalmazások iránt ellenséges álláspontot képviseli. A matematika, az egyedül művelésre érdemes „tiszta" matematika nála az abszolút, e világ árnyéklététől független lét bizonyítéka lett.

*

A Kr. e. V. század vége, a IV. század fordulója a görög történelem legkritikusabb periódusa. A rabszolgatartó demokrácia, amely a rabszolga- és a pénzgazdálkodás ügyes kapcsolásával a görög városokban viszonylag sok embernek – közöttük számos szabad foglalkozású értelmiséginek – sokáig könnyű megélhetést és társadalmi emelkedést biztosított, az V. század végére telítődött. A meggazdagodott polgárok irigyen őrködtek, nehogy újak kerüljenek a soraikba, a szegény szabadok rabszolgasorba süllyedtek, s csak legritkábban emelkedtek a város tekintélyes polgárai közé. A rabszolga termelőeszközből árucikké vált, és nem volt messze az idő, amikor Athén legfontosabb jövedelemforrása az állami rabszolga-kereskedelem. A szegény szabadoknak egyetlen szabadsága maradt, s az is kollektív: a szavazás, ezt igyekeztek jól kamatoztatni. A helyzetet súlyosbították az V. század utolsó harmadától kezdve csaknem állandó háborúk. Athén és Spárta hosszú, elkeseredett harca csak egyik példája ezeknek, ha következményei miatt a legsúlyosabb is. Ilyen körülmények között nem csoda, hogyha sokan, s éppen a legjobbak, az arisztokrácia új uralomra jutásától várták a helyzet javulását, különösen ha olyan minták állottak előttük, mint az Arkhütász vezette Tarentum.

Az értelmiség állásfoglalása nagyjából kétféle volt. Egyik részük, mint Arisztophanész vagy Szókratész, burkoltan vagy nyíltan az arisztokrácia mellé állott, egy másik részük, mint az *Oidipusz Kolonosz*ban mutatja, mindent elutasított, államot, tudományt, technikát; mindent, ami elvonja az ember figyelmét egyetlen kötelességétől, a moráltól. Ennek a felfogásnak tudományos következetességű megvalósítói egy generációval később a cinikusok.

Az iskola alapítója, Antiszthenész, Szókratész tanítványa foglalta össze legtömörebben a cinikusok véleményét a tudományról: „Bár írni-olvasni se tudnánk, hogy a józanokat mások bolondságai meg ne zavarnák.” Később Diogenész azzal vádolta a matematikusokat, hogy a napba és a holdba néznek, s nem látják, mi van a lábuk alatt.

S ebben akkor már sok igazság volt, noha nem a tudósokat kell vádolni érte. A tudósok az egyre kedvezőtlenebbé váló világban elszigetelődtek, nem tudtak már, mint még nemrégen, érdeklődést kelteni, vagy éppen pénzt keresni ötleteikkel és tudásukkal. Nem kellett többé közérthetőségre törekedniük, nagyon képzett, de szűk elit írt egymásnak; be nem avatottaknak reménytelenül érthetetlen dolgokról.

Arisztophanész nyugodtan gúnyolódhatott a *Madarak*-ban:

Metón Lám mondom, a lég olyanforma mint
Egy katlan öble. Most ezt a rudat
Hozzáillesztem, a görbét, felül.
S körzőt szúrok belé… érted?
Peistbetairos Nem értem.
Metón S megmérem az egyenes rúddal, hogy a
Kör négyszögű legyen, tudod; s középen
Piac, – feléje, mint központba, sok
Egyenes út vigyen s mint sugarak,
Lövelljenek szét a kerek piacból,
Mindenfelé.
Peistbetairos Ez ember kész Thalész!

Felhőkakukkvár demokrata lakói jól elverik a matematikust, mint „lázítót”, ugyanakkor, mikor az őket dicsérő fűzfapoétát megjutalmazzák. Miért lett „lázító” Athénben az V. század végére a matematikus, amikor nem olyan régen még fizettek, hogy tanulhassanak tőle? Azért, mert nem Felhőkakukkvár urainak a dicsőítése volt a foglalkozása. Felhőkakukkváriaktól ugyan kipusztulhat minden, ami nem az ő dicsőségüket szolgálja.

*

A tudomány megmaradása szempontjából éppen azért nagy szerencse volt a hellenisztikus fejedelmek tudománypártolása. Hatalmas pártfogók azonban sohasem pótolhatják a művelt közönség támogatását. A pártfogók udvarában kialakuló tudományos élet egészen másféle, teljesebb és elegánsabb, de kevésbé friss és főleg kevésbé nyitott, mint az oktatás és vitatkozás szabad versenyében születő tudomány. Előkelő, eklektikus akademizmus bágyadt fénye ragyog a hellenizmus legnagyobbjainak az alkotásán is, nem kivétel ez alól az új tudomány nagy elindítója, minden későbbi akadémikus tudomány utolérhetetlen tökéletességű mintaképe, Arisztotelész sem.

Fülöp és Nagy Sándor kegyeltje nem nagyon szerette a matematikát. Túlságosan filológiai és biológiai volt az érdeklődése, a rendszerezés és az osztályozás volt kedvenc foglalkozása. De a matematikai gondolkozás következményei alól nem vonhatta ki magát, logikájában átvette a matematikusok által oly sikeresen alkalmazott posztulációs módszert, s a történészek azután sokáig azt hitték, hogy az ő nyomán „alkalmazta” ezt a módszert a matematikára Euklidész.

Az új tudományos centrumok, elsősorban a legnagyobb és legfontosabb, az Alexandriai Museion, nagy filológiai jellegű alkotóműhelyek voltak, könyvtárakkal, államilag fizetett tudósokkal, akik egymásnak írtak alkalmazóik számára rég érthetetlenül magas dolgokról, filológusi hűséggel szedve össze és hamisítva – aszerint, hogy volt előnyösebb – elődeik munkáit. Az eklekticizmus elv lett, az alexandriai tudomány legnagyobbjai máig megmaradt, legértékesebb alkotásaikat a rendszerezés területén érték el. A rendszerezés mesterművei Euklidész *Elemei*[3] vagy Apollóniosz *Koniká*-ja. Euklidész a két nagy V. századi módszert, a posztulációs módszert és az indirekt bizonyítást alkalmazta a geometria elvi megalapozását tárgyaló könyvében, összegyűjtve és valószínűleg meglehetősen hűen követve elődeit. Apollóniosz kúpszeletekről szóló könyve ugyanígy megelőző munkák összegyűjtése és rendszerezése, bár az ő forrásait még annyira sem ismerjük, mint az Euklidészéit. A matematikának az az ága, amit a kúpszeletek segítségével rendszerez, ti. a területátalakításoknál használatos, mai jelölésmódunkban másodfokú egyenletekkel leírt módszerek elmélete, a görög matematika egyik legrégibb ága, már a khioszi Hippokratész korában jól ismert volt, s talán a hasonló természetű babiloni területátalakítások elvi síkra emelésével jött létre. Mindkét könyv alapvető a későbbi fejlődés szempontjából, de sok újat az előző századok görög matematikájához képest valószínűleg nem tartalmazott.

---

[3] Modern magyar fordítása: Euklidész: Elemek. Ford., jegyz.: Mayer Gyula. A fordítást az eredetivel egybevetette, szakmailag ellenőrizte és az előszót írta Szabó Árpád. Bp., 1983. Gondolat. 530 p. *(– a szerk. megj.)*

Egészen másként kell megítélni az alexandriai kor harmadik matematikus óriásának, Arkhimédésznek a munkásságát. Benne még egyszer, utoljára és összesítve ragyogott mindaz, ami a görög matematikusokban új, minden addigitól különböző, nagyszerű és történelemalakító volt. Életkörülményei szinte predesztinálták erre a szerepre. A görög kultúra végvárává vált Szirakuzában élt, a város felvilágosult királyainak, Hieronnak és utódjának, Gelonnak barátjaként, anyagi gondoktól függetlenül. Mint egykor Arkhütászban, benne is ötvöződött a legelméletibb matematika iránti szenvedélyes érdeklődés és a technikai géniusz. Technikai alkotásaival már saját korában legendás hírnevet szerzett, matematikai és mechanikai művei pedig kikerülhetetlen csomópontok a tudományok történetében.

A matematika fejlődésében az jelöli ki a helyét, hogy ő a legnagyobb a végtelen nehéz problematikájával küszködő görög matematikusok között. Az eleata Zénón s kritikája nyomán az V. századi görög matematika foglalkozott ezzel a kérdéssel, s Eudoxosz, Platón ifjabb kortársa és filozófiai ellenfele már nemcsak azt látta, hogy a végtelen fogalmában rejlő nehézségek az irracionális számokkal függenek össze, hanem azt is tudta, hogy ezek a nehézségek csak a posztulációs módszer szigorú alkalmazásával oldhatók meg. Éppen ezért került be munkája teljes egészében a posztulációs módszer nagy összefoglalásába, Euklidész *Elemei*be.

Egy másik infinitezimális módszer, a Demokritoszé, nem volt ilyen szerencsés, s ma már csak utalásokból, elsősorban Arkhimédész megjegyzéséből sejtjük, milyen lehetett. Demokritosz, akárcsak a kortárs szofista matematikusok, Antiphon és Brüszon, úgy akarta megoldani a kérdést, hogy „igen kicsit” helyettesített a „végtelen kicsi”, és „igen sokat” a „végtelen sok” helyébe. Ez az eljárás logikailag támadható, de alapgondolata, a megközelítés ötlete a matematika egyik legtermékenyebb módszere lett.

Arkhimédész a kétféle eljárást párhuzamosan alkalmazta görbe vonalak által határolt területek és görbült felületek által határolt térfogatok meghatározására. A görbe vonal által határolt terület – pl. egy kör területe – ugyanúgy kifejezhető egyetlen számmal, mint akár a négyzet területe, csak éppen ez a szám nem adható meg két egész szám arányaként, vagy másként kifejezve, nem szerkeszthető meg körző-vonalzó egyedüli használatával. Ugyanúgy posztulációs módszerrel kell definiálni ezt a számot, mint ahogyan Eudoxosz az irracionális arányokat definiálta. S ha egyszer ezen a módon biztosítottuk az illető szám létezését, akkor alkalmas módszert kidolgozva már tetszőleges pontossággal megközelíthetjük. Pontosan elérni sohasem lehet, definíciója szerint „kimeríthetetlen”, mert éppen ez a „kimeríthetetlensége” biztosítja a – matematikai – létezését.

Arkhimédész kimeríthetetlenségi módszere az antik matematika csúcsteljesítménye. Egyben az antik matematika teremtő periódusának a vége. Az Arkhimédészt leszúró római katona új történelmi periódus szimbóluma. A matematika, amelynek oly nagy szerepe volt a görög kultúra életében, elvesztette jelentőségét, s hosszú föld alatti élet után tört újra felszínre a reneszánszban. A hellenizmus matematikájának ideológiai és társadalmi jelentősége is akkor bontakozik majd ki, amikor a reménytelenül dogmatikussá vált skolasztikus gondolkozással szemben bennük keresik olyan matematika iskolapéldáját, amelyik alkalmas a Természet Nagy Könyvének a kibetűzésére.

II.

A klasszika-filológia egyik legvitatottabb kérdése az antik tudás és művészet fennmaradása az ókor időbeli határán túl. A középkor századaiban élő görög tudás jellegéről, értékéről és terjedelméről az egyes történésziskolák véleménye nagyon különböző. A matematikai tudományokat illetően talán még élesebb a vita, mint egyebütt, s ma még nagyon távol vagyunk attól, hogy a középkor matematikai teljesítményéről az antikvitás matematikájához fogható egységes képünk lehessen. S a középkori matematika ismeretének a hiányában nem lehet pontos képünk a reneszánsz matematikájáról sem, ugyanis utóbbi nem egyszerűen az antik matematikai tudás „újra megismerése”, mint ahogyan a reneszánsz művészete sem egyszerűen az antik művészet újraszületése. A reneszánsz humanisták egyrészt a középkori tudósok antikvitásfeltáró munkáját folytatták sokkal pontosabban és nagyobb apparátussal, másrészt pedig középkorban született matematikai kezdeményezéseket építettek ki többé-kevésbé egységes módszerekké.

A matematika története ezért az antikvitás hanyatlásától kezdve a XVII. század közepéig – az infinitezimális számítás kialakulásáig – egyetlen összefüggő, nagy folyamat, amelynek egyes lépései egymástól elszigetelve meg sem érthetők. Azonban ennek a hatalmas folyamatnak nagyon sok elemét még egyáltalán nem ismerjük, s sokszor a már ismert láncszemeket nem tudjuk a maguk helyére illeszteni. Így minden nagyobb időperiódust átfogó ismertetés szükségképpen esetleges és találgatásokkal terhelt, ezen a területen még a kritikai szövegkiadások korát éli a történetírás.

*

A görög matematika fénykorában – az Kr. e. V. és IV. században – megteremtette a matematikai gondolkodásmód alapjait. Létrehozta a matematikai bizonyítás fogalmát, s az axiomatikus bizonyítási módszerben meg a geometriai szerkesztések elméletében modellt teremtett minden későbbi egzakt gondolkodás számára. A hellenisztikus kor első néhány évtizede alatt megszülettek a görög matematika nagy összefoglalásai Eukleidész, Arkhimédész, Apollóniosz munkáiban. Ez a három név a matematika három nagy területével fonódott össze: a matematika elvi és logikai megalapozásának a vizsgálatával, az infinitezimális analízis problematikájával és a kúpszeletek elméletével. A három terület tárgyát tekintve roppant különböző, s egy-egy önálló világ önmagában is mind a három, de mindháromban ugyanaz a deduktív geometriai szerkesztések elmélete, melyben minden nehezebb probléma esetében alapvető jelentősége volt az indirekt bizonyításnak.

Ebből a geometriai stílusból következett, hogy a görög matematika nem volt alkalmas könnyen elsajátítható és általános módszerek létrehozására. A görög geometriában ugyanis minden egyes problémát egyénileg, individuális fogások igénybevételével kellett megoldani, az általános szabály vagy éppen a képlet idegen volt a görög matematika világától. Csak a matematikai ízlés volt egységes, ezen belül az egyéni változatok végtelen gazdagsága uralkodott.

A hellenisztikus birodalmakban az első évszázad nagy összefoglalásai után megmerevedett és sorvadni kezdett a matematika, a római hódítás pedig fizikailag is megsemmisüléssel fenyegette kezdetben mindazt, amit a görög civilizáció létrehozott. Amint azonban a római uralom stabilizálódott, és asszimilálni kezdte a görög kultúrát, új erőre kapott a görög gondolkodás, s vele a matematika is. Újból Alexandria lett a világ szellemi központja, s ebben a „második alexandriai virágzási periódusban” nagy matematikusok egész sora született. A legismertebbek közülük Menelaosz (i. sz. 100 körül) és Klaudiosz Ptolemaiosz (i. sz. 85?–165?), a szférikus csillagászati ismeretek nagy összegezői, a gerasai Nikomakhosz (i. sz. 100 körül) és Diophantosz (i. sz. 250 körül), akiknek a neve az aritmetika és számolástechnika fejlődésével forrt egybe, és mindenekelőtt Papposz (i. sz. 320 körül), az antikvitás legnagyobb matematikai logikusa. Több mint *egy* évszázadig vitatkoztak Héron datálásáról, de ma már kétségtelen, hogy az antikvitás legnagyobb mérnök-matematikusa szintén a második alexandriai virágzási periódusban élt és írt. (Valószínűleg az i. sz. II. század első felében.)

Az alexandriai matematikai életnek az államvallássá vált kereszténység vetett véget. Az ókor legnagyobb matematikusnőjét. Hüpátiát az alexandriai püspök által uszított keresztény tömeg gyilkolta meg, i. sz. 415-ben. Az újjáalapított athéni Akadémián még az V. században is kitűnő kommentátorok működtek: Proklosz (410–485), Marinosz (500 körül), Szimplikiosz (VI. század eleje), Eutokiosz (480 körül), míg azután 529-ben Jusztiniánusz császár az államvallás érdekeit nem szolgáló Akadémiát bezáratta. A keresztény világból elűzött tudósokat a Perzsa Birodalom fogadta be.

*

Ebben az időben már két nagy fordítóiskola dolgozott a Perzsa Birodalomban. Az egyik Gandishapur városában, ahol az edesszai iskola nesztoriánus tudósai találtak menedéket keresztény hittestvéreik vallási türelmetlensége elől, a másik Harranban; itt Alexandriából menekült tudósok közvetítették a görög tudást. A Perzsa Birodalom örökébe lépő arab kultúra a két nagy fordítóiskolában megkezdett munkát rövid idő alatt befejezte, a IX. század végére az egész antik matematikai műveltség az arabul beszélő világ birtokában volt. Kiváltképpen a IX. század első felében, al-Ma’mun kalifa uralkodása idején volt igen aktív a fordítói tevékenység. A kalifa a birodalom új fővárosában, Bagdadban hatalmas tudományos intézményt, ún. „Bölcsesség házát” alapított (830), mely egyszerre volt fordítóműhely, tudósképző és könyvtár. S Bagdad csak a legnagyobb volt az arab világ tudományos centrumai között, de távolról sem az egyetlen. Minden nagyobb városban, minden jelentősebb herceg udvarában matematikusok, csillagászok, orvosok, fordítók sürögtek. Mindenfelé nagy könyvtárak keletkeztek, még a könyvek másolása is kitűnő üzlet volt.

A történetírás sokáig félreismerte az arab civilizáció jellegzetességét, s csak újabb gazdaságtörténeti kutatások nyomán lett nyilvánvaló, hogy virágzó, kalandos kereskedelmük volt a gazdasági és tudományos fellendülés alapja. Ez az élénk kereskedelem serkentette a kézművességet és a képzőművészeteket, ez nyitotta meg a tehetségek előtt származási különbségre való tekintet nélkül a társadalmi emelkedés útját, ez tette fogékonnyá őket a dolgok praktikus oldala iránt, ez determinálta nyílt szívű kíváncsiságukat, a jobb kereskedelem kedvéért tanulták meg, hogyan kell a szigorú, deduktív görög geometriát összeegyeztetni a gyakorlati célokat szolgáló számolással, s a csillagászat elméletét a hajózás meg a karavánutak szükségleteivel. Az arab matematikusok kezében, anélkül hogy észrevették volna, átalakultak a görög módszerek, s az európaiak ezt az arab tudósok által módosított görög matematikát vették át és fejlesztették tovább.

*

Elsőfokú egyismeretlenű egyenletekre vezető feladatokat már az egyiptomiak is megoldottak, a babiloni matematikusok másodfokú egyenletekre vezető speciális példák tömegét jegyezték fel, s a görög aritmetikai tudás nagy összefoglalója, Diophantosz már nemcsak a négy alapműveletet, hanem a hatványozást és gyökvonást is ismerte, s néha külön jellel jelölte az egyenletben a megoldást jelentő ismeretlent. Kétségkívül Diophantosz *Aritmetiká-ja* a csúcsa ezen a területen az arabok előtti matematikának, azonban amint az antik matematika egyik legjobb ismerője, O. Becker írja, „az általa alkalmazott módszerek nagyon változatosak, sokszor minden összefüggés nélkül előrántott, meglepő műfogásokat alkalmaz a problémák megoldásában".

A görög számolásművészetnek ezt az oldalát veszik át, s bizarrságkedvelésükben ezt használják ki végletekig a hindu matematikusok. Valószínűleg Indiában alakult ki a görög csillagászati számításokból átvett zérus felhasználásával a tízes számrendszer, de a kilenc számjegy és a zérus következetes alkalmazása az arab matematikusok érdeme. Az arabok a görög matematikából vették át a számtani műveletek fogalmát és szabályait, a hinduktól a számjegyeket, s így matematikájuk jelentőségét sokáig félreismerték a matematika-történészek, azt hitték, minden érdemük görög és indiai tudás „közvetítése" csupán.

A. P. Juskevics kutatásaiból és összefoglalásaiból tudjuk, hogy az arab matematikusok sokkal többet tettek ennél, ők rendszerezték először az egyenletek megoldására szolgáló numerikus eljárásokat, náluk szerepel először állandó névvel az ismeretlen. Olasz algebristák sok évszázad múlva szó szerint lefordítják az arab elnevezést, így lesz náluk az ismeretlen cosa, ezt ferdítik a német számolómesterek Coss-ra, s ezen a néven lett ismerős a matematika történetében az egyenletek numerikus megoldására használt arab módszerek elmélete, az algebra őse.

Maga az algebra elnevezés is az egyenletek megoldására alkalmazott eljárás, az al-dzsabr wa'l-mukabala nevéből származik. Az eljárás bemutatására Juskevics a következő példát idézi al-Horezmi (meghalt 840 körül) algebrakönyvéből:

Legyen a megoldandó egyenlet $2x^2+100 - 20x = 58$. Al-dzsabr a negatív tag eltávolítása: $2x^2 + 100 = 58 + 20x$. Ezután következik a „homológ tagok" összevonása, a mukabala: $x^2 + 21 = 10x$. Al-Horezmi az első- és másodfokú egyenleteket hat alaptípusra osztotta be, a kapott egyenlet pl. az ötödik alaptípusba tartozik. A két eljárás megfelelően alkalmazva mindig a hat alaptípus valamelyikére vezet, amelyek azután alkalmas sablonokkal megoldhatók. „Al-Horezmi algebrája – írja Juskevics – a másodfokú és elsőfokú egyenletek numerikus megoldásának a tudománya." S mint ilyen, teljesen új, sem a görögöknél, sem az indiaiaknál nem létezett, az arab kereskedelmi civilizáció igényeit elégítette ki, ez hozta létre. Nem véletlen, hogy Muhammed ibn Musa al-Horezmi másik híres könyvének a címe: *Kereskedők és végrendeletszámolók feladatgyűjteménye.*

A harmadfokú egyenletek megoldása, akárcsak századokkal később az itáliai matematikusoknak, az araboknak is sok fejtörést okozott. Harmadfokú egyenletekre vezető egyes speciális problémákat már Arkhimédész és Diophantosz is tárgyalt, az arab matematikusok azután tisztázták a harmadfokú egyenlet fogalmát, osztályozták a megoldási lehetőségeket, s kidolgozták a harmadfokú egyenletek kúpszeletekkel történő geometriai megoldásának az elméletét.

Ebben a tekintetben Omár Chajjám, a költő, csillagász és matematikus jutott legtovább, a XI. század második felében. Matematikai teljesítményét Juskevicsig félreismerték, mert azt tanította, hogy a harmadfokú egyenleteknek nincs általános algebrai megoldása. Juskevics mutatta meg, hogy a harmadfokú egyenletek osztályozására és megoldására kidolgozott elmélete kérdésfelvetésben és módszerben egyaránt előfutára Descartes reformjának: algebrai egyenletek és geometriai szerkesztések egymás segítségével való kölcsönös átvilágításának. Úgyannyira, hogy a modern matematika fejlődése szempontjából Omár Chajjám után szinte Descartes *Géométrie*-jéhez (1637) és Newton *Arithmetica universalis*-ához (1707) ugorhatnánk. Azt a tévhitet is Juskevics oszlatta el, hogy az arab algebra tisztán jelölésmentes, ún. „retorikus" algebra lett volna. Megmutatta, hogy az arab algebristák nemcsak az ismeretlen különböző hatványaira használtak állandó jelölést; külön jelük volt pl. a négyzetgyök, az egyenlőség stb. jelölésére. Itáliai és német kereskedők és matematikusok itt is arab kollégáik munkáját folytatták.

*

A reneszánsz matematika legszebb eredményeihez tartozik annak a bizonyítása, hogy a harmadfokú egyenletnek van általános képlettel megadható algebrai megoldása.

Az első valódi európai matematikusnak, a pisai Leonardónak, nagyon nehezet akarván kérdezni, arab mintára harmadfokú egyenlet megoldását adta fel Magister Johannes, palermói tudós. Ez idő tájt Szicília és Dél-Itália éppen úgy az arab civilizáció vonzáskörébe tartozott, mint az Ibériai-félsziget. II. Frigyes német-római császár palermói udvarában arab, zsidó és keresztény tudósok fordították az arab tudomány nagy műveit. Leonardo (1180?–1250?), aki az arab világban kereskedőként töltött hosszú évek alatt tanulta meg a matematikát, II. Frigyesnek ajánlotta *Liber abaci*-ját (1202). Leonardo fellépte s műve korszakalkotó fordulat jele Európa történetében. A népvándorlás pusztításai után a XI. századtól kezdve a városokba tömörülő iparosok és kereskedők lassan a termelés és a csere új formáit honosították meg Itáliában, Spanyolországban, Dél-Franciaországban, Flandriában és Dél-Németországban. Itt a XII. és XIII. században az arab világhoz hasonló színes, mozgalmas városkultúra alakult ki, és éppen úgy, mint az araboknál, a pénzgazdálkodás fejlődésével felvirágzó kereskedelem a matematika fejlődéséhez vezetett.

A városok kereskedő-matematikusai elsősorban az arabok számolástechnikai-algebrai eredményeit vették át. Eleinte nem születtek a pisai Leonardo könyvéhez fogható művek, s a kereskedelmi verseny szempontjából fontosnak ítélt eljárásokat, mint pl. a kettős könyvelést, sokáig titkolni igyekeztek. De a XIV. század végén a fejlődés meggyorsult, s a XV. század második felében, a könyvnyomtatás első termékei között, a biblia és kalendáriumok mellett legnagyobb számmal éppen a számolókönyvek és aritmetikák szerepelnek. Sok a szerző neve nélkül jelent meg, nagy részük még mindig a pisai Leonardo könyvének gyenge kivonata volt, de a színvonal hamar javult, egyre célszerűbb jelöléseket alkalmaztak, s Luca Pacioli (1445–1514) *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni e Proportionalita* (1487) című műve, Nicolas Chuquet (meghalt 1500 körül) *Tripaty en la science des nombres*-ja, Christoph Rudolff (1500?–1545?) *Behend und Hubsch Rechnung durch die kunstreichen regeln Algebre so gemeinicklich die Coss genenennt werden* (1525) című könyve, vagy Geronimo Cardano (1501–1576) *Practica arithmeticae generalis*-a (1539) előkészítik a nagy reneszánsz algebristák, Niccolo Tartaglia (1500?–1557), Raffaello Bombelli (XVI. század második fele), François Viète (1540–1603), Adriaen van Roomen (1561–1615), Albert Girard (1595–1632), Thomas Harriot (1560–1621) működését.

Tartaglia nevéhez fűződik a harmadfokú egyenlet algebrai megoldása, de tőle függetlenül Scipione del Ferro (1465?–1526) és Cardano is megoldotta, s ez elkeseredett prioritásharcra vezetett Tartaglia és Cardano között. A harmad- és negyedfokú egyenlet – utóbbinak a megoldását Cardano tanítványa, Ludovico Ferrari (1552–1565) találta meg – tárgyalása nagymértékben elősegítette a gyökök természetének a megismerését. Bombelli pl. már ismeri a képzetes gyök fogalmát, és rögzíti az imaginárius egységgel való számolás szabályait. + *i*-t *pdm-el,* – *i*-t *mdm*-el jelöli, s pl. $\sqrt[3]{2+2i}$ Bombelli írásmódjában *Rc* ⌊ 2 *pdm* 2 ⌉. Az *Rc* itt köbgyököt jelöl, az *L* betűhöz hasonló jeleket használja Bombelli a mi zárójelünk helyett. Ugyancsak ő alkalmazott először állandó jelölést az ismeretlenre, függetlenül attól, hogy az ismeretlen hányadik hatványon szerepel. Az arab algebristák még külön jellel jelölték az ismeretlen különböző hatványait.

Bombelli eredményeit és jelölésbeli javításait alig lehet kellőképpen értékelni. Ennek a nagy jelentőségű algebristának az életéről alig tudunk valamit. Módszerei és eredményei sem Itáliában fejlődtek tovább, a németalföldi, francia és angol algebristák kezében tökéletesedtek. Az itáliai matematika a XVI. század második felében fokozatosan szakított addigi algebrizáló fejlődési tendenciáival, s a humanisták által ekkorra teljes egészében feltárt görög geometriai irányhoz tért vissza. Ebbe a nehéz antik geometriai páncélba öltöztetve mutatják be a XVII. század nagy itáliai matematikusai új eredményeiket. Az ezen célra sokkal alkalmasabb algebrai jelölési mód a kereskedelem és világgazdaság centrumainak eltolódását követve északra húzódott, s az itáliai algebristák munkáját folytató francia Viète, angol Harriot, németalföldi Girard és Simon Stevin (1548–1620) munkája után az új matematika formanyelvét a világkereskedelem új centrumában, Hollandiában teremtette meg Descartes.

A matematika fejlődésének az útja kanyargós volt Alexandriától Hollandiáig. Mindig a békét, a kereskedőket, a szabadságot követte, és elbújt a háború, katonák, zsarnokság elől.

Az újkori matematika megszületéséhez vezető hosszú fejlődésben az algebra mellett a csillagászat és trigonometria szerepe a legfontosabb. Ebben a két tudományban sokkal messzebb jutottak a görögök, mint az algebrában, de az arab matematikusok, különösen ami a gyakorlati alkalmazásokat illeti, itt is jelentősen felülmúlták mestereiket. A későbbi csillagászati és trigonometriai fejlődés alapja Hipparkhosz (Kr. e. 180?–125), Menelaosz és Ptolemaiosz bolygóelmélete volt. Az egymáson egyenletes mozgással legördülő körökből felépített világkép téves volt ugyan, de a bolygók mozgásának leírására alkalmas, és a körök geometriáját, néhány adat segítségével, táblázatokba összeállított formában számításokká lehetett alakítani. A görög csillagászok a táblázatok készítésére a húrt használták, az indiaiak jöttek rá, hogy kedvezőbb a húr felének alkalmazása, de a mi szögfüggvényeinknek megfelelő fogalmakat az arabok alkalmazták először. A bagdadi fordítóiskolában kitűnő csillagászok lefordították a szférikus csillagászat egész indiai és görög irodalmát, s a két módszert a számítások tekintetében ötvözve létrehozták a sinus-trigonometriát, bevezették a sinus mellé a mi tangensünknek, cotangensünknek, secansunknak megfelelő szögfüggvényeket. Eredményeiket Albu-l-Wafa (940–998) foglalta össze, megkönnyítette alkalmas módon bevezetett összefüggéseivel a gömbháromszögtani számításokat, és addig hihetetlen pontosságú táblázatokat állított össze. Az arab csillagászok gondos megfigyelők voltak, s így számításaikban is egyre nagyobb pontosságot kellett elérniük. Megfigyeléseik alapján már felfedezték a ptolemaioszi rendszer hiányosságát – így például a Vénusz esetében olyan epicikloisos mozgást használtak, melynek centruma a Nap volt. Az arab szférikus csillagászati és trigonometriai ismeretek rendszerezését és a trigonometria önálló matematikai diszciplínává váló emelését a szakma első történetírója, Braunmühl, Naszireddin at-Tuszi (1201–1274) érdemének tartja. At-Tuszi *Traktatus*-a igen erősen hatott az európai trigonometria és csillagászat fejlődésére, különösen a német csillagászok köszönhetnek sokat neki, pl. a híres Regiomontanus (1456–1476), akinek a működése elsősorban a közép-európai reneszánsz matematika fejlődése szempontjából alapvető. Regiomontanuson keresztül Kopernikusz első matematikai tanulmányai is at-Tuszi szférikájához kapcsolódtak.

Az európai csillagászat elképzelhetetlen az arab trigonometria és gömbháromszögtan nélkül. A „kopernikuszi fordulat" kezdete – vagy legalábbis kezdetének lehetősége – az arab csillagászok türelmes megfigyelésekre és számításokra alapító Ptolemaiosz-kritikájában keresendő. Az itáliai humanista könyvnyomtatás első termékei között kitűnő arab csillagászok művei legalább olyan számban találhatók, mint görög geométerek és asztronómusok művei együttvéve. Az európai hajózás fejlődése s így a nagy földrajzi felfedezések sem képzelhetők el az arab számítócsillagászat ismerete nélkül.

Egyes, a tengeri hajózás fejlesztésében közvetve vagy közvetlenül érdekelt európai fejedelmek – II. Frigyes, Bölcs Alfonz, Tengerész Henrik portugál herceg talán a legismertebbek – arab kalifák mintájára berendezett udvaraikban virágzó fordítóiskolákat létesítettek, ahol arabról latinra fordíttatták a görög, arab, hindu matematikusok műveit.

A fordítók között különösen fontos szerepük volt a zsidó tudósoknak, mert ők arab és latin nyelven egyaránt tudtak. Mózes Sephardi pl. I. Alfonz aragóni király pártfogoltja és I. Henrik angol király udvari orvosa, al-Horezmi táblázatai alapján fontos és főleg Angliában nagy hatású művet állított össze. Abraham bar Hijja (ismertebb nevén Savasorda, 1070?–1136?) számos táblázat és trigonometriai könyv mellett lefordította al-Battani (850?–929) csillagok mozgásáról írott művét, s ehhez a fordításhoz később Regiomontanus írt kommentárokat. Abraham bar Hijja híres és később nagy hatású könyvet írt a Föld alakjáról is, s a Zohar egy helyén rabbi Hamunah azt tanítja, hogy „a lakott föld úgy forog a tengelye körül, mint valami golyó". Levi ben Gerson (1288–1344) trigonometriájából vette át Regiomontanus a sinus-tételt, csillagászati munkáját pedig Reuchlin és Kepler is becsülte. De talán egyik legszebb eredménye az egyenletek trigonometrikus megoldásának a módszere, amit majd Viète fejleszt tovább. Al-Kási (XV. század eleje) trigonometrikus algoritmusát használta égi mechanikai számításaiban Kepler.

*

A középkori egyetemek sem képzelhetők el arab hatás nélkül. A népvándorlás századai után Európa területén csupán összefüggéstelen romok maradtak meg az antik tudásból, s a XII. században újraéledt városi civilizáció kíváncsi kereskedői, mesterei, deákjai – még ha keresztény papok vagy szerzetesek voltak is – a tudás minden területén az arab és zsidó tudomány tanítványai lettek. Azonban éppen a matematika területén a középkori egyetemek szerény magiszterei olyan felfedezésekre jutottak, amelyeket nem lehet megtalálni sem arab mestereiknél, sem az arabok által közvetített antikoknál.

A középkori egyetemeken a matematikai oktatás, mint a filozófiai oktatás általában, a teológiai, orvosi és jogi képzés céljait szolgálta. Matematikai szempontból különösen a teológiára „specializálódott" egyetemek fontosak, mint amilyen pl. a párizsi meg az oxfordi volt, mert a teológusokat érdekelte elsősorban az újkori matematika központi kérdése: a végtelen s ezzel összefüggésben a folytonosság és a változás problematikája. Ez a problematika itt még természetesen vallási köntösben jelenik meg: Isten végtelen voltának tanulmányozásához vezető propedeutika volt. Így pl. a XIV. században az oxfordi egyetem matematikusa, Richard Swineshead még azon fáradozott, hogy a kegyelem „végfokát" kiszámítsa a kegyelem „pillanatnyi értékeiből", feltéve, hogy a kapott kegyelem a születés pillanatától kezdve „folyamatosan változik". Néhány évszázaddal később Galilei ugyanezt a primitív „grafikus integrálást" a szabadesésben megtett út kiszámítására alkalmazta. Swineshead munkája egyébként is igen nagy hatású volt az itáliai matematika fejlődésére, 1480-ban kiadták Páduában, 1488-ban Páviában, 1520-ban pedig Velencében.

Ebben a primitív középkori egyetemi matematikában a folytonos mennyiségekkel dolgozó modern analízis egyik csíráját kell látnunk, s így az arab algebra mellett ez a középkor másik matematikai csúcsteljesítménye. Az eljárás lényege – fontosságának megfelelően – számos középkori kéziratban megtalálható, de talán a párizsi egyetem kitűnő magisztere, Nicole Oresme (1323?–1382) fogalmazta meg legvilágosabban *Questiones super geometriam Euclidis* című „egyetemi jegyzetében". A könyvnek címén és a használt geometriai köntösön túl voltaképpen nem sok köze van Eukleidészhez. Olyan kérdéseket tárgyal, amiket mi az „infinitezimális számítás" körébe sorolnánk.

Matematikai analízis eszközévé ezek az új fogalmak igazában csak az itáliai mozgásgeometriai iskola kezében váltak, Oresme még nem tudta geometrizálni a fogalmait, nem volt meg az ehhez szükséges tere.

*

Az új tér fogalmát festők teremtették meg. A görög geométerek szerkesztései ugyanis többnyire nem tényleges térbeli helyzetekre vonatkoztak, nem a látott világ geometriai analízise volt a céljuk, hanem egy előre megszabott elvek alapján felépített gondolatvilág logikai szerkezetének vizsgálata. A festők viszont a perspektívatanban olyan geometriát teremtettek, melynek egyedüli célja és értelme az optikai térnek a valóság látszatát keltő ábrázolása volt. Az ábrázolás titka az volt, hogy a kép párhuzamosainak egy pontban kellett metszeniük egymást – a reneszánsz festő-geométerek eltűnési pontnak nevezték ezt a pontot a különböző irányú párhuzamos rendszerek metszéspontjainak pedig egy vízszintes vonalba, a horizontális vonalba kellett esni. Ez a térkivágás, ez lett a kép, ahhoz hasonlóan, ahogyan azt ma a fényképezőgép lencséje ábrázolja. Ez a szerkesztés olyan megfelelést létesített a való világ tárgyai meg a kép között, hogy a képről meg lehetett határozni a tárgyak tényleges térbeli viszonyait. A kép pontos matematikai szabályok szerinti leképezése volt az optikai térnek, amely megőrizte a látott tárgyak felismerés szempontjából lényeges tulajdonságait. Ehhez azonban pontosan megadott arányok szerint kellett kiszámítani a leképezett tárgyak pontjainak képsíkra eső vetületét, a geometriai szerkesztés a perspektívatanban a numerikus számítással szövődik. Az új tan talán legismertebb összefoglalójáról, Piero della Francescáról (1416?–1492) írja J. L. Coolidge, hogy „bár Piero sokkal Fermat és Descartes előtt élt, s kétségkívül fogalma sem volt a derékszögű koordinátákról, mégis módszere ugyanaz, mint ami később a képsíkban ábrázolt pontok koordinátáinak az eredeti adatokból való kiszámítása lesz”.

Az itáliai festő-matematikusok a valóságos, látott tér leképezésének vizsgálatával a geometriát az addigi logikai stúdiumból a tér tudományává változtatták. A fordulat jelentőségét megértjük, ha összehasonlítunk egy XIV. századból s egy XVI. századból származó térképet. A reneszánsz kartográfusok nemcsak a hellenisztikus csillagászok szakmai tudását szerezték meg újra. Az időközben hatalmasan kifejlődött trigonometriai módszerek segítségével megadták, hogy a gömb alakú földfelület síkra való leképezésében milyen tulajdonságok változatlanul maradására lehet számítani. Gerhard Mercator (1512–1594) új vetületei nemcsak a hajózás szempontjából voltak fontosak, módszerének sikere egyben a matematikusokat is serkentette, hogy még intenzívebben foglalkozzanak a valódi tér matematikai problémáival.

*

Ennek az új geometriának a keretei között újból teljes erővel fellépett a mozgás és a folytonosság paradoxona. A reneszánsz matematikus humanistái az antikvitás, elsősorban Arkhimédész nyomán próbálták a kérdést megoldani.

Már a XVI. század végének nagy itáliai matematikusa, Luca Valerio (1552–1608) megtanulta Arkhimédésztől, hogyan kell valamilyen egész vagy tört számmal pontosan ki nem fejezhető hosszúságot vagy területet – pl. a négyzet átlóját vagy a kör területét – meghatározni. Fel kell tételezni, hogy a keresett mértékszám elhelyezhető csupa egész számokból és törtekből álló mértékszámok növekvő vagy csökkenő sorozatában úgy, hogy bár maga a keresett mértékszám ezeknek a törteknek egyikével sem azonos, összességüket tökéletesen kettészeli: egyik részük kisebb, másik részük nagyobb, mindig, akármilyen közel is veszünk fel a keresetthez valamely törttel kifejezhető mértékszámot. Ha pl. a keresett mértékszám a kör területe, beírt sokszögek egyre növekvő oldalszámú sorozatával tetszés szerint megközelíthetem, de pontosan elérni nem tudom soha. A kör területét nem lehet a sokszögekkel kimeríteni, „kimeríthetetlen”.

Arkhimédész s a még szorosan nyomában járó Luca Valerio nagyon jól tudták, hogy ennek az eljárásnak a lelke a kimeríthetetlen mértékszám létezését biztosító definíció, az, hogy ez a szám ott van a racionális törtek között, és egyértelműen szétválaszt azok növekvő vagy csökkenő sorrendben elrendezett halmazában bármely kettőt egymástól. Ha ugyanis az ellenkezőjét tételezzük fel, ellentmondásra jutunk. De amilyen egyszerű és világos volt a definíció és az elv, olyan nehéz volt legtöbb esetben ennek az ellentmondásnak a bizonyítása. S méghozzá általános módszert sem lehetett kidolgozni, minden esetben külön fortéllyal kellett legyőzni az egyszerű definíció mélyén meghúzódó végtelent.

A XVII. század matematikusainak sem idejük, sem kedvük nem volt az axiomatikus bizonyítás sok türelmet igénylő fejtegetéseihez. Ahol Arkhimédész oldalakat tölt, ott ők – még a legnagyobbak is – egy odavetett „és így tovább”-bal térnek ki a nehézségek elől. A XVII. században nevezik el Arkhimédész infinitezimális módszerét „exhaustiós” eljárásnak, a kimerítés módszerének. Az antik matematikának, amelyik az ellentmondás-mentesség szigorú parancsai közé akart mindent rögzíteni, az a sok „semmi” okozott nagy problémát, ami az utolsó kiszámított, ill. kiszámítható megközelítő érték és pl. a kör területe között van. A XVII. század matematikája átsiklik e felett a nehézség felett a formák szüntelen egymásba való átalakulása, a változás, a folytonos mozgás segítségével. A mozgás, ami antikvitásnak, középkornak és reneszánsznak érthetetlen fogalom volt, amit lehetőség szerint igyekeztek még az ég s a Föld mozgásaiban is nyugalomra redukálni, a mozgás most tudomány és élet alapvető, további magyarázatra nem szoruló eleme lesz. Nem izgatja többé a kor nagy gondolkozóit (s ami fontosabb, a nem gondolkozóit sem) minden addigi filozófia nagy kérdése: valóság a mozgás vagy látszat? Látszat? Annál jobb! „Mit ér a valóság látszat nélkül?” – kérdezi a kor divatos morálfilozófusa, Gracian. És mit ér a látszat? Pl. az olyan látszat, mint a diszkrét pontokból összetevődő folytonos görbe, a vonalakból felépített terület? Mit ér az olyan látszat, mint a ténylegesen létező „végtelen kicsinek” a fogalma? Nos hát használni lehet, dolgozni lehet vele, meg lehet kerülni segítségével a kimeríthetetlenségi eljárás fárasztó indirekt okoskodását.

Ha síkidomokat változó hosszúságú egyenes szakasz, a térbeli geometriai idomokat változó nagyságú síkfelület mozgásából származtatjuk, az egyes vonalszakaszok hosszúságának, ill. az egyes síkterületek nagyságának a változását megadó szabályból következtetni lehet a mozgó vonalszakaszok, ill. síkterületek összességeként felfogott geometriai idomok területére, ill. térfogatára. Az elv speciális példákon való alkalmazása több matematikusnál megtalálható a XVII. század első évtizedeiben. Kepler a Mars-pálya számításánál alkalmazta, Galilei ennek az alapján dolgozta át Oresme tételét a szabadesésben megtett út kiszámítására alkalmas eljárássá. Bonaventura Cavalieri (1598?–1647) és Gregorius á Santo Vincentio (1584–1667) fogalmazzák meg először általános érvénnyel, tőlük függetlenül felismeri a módszerben rejlő lehetőséget Descartes, s levelezésében néhány szép példában alkalmazta, de mint alapjában „pontatlan”, megközelíthető eljárásra nem sok gondot fordított. Evangelista Torricelli (1608–1647) ismeri fel, hogy az eljárás alkalmazásának a titka az, hogy a görbéket és felületeket „kicsiben” egyenesnek és síknak lehet tekinteni (ma úgy mondanánk, hogy az eljárás a kicsiben lineárisan viselkedő görbéknél és felületeknél alkalmazható), s hogy az ilyen feladatok esetében területszámítás és érintőszerkesztés egymás megfordított műveletei. Az itáliai matematikusokkal együttműködve dolgozza ki hasonló módszerét a nagy toulouse-i matematikus, Pierre de Fermat (1601–1665).

A matematikai végtelen és a fizikai mozgás elválaszthatatlanul összefonódtak ebben a geometriában: a matematikai eljárás különféle mozgásproblémák absztrahálásával keletkezett, s viszont az így létrejövő módszer a fizikai problémák megoldásába bevont geometriai fogalmakat és eljárásokat világította meg új oldalról, s vezetett új matematikai kérdésekhez. Matematikai elmélet s fizikai alkalmazás a XVII. században nem választható el, a kettő teljesen egybeesett.

A módszer belső ellentmondásai felett, még ha észre is vették, vagy átsiklottak, mint Cavalieri, vagy egyenesen az eljáráshoz tartozónak érezték, mint Galilei. Galilei korszakalkotó műve, a *Discorsi e dimostrazioni matematiche, intorno a due nuove scienze* (Leiden, 1638), Első Napjában főleg a végtelen és a mozgó paradoxonaival foglalkozik, s azt bizonyítja, hogy a dolgok lényegéhez tartozik a paradox, a hihetetlen, a látszat. Simplicio, a józan észt és a régi empirikus tudományt képviselő Simplicio éppen az alkalmazás nevében tiltakozik a Mester túlságosan új és fantasztikus elvei ellen. „Teljesen megzavarodtam –

mondja Simplicio –, ezek az új nézetek csupa hihetetlenséggel állítanak szembe, még hogy egy uncia aranyat úgy meg lehetne ritkítani, hogy széthúzva nagyobb lenne, mint a Föld, s a Földet úgy összesűríteni, hogy kisebb helyen elférne, mint egy dió? Nem hiszem, s nem hiszem, hogy magad is elhinnéd. Megfontolásaid és bizonyításaid matematikai dolgok, csupa absztrakció, semmi közük az érzékletes anyagi valósághoz, a természet dolgaira és a fizikára ezek a matematikai törvények egyáltalában nem alkalmazhatók."

Pedig a Galilei iskolájában megszülető infinitezimális módszer később éppen az alkalmazások szempontjából lett fontos. De nem az itáliaiak által használt nehéz antik geometriai köntösben, hanem a mozgásgeometria Descartes-féle algebrai formalizmussal ötvözött alakjában. Az algebra segítségével lett az itáliai geométerek infinitezimális eljárásából infinitezimális számítás, s ennek felhasználásával sikerült a XVII. századvég s a XVIII. század matematikusainak a Természet Nagy Könyvéből újabb fejezeteket megfejteniük.

III.

A középkor és a reneszánsz korában mindenütt, ahol talajra talált a görög örökség, eleinte lassan, azután gyorsabban s egyre több irányban fejlődött a matematikai műveltség. A bizánci birodalomban, az izlám arab nyelv és kereskedelem által összetartott világában, a latin nyugaton, Itáliában s a vele szoros kapcsolatban fejlődő német kereskedővárosokban: mindenütt, ahol a középkori és reneszánsz kori városkultúra virágzott, otthont talált a matematika valamilyen formája is. Ez a matematika sokarcú volt, mint maga a hordozó városkultúra, sokarcú, de nagyjából azonos színvonalú. A XII–XIII. századtól kezdve a bagdadi meg az oxfordi tudós, s nemsokára a krakkói, nürnbergi, páduai vagy nápolyi egyetemi professzor tökéletesen megértette egymást; a műveltség nemcsak átlagában, csúcsaiban is kiegyenlítődött.

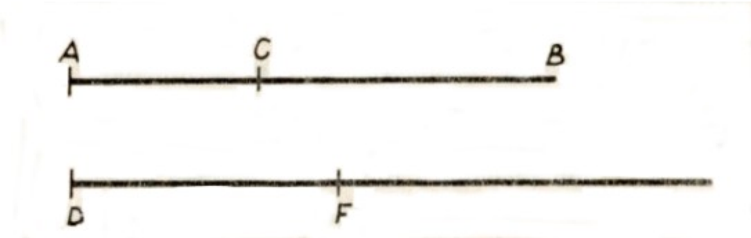
A XVII. század első két évtizedétől kezdve lassan minden megváltozott. Európa egy kicsi részén, Hollandiában, Londonban, Párizsban olyan intenzív matematikai-természettudományos fejlődés kezdődött, amihez képest még az egész fejlődést elindító itáliai matematikai-természettudományos reneszánsz is majdnem jelentéktelenné zsugorodott.

A görög matematika néhány teremtő évszázada óta nem volt ilyen ugrás a matematika történetében. A XVII. század közepén, alig egyetlen generáció alatt, az egész matematika képe megváltozott, s a század végén már szó sem lehet róla, hogy nehéz tanulás nélkül bárki is megérthesse ezt az új matematikát. Ez az új matematika azonban nemcsak nehezebb és sokkal többféleképpen alkalmazható, sokkal egységesebb is volt, mint az addigi. Ezt az új egységet is, mint egykor a görög geometriáét, speciális *módszer* biztosította, ha ezt a módszert nem is lehet olyan könnyen nevén nevezni, mint a görög geometria axiomatikus-deduktív módszerét. A XVII. század legnagyobb matematikusai mind ennek az új módszernek a kidolgozásával fáradoztak. Műveikben és levelezésükben minduntalan visszatér a Módszer már majdnem misztikusan fontossá növelt fogalma, mindenki a saját Módszerét vélte a legjobbnak, titkolták és harcoltak érte, azt hitték, csak ők találhatták meg. Mikor azután egymástól függetlenül, többen ugyanazt a Módszert fedezték fel, elkeseredett vádaskodás, veszekedés, prioritásharc kezdődött, melynek hullámai messze túlcsaptak a dolgot értő beavatottak szűk körén, filozófusok, teológusok, politikusok, hercegek, uralkodók keveredtek a harcba, amely lassan két név, Newton és Leibniz neve köré sűrűsödött. Túlságosan egyszerű lenne ma, visszatekintve, az „infinitezimális analízis” módszerének nevezni ezt a XVII. század matematikusai által „univerzálisnak” és csodálatosnak érzett Módszert. Azt sem szabad elfelejteni, hogy legfontosabb előfutára, Descartes, végig tiltakozott a Módszer ellen, s Newton az újkori matematikai természettudomány bibliáját, a *Principiá*-t nem az új matematikai Módszer stílusában írta meg, jóllehet teljesen az új Módszer *szellemében.* Bonyolult és ellentmondásos kor bonyolult és ellentmondásos matematikai világa a XVII. század tudománya, s bár egész mai technikai, matematikai, természettudományi civilizációnk az akkor megálmodott alapokon nyugszik, nem lehet mai tudományos fogalmaink szerint megérteni. A ma is élő elnevezések mögé meg kell próbálni felidézni az akkori kereteket.

*

Nem a XVII. században lett először fontos a *számolás,* hiszen a késő középkor és a reneszánsz kereskedővárosainak is jól ismert alakja volt a számolómester. A csillagászat, hajózás, és (a nagy felfedezések korában) a térképkészítés is sok számolási feladatot igényelt. A számolás azonban a meglevő módszerekkel nagyon lassú volt. Különösen a rohamosan fejlődő megfigyelőcsillagászat, a trigonometria és a súlymérés tudománya nélkülözte a hatékonyabb számítási technikákat. Kiváltképpen a törtekkel való munka meg a nagy számok osztása és szorzása volt nagyon bonyolult és lassú. Ebből a szempontból volt igen fontos a XVII. század két nagy számítástechnikai újítása, a tizedes törtek bevezetése és a logaritmus felfedezése.

A tizedes törteket 1585-ben alkalmazta először Simon Stevin (1548–1620) brüggei mérnök-matematikus, de használatuk csak a XVII. században terjedt el, a logaritmussal egy időben. A logaritmus felfedezése a matematikatörténet egyik fontos állomása, s nemcsak a számítástechnika miatt. John Neper v. Napier (1550–1617) a trigonometriai számítások megkönnyítésére találta ki a logaritmust. Napier 1614-ben megjelent *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* című könyvében a következőképpen definiálta a logaritmust: felvett először is egy *AB* vonalszakaszt, s egy *D* kezdőpontú (végtelenbe terjedő) félegyenest.



3. ábra.

Azután a szakaszon és a félegyenesen egy-egy mozgó pontot képzelt, melyek azonos pillanatban indulnak az *A,* illetve a *D* pontból. Feltette, hogy *A* és *D* pontban a két pont sebessége azonos, azután a *D* kezdőpontú félegyenesen mozgó pont egyenletesen mozog tovább ezzel a sebességgel, az *AB* szakaszon mozgó pont azonban csökkenő sebességgel mozog úgy, hogy amikor *C* pontba ér, sebessége a még megteendő *BC* szakasszal arányos. Ebben a pillanatban a *D* kezdőpontú félegyenesen (egyenletes sebességgel) mozgó pont *F*-ben van. Napier *DF-e*t nevezte *BC* logaritmusának.

Ezzel a Napier-féle logaritmussal nem egészen úgy kell számolni, mint a mi logaritmusunkkal. Figyeljük meg pl., hogy a definícióban nem szerepel a *mai* logaritmusdefinícióban centrális hatványkitevő fogalma; ezt a fogalmat kellő általánosságban akkor még nem is ismerték, a logaritmus fogalma régibb, mint a „hatványfüggvény” fogalma. Éppen itt, a logaritmusban jelenik meg először két mennyiség közötti *összefüggésnek* a fogalma abban az értelemben, hogy az egyik mennyiség minden értékéhez *meghatározott szabály szerint* hozzárendeljük a másik mennyiség valamilyen értékét. D. T. Whiteside a logaritmust „minta-függvénynek” nevezte, a logaritmus mintáján elindulva dolgozták ki a matematikusok a függvény általános fogalmát.

Olvassuk el most újra a Napier-féle logaritmusdefiníciót, s vegyük észre, hogy milyen fontos benne a mozgás, a *folytonos mozgás* szerepe. A mozgás matematikai szerepeltetése a XVII. századi matematika legfontosabb jellegzetessége; ez az egyik oka, hogy a XVII. századi matematika olyan szoros kapcsolatban fejlődött a fizikai mozgások elméletével, az égi és földi mechanikával. Napier definíciója egy geometriai és egy aritmetikai sorozat közötti összefüggés (a logaritmus) leírása, a *matematikai mozgás nyelvére* „lefordítva”. Ugyanezen a mozgásgeometriai nyelven mondotta el később Newton a dinamika alapvető összefüggéseit.

Napier felfedezésének azonban közvetlen, számolástechnikai jelentősége is óriási volt, különösen Henry Briggs (1561–1630) praktikus megfogalmazásában. Henry Briggs Napier nagy felfedezése idején a londoni Gresham College professzora volt. Ezt a főiskolát Erzsébet királynő egykori tanácsosa, a londoni tőzsde megalapítója, Sir Thomas Gresham (1519–1579) végrendeletének s terveinek megfelelően hozták létre. Az volt a feladata, hogy az új kereskedelem s tengerészet számára az új matematikában s tudományokban jártas szakembereket képezzen. A Gresham College volt fél évszázadon át az angol természettudomány otthona, innen indult el az újkori tudomány talán legfontosabb műhelyének, a Royal Society-nek a munkássága. A Gresham College praktikus, gyakorlati szelleme határozta meg a nagy Társaság diadalmas első éveinek a működését. Gazdasági, társadalmi s tudományos fejlődés egyidejűsége a XVII. századi Angliában már a kortársaknak feltűnt, s ma is iskolapéldája a gazdaság- és társadalomtörténet irányába tájékozódó tudománytörténet-írásnak. De már Bernal (magyarra is lefordított) könyve[4] megállapította, hogy bár „a kapitalizmus és a tudomány mozgása összefügg, a kettő viszonya sokkal mélyrehatóbb és bonyolultabb, semhogy pusztán az ok és az okozat fogalmával ki lehetne fejezni".

A XVII. század második-harmadik évtizedétől kezdve Európa-szerte hatalmas gazdasági és társadalmi krízis bontakozott ki. Anglia és Hollandia sokkal jobban tudott ez ellen a válság ellen védekezni, mint Európa többi államai. Többek között azért, mert hajózását és életét az új, nagy befektetést, szervezést és tervezést igénylő távolsági kereskedelemhez igazította. Nem az angol és holland Keletindiai Társaságok *okozták* az angol és holland tudomány felvirágzását, de az a szellem, mely ezeket a társaságokat is létrehozta és éltette, kedvező volt a matematika fejlődésére is, akár a Gresham College gyakorlati élethez ezer szállal fűzött professzorait tekintjük, akár a gyakorlati élettől távol álló, nagy, magányos álmodókat, mint Isaac Newton.

Newton jegyzőkönyveiből látjuk, mennyire szeretett számolni, s hogy bízott a számításaiban. Ahol Galilei vagy Descartes csak jelezték a példát, ott Newton hallatlan szorgalommal véges-végig kiszámolt mindent, több tizedesjegy pontosságig. A XVII. századi angol matematika a problémák *kiszámíthatóságára* ügyelt, s ezzel összefüggésben a számolási szkémákra. A legnagyobb XVII. századi angol matematikusoknak is – mint Newton vagy John Wallis (1616–1703) – a számolás sikere szentesítette az eljárást. A betűkkel kijelölt műveletek éppen úgy elvégezhetők, mintha a betűk közönséges számok lennének, közönséges véges vagy végtelen tizedes törtek. A XVII. századi Angliában számolómesterek és

[4] Bernal, J. D.: Tudomány és történelem. Ford.: Szalai Sándor, Salgó László, Félix Pál. Bp., 1963. Gondolat. XXVIII, 846 p. *(– a szerk. megj.)*

kereskedők, pénzváltók és hajóskapitányok egyformán használták a tizedes törteket, könnyű volt velük a számolás, minden kiszámíthatóvá vált: nyereség, halálozás és születés, szaporodás, kamat. A számolási szkémák ereje nem tört meg bonyolult matematikai feladatokon sem: a XVII. századi angol matematikusok nem riadtak meg a műveletek elvégzésétől akkor sem, ha az eredmény végtelen sok tag volt. Nem riadtak meg, hiszen az ilyen eredmény elvben nem különbözik a végtelen tizedes törtektől, amelyekkel olyan otthonosan bántak. Newton egyik nagy művének már a címe is mutatja, hogy ez az *„Analízis végtelen sok tagú egyenletekkel”* meghonosodott, s előkészítette a modern matematika egyik legfontosabb fejezetét, a végtelen sorok elméletét.

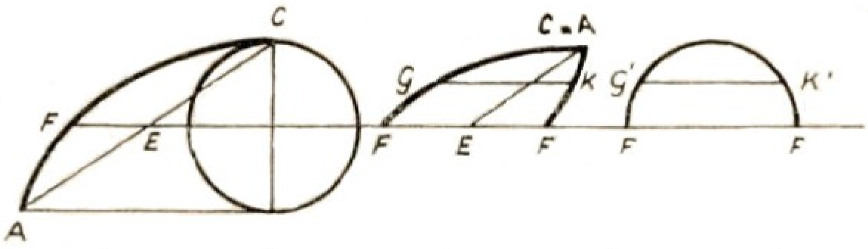
*

A nagy válságban, amely a XVII. század második évtizedétől kezdve Európa-szerte felváltotta az akkor már több mint évszázada tartó gazdasági expanziót, Itália volt az egyik legtöbbet vesztő ország. A XVI. században még Itália – és az egész mediterráneum – gazdasága másodvirágzását élte, a nagy felfedezések kiváltotta rövid átmeneti depresszió után. A XVII. század krízisében azonban Itália rosszul alkalmazkodó gazdasági élete megroppant. Mediterráneum-szerte, de főleg Spanyolországban és Itáliában elszegényedés, bizonytalanság, hanyatlás korszaka következett. Egyedüli biztos alap újra a földbirtok lett, a nemesség visszanyerte a városi fejlődés századai alatt részben már elvesztett hatalmát.

Az általános hanyatlás közepette a matematika egyelőre még hatalmasabban fejlődött. Kereskedők, mérnökök, festők gyakorlatából és az antikvitás humanista megismeréséből ötvöződő alapokon önállóvá válva, kedvezőtlen külső körülmények között is segítette fejlődése belső dinamikája. Ez az antik matematika nyomán tájékozódó itáliai fejlődés vezetett Arkhimédész terület-, súlypont- és ívhosszúság-számítási módszerének az újra-felfedezésére. (Arkhimédész kézirata ugyanis nyomtalanul eltűnt, és semmit sem tudtak róla 1909-ig, amikor egy konstantinápolyi kivakart és szent szövegekkel teleírt kéziraton megtalálta Heiberg.)

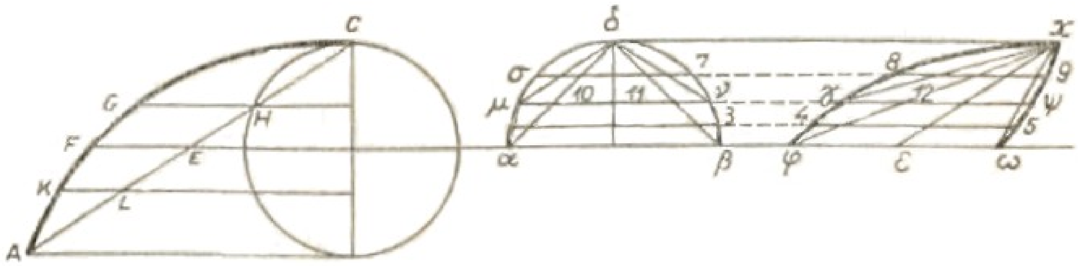
Ez a módszer a XVII. században az azonos célra használt és egyre jobban megismert másik nagy antik módszer, a kimeríthetetlenségi eljárás fokozatos egyszerűsítésével párhuzamosan fejlődött ki, mechanikai, főleg mozgási és súlypontszámítási problémákkal kapcsolatban, Galilei tanítványai, elsősorban Bonaventura Cavalieri (1598?–1647) és Evangelista Torricelli (1608–1647) kezében. A módszer, az ún. „indivisibilia geometria” eredeti formájában nagyon nehéz és többféleképpen értelmezhető, azért a lényegét egy kortárs interpretátor alapján próbáljuk itt megérteni.

Annál is inkább, mert ez a példa a következők szempontjából is lényeges.



4. ábra.

1638-ban Descartes az indivisibilia geometria Cavalieri-féle eljárását alkalmazta a ciklois (a gördülő kör egy pontja által leírt görbe) alatti terület kiszámítására. Az *AECFA* cikloisszelet (lásd 4. ábra) kiszámítására az *FE* középvonal mentén felvágta a szeletet, s az alsó felét a felső mellé fordította úgy, hogy az *A* pont a *C* ponttal essen egybe. Ebben a helyzetben – mint könnyen igazolható mai módszerekkel – az *FEFCF* süveg alakú idom minden egyes *GK* egyenese ugyanolyan hosszúságú, mint egy, az *FF* szakasz meghosszabbításán felvett, ugyancsak *FF* hosszúságú átmérő fölé rajzolt félkör által a *GK* meghosszabbításából lemetszett *G'K'* szakasz. Mármost Cavalieri módszerének alapelve az, hogy ebben az esetben, azaz ha a két különböző síkidom megfelelően felvett *egyeneseiről* ki lehet mutatni, hogy egyenlő hosszúságúak, akkor a két síkidomnak a *területe* is egyenlő. A módszer tehát összefüggést állapít meg két folytonosan változó mennyiség: a terület és a vonalszakasz hosszúsága között, ahhoz hasonlóan, mint ahogyan a Napier-féle logaritmusdefiníció összefüggést állapított meg két folytonosan változó mennyiség között. Ebben az esetben azonban sokkal nehezebb volt meghatározni az összefüggés természetét, mint a logaritmus esetében, ami nem csoda, mert ez az összefüggés sokkal bonyolultabb, azt lehetne mondani, hogy nem közvetlenül a folytonosan változó mennyiségekre magukra, hanem ezeknek a mennyiségeknek a *változására* vonatkozott: *ha* a síkidomban foglalt egymás utáni egyenes szakaszok hosszúsága a megadott módon alakul, *akkor* a síkidom területe ez meg ez. Azaz, az egyenes szakaszok hosszúságának az alakulása maga is valamilyen összefüggéssel vagy aránnyal jellemezhető, s az új, a terület kiszámítására szolgáló művelet már erre az összefüggésre épül. Vagy ahogyan Cavalieri ezt a hierarchikus elvet kifejezte: „Valamely síkidom… összes vonalszakaszát (omnes lineas) nem számosságára nézve hasonlítjuk össze, mert ezt nem ismerjük, hanem nagyságára nézve, és az összes vonalszakasz által betöltött területet ezzel vesszük egyenlőnek...” Egyszerűbben elmondva, a síkidom területét megfelelő irányban felvett, egyébként azonban meghatározatlan vonalbeosztás segítségével kell meghatározni. Két felfedezést egyesít ez a módszer: 1. a síkidom *területe* a síkidom által megszabott módon *változó vonalszakaszok* hosszúságából számítható ki; 2. az erre szolgáló párhuzamos vonalbeosztásnál csak az irány fontos, egyébként a beosztás meghatározatlan (indefinit), a beosztást képező vonalak száma nem számít.



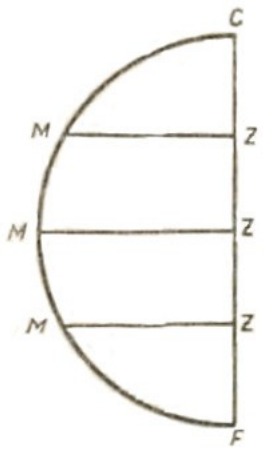
5. ábra.

Ez a két felfedezés volt az infinitezimális számítás első megfogalmazása. Descartes azt mutatta meg, hogy az új eljárás törvényesíthető az antik kimeríthetetlenségi módszer segítségével, mert ugyanaz a párhuzamos-beosztás, amit az indivisibilia-vonalmódszerben használunk a cikloisszelet területének a kiszámítására, használható a szigorú antik módszerhez szükséges *területbeosztás* létesítésére (lásd 5. ábra). Azonban sem Cavalieri, sem Descartes nem tudták megteremteni ennek az új eljárásnak a nyelvét, műveleti szabályait, az ún. algoritmusát. Cavalieri túlságosan ragaszkodott az antik geometriai és arányelméleti tradícióhoz, Descartes-ot pedig szigorúságigénye más, pontosabban és tisztábban megfogalmazható témák felé vonzotta.

*

Cavalieri eljárásában a kortársak elsősorban azt nem tudták megérteni, hogyan lehet a szélesség nélküli vonalak összegéből terület, vagy a vastagság nélküli síkok összességéből test. Descartes eljárása, megmutatva, hogy az indivisibilia-elmélet „indefinit parallel beosztása” és az antik kimeríthetetlenségi elmélet területbeosztása azonos eredményre vezet, kiküszöbölte ezt a hiányosságot, de nehéz, általánosításra nem alkalmas, bonyolult módon. Egyszerűbb, könnyen megjegyezhető s főleg általános elvre volt szükség. Ezt találta meg a Collège de France kalandos életű, veszekedős, különös tanára, Gilles Personne de Roberval (1602–1675). Roberval módszerét nagyon jól érthetően írja le tanítványa, Blaise Pascal (1623–1662):

„Mindaz, ami bebizonyítható az indivisibili-aelmélet szabályai szerint, bebizonyítható a szigorú antik módszer szerint is; és így az egyik módszer csupán szólásmódban különbözik a másiktól, s értelmes ember nem akadhat meg ezen, ha egyszer megmagyarázták neki, mit kell a dolgokon érteni. Ezért használni fogjuk az indivisibiliaelmélet nyelvét, s beszélni fogunk *vonalak összegéről* vagy *síkok összegéről*; tekintsük például egy félkör átmérőjét, amelyet *Z* pontokkal meghatározatlan számú részre osztottunk, és mindegyik osztáspontban képzeljük meghúzva a *ZM* ordinátát. Mármost minden további magyarázat nélkül beszélni fogunk az *ordináták összegéről,* holott aki nem érti az indivisibilia-elméletet, ennek a fogalomnak semmi geometriai értelmét sem látja, mivel azt képzeli, hogy geometriai lehetetlenség síkot vonalak meghatározatlan száma által kifejezni, de ez az elképzelés félreértés. Ez a kifejezés ugyanis csak azt jelöli, hogy négyszögek meghatározatlan számát tekintjük, de úgy, hogy mindegyik ordinátát szorozzuk az átmérő egy-egy kicsi egyenlő részével, s ezeknek a négyszögeknek az összege kétségkívül síkterület, amely (a beosztás finomításától függően) minden előre megadott mennyiségnél kisebb értékkel különbözik a félkör területétől."



6. ábra.

Az indivisibilia-számítás alapelvének ezt a világos leírását Pascal 1658-ban fogalmazta meg, Cavalieri könyve az indivisibilia-geometriáról 1635-ben jelent meg. Descartes felfedezése az indivisibilia-elmélet és az antik kimeríthetetlenségi módszer azonosságáról 1638-ból való. Figyeljük meg a módszer gyors egyszerűsödését és általánosodását. A Roberval–Pascal-féle formájában már alkalmas a módszer különféle terület-, térfogat- és súlypontszámítási feladatok azonos szkéma szerinti megoldására.

A fentebb idézett eljárási szkémát Pascal ugyanebben az évben megjelent kristálytiszta, de nehezebben érthető értekezéseiben még tovább általánosította, megadva tetszőleges fokú parabolák (ahogyan ma mondanánk) „integrálásának” szabályát; továbbá levezette azt a fogalmat, amit később „vonalmenti integrálnak” neveztek el; megoldott számos igen bonyolult integrálási feladatot stb. Közben azonban sohasem felejtkezett meg az *alapelvek* újra és újra, egyre tisztább és lehető legsokoldalúbb vizsgálatáról, így az indivisibilia elvet, aminek a területszámításban való jelentését a fentebb idézett módon magyarázta meg, tisztázta a fordított irányban is.

> „Bármily számban is adunk folytonos mennyiségeket – írja – egy náluk magasabb rendű folytonos mennyiséghez, utóbbin azok semmit sem növelnek. Így pontok a vonalhoz, vonalak a felülethez, felületek a testhez semmit sem tesznek hozzá, vagy… semmit sem tesznek hozzá a gyökök a négyzetekhez, s négyzetek a köbökhöz, a köbök a negyedik hatványokhoz. Úgyhogy az alacsonyabb rendű mennyiségeket, mint nulla mértékűeket, nem kell tekintetbe venni…”

Ennek az elvnek a segítségével Pascal egész számok hatványösszegének a számítására vezeti vissza egy tetszőleges fokú parabola alatti terület kiszámítását, felhasználva s a számítás megfelelő helyén elhanyagolva némely „alacsonyabb rendű” mennyiségeket. Ez sem Pascal felfedezése, ő maga is így folytatja a fenti idézetet:

> „Ezeket az indivisibiliaelméletben járatosak előtt jól ismert dolgokat azért említem, mert ebből a példából – amelyben a folytonos mennyiségek hatványaival való számolást az egész számok hatványainak az összegéhez lehet kapcsolni – kitűnik, hogy látszólag még oly távol eső dolgokat is hogyan fűz egybe az egységet kedvelő természet.”

Azonban éppen ennek az egységnek a leírására nem voltak elegendőek az indivisibilia-elméletnek a fogalmai. Pontosabban kellett körvonalazni az elhanyagolható mennyiségek természetét s a velük való munka szabályait, mint ahogyan az az indivisibiliákkal történhetett. Mikor Pascal értekezéseit írta, már ezt is elvégezte, mégpedig több mint két évtizeddel azelőtt, egy másik nagy francia matematikus, Pierre de Fermat (1601–1665).

*

Fermat működése a matematika csaknem minden területén alapvető volt. A számelmélet, az algebra, a geometria későbbi fejlődése néhol máig az ő munkájához igazodik, s valószínűleg leginkább neki köszönhető, hogy az indivisibilia-elméletből már a XVII. század harmadik negyedében megszülethetett az infinitezimális számítás. Mint az egész XVII. századi matematika, Fermat munkássága is Itáliából indult el, s itáliai matematikusokkal párhuzamosan haladva dolgozta ki szélsőérték-számításra és érintőszámításra alkalmazott módszerét. Torricelli használt hasonló megfontolásokat görbék érintőjének meghatározására, azonban mint az itáliaiak mindig, nehéz antik geometriai páncélba öltöztette mondanivalóját. Fermat pedig mestere, Viète elegáns és rövid algebrai jelölési módját alkalmazta.

> „Gondosan analizálva – írja Fermat – Viète… egyenletek vizsgálatára alkalmazott módszerét, észrevettem, hogy levezethető belőle egy olyan módszer, mellyel meg lehet találni a maximumokat és minimumokat, és könnyen meg lehet oldani a határfeltételekre vonatkozó nehézségeket, melyek annyi bajt okoztak az ókori és a modern geométereknek… Legyen pl. az a feladat, hogy *osszuk két részre a* b *hosszúságú szakaszt úgy, hogy a keletkező két szakasz szorzata maximum legyen.* Nyilvánvaló, hogy ezen feltételt kielégítő pont a b szakasz felezőpontja, és a maximális szorzat $b^2/4$. Egyetlen más osztás sem ad $b^2/4$-gyel egyenlő szorzatot. Mármost, ha ugyanezt a b szakaszt úgy osztjuk ketté, hogy a kapott szakaszok szorzata valamely z nagyságú terület legyen (amely területről egyébként feltesszük, hogy kisebb, mint $b^2/4$), ennek a feltételnek két pont felel meg: a maximális szorzatnak megfelelő pont egyik oldalán az egyik, másikon a másik. Legyen ugyanis a a b szakasz felosztásából származó két részszakasz egyike, akkor felírhatjuk, hogy $ba - a^2 = z$ *terület,* mely egyenlet kétértelmű, mert a két gyök bármelyikét lehet a szakasznak venni. Legyen mármost $be - e^2 = z$ *terület* egy hasonló egyenlet. Hasonlítsuk össze a két egyenletet Viète módszere szerint:
>
> $$ba - be = a^2 - e^2.$$
>
> Osszunk mindkét oldalon $(a - e)$-vel, akkor azt kapjuk, hogy $b = a + e$. Tehát az a és az e hosszúságok különbözőek. Mármost, ha a z terület helyett nagyobb területet veszünk, amely azonban még mindig kisebb, mint $b^2/4$, akkor az a és e hosszúságok kevesebbel különböznek, mint az előbb, az osztáspont pedig közelebb kerül a maximális szorzatnak megfelelő ponthoz. Minél inkább nő a részszakaszok szorzata, annál inkább csökken a különbség a és e között, és a maximális szorzatnak megfelelő osztáspontban ez a

különbség teljesen eltűnik; ebben az esetben csak egyetlen megoldás van: *a* és *e* mennyiségek azonosak. Mármost Viète módszere (a két fenti egyenletre alkalmazva), mint láttuk, $b = a + e$ egyenletre vezetett, ha tehát $e – a$ (ami mindig bekövetkezik, ha az osztópont a maximális szorzatnak megfelelő ponttal esik egybe), akkor a jelen esetben $b = 2a$; azaz a részszakaszok szorzata akkor lesz maximális, ha a *b* szakasz felezőpontját vesszük osztópontnak."

Később Fermat a számítást, egyszerűsítés kedvéért, kissé módosította, ugyanis mivel *e* ismeretlen, jelölhetjük $(a + e)$-vel is, s ekkor az eljárás abból áll, hogy a kérdéses egyenletben *a* helyébe $a + e$ értéket írunk, elvégezzük a kijelölt műveleteket, a megmaradó tagok mind tartalmazzák szorzóként *e*-t, végigosztunk *e*-vel, s az így kapott egyenletben *e*-t „zérussal vesszük egyenlőnek". Az így nyert egyenlet adja a keresett szélsőérték helyét.

Pontosan ugyanezt az eljárást alkalmazta Newton majdnem fél évszázad múlva, s azóta is e szerint a módszer szerint tanítják a *differenciálhányados* képzését. A mi szempontunkból most azonban nem annyira az eljárás fontos, hanem az a tény, hogy Fermat precízen definiálja egy, a későbbiekben nagyon fontos kapcsolatféleség fogalmát: ha valamely mennyiséget tetszőlegesen kicsiny értékkel változtatva, ezzel a mennyiséggel kapcsolatban álló másik mennyiség is tetszőleges kicsiny értékkel változik, akkor bármifélék is egyébként ezek a mennyiségek, a köztük levő kapcsolat tipizálható abban az értelemben, hogy alkalmazható rá a fentebb részletezett matematikai művelet, melyet később *differenciálásnak* neveztek el.

Azaz Fermat hasonló fogalomra jutott, bár egészen más úton, mint Cavalieri, s az olasszal körülbelül egy időben: két változó mennyiség közötti összefüggésre alkalmazható egységes művelet fogalmára. Gyanította néhány kortárs matematikus, hogy a kétféle általános művelet, a Cavalieri-féle vonalösszegezés és a Fermat-féle maximum-minimum számítás összefügg egymással; gyanította többek között éppen Fermat eljárásának nagy kritikusa, Descartes. Ezt az összefüggést azonban csak Leibniz és Newton fogalmazta meg, Newton talán pár évvel Leibniz előtt, de nem olyan praktikus formában, mint a francia műveltségű német.

*

Itáliában, ahol a XVI. században algebra s geometria párhuzamosan fejlődött, még a XVII. század nagy matematikusai sem gondoltak a két tan egyesítésére. A görög elmélet nyomán fejlődő itáliai geometria számolás tekintetében megelégedett az arányelméleti módszerekkel, az algebra sokkal hatalmasabb formavilágát nem használta. Az algebra s geometria összekapcsolása a Viète nyomán tájékozódó francia és holland iskola érdeme, s csak az így kialakult, erősen absztrakt és egyszerű formanyelv tette azután lehetővé a század második felében az „infinitezimális kalkulus" két nagy formájának, a newtoni és a leibnizi kalkulusnak a megszületését.

A geometria lefordítása az egyenletek nyelvére két nagy francia matematikusnak, Fermatnak és Descartes-nak köszönhető. Fermat munkája talán gazdagabb eredeti ötletekben, és matematikai szempontból mélyebbre hatol, Descartes (1596–1650) következetesebben és merészebben alkalmazta az algebrai jelölési módot, s tisztábban látta alkalmazási tartományának határait s a módszer jellegét. Még a művei s a személye körül fellángoló heves viták is kedveztek az új tan elterjedésének, s ha talán Fermat is az új elmélet legelső apostola, Descartes a leghatásosabb propagátora.

Descartes *Géométric*-je (1637) a legnagyobb hatású könyvek egyike. Nehézsége ellenére mindenfelé olvasták, s beláthatatlan kommentár-irodalom keletkezett körülötte. A *Géométric* három könyvből áll. Az első könyv a körzővel-vonalzóval megszerkeszthető problémákról szól, a második görbe vonalak szerkesztésével, osztályozásával és legfontosabb tulajdonságaival foglalkozik, a harmadik könyv a harmadfokú és magasabb problémák szerkesztését és ennek a szerkesztésnek megfelelő egyenleteket tárgyalja, ötletes görbe-előállító mechanizmus segítségével. A könyvben tehát *szerkesztésekről* van szó, s így joggal viseli a *Géométric* címet, amely nevet éppen a szerkesztésekkel foglalkozó tudományra alkalmazták már az ókor óta, a számolással foglalkozó aritmetikától való megkülönböztetésképpen. Az egyenletek nagyon megkönnyítik a munkát, de *elvi* különbséget nem hoznak a rajzban történő szerkesztésekhez képest, sőt még inkább az egyenletek vizsgálatában is a szerkesztés szempontjai dominálnak. Így pl. Descartes valósággal megszerkeszti az egyenletet a gyöktényezőkből: felépíti, mint a gyökök és az ismeretlen különbségéből álló kéttagúak szorzatát. Ez az eljárás akkoriban már nem teljesen új, Descartes azonban felfedezi megfordíthatóságát: az egyenlet osztható egyik gyöktényezőjével, s így eggyel alacsonyabb fokú egyenletté redukálható.

Ez az egyenletredukció a későbbi fejlődés szempontjából nagyon fontos. Ugyanis Descartes holland tanítványa, Jan Hudde (1628–1704) különleges egyenletredukció segítségével megmutatta, hogy lehet valamely probléma egyenletének kétszeres gyökét meghatározni, a két egybeeső gyök létezése pedig geometriai nyelvre fordítva semmi egyéb, mint a szélsőérték, illetve az érintő létezésének a feltétele. Ezáltal a problémák egyik osztálya, az „algebrai egyenlettel leírható görbék" esetében (Descartes ezeket a görbéket

„geometrikusnak” nevezte, a többi görbéket pedig „mechanikusoknak”) a kartéziánus matematika pontos, képlettel kifejezhető szabályt adott az egyenlet által leírt görbe szélsőértékének és érintőjének meghatározására. Newton *ezt* az eljárást használta általános, „mechanikus” görbékre is érvényes módszerének kidolgozására.

A kartéziánus matematika kidolgozói és terjesztői holland matematikusok voltak, Franciaországban a kartéziánus módszereket sokáig át sem vették. Láttuk, hogy pl. Roberval és Pascal végig antik geometriai stílusban dolgoztak. A kartéziánus egyenletgeometria sokkal hamarább terjedt el Angliában, mint Franciaországban, azonban Angliában is erős antikizáló tradíció hatott az új kartéziánus módszerek ellen. A Newton és Leibniz között kitört szerencsétlen prioritásharc miatt ez az antikarteziánus, antikizáló irány folyton erősödött; az angolok Leibniz algebrai szimbolikával szabadon dolgozó módszerét ugyanis a kartéziánus geometria folytatásának érezték.

Leibniz hatalmas szünkretizmusában a kartéziánus matematika csak egyik vonás volt, legalább annyit vett át Pascaltól, általában az indivisibilia-geometriából, s mestere, Huygens (1629–1695) közvetítésével Fermat módszeréből. A nagy század matematikai felfedezései s – mai szemmel nézve – „hibái” is mind Leibniz módszerében látszanak összefutni: a folytonosan változó mennyiségek közötti összefüggések iránti érzék, a végtelennel, mint valamilyen meghatározatlan és mégis határozott szabályoknak engedelmeskedő mennyiséggel való operálás, az algebrai egyenletek és szimbólumok kedvelése, geometriai intuíció és algebra áthatása.

*

A XVII. század matematikájában lépésről lépésre láthattuk, hogy törekedtek folyton általánosabb, módszeresebb, univerzálisabb és egyben absztraktabb kifejezésre Európa matematikusai. Ez az absztrakcióra való hajlam nemcsak a matematikában észlelhető, áthatja a XVII. századi élet minden területét. Az egyéni vállalkozásra épített mediterrán kereskedelmi formákat felváltja a távolsági kereskedelemre szerveződött nagy társaságok uralma. Az egyéneknek (vagy családoknak, vagy királyoknak, vagy pápáknak) juttatott monopóliumokat szervezett és állandó társaságok állami törvényhozással biztosított jogai váltják fel, az üzletek lebonyolításában a kölcsönös bizalmon alapuló váltólevél helyébe a spekuláción alapuló tőzsdeügylet lép. Az egyéni kapcsolatok elvesztették jelentőségüket, az egyén jelentéktelen rész lett. Hivatalnokok serege váltotta fel a kereskedő-vállalkozókat, szürke és szorgalmas rabszolgák, akik Amszterdam, Hága és London irodáiból intézték a távoli Indiák kereskedelmét, anélkül hogy valaha is sütötte volna a fűszer- és aranytermő trópusok legendás napja sápadt arcukat. A nagy kalandból, ami a kereskedelem még a XVI. században is volt, absztrakció lett.

Itália nem tudta követni az új fejlődési tendenciákat, a XVII. század második-harmadik évtizedétől kezdődő nagy adaptációs válságban végleg lemaradt a kialakuló új nemzetek versenyében. Franciaország, az új világ forrpontját képviselő Anglia-Hollandia és a lassan elmaradó mediterráneum közé zárva, csak fél szívvel vett részt a nagy XVII. századi harcban a világpiacokért. Gazdasági életét megkísérelte az új szabályok szerint igazítani, ugyanakkor társadalmi struktúrája a mediterráneumra jellemző refeudalizációhoz igazodott.

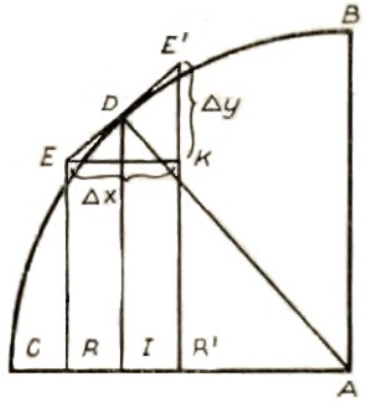
A XVII. század nagy válsága a mediterrán világban leginkább a polgárságot sújtotta, elszegényedett, s az adótól mentes s természeti beszolgáltatásokat, valamint robotot élvező arisztokrácia került a gazdasági és politikai élet élére. Hollandia és Anglia polgárai a tengeri kereskedelem volumenének megnövelésével, új világpiacok feltárásával, a kereskedelem és pénzügyletek megszervezésével megtartották hatalmukat, a polgárság gazdasági és kereskedelmi térhódítása folytatódott. Hollandiában a XVII. század elején, Angliában a század közepén a harc végleg a *gazdag* polgárság javára dőlt el. A mediterráneum gazdasági és társadalmi élete egyaránt visszaesett; gazdasága a nagy óceáni kereskedelem egyik mellékága lett, társadalma az újra tért hódító arisztokrácia martaléka.

A francia gazdag polgárság legfelső rétege, az ún. „hivatalnok nemesség” – ahová pl. Fermat és Pascal is tartoztak – gazdasági szempontból az új fejlődés híve volt, s Hollandiához, Angliához húzott. Ugyanakkor életstílus s társadalmi fejlődés tekintetében a mediterrán refeudalizáció, mégpedig legszélsőségesebb, spanyol formájában volt az eszményképe. A „Napkirály” korában Madrid, sőt Isztambul, szinte közelebb került Párizs előkelőihez, mint London vagy Amszterdam. Ennek a francia arisztokráciának – születési és hivatalnok arisztokráciának egyaránt – XIV. Lajos udvara biztosította az élet örömeit: a koncentráció, a fegyelem, a szabály, az engedelmeskedés „örömeit”.

A XVII. század nagy krízisében Németország vesztett legtöbbet. Németország? 360 kis államocska politikai és vallási rivalitásának pokoli melegágya. A harmincéves háború alatt a lakosság száma 16 millióról 6 millióra esett. A városok jelentéktelenek voltak, Berlin 6000, München 9000, Augsburg 18000 lakosú kis város. Csak három városban: Frankfurtban, Hamburgban, s a nagy keleti kereskedelmi utat uraló Lipcsében volt említésre méltó kereskedelmi, gazdasági és kulturális élet. Természetesen nem hasonlítható ez a kultúra a nyugati szomszédokéhoz: a lutheranizmus nem tudott filozófiát teremteni, Németországban tovább élt az arisztotelianizmus, mint bárhol, és a peripatetikus averroizmus mellé Itáliából neoplatonista, Franciaországból sztoikus filozófiai irányok áramlottak be. Leibniz születésekor (1646) még tartott a harmincéves háború.

*

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) a német gazdasági, politikai és szellemi zűrzavar világából került, a mainzi választófejedelem szolgálatában, 1672-ben a Napkirály előre megállapított összhangtól tündöklő Párizsába. Szerencséjére éppen Huygens tanítványa lett. Huygensé, aki hollandusnak túlságosan arisztokrata volt, franciának túlságosan polgár. Huygens figyelmeztette a matematikai gondolkozás két ellentétes világi táborba tartozó csillagára, a janzenista Pascalra és a jezsuita Honoratus Fabryra (1607–1688). Fabry, hogy a Cavalieri-féle indivisibilia fogalomban rejlő ellentmondásokat elkerülje, a felületet (megfelelő irányban felvett) vonalak „összessége” helyett egyetlen vonal folytonos „folyásából” keletkezőnek tekintette, s ezen az alapon ugyanazokat a problémákat, amiket Pascal „végtelenül keskenyíthető felületelemekből” kiindulva oldott meg, geometriailag szemléletesebben tudta megoldani. Mindketten, Pascal is és Fabry is, sokat foglalkoztak a körből származtatható két görbe, a ciklois és a sinusgörbe problémáival. A sinusgörbét akkoriban a kör átmérőjére merőlegesen húzott egyenesekkel – ahogyan Pascal nevezte, „ordinátákkal” – definiálták. Annak a területnek a kiszámításában, amit mi ma „a sinusgörbe alatti területnek” nevezünk, Pascal – s ez okozta a legnagyobb nehézséget – a kis elemi területeket, amelyekből az egész terület összetevődik, minden egyes ordináta *D* végpontjában húzott érintőre vonatkoztatva határozta meg. Leibniz azonban észrevette, hogy a $\Delta y/\Delta x$ hányados állandó marad, akárhogyan is csökken a Δy és a Δx. Ez a hányados, amely kifejezi a *D* pontbani érintő irányát, nem változik. Megadott módon s a kérdéses görbétől függően változik viszont ennek az aránynak az értéke, ha a görbe valamely *D* pontjáról egy másik *D* pontjára térünk át. Ennek a változásnak az egyenlete kiszámítható, mégpedig úgy, ahogyan Fermat a maximum-minimumot, vagy ahogyan Descartes nyomán Hudde az algebrai egyenlettel kifejezhető görbék érintőjének egyenletét számította. Ennek a *változásnak* az egyenletét jelölte Leibniz dy/dx-szel. Ez a jel minden egyes görbe esetében más és más egyenletet jelöl, de a műveleti szabályok, amelyek a jellel való operációkra érvényesek, minden esetben azonosak.



7. ábra.

Így pl. a területszámításba Pascal által bevezetett szorzatokat, amelyek a változó ordináták és a tengelyen felvett beosztás azonos szakaszaiból állnak, és végtelenül finomíthatok, *ydx* jellel lehet mindig jelölni, s az összegükből adódó területet a latin summa szó megnyújtott kezdőbetűjét felhasználva ∫*ydx*-szel. Leibniz nagy felfedezése az volt, hogy erre a két jelre, a differenciálás *d* jelére és az összegezés (vagy ahogyan Leibniz meg két legjelentősebb tanítványa, Jacob és Johann Bernoulli csakhamar nevezte, „integrálás") ∫ jelére ugyanolyan egyszerű műveleti szabályok érvényesek, mint amilyenekkel az algebra már régen dolgozott. Így Leibniz „infinitezimális különbségei" megszabadultak attól a meghatározatlan, indefinit jellegtől, amely az indivisibilia-elméletben jellemezte őket.

> „Ezeket a végtelen kicsinyeket – írja Leibniz – nem úgy képzeljük, mint egyszerű és abszolút zérusokat, mondhatnánk inkább, hogy relatív zérusoknak tekintjük, azaz olyan eltűnő mennyiségeknek, melyek bár minden határon túl tartanak zérushoz, mégis megőrzik jellegzetességüket, mellyel eltűnésük előtt rendelkeztek…"

A monászoknak egymás felé nincs ablakuk, de az Egész ihletése hatja át őket eltűnésük pillanatában is, a mennyiség eltűntével is megmarad az egyszerű algebrai szabály, az előre megállapított Harmónia. Pascalt ijesztette és borzasztotta a végtelen, hiszen, mint a *Gondolatok* egyik híres töredékében írja, „a végtelennek csak létét érezzük, természetéről nem tudhatunk semmit". Pascal matematikájában a végtelen szerepe a meghatározatlanság. Leibniz világában minden igazi tudás végső forrása a végtelen. Ennek a segítségével találta meg azt a század eleje óta oly sok matematikus által keresett Univerzális Formalizmust, amely alkalmas folytonos mennyiségek közötti összefüggésekből újabb ugyanilyen természetű összefüggések levezetésére. S csak mikor ezt az Univerzális Formalizmust megtalálta, akkor nevezik el, akkor értik meg ő és nagy tanítványa, Jacob Bernoulli (1654–1705) ennek a folytonos mennyiségek közötti összefüggésnek a természetét is, akkor mondják ki az egész modern matematika központi, megváltó szavát, azt a szót, hogy *függvény.* Ettől kezdve két évszázadon át a matematika a függvények tana volt, a differenciálható és integrálható függvényeké. S ennek a két évszázados fejlődésnek az első százada jórészt abból állott, hogy Newton más formalizmusban elmondott, de a Leibnizénél szilárdabban megalapozott és a fizika területén sokkal nagyobb jelentőségű felfedezéseit Leibniz tanítványai lefordították az új „integrál- és differenciálszámítás" nyelvére. A matematikai „XVIII. századot" Newton nagy felfedezéseitől kell számítani. Matematikai és fizikai műveltség tekintetében – de talán más szempontból is – a XVIII. század Newton százada, de Newton gondolatait Leibniz nyelvén mondják majd el. S a kettő összeegyeztetéséből született a XVIII. század legnagyobb *matematikai* teljesítménye, a francia *mechanika.*

IV.

A matematika története, akárcsak az irodalomé vagy a képzőművészeté, egyidős az emberiség írott történetével. De ha valaki a matematikusok történetét akarná megírni, nem kellene nagyon messzire mennie. A hellenisztikus kor néhány nagy s már legendássá oldódott alakjától eltekintve nemigen találna tisztán matematizálásból megélő embereket a XVIII. század előtt. Addig a matematikus egyúttal filozófus, csillagász, teológus, mágus, orvos, jogász, katona, festő, építész vagy kereskedő volt, vagy éppen író, szent és felekezeti politikus, mint az újkori matematika egyik legfontosabb előfutára, Blaise Pascal. Az új matematika megteremtőjének, a nagy Newtonnak, még világhíre csúcsán is a pénzverde ügyeivel kellett bajlódnia, s Leibniz értékes életéből éveket lopott el a Braunschweigi-hercegek történelmének a megírásával.

Azonban nem lehet csak a patrónusokat és a társadalmi körülményeket okolni az önálló matematika ki nem alakulásáért. „Hibás" volt ebben maga a matematika is. A matematika ugyanis a XVII. századig túlságosan „szűk" is volt, meg túlságosan „nehéz" ahhoz, hogy önálló szakmává, a gondolkozás s tevékenység önálló területévé alakuljon. Nehéz volt, mert viszonylag egyszerű problémák megoldására sem volt megfelelő, könnyen megtanulható módszere. Így aztán az általános vagy a fizikai alkalmazás szempontjából fontos feladatokat meg nem közelíthette: viszonylag szűk és egyszerű területre bezárt maradt. A XVII. század nagy matematikusai az integrál- és differenciálszámítás *módszerének* a megteremtésével éppen itt segítettek: olyan számolási eljárást teremtettek, amellyel nemcsak a különös lángelmék, hanem az egyszerű tehetséges emberek is bemerészkedhettek a matematika nehéz, eddig még kivételesek előtt is bezárt területeire. Az integrál- és differenciálszámítás, vagy ahogyan a XVII. században nevezték, a *Kalkulus* (számítás), „demokratizálta" a matematikát, ezen az úton minden jófejű ember – alkalmas tanár vagy könyv segítségével – eljuthatott addig, hogy igen nehéz vagy éppen új matematikai feladatokat oldjon meg. A matematika társasági és társalgási téma lett, része a szalonok életének.

Az új matematika, a kalkulus, minden addigi számolásnál és geometriánál hasznosabbnak bizonyult. A kalkulus sok mechanikai jelenség egyszerű megfogalmazását tette lehetővé, olyanokét, amelyeket addig nemhogy megoldani, még meglátni sem lehetett. Az új elmélet egy csapásra rendet teremtett a mozgások áttekinthetetlen szövevényében. Hiszen csak a mozgás valamilyen elemi részét kellett alkalmasan választott egyszerűsítő feltételek mellett matematikai formába önteni, s akkor a kalkulus majdnem automatikusan elvégezte a többit. Folyadékok áramlása különböző alakú edényekben, a föld (tengely körüli forgása következtében) lapult alakja, a kifeszített lánc alakja, a rezgő húr mozgása, a hanghullámok terjedése a levegőben, annak a pályának a meghatározása, amelyen mozogva valamilyen test legrövidebb idő alatt jut el egyik előírt pontból egy másikba... sorolhatnánk oldalakon keresztül a hasonló mechanikai problémákat, amiket az új módszer segítségével találtak s oldottak meg most már „fő foglalkozású" matematikusok. Az új módszer által a matematika társadalmi szükségletté vált, s így szükségképpen létrejött, önálló foglalkozásként, a matematikus.

*

A kalkulus egységes számítási eljárás volt, akárcsak régebben az algebra, de az algebra műveletei mindig csak számokra vagy betűkkel jelölt *mennyiségekre* vonatkoztak, a kalkulus műveletei pedig mennyiségek közötti *összefüggésekre* alkalmazandók. A kalkulus két alapművelete, a differenciálás meg az integrálás, összetartozó mennyiségekből álló *kifejezést* alakít át valamilyen más kifejezéssé, megadott és mindig azonos szabályok szerint. S miután a kalkulusban adva voltak az egyes kifejezések közötti műveletek, célszerűvé vált az egész kifejezést egységnek tekinteni, egyetlen betűvel jelölni, s például a kör $x^2 + y^2 = r^2$ *egyenlete* helyett az $y = f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ *függvényről* beszélni. Csak most, miután a függvényeken végezhető legegyszerűbb műveleteket definiálta a kalkulus, csak most válhatott a kétismeretlenes egyenletből egyváltozós függvény; csak most, az integrálás és differenciálás műveletének a hatására lett az *ismeretlenből változó,* most születhetett meg a függvény fogalma és a függvények vizsgálatával foglalkozó tudomány, az *analízis.* A XVIII. század és a XIX. század első fele a klasszikus analízis periódusa.

Az analízis alapjául szolgáló kalkulus megteremtése itáliai, holland, angol, francia, német matematikusok munkája volt. Az analízis első formájának kialakítása a XVIII. század során kizárólag francia és bázeli matematikusok érdeme. A XVIII. századi Bázel egy kis darab német nyelvterületre ültetett Franciaország volt. Nemcsak kereskedelmi és kulturális kapcsolatai fűzték ezer szállal nagy nyugati szomszédjához, a vallási türelmetlenség elűzte franciákból is sokat fogadott be az erazmusi türelem hagyományait soha teljesen meg nem tagadó város. A szellemi protekcionizmusba zárkózó Genffel szemben így valóságos összekötőkapocs lett Kelet és Nyugat között, a német-francia kereskedelmi és szellemi árucsere egyik fontos csomópontja.

Antwerpeni vallásüldözés elől Baselbe menekült hugenotta kereskedőcsaládból származott Jacob Bernoulli (1654–1705), aki Leibniz filozófiai eszmékkel kevert módszeréből könnyen elsajátítható, szellemes, általánosan alkalmazható matematikai eljárást faragott. Szó szerint, mert Leibniz 1684-ben megjelent *Acta Eruditorum-beli* cikkét, amely ráadásul még sajtóhibákkal volt tele, eredeti formájában megérteni sem lehetett, úgy kellett belőle kivésni a lényeget, mint valami szép márványtömbből a szobrot. Jacob Bernoulli évek szorgos munkája árán behatolt a leibnizi gondolatok mélyére, s a kidolgozott új módszerekre megtanította öccsét, Johannt is. Johann Bernoulli (1667–1748) fiatalon az új matematika világhírű mesterévé vált, s mikor a XVII. század végén Franciaországban kezd felengedni a megvénült Napkirály rendszerének dermesztő szellemi fagya, ő lett a Nicolas Malebranche (1638–1715) körül újraszerveződő francia matematika első mestere. Tanítványa, Guillaume François Antoine de l’Hospital (1661–1704) írta – Johann Bernoulli segítségével – az új analízis első és nagy hatású tankönyvét (1696).

A Bernoullik matematikai formalizmusa Franciaországban kezdettől kezdve a newtoni mechanika által teremtett problémákkal és eredményekkel kapcsolódott. A XVIII. századi Franciaországban Newton tisztelete talán még nagyobb volt, mint Angliában. Nemcsak a „Fény filozófusai” ünnepelték a *Princiá*-ban az emberi ész talán legnagyobb diadalát, ez a nagyon nehezen érthető könyv a szalonok kedvenc beszédtémája volt, s Voltaire barátnője, Émilie du Chatelet (1706–1749) grófnő fordította franciára. Voltaire is írt egy könyvet Newton nagy művéről (*Éléments de la philosopbie de Newton,* 1738), melyben arról igyekszik meggyőzni olvasóit, hogy a nagy Newton szerint a természet megérthető, összefüggő, kiszámítható. Olyan, mint az egyszer elindított, tökéletes gép. Pontos, stabilis, előre megállapított *elvek* alapján működik. Semmiféle „harmóniát” vagy „rendezőt” nem kell feltételezni, a természet *maga* a rend. Ez a rend és stabilitás a természet mozgásaiban nyilvánul meg. Nem a stabilitásból és rendből *következik* a mozgás, vagy megfordítva; maga a mozgás a rend, s ha akarjuk, alkalmas módon, az új matematikai módszer szellemében, a mozgást akár nyugalomra is redukálhatjuk.

Ez az elv, az egyensúly elve alakította a Newton-féle mechanikát összetett pontrendszerek és a legkülönfélébb (akadályok által megszabott) „kényszermozgások” tárgyalására alkalmassá.

> „Az egyensúly elve, a tehetetlenség és a mozgások összetevésének elvével együtt – írja az új mechanika első nagy összefoglalója, d’Alembert – minden, valamely test mozgásából adódó probléma megoldásának az alapja…”

A newtoni mechanikának Jean le Rond d’Alembert (1717–1783) általi megfogalmazását csak le kellett fordítani az új analízis nyelvére, s akkor kiderült, hogy a három elv egyetlen (alkalmasan megválasztott) függvényre alkalmazott *stabilitási elvvé* olvasztható össze. Ebben a fizikai alkalmazásban azután maga az új matematika is hatalmasan fejlődött.

*

Az első igazán sikeres „alkalmazott matematikai” tudomány, az analitikus mechanika történetét a Bernoulli testvérekkel kell kezdeni. 1696-ban az *Acta Eruditorum*-ban Johann Bernoulli a következő feladatot közölte:

> „Legyen adva egy függőleges síkban két pont, *A* és *B,* keressük a mozgó *M* pont olyan *AMB* pályáját, amelyen a pont legrövidebb idő alatt ér *A*-ból kiindulva *B*-be, feltéve, hogy csak saját súlya következtében esik.”

S hozzáfűzte, hogy ez a probléma nem holmi üres „spekuláció”, nagyon is hasznos a „gyakorlat szempontjából”. S méghozzá nemcsak a mechanikában, hanem más tudományokban is. Egy év múlva közölte a megoldást, amit úgy kapott, hogy a mozgó test pályáját folytonosan változó törésmutatójú közegben haladó fénysugárnak tekintette, s meghatározta a *legrövidebb idejű* fényutat a két pont között. A megoldásként kapott görbe a kor egyik kedvence, a Galilei által felfedezett ciklois volt.

Jacob Bernoulli is beküldött egy megoldást, amely szintén szélsőérték elvből indul ki, de általánosabb volt, mint az öccse megoldása.

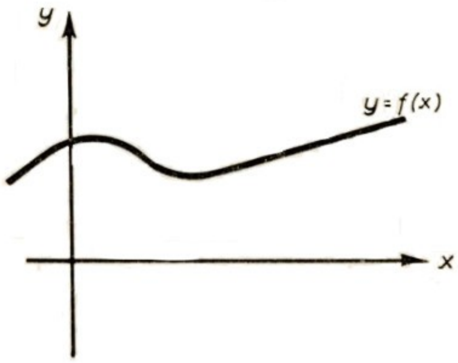
> „A geométerek – írja a bevezetőjében – a maximum-minimum módszert mind ez ideig csak olyan feladatokban alkalmazták, ahol egyetlen görbe végtelen sok ordinátája közül kellett megkeresni a legnagyobbat vagy legkisebbet, és nem gondoltak arra, hogy ezt a módszert olyan problémákra alkalmazzák, amelyekben végtelen sok meg nem adott görbe közül kell kikeresni azt az egyet, amelyiknek egészében véve valamilyen maximum vagy minimum tulajdonsága van…”

A megoldás alapja az, hogy a keresett görbét egyenes oldalakból álló sokszögvonalnak tekinti, s egy ilyen görbe minden egyes része, bármilyen kicsi is, ugyanolyan „minimum-tulajdonságú” kell legyen, mint az egész görbe. Egyetlen ilyen ívelemre felírva a legrövidebb idejű út feltételéből adódó formulát, meg lehet kapni a keresett „minimum tulajdonságú” s az ívelemek összegezéséből adódó *egész* görbét.

Jacob Bernoulli tisztán felismerte, hogy itt az addigi maximumminimum feladatoktól különböző, nehezebb problémáról van szó, s hogy a feladat olyan természetű, mint a következő, már az ókorból ismert „izoperimetrikus probléma”: melyik az a görbe, amely adott kerület mellett legnagyobb területű? S rögtön feladatként tűzte ki az utóbbi probléma általánosítását. Az ilyen jellegű problémák azután, amelyekben egy görbe vagy egy függvény *egészéről,* pontosabban a görbe, ill. függvény két adott határ közé bezárt *egész szakaszáról* kell megállapítani, hogy ez a „változónak tekintett függvény” mikor vesz fel szélsőértéket, azaz a függvények egy egész osztályából kell kiválasztani valamilyen meghatározott szempont szerint egyet, az ilyen jellegű problémák a XVIII. és XIX. századi matematika egyik legfontosabb fejezetéhez, a *variációszámításhoz* vezettek. Alig született meg a függvény fogalma s az adott függvényekből újabb függvényeket előállító differenciál- és integrálszámítás módszere, már megjelent az a sokkal bonyolultabb probléma is, amelyben a függő változó értéke nem egy vagy több *független változótól* függ (mint a függvények esetében), hanem valamilyen speciális feltétel szerint kiválasztott *függvénytől.*

Így pl. két nem egymás feletti pontot összekötő görbe esetében a görbén lecsúszó pont esésideje a görbe kiválasztásától függ. Az esésidő egy *meghatározott matematikai művelettel,* egy függvény „határozott integráljával” fejezhető ki. Ennek a határozott integrálnak az értéke a függvény megválasztásától függ. Ha a legrövidebb esésidőre vagyunk kíváncsiak, azt a függvényt kell kiválasztanunk, amely a kérdéses határozott integrál értékét minimummá teszi.

A XVIII. század matematikájának ettől kezdve az analízis ebben az új formájában központi kérdése. A függvényfogalom kialakulásában roppant fontos volt, hogy rögtön megszületése után ilyen simulékony, sokféleképpen alkalmazható eszköznek bizonyult, amely hűségesen leír olyan bonyolult fizikai folyamatokat, mint pl. a rezgő húr és az áramló folyadékok mozgása. Johann Bernoulli 1718-ban meg úgy definiálta a függvényt, mint „valamely változó mennyiségből és állandókból valamilyen módon összetett mennyiséget”. Leonhard Euler (1707–1783) 1749-ben függvénynek tekint „bármely tetszőlegesen, szabad kézzel húzható vonalat, ha azt koordináta-rendszerben húzzuk” (lásd 8. ábra). Másrészt függvénynek tekint minden kifejezést, amely az „elemi függvényekből” (mint pl. hatvány, logaritmus, trigonometriai függvények stb.) tevődik össze. A kétféle definíció az analízis differenciálegyenleteinek a cirádáiban találkozott.



8. ábra.

A legkisebb részek rendje önmaga fejti meg magát: egy XV. Lajos korabeli terem egyetlen díszéből könnyen rekonstruálható az egész szoba, Haydn vagy Mozart egyetlen taktusa meghatározza az egész művet. Az elemek ésszerű, racionális módon állnak össze egésszé, de az elrendezés nem eleve elrendezett. S nem is unalmas soha, egyformasága ellenére sem, mert variációk végtelen lehetősége mozgatja. „Szabad kézzel húzható.” Mind ez idáig a matematika a körzővel-vonalzóval húzható dolgok világát jelentette. A XVIII. század analízise nyitotta meg a „szabad kézzel húzható” dolgok világát. A fény századának a zene mellett talán legfontosabb, legjellemzőbb tevékenysége volt a matematika. A fizikai világ jelenségeiből soha annyit le nem fordítottak matematikai nyelvre, mint akkor. S a matematika ott is hatott, ahol az ember nem is sejtené: ott van Lamarck elméletének kicsiny variációiban, Lavoisier képleteiben, a gabonaárak kritikus fluktuációit kiküszöbölni igyekvő állami tisztviselők jelentéseiben. A fiziokraták álma: lehető legkisebbé tenni a rövid idejű, ciklikus áringadozásokat, s állandó, lassú, hosszú lejáratú áremelkedéssel biztosítani a gazdasági életben a vállalkozások stabilitását: matematikai álom volt.

Matematikai álom volt Pierre Louis Moreau de Maupertuis (1698–1759) doktor álma is, aki a – talán Leibniz és Euler munkáin alapuló – minimumelv segítségével akarta megérteni a Nagy Természet Egészét s bizonyítani Isten létezését. „A Természet a maga munkáiban mindig a legegyszerűbb módon jár el”, éspedig úgy, hogy egy matematikai mennyiség változása mindig minimális. Ezzel a mennyiséggel, mely „gazdagsága tárháza”, „gazdálkodik a Természet, amennyire csak lehet”. Az Isten takarékos, s „az emberi elme mély elégedettséggel szemlélheti ezeket a szép és egyszerű törvényeket, az egyedülieket, amelyeket a dolgok Teremtője és Igazgatója az anyag számára előírt…” – Isten létezésének egyedüli bizonyítékait.

Voltaire híres szatírája Maupertuis ellen, *La Diatribe du Dr. Akakia, médecin du Papé* („Dr. Akakia”, azaz Maupertuis ui. ebben az időben II. Frigyes berlini akadémiájának az elnöke volt) éppen erre a matematikai istenbizonyítékra célozva kezdődik – Akakia dr. nevében írva – a következőképpen: „Bocsánatot kell kérnünk Istentől, hogy azt állítottuk, hogy létezésének egyedüli bizonyítéka $A + B$ osztva Z-vel…” A könyv a Tudósok Kollégiuma nevében összefoglalt „határozattal” végződik:

> „Állítjuk, hogy a Kopernikuszok, Keplerek, Leibnizek is valakik, s tanultunk a Bernoulliaktól, s tanulni fogunk újra meg újra tőlük, s végül nem szabad elfelejteni, hogy Professzor Euler, aki mindig nagy örömmel lett volna elnökünk, s igen nagy geométer, olyan formulákkal támasztotta alá elvünket, amelyeket ugyan mi nem értünk, de akik értik, állítják, hogy zseniálisak, akárcsak a kérdéses Professzor – Elnökünk – megjelent művei.”

Az Akakia-perben a XVIII. századi tudomány két színtere: a szalonok és a nagy udvari akadémiák világa áll szemben egymással. Ez a két intézmény a XVIII. századi tudomány társadalmi háttere. A XVII. század tudósai vagy egyetemeken tanítottak, vagy fejedelmek közvetlen alkalmazásában állottak, vagy – ez volt a leggyakoribb – amatőrök voltak. Foglalkozásuktól függetlenül szerveződtek önkéntes tudományos társaságokba, mint az Accademia dei Lincei vagy a Royal Society. Colbert akadémiája, ahol a tudósok fizetést és munkalehetőséget kaptak, már a XVIII. század akadémiatípusát képviselte. A XVIII. században az ilyen típusú akadémia a francia műveltség által meghódított európai országokban: Poroszországban, Oroszországban, Ausztriában, a német fejedelemségekben, a skandináv államokban és a Szárd királyságban is meghonosodott. Különösen két nagy akadémia volt fontos, a pétervári és a berlini. A pétervári akadémia volt II. Katalin uralkodása idején Párizs szalonjai mellett az európai tudomány legfontosabb centruma.

Az akadémikusok filozófiája legalább olyan népszerű volt, mint a szalonoké. S talán az ellentét sem volt olyan nagy a két filozófia között, mint az Akakia-perből gondolnánk. Matematikai és fizikai szempontból bizonyosan nem. Így pl. a XVIII. század második felének legnagyobb matematikusa, Joseph Louis Lagrange (1736–1813), aki szerves egészbe tudta építeni Maupertuis, Euler, d'Alembert, Johann Bernoulli s a XVIII. századi analízis és mechanika minden munkásának az eredményét; akadémikus volt Berlinben, s később a párizsi szalonok bálványa. De legfontosabb – legalábbis a későbbi fejlődés szempontjából legfontosabb – munkái, a *Théorie des fonctions analytiques* (1797), a *De la résolution des équations numériques de tous les dégrés* (1798), és a *Leçons sur le calcul des fonctions* (1799) már egy következő, másféle világhoz tartoznak.

*

XVI. Lajos legnagyobb tisztelettel hívta meg Nagy Frigyes halála (1786) után a kor legnagyobb matematikusát, Lagrange-ot. Mindenki hódolattal fogadta Párizsban. A Louvre-ban rendeztek be neki pompás lakosztályt, a királynő maga igyekezett, hogy valahogyan eloszlassa a rosszkedvét.

Lagrange ugyanis állandóan szomorkodott, ma azt mondanánk, depresszióban szenvedett. Semmi nem érdekelte, matematikára még gondolni sem tudott. Nagy műve, a *Mécanique analytiques* (1788) évekig hevert asztalán, anélkül hogy felvágta volna. A matematikatörténészek túlzott munka miatti kifáradással magyarázzák Lagrange elhallgatását, azonban a XVIII. században matematikusok, fizikusok, írók, költők általában mind igen szorgalmasak voltak, az „elfáradás” a XIX. században jött divatba. Lagrange-tól magától sem maradt egy sor sem, ahol elfáradásról panaszkodott volna. S mikor a forradalom iskolájának, az École Polytechnique-nek első matematikaprofesszora lett 1797-ben, minden „fáradtságot” elfelejtve tanított, s néhány év alatt két nagy könyvet is írt tanítványainak. A harmadik ekkor írt nagy könyve, az egyenletekről szóló, régebbi berlini munkájának a felelevenítése és kibővítése volt. Ez a könyv már nemcsak a műegyetemisták tankönyve volt: az egész azóta eltelt kor matematikájáé. Ez volt az első csíra, amiből Cauchy, Abel és Galois algebrája, a későbbi csoportelmélet kinőtt.

A forradalom kitörésekor barátai unszolták, hívták Berlinbe, Lagrange maradt. Lavoisier kivégzése ellen felháborodottan tiltakozott. Lagrange érdeme, hogy a súly- és mértékrendszer reformjában a forradalom a 10-es számrendszert vette alapul. Mikor 1795-ben megnyílt az École Normale, ő volt az első matematikaprofesszora.

Nem volt forradalmár, és nem lelkesítették a forradalom utópisztikus céljai. A forradalom neki munkát és feladatot hozott: most is azt láthatta – mint egykor fiatalkorában, amikor d'Alembert és barátai támogatták első lépéseit –, hogy sokat várnak tőle, szükség van rá. Ezért lett Európa legnagyobb matematikapedagógusa.

A forradalom, s nyomában a polgárság uralomra jutása új feltételeket teremtett, és új feladatok elé állította a matematikát. A francia arisztokrácia azt a kereskedelmi és ipari fejlődést, amely Angliában a XVIII. század alatt végbement, majdnem teljesen meggátolta, s így a forradalomnak kellett, mégpedig gyorsan, pótolni mindazt, amit Angliában az „ipari forradalom" teremtett. A forradalom, majd a hatalomra jutott polgárság vezetői, mint pl. Bonaparte, felismerték, hogy a technika, kereskedelem, hadviselés fejlesztéséhez milyen fontos a matematika s a matematika oktatása. Iparuk viszonylagos elmaradását gondosabb elméleti alapokra épített tervezéssel igyekeztek kiegyenlíteni. S közben olyan matematikai apparátust teremtettek, amelyet igazán értékesíteni csak egy későbbi kor technikája tudott. A mérnökképzésre létrehozott École Polytechnique matematikájából fakadtak a XIX. századi matematika legfontosabb elméleti irányai.

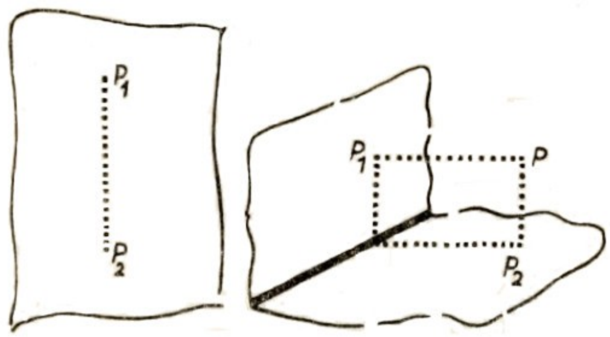
Az École Polytechnique matematikája szabta meg a matematika legfőbb fejlődési tendenciáit a XIX. század utolsó negyedéig Európa-szerte. Az a matematikus életforma is, amit az École Polytechnique teremtett, a század harmadik-negyedik évtizedétől kezdve mindenütt elterjedt: a matematika a szalonokból és akadémiákból egyetemi professzorok kezébe került, s ez a nagy változás nem maradt hatás nélkül a matematika alakulására. A főiskolákon és egyetemeken tanított matematikának mindenekelőtt érthetőnek, világosnak kellett lenni. A megoldás nélküli eredményeket, matematikai talányokat részletes levezetések váltották fel. Megnőtt a bizonyítás és a pontos definíciók szerepe, sokkal jobban ügyeltek, mint azelőtt az alapok tisztázására. Átalakult az előadási mód is: az addig szokásos posztulátumok, lemmák és korolláriumok unalmas sorába rendezett anyag helyébe folyamatos, összefüggő leírás került, amit úgy lehet olvasni, mint a regényt. A XVIII. század cikornyás, terjengős, bonyolult matematikai formavilágához hasonlítva a matematika külsőleg is egyszerűsödött, mintha itt is a forradalomban uralomra jutó polgárság puritánabb ízlése érvényesült volna, akárcsak Dávid képein.

Ennek az új matematikai szemléletvilágnak megtestesítője és kialakítója Gaspard Monge (1746–1818). Mint szegény vidéki szatócs fiának, sok küzdelem és megaláztatás árán sikerült eljutnia a mézières-i mérnök-iskolában a matematikatanárságig, s később, d'Alembert támogatásával, akadémiai tagságig. Tehetségét s páratlan munkaerejét igazán hasznosítani csak a forradalomban s a napóleoni időkben tudta. Franciaország legnehezebb periódusában

Monge szervezte meg az ágyúgyártást, az ő fegyvereivel vitte diadalra Bonaparte a forradalom katonáit. Életre szóló barátsága Napóleonnal a császár vitatható pályafutásának egyik igazán tiszta oldala. Monge emberséges tanácsai sok elhibázott lépéstől óvták meg Napóleont. Az itáliai hadjárat után, mint a hadisarcként fizetendő műkincsek kiválogatására küldött bizottság elnöke, Monge intette Napóleont: a kapzsiság kétségbeesett tettekre ingerelheti a legyőzötteket. Az egyiptomi hadjárat alatt Monge rettenthetetlen bátorsága és nyugalma sok nehéz helyzetben megsegítette a kis sereget. Mikor Napóleon császárrá koronáztatta magát, az École Polytechnique diákjai fellázadtak ellene. A haragos császárt Monge hűtötte le: „Uram – mondotta –, nagy munkával neveltük őket jó republikánusokká, idő kell, hogy megszokják a császárságot, ön váltott túl gyorsan."

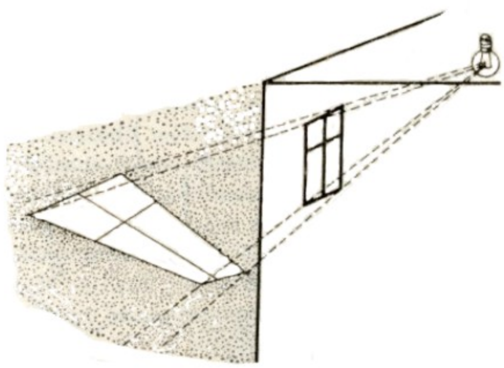
Az École Politechnique diákjai rajongtak Monge-ért. Mintakép volt, eszmény, egy egész életforma megteremtője. Ebben az életformában összeforrott a mérnök és a tudós, s a tudomány a társadalom életének fontos alakító tényezője lett. A XIX. század alatt kontinens szerte École Politechnique-szerű iskolák megjelenése követte a polgári életforma győzelmét, s az eredmény mindenütt ugyanúgy a matematikai-természettudományos-technikai műveltség gyors fejlődése volt, mint Monge iskolája nyomán Franciaországban.

A Monge által megteremtett mérnökképzés gerince az ábrázoló geometria volt. Ezt a tudományt szétszórt kezdetekből Monge teremtette meg. Gyakorlati jelentősége az volt, hogy óriási számításokat igénylő feladatok rajzban pár perc alatt, egyszerűen megoldhatókká váltak; a modern gépipar e nélkül az eljárás nélkül meg sem születhetett volna. Az ábrázoló geometria alapelve az, hogy a tárgyak két síkra való vetítése merőleges vetítősugarakkal s a két sík ezt követő egymásba forgatása változatlanul hagyja a geometriai alakzatok sok tulajdonságát. Ez az elv olyan egyszerű volt, a rendezők (9. ábra) segítségével történő „számolás" olyan gyors, hogy a módszer a technikai feladatok egy egész új világát hívta életre.



9. ábra.

Még nagyobb volt talán az ábrázoló geometria jelentősége elméleti szempontból. A vetítés következetes alkalmazásával ez a tudomány figyelmeztetett először a különféle lehetséges vetítések *összehasonlításának* a fontosságára. A különböző vetítésekben különböző geometriai tulajdonságok maradnak változatlanok, invariánsak, így a vetítések vizsgálata a XIX. századi matematika egyik legfontosabb fejezetéhez, a különféle geometriai átalakításokban változatlanul maradó tulajdonságok vizsgálatához, a geometriai transzformációk elméletéhez vezetett. Monge tanítványa, Jean-Victor Poncelet (1788–1867), oroszországi fogságban, könyvek és segédeszközök nélkül, tisztán a vetítés fogalmának belső logikáját követve dolgozta ki a központi vetítés elméletét, a projektív geometriát. Ha az ábrázoló geometria párhuzamos vetítősugarai helyett egyetlen pontba összefutó sugárnyalábot használunk vetítésre, eltűnik a különbség derékszögű háromszög és tetszőleges háromszög, parallelogramma és tetszőleges négyszög, kör és tetszőleges kúpszelet között. Képzeljük el pl. egy sötétben kivilágló ablak földre vetett árnyékát: a derékszögek eltorzulnak, az ablak párhuzamos vonalai az árnyékon (meghosszabbítva) metszik egymást, a vonalszakaszok hosszúságának egymáshoz való aránya megváltozik, a méret elveszti jelentőségét. Elveszti különös szerepét az eredetileg párhuzamos vonalak képének a metszéspontja is, ez a pont, az euklidészi sík egyeneseinek „végtelen távoli” pontja a projektív síkon ugyanolyan ponttá válik, mint a többi, hiszen csupán a vetítéstől függ, hogy a projektív sík mely pontjait kell a projektív sík „végtelen távoli egyenesén” fekvőnek tekinteni.



10. ábra.

Az ábrázoló és a projektív geometria visszahozta a matematikába a *szemléletet,* ami a XVIII. század analitikus formanyelvében teljesen háttérbe szorult. Az analitikus geometriát, sőt, az analízist is átalakította a monge-i szemléletes gondolkozás.

*

Az analitikus geometriában Monge új korszakot teremtett, ő dolgozta ki a tér analitikus geometriáját, s ami még fontosabb, a modern koordinátageometria formanyelvét. Már a feladatok megfogalmazása is elárulja, hogy Monge az ábrázoló geometria felől közeledik az analitikus geometriához: „Keressük meg valamely adott pontban valamely adott egyenesre merőlegesen emelt sík egyenletét, ha az egyenes két egyenlete által van megadva.” „Keressük meg egy adott pontból egy adott egyenesre merőleges egyenes egyenletét.” „Keressük meg két adott sík metszésvonalának a vetületeit” stb.

A térbeli képződmények egyenleteinek Monge-féle felírásában különösen fontos volt az együtthatók szerepe s az együtthatók közötti összefüggések vizsgálata. Pl. az

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

egyenletű sík akkor megy át az x', y', z' koordináták által megadott P' ponton, ha teljesül az

$$A\,(z - z') + B\,(y - y') + C\,(x - x') = 0$$

egyenlet, és megfordítva, valamely pont akkor fekszik egy adott síkon, ha ez az egyenlet teljesül. Megfelelőképpen választva a koordinátákat, térben a sík és a pont, síkban pedig a pont és az egyenes egyenlete koordináták és együtthatók tekintetében teljesen szimmetrikussá válik. Így minden síkgeometriai tétel, amely pl. egyenesek metszésére vonatkozik, együtthatók és koordináták egyszerű felcserélésével pontok összekötésére vonatkozó megfelelő tételt fejez ki, és megfordítva. Ehhez azonban a koordinátákat nem úgy kell definiálni, ahogyan Monge, hanem az új, Poncelet által megteremtett projektív geometriának megfelelően.

Ezt a munkát Monge egy másik tanítványa, Joseph-Diaz Gergonne (1771–1859) végezte el. Gergonne alapította 1810-ben az első, kizárólag matematikának szentelt folyóiratot, az *Annales de mathématiques*-ot, s ebben külön rovatot nyitott a Monge által teremtett új analitikus módszereknek. Poncelet a Gergonne által közölt, analitikus nyelven megfogalmazott geometria alapelvében azonnal megismerte az őáltala szemléletes úton bevezetett módszert, s az *Annales de mathématiques* hasábjain szenvedélyes prioritásvita kezdődött, amely az új fogalmak tisztázódását igen segítette.

Az École Polytechnique sok tanára s volt diákja közölte az új folyóirat hasábjain az analitikus geometria legkülönfélébb problémáira vonatkozó kutatásait. Az *Annales de mathématiques* volt a modern analitikus geometria megteremtője. S mikor a francia reakció a forradalom s a napóleoni idők annyi nagy alkotásával együtt az *Annales de mathématiques*-ot is elpusztította, egy saját honfitársai által perifériára szorított német matematikus, Julius Plücker (1801–1868), Monge és az *Annales* munkáját folytatva megteremtette azt az általános koordináta-fogalmat, amely lehetővé tette Gergonne és Poncelet vitájának végleges megoldását, s ezen túl, megszabadítva a koordináta fogalmát minden szemléletességtől, megnyitotta az utat a tetszőleges dimenziószámú terek geometriája felé.

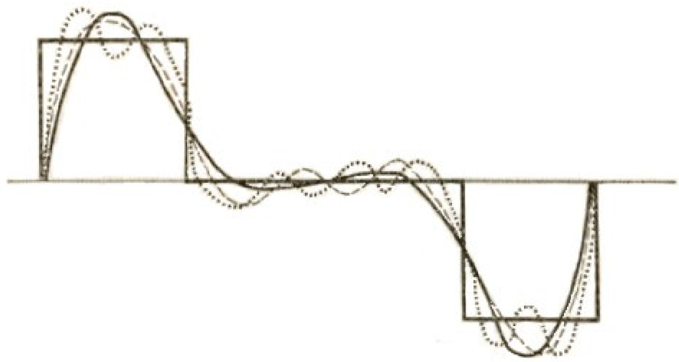
Az analízis XIX. századi új arca is a forradalom és a napóleoni idők matematikáján bontakozott ki. Ezen a területen Lagrange volt a kezdeményező, aki az École Polytechnique-on tartott előadásaiban (az integrál- és differenciálszámítás megalapozásában annyira zavaró bizonytalanságok elkerülése kedvéért) csak olyan függvényeket tekintett, amelyek a független változó szerint hatványsorba voltak fejthetők:

$$y = f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots$$

Az ilyen függvényeket *analitikus függvényeknek* nevezte. Ezekben az együtthatók minden kétértelműségtől mentesen definiálják a függvény differenciálhányadosát, vagy ahogyan Lagrange nevezte, a „derivált függvényt".

Joseph Fourier (1768–1830) azután megmutatta, hogy sinus és cosinus függvények végtelen sorával *tetszőleges f(x)* függvény kifejezhető, ha megfelel az Euler-féle definíciónak: szabad kézzel húzott vonal. Lehet a vonalban véges számú tetszőleges törés vagy szakadás: az egyre kisebb sinus és cosinus függvények összegezéséből adódó eredő görbe annál inkább simul az adott függvényhez, minél több tagot veszünk figyelembe a végtelen sorban.

Fourier módszere és az új függvénydefiníció a hővezetés matematikai problémáiból származott. A feladat fizikai megfogalmazása a következő. Legyen egy kör alakú lemez *peremének* egy része valamilyen adott állandó hőmérsékleten, a perem másik része pedig valamilyen más állandó hőmérsékleten. Mivel a két állandó hőmérséklet különböző, a hővezető lemezben hőáramlás alakul ki, s ez a hőáramlás differenciálhányadosokat tartalmazó egyenlettel, ún. „differenciálegyenlettel" írható le. Mi lesz a lemez egyes pontjainak a hőmérséklete ebben a stacionárius hőáramlásban? Nyilvánvaló, hogy ez a hőmérséklet peremértékeitől fog függeni, de ezek a peremértékek tetszőlegesek. Éppen ezeket a tetszőleges peremértékeket fejezte ki Fourier a róla elnevezett sorokkal, hogy megadhassa a hővezetés differenciálegyenletének a megoldásait.



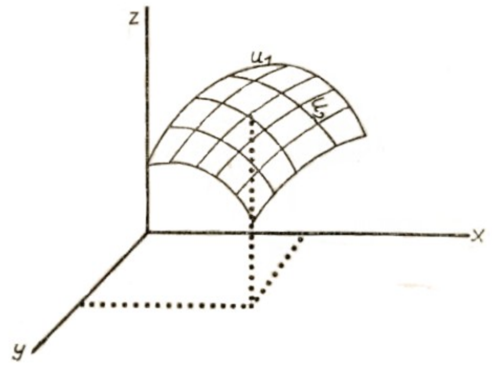
11. kép. Megközelítés

——— *három trigonometriai függvény*

-------- *öt trigonometriai függvény*

. . . . . . *hat trigonometriai függvény segítségével*

Az olyan jellegű differenciálegyenletek elméletét, amilyen a hővezetés egyenlete is, Monge munkássága alapozta meg. Monge vette észre, hogy a felületeket igen egyszerűen lehet tárgyalni, ha a felületek $z = f(x, y)$ egyenletében az x-et és az y-t valamilyen, *magára a felületre* rajzolva képzelt u_1 és u_2 görbe vonalú koordináta-háló segítségével fejezzük ki. Később, mint annyi más eredményt, ezt a felfedezést is Gaussnak tulajdonították, pedig az elmélet megteremtéséhez szükséges módszer alapmetodikáját Monge dolgozta ki.



12. ábra.

A francia matematika évszázados elsőbbsége Napóleon bukása és a Bourbon-restauráció után véget ért, Franciaországban egyre kevésbé, a francia mintára berendezkedő német államokban meg egyre inkább becsülték a tudományt. A német államokban a napóleoni háborúk teremtették meg azt a polgári átalakuláshoz szükséges légkört, amit Franciaországban a forradalom, úgyannyira, hogy a napóleoni háborúkat lehet Németország „nagy forradalmának” tekinteni. „A napóleoni háború – írja az analitikus geometria történetéről írott monográfiájában C. B. Boyer – olyanféleképpen hatott a német matematikára, mint a forradalom a franciára. A technikai főiskolákat kutatási centrumokká fejlesztették, mert tudták, hogy a matematikai műveltség szintje (mint ahogyan Bonaparte oly tisztán látta) szorosan összefügg az állam jólétével." A következmény a német matematika páratlan fejlődése lett, s Németország a matematikában is csakhamar éppen úgy „divatba jött", és minta lett, mint a klasszika-filológia vagy az irodalom területén. Angolok, s még a franciák is, a század közepén már német egyetemekre jártak matematikát tanulni, s gyakran észre sem vették, hogy francia csírából kinőtt örökséget vittek haza.

*

A Bourbon-restaurációval szomorú korszak köszöntött a francia tudományra. Az új kormány első ténykedéseihez tartozott, hogy megfossza az agg Monge-ot minden megélhetési forrásától, s kizárassa az akadémiáról. Mikor meghalt, megtiltották az École Politechnique diákjainak, hogy részt vegyenek a temetésén. A diákok azonban első szabadnapjukon kivonultak mesterük sírjához, s virággal borították, nem törődve a kormány parancsával. Monge iskolája volt a reakció uralma alatt az egyetlen hely Franciaországban, ahol töretlenül élt a tudomány szabad szelleme.

Évariste Galois (1811–1852) tragikus életének talán legnagyobb tragédiája volt, hogy nem sikerült bejutnia az École Politechnique-re. Kétszer is megpróbálta a felvételi vizsgát, mindkétszer elutasították. Apját, aki szenvedélyes republikánus volt, a papság üldözte halálba. Nagy felfedezését kétszer küldte meg az akadémiának: az első dolgozatát elvesztette az akadémia titkára, Augustin Cauchy, a másodikat a bíráló, Poisson, „érthetetlennek" minősítette.

Romantikus részletekkel zsúfolt, rövid életéről és máig tisztázatlan, tragikus párbajáról Leopold Infeld írt kitűnő regényt.[5]

A tanárképző főiskoláról az 1830-as forradalomban tanúsított bátor viselkedése miatt kizárták, matematikai iskolát nyitott, de csak három előadást tarthatott: minden hallgatója otthagyta. Csatlakozott a Nemzeti Gárda tüzérségéhez, amely csaknem teljesen republikánusokból rekrutálódott. A tüzérséget feloszlatták, 19 tagját perbe fogták, de felmentették. A felmentettek tiszteletére 1831. május 9-én tartott banketten Galois egyik kezében pohárral, másik kezében késsel mondott felköszöntőt Lajos Fülöpre. Bevádolták, de az esküdtszék felmentette, a rendőrség azonban mint „veszélyes radikálist" 1831. június 14-én

[5] Infeld, Leopold: Akit az istenek szeretnek. Ford.: Tarján Rezsőné. 2. kiad. Bp., 1976. Gondolat. 462 p.

elfogta, s minden vád nélkül fogságban tartotta, majd „tiltott egyenruhaviselés” címén hat hónapra ítélte. 1832. március 16-án a börtön vezetősége a kolerajárvány miatt áttette a rabkórházba. Itt megismerkedett egy csinos utcalánnyal, szerelmes lett. Szabadulása után összevesztek, május 25-én kiábrándult levelet írt barátjának, Auguste Chevalier-nek, s megígérte, hogy rövidesen meglátogatja. Azonban két, magát „republikánusnak” nevező fiatalember a lány megsértése ürügyén párbajra hívta. Galois hiába próbálta az ostoba párbajt megakadályozni, kihívói „republikánus hazafiságra” hivatkozva, kényszerítették. Galois a párbaj előtti éjjel összefoglalta nagy felfedezését. Ellenfelei 1832. május 30-án hajnalban megölték. Öccse, Alfréd Galois szerint a király rendőrsége provokálta és ölette meg. Leopold Infeld szerint „Galois az ostoba és kegyetlen társadalmi rendszer áldozata”.

Galois szétszórt részleteredményekre építette óriás teherbírású elméletét. Az ő elméletéből nőtt ki, s halad részben még ma is a matematikai kutatások gerincét képviselő modern algebra. Az első részleteredményt ebből a hatalmasra nőtt tárgykörből Paolo Ruffini (1765–1822) olasz orvos közölte 1799-ben.[6] Nehézkes és nem is teljesen hibátlan eljárással azt bizonyította, hogy az általános ötödfokú egyenletet nem lehet algebrai úton, azaz a négy alapművelet (összeadás, kivonás, szorzás, osztás) és gyökvonás alkalmazásával megoldani. Niels Henrik Abel (1802–1829), fiatal norvég matematikus, miután megkísérelte megadni az ötödfokú egyenlet általános megoldását, bebizonyította (1826), hogy a negyedfokúnál nagyobb fokszámú egyenletek általában nem oldhatók meg algebrai úton, azaz gyökeik nem mindig számíthatók ki az egyenlet együtthatóiból a négy alapművelet és gyökvonás útján. Abel bizonyítását Galois nem ismerte.

Galois munkája Lagrange megfigyeléseihez csatlakozott. Lagrange vette észre, hogy a harmadfokú egyenlet Tartaglia-Cardano-féle képlettel megadott három gyökéből olyan algebrai kifejezés állítható össze, amelyikben a gyököket minden lehetséges elrendezésben, más néven minden lehetséges *permutációban* felírhatjuk, de a kifejezés mindig csak két érték valamelyikét veheti fel. Azt is megmutatta, hogy a negyedfokú egyenlet négy gyökéből összeállított kifejezés pedig három érték valamelyikét veszi fel, ha a gyököket minden lehetséges permutációban felírjuk. Több hasonló részleteredményt igazolva, azt a sejtést mondotta ki, hogy „az egyenletek megoldása elvben egy *speciális kombinációszámításra* vezethető vissza, aminek a segítségével a priori meg lehet találni azokat az eredményeket, amelyeket kapni kell”.

1815-ben Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) két értekezést közölt, amelyekben azt mutatta meg, hogy adott mennyiségekből képezhető összes lehetséges permutációk egységes

[6] Vekerdi eredeti közleményében az 1777-es évszám szerepel, ami nyilván sajtóhiba. *(– a szerk. megj.)*

rendszert képeznek abban az értelemben, hogy mindegyik permutáció megkapható bármelyik másikból, és akárhány elrendezést képezünk két elem egymás utáni felcserélésével, a végeredményként kapott permutáció mindig csak az eleve lehetséges permutációk egyike lehet. A permutációk ilyen rendszerét, általában az ilyen együttest *csoportnak* nevezzük. Az egyes permutációk a csoport *elemei.* Egy adott csoportból kiragadva újabb csoportot alkotó elemeket, a csoport egy *részcsoportját* kapjuk.

Galois az egyenletek algebrai megoldhatóságának a kérdését a permutációcsoportok vizsgálatára alapította. Először is meghatározta a gyökök mindazon permutációit, amelyek a gyökök minden racionális függvényét változatlanul hagyják. Az így definiált permutációcsoportot (megadott feltételeket kielégítő) részcsoportokra bontva, meg lehet állapítani, hogy a kérdéses egyenlet megoldható-e gyökkel vagy sem. Galois felfedezése az egyenlethez rendelt csoport részcsoportokra való felbontásának a megadása volt. Ezzel realizálta Lagrange sejtését, megmutatva, hogy mindaz, amit egy egyenlet algebrai megoldhatóságáról mondhatunk, „a priori” benne rejlik „egy speciális kombinációszámítás” segítségével definiálható absztrakt struktúrában.

Két, addig teljesen elszigetelt s egymagában is alig ismert világot kapcsol Galois elmélete. Az egyik az egyenlet együtthatói által képviselt *számok összessége,* az egyenlet gyökeivel bővítve. Ebben a világban az összeadás és a szorzás durva algebrája uralkodik, s az elvégezhető műveletek meg az eredményül kapott számok száma is végtelen. A másik világ a permutációcsoportok világa. Ezt egyetlen művelet (két elem felcserélése) alkalmazása által nyert kis számú elemből (permutációból) álló *csoport* fogalma uralja. A permutáció csak az elképzelést segítő konkrét realizációja annak az absztrakt csoportnak, amelynek áttekinthető, világos struktúrája rendet kényszerít a számok rakoncátlan végtelenjére. Ahhoz már a XX. század absztrakció iránti nagy fogékonysága kellett, hogy a számok világát is megfossza minden „konkrét” jelentéstől, s egy absztrakt, „két művelettel definiált struktúrával” helyettesítse. A *modern* Galois-elmélet ezeket a struktúrákat vizsgálja a csoportelmélet segítségével.

Galois elméletében azonban még „konkrét” állott az „absztrakttal” szemben, s talán éppen ezért volt olyan nehezen megérthető a maga korában. A matematikusok egyelőre azzal voltak elfoglalva, hogy a matematikából biztos alapokon nyugvó, jól tanítható egyetemi tantárgyat faragjanak, amit nem ráznak meg lépten-nyomon felforgatással fenyegető forradalmak. A stabilitás és a termékenység volt az ideál. A matematikus kiképzésébe fektetett tőkének kamatozódnia kellett az egyre nagyobb számban induló szakfolyóiratok hasábjain. Az eszmény Cauchy volt, akiből áradtak a cikkek, s Gauss, akinek csodálatos ifjúságából öregségére is maradt annyi, hogy szabályos időközönként elkápráztassa Európa matematikatanárait. Akárcsak Goethe az irodalomtanárokat. Matematika, irodalom, történetírás egyaránt szakemberek dolga lett. Az ő feladatuk volt, hogy kolonizálják a tudomány és művészet roppant, feltáratlan térségeit. Az álmok kora elmúlt, a realitás világa következett. Gyárosok, bankárok, magas rangú állami tisztviselők, regényírók, egyetemi tanárok realitása. Ugyanakkor azonban az addiginál élesebben elkülönült a „kirekesztettek" világa. Galois és Bolyai János világa.

V.

Sokféle arca volt évezredes történelme alatt a matematikának. Praktikus szabályok szerény összefoglalásaként indult a nagy folyami civilizációkban. A világharmónia lelke s a gondolkozás iskolája lett a görögöknél. A középkor és a reneszánsz mediterrán városkultúrájában hasznos és érdekes feladatok gyűjteménye volt, a skolasztika világában a filozófia szerény, de megbecsült segítőtársa. A XVII. század nagy rendszeralkotói a mozgás- és a mérésproblémák megértésében jelölték ki a matematika szerepét; az új matematika azután a XVIII. században az égi és a földi mozgások matematikai modelljének megalkotása közben kidolgozta önálló módszertanát. A francia forradalom és Napóleon idejében az ország technikai fejlődésének az előfeltételét látták a matematikai műveltségben, s az *École Polytechnique* tanáraiból és volt diákjaiból verbuválódott az első, tisztán matematikai tárgyú cikkeket közlő folyóirat szerző- és olvasóközönsége. Ez a folyóirat s a mintájára Franciaországban és másutt létrehozott matematikai folyóiratok újfajta, minden addigitól különböző matematikai kultúra hordozói lettek. Hivatásos, képzett matematikusok, többnyire matematikaprofesszorok vagy leendő matematikaprofesszorok írtak ezekbe a folyóiratokba nehéz, kizárólagosan matematikusoknak szóló cikkeket. A cikkek felparcellázták a matematikát: egy-egy ember neve egy, vagy legfeljebb néhány tárgykörrel kapcsolódott, a matematikaprofesszorok, s következésképpen tanítványaik is szigorúan szakosodtak. A hasonló érdeklődésű szerzők tömörültek, s nemsokára az egyes folyóiratok többé-kevésbé határozott „profilt" alakítottak ki.

Fokozta az elkülönülést és a differenciálódást a XIX. század jellemző kórságának, a nacionalizmusnak a terjedése is. A gondolatok nemzetközi kicserélődése a XIX. század folyamán egyre inkább lassult, következésképpen elkerülhetetlenné vált helyi irányok igazi érdemükön felüli értékelése, és gyakori volt a párhuzamos fejlődés. A természettudományos-technikai civilizáció terjedésével a matematika tekintélye is megnőtt, de ezt a tekintélynövekedést nem követte a megélhetési lehetőségek szaporodása: a matematikusok e tekintetben az oktatási intézményekre és a csillagvizsgáló intézetekre voltak utalva. A matematikusok között is kialakult szabadversenyben egy-egy új felfedezés s a nyomában járó hírnév nem volt közömbös az elhelyezkedésre. A sikerrel kecsegtető új területeken mindig, akárcsak a frissen feltárt piacokon, matematikusok hada jelent meg; néhány év alatt gyakran teljesen letarolták a területet, s mikor azután már nem remélhettek többé könnyű sikert, hirtelen otthagyták az egészet, s egy következő matematikus generáció más, sikeresebbnek ígérkező területek irányába orientálódott. Gyakran bukkantak eközben a matematika nagy magánosainak évtizedekkel azelőtt tört csapásaira, ezeket vasútvonalakká építették, s ráeresztették az analízis folyton hatalmasabb és egyre gyorsabb gőzmozdonyait.

A szabadversenyből sokféle, tarka matematika bontakozott ki, amelyik éppen olyan „stílustalan”, mint a század művészete. Éppen ez a sokféleség és stílustalanság a stílusa. S akár a XIX. század művészete, matematikája is nagyobbik felében ma már halott. S többnyire az él belőle, amit saját kora nem, vagy nem megfelelően értékelt. Ez is egészen új jelenség a megelőző korok matematikájához képest, ahol a kor és az utókor ítélete meglehetősen egyezik. Mindjárt meg kell azonban jegyezni, hogy ha az utóbbi állítást elfogadjuk, akkor egy hatalmas „kivétellel” kell kezdeni a XIX. századi matematika tárgyalását.

*

Carl Friedrich Gauss (1777–1855) majdnem gyerekfejjel lett világhírű matematikus, s hírneve csorbítatlan ma is, pedig halála óta egy tiszteletlen s dezilluzionista évszázad minden XIX. századi nagyságot igyekezett megtépázni. Kéziratban maradt naplójának közzététele (1898) óta szokássá vált igen sok fontos XIX. és XX. századi matematikai eredmény „igazi” felfedezőjének Gausst tekinteni, pedig mindenki más esetében az első közlés elvéhez ragaszkodnak. Gauss kivétel, ő maga is mindig mondotta, ha valamilyen *nagy,* új felfedezést közöltek vele, hogy ő azt már régen felfedezte. Gauss mindent tudott. Matematikai műveinek nehéz érthetősége – a szakemberek legszűkebb körét kivéve – mindenkit tiszteletteljes távolban tartott; fizikai és csillagászati munkásságával pedig páratlan népszerűséget szerzett.

A matematikai absztrakció fejlődése szempontjából 1801-ben megjelent könyve, a *Disquisitiones arithmeticae* a legfontosabb műve. Elsősorban azért, mert ebben a könyvben közölte először a *kongruencia* fogalmát. Azt a tényt, hogy két egész szám, *a* és *b* különbsége maradék nélkül osztható egy harmadik, *m,* egész számmal, úgy fejezte ki, hogy

$$a \equiv b \pmod{m}.$$

Szavakban: a kongruens b-vel modulo m, vagy a és b kongruensek az m modulus szerint. Így pl. $26 \equiv 16 \pmod 5$, mert a $26 - 16 = 10$ különbség osztható 5-tel, és $16 \equiv -9 \pmod 5$, mert a $16 - (-9) = 16 + 9 = 25$ különbség is osztható 5-tel. Az 5-tel való oszthatóság szempontjából tehát 16 és -9 valamiképpen összetartoznak, ahogyan Gauss kifejezte, egyazon *maradék-osztályba* tartoznak modulo 5. Könnyen megadhatjuk a maradékosztály többi számát is:

$$\ldots -9, -4, +1, +6, +11, +16, \ldots,$$

általában:

$$1,\ 1 \pm 5,\ 1 \pm 2.5,\ \ldots$$

vagy r-rel jelölve az adott maradékot, m-mel a modulust

$$r,\ r \pm m,\ r \pm 2m,\ \ldots$$

Összesen m számú m modulus szerint vett maradékosztály lehetséges. Az $a \equiv b \pmod{m}$ képlet azt jelenti, hogy a és b az m egy egész számú többszörösével különböznek egymástól, tehát ez a kongruencia úgy is kifejezhető, hogy a és b ugyanabba a maradékosztályba tartoznak modulo m.

Éppen e miatt a sokféle fogalmazási lehetőség miatt volt olyan fontos a kongruencia kitalálása, a matematikában ugyanis a problémák megoldásához igen gyakran az első s legfontosabb lépés az alkalmas fogalmazás, az *átalakítás.* A kongruenciák segítségével teremtett Gauss az egész számokra vonatkozó érdekes tények és fejtörők tömkelegében rendet, csak a kongruenciák elméletével lehetett ebből az összevissza feladathalmazból egységes tant, *számelméletet* teremteni. *Ez* Gauss óriás-teljesítménye.

A *Disquisitiones…* fontosságát azonban nem lehet a számelméletre korlátozni. Hatása a XIX. század egész matematikájára kiterjedt, vagy inkább talán ez a könyv fejezte ki először és legnyomatékosabban a XIX. századi matematika néhány fő fejlődési tendenciáját. A kongruenciák a számok helyett automatikusan a *számrendszerek* vizsgálatára terelték a figyelmet, s ez maga olyan fontos új szempont volt, amely végig a XIX. századi matematika egyik legjellemzőbb vonása maradt. Nem kevésbé jelentős volt az a tény, hogy a kongruenciák igen sok tekintetben a *közönséges* egyenletekhez hasonlóan viselkedtek:

ugyanolyan matematikai műveleteknek engedelmeskedtek, mint a közönséges egyenletek. A XIX. században szerették a hasonlóságokat, s az egyik területen bevált eljárások más területekre való kiterjesztését. A XIX. század a sokféle „összehasonlító” tudomány fénykora, s nem volt ez alól kivétel a matematika sem. Gauss a kongruenciák elméletében ennek az „összehasonlító matematikának” egyik első s máig legfényesebb példáját teremtette meg, s a példa hatása, a század rokon tendenciáival interferálva, a matematika legkülönbözőbb területein érvényesült.

Mint példa talán még fontosabb volt, hogy a kongruenciák elméletében puszta meghatározással, definícióval, szavakkal lehetett fontos, új fogalmat teremteni, ami azután a továbbiakban alapként volt használható. Ez a siker figyelmeztetett a definíciók és a posztulátumok fontosságára a matematikában. Gauss-szal a meghatározások, föltevések, axiómák felülvizsgálatának új korszaka kezdődött, amely a század végén Gauss késői utódának, David Hilbertnek a munkásságában érte el a csúcsát. Ennek a folyamatnak azonban, amit általában a „matematikai szigor korszakának” szoktak nevezni, csak egyik jellemzője az axiómák és definíciók szigorú ellenőrzése. Másik, legalább olyan fontos, de sokkal nehezebben nevén nevezhető jellegzetessége az a nagy szerep, ami ebben a szigorodásban az egész számoknak jut. Az egész számok láthatóan vagy láthatatlanul átszőtték a XIX. század matematikáját, inspirálóként, ellenőrzőként vagy elkeserítő tilalomként hatottak a század minden nagy matematikusára.

Számok, számolás és megszámlálás a XIX. századi élet minden területén nagyon fontos volt. Balzac regényeiben jelenik meg pl. először az irodalomban, modern formában, a pénz, mint aminek a segítségével számszerűen megadható egy ember vagyona és társadalmi értéke. Azelőtt a pénz számolása vígjátékba illő fösvénynek jellemzésére szolgált, most még akkor is számszerű összeggel fejezik ki a vagyont, ha semmiféle ténylegesen létező valutában nem is adható meg. Akkor is, ha a munkaerő ára és a munkások által termelt javak ára közötti különbség képezi. A tőkések éppen azért gyűlölték olyan engesztelhetetlenül Marxot, mert leleplezte kegyetlen aritmetikájukat.

*

A XIX. század matematikusai úgy érezték, hogy az integrál- és differenciálszámítást, az egész analízist akkor helyezhetik biztos alapokra, ha valamiképpen az egész számokra, a megszámlálhatóságra „vezetik vissza”. Ez a „visszavezetés” sok matematikus munkájának az eredménye volt, és számos lépésben történt, leginkább azonban Augustin-Louis Cauchy

(1789–1857), Karl Weierstrass (1815–1897) és Charles Méray (1835–1911) nevét szokás említeni. Az eljárás lelke a határérték-definíció, amit pl. Cauchy a következőképpen fogalmazott meg:

> „Ha egy változónak tulajdonított, egymás utáni értékek úgy közelítenek meg vég nélkül egy rögzített értéket, hogy tetszőlegesen kicsinnyé tehető a rögzített értéktől való különbségük, akkor ezt a rögzített értéket a többi határértékének nevezzük."

Példaként Cauchy az irracionális számokat említi, mint egymás után vett racionális törtek sorozatának határértékét. Egy emberöltő múlva Weierstrass távolította el a Cauchy-féle meghatározásból a még benne maradt szemléletre és „vég nélküliségre" apelláló elemeket. Weierstrass definíciójában már csak megfelelően meghatározott egységekből álló aggregátumok szerepelnek, melyek olyanok, hogy tetszőlegesen sokat, de véges számút, összegezve belőlük, az összeg mindig egy meghatározott szám, a *határérték* alatt marad. Méray lényegében ugyanazt csinálta, amit Weierstrass, de megfogalmazta eljárásának filozófiai tanulságát is: csak az egész számok és az egész számokból álló racionális törtek az „igazi" számok, az irracionális számok csak speciális műveletek megkönnyítése céljából bevezetett *szimbólumok,* értelmük egyes-egyedül a definiálásukra használt *eljárásban* van. Weierstrass nagy ellenfele, a berlini bankár-matematikus, Leopold Kronecker (1823–1891) még következetesebb volt. „Az egész számokat Isten teremtette – szokta volt mondani –, minden egyéb az ember műve." A matematikának csak az egész számokra szabad épülnie, s nem szabad – éppen mert szimbólumok, és semmi reális értelmük nincsen – használni pl. az irracionális számokat. Kronecker szerint pl. teljesen értelmetlen munka, hiábavaló erőpazarlás volt a π transzcendens voltának a bizonyítása, hiszen olyan szám, hogy π*,* egyáltalán nincsen is. A matematikának nem emberi fikciókkal, nem kitalált nevekkel kell foglalkozni, hanem valóságos, létező valamikkel. Ezek pedig az egységekből felépülő egész számok.

*

A késő tizenkilencedik századi egyetemek professzorokkal és magántanárokkal zsúfolt matematikai világában így éledt fel a középkori egyetemeken egyszer már megvívott csata nominalizmus és realizmus között. Éppen olyan szenvedélyes volt, s éppen úgy eldöntetlen maradt, mint a középkori. De a szenvedélyek összecsapása közben okos érvek, szellemes feladatok, új szempontok születtek, amelyek igen fontosak voltak a matematika fejlődése szempontjából. A harc központi figurája Kronecker volt, a berlini egyetem gazdag magántanára s később professzora. Kronecker volt talán ebben a görög matematikára oly gyakran hivatkozó században az egyetlen igazi „görög". Az első matematikus a görögök óta, akit igazán érdekelt az egység komplex problematikája. Mestere s később barátja, Ernst Eduard Kummer (1810–1893) nyomán indult el, aki az egész szám s általában a szám fogalmát általánosította algebrai egyenletek gyökeiből álló számegyüttesekre, ún. „algebrai számtestekre".

Egy közönséges *r* egész szám az $x - r = 0$ egyenlet gyöke, ennek megfelelően valamely

$$x^n + a_1x^{n-1} + \dots a_n = 0$$

egyenlet gyökeit *n*-ed fokú algebrai egészeknek nevezik. Ha az x^n együtthatója nem 1, akkor nem algebrai egészről, hanem algebrai számról beszélnek. Így pl. $1 + \sqrt{-5}$ másodfokú algebrai egész, mert az $x^2 - 2x + 6 = 0$ egyenlet gyöke. Valamely *n*-ed fokú *r* algebrai számból összeadás, kivonás, szorzás, osztás által nyerhető kifejezések összességét az *r* által generált *algebrai számtestnek* nevezzük (Kronecker „racionalitástartomány"-nak nevezte). Ha *j* olyan algebrai egész, amely az illető algebrai számtest minden egészét osztja, akkor *j-t* az illető algebrai számtest *egységének* nevezzük. Az algebrai számtestekben az egység segítségével definiálhatók prím algebrai egészek, de az algebrai egészek körében *nem* érvényes a közönséges egész számok osztásának elméletét uraló „kanonikus prímfelbontás" tétele, nem áll, hogy egy és csak egyféleképpen bonthatók prímtényezőkre (törzstényezőkre, pl.: $84 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$). Kronecker azonban megmutatta, hogyan lehet megfelelő eljárás segítségével kiküszöbölni ezt a szépséghibát az „algebrai mennyiségek" elméletéből.

Kroneckert elmélete felépítésében a régen meghalt Galois teóriája vezette, Kronecker volt az első matematikus, aki teljesen megértette a francia matematikus korszakalkotó felfedezését.

Egészen más irányból közeledett ugyanennek a kérdésnek a megoldásához Richard Dedekind (1831–1916). Dedekind is a Galois-elméletből indult ki, hiszen ő volt az első, aki göttingeni magántanár korában, az 1857/58-as tanévben előadásokat tartott a Galois-elméletről. De már a göttingeni felolvasásaiban általánosabb, majdnem a modern, „absztrakt" módon értelmezte a Galois-csoport fogalmát, úgy, hogy amint írja, *„tetszőleges elemekből álló* csoportra legyenek érvényesek" fejtegetései. A csoportot mint tetszőleges elemek rendszerét definiálta, „mely elemek közül mindegyik összetehető mindegyik másikkal, s az eredmény mindig csak a rendszerbe tartozó valamelyik elem lehet". Felismerte a csoport központi szerepét az algebrában, s a definíció szerepét a csoport meghatározásában. Ugyanígy (de összeadásra, kivonásra és szorzásra vonatkozó) *definíció* segítségével megadott az algebrai egészekből álló számtesteken belül olyan számrendszereket, amely számrendszerek elemeit összeadva és kivonva újból az illető számrendszerbe tartozó elemet kapunk, és *megszorozva* a számrendszer valamely elemét egy, az illető algebrai egészek számtestéből vett számmal, megint csak a számrendszer egyik elemét kapjuk. Az ilyen rendszereket nevezte Dedekind *ideáloknak.* Ha egy algebrai egészekből álló számtestben a számok egy rendszerének „ideál-tulajdonságai" vannak, akkor ez a számrendszer olyan algebrai egészekből áll, amelyek mind oszthatók ugyanazzal az algebrai egésszel. Az ilyen, egy adott algebrai egészhez tartozó ideált *főideálnak* nevezte Dedekind. Az oszthatóság tehát egy számrendszerbe, a főideálba való tartozással helyettesíthető. Mármost könnyen bebizonyítható, hogy az ideálok esetében az osztás általában azzal az állítással egyértelmű, hogy egyik ideál tartalmazza a másikat. S azután néhány további definíció – mint pl. prímideál stb. – segítségével könnyen általánosítható az ideálokra a számelmélet kanonikus prímfelbontást kimondó alaptétele. A részletek itt nem ismertethetők, csupán a módszer szellemét akartuk érzékeltetni, amely éppen ellentéte a Kroneckerének.

Kétségkívül Dedekind gondolkozásában is igen fontos szerepe van az egész számoknak, de az egész számok neki egészen másvalamik, mint Kroneckernek.

> „Természetesnek látszik… – írja –, s egyáltalán nem új dolog, hogy az algebra és analízis minden, az egész számok világától még oly távolinak látszó tétele is kifejezhető az utóbbiak segítségével, mint ahogyan ismételten hallottam volt Dirichlet-től magától. Azonban semmi értelmét nem látom – s egészen bizonyos, hogy ez volt Dirichlet véleménye is –, hogy ezt a kifejezést és visszavezetést valóban el is végezzük, s ne akarjunk a természetes számokon kívül semmi másra sem építeni. Ellenkezőleg, azt látjuk, hogy a matematika s egyéb tudományok nagy és termékeny haladása mindig elsősorban új fogalmak teremtésének és bevezetésének a következménye, s akkor indul el, amikor a régi fogalmakkal csak körülményesen és fáradtságosan tárgyalható bonyolult jelenségek gyakori ismétlődése új fogalmak bevezetésére kényszerít. Erről a témáról egyébként 1854 nyarán, Göttingenben, a filozófiai fakultáson, magántanári habilitációmban már alkalmam volt értekezni, s következtetéseimmel Gauss is egyetértett…"

Gauss, a mindenütt jelenlevő, ahol fogalmak és formulák tekintélyét kellett védeni. Nagy tanítványai, a szelíd Peter Gustave Lejeune-Dirichlet (1805–1859) és a nyakas, merev Dedekind őrizték gondosan a szellemét, s a századfordulón mintegy inkarnálódott a nagy Gauss a még nagyobb és még hatásosabb David Hilbertben (1862–1943).

Kronecker és Dedekind ellentétes elmélete csakhamar egyesült „Gaussban”, s az algebrai számelmélet absztrakttá válásán keresztül a modern absztrakt algebra legfontosabb inspirátora lett.

*

Kronecker igazi ellenfele nem is Dedekind volt, hanem Georg Cantor (1845–1918). Kronecker filozófiai álláspontját püthagoreizmusnak szokás nevezni (voltaképpen Ockham józan anti-apriorizmusához lenne hasonlítható), Dedekind a német „Begriffsrealismus” híve. Georg Cantor a középkorban misztikus lett volna, a neoplatonizmus augusztiniánus válfajából.

Nemcsak Kronecker volt az ellensége, ellensége volt – néhány teológus kivételével – egész kora. Dedekind, akiben annyira megbízott, s szövetségesének tekintette, éppen olyan idegen volt gondolatvilágától, mint Kronecker. Cantor ugyanis látnok volt: egész nagy, gazdag világot látott ott, ahol a többiek nem láttak semmit, vagy legfeljebb definiálandó „fogalmakat”. A német professzorok kezében a XIX. század alatt a matematika elmés, tekintélyt keltő elmejáték lett, magas rendű szellemi dominó Gauss modorában. Pozitív, hasznos, nehéz elmesport. Cantor nem így látta. Néki a matematika metafizikai szükségszerűség volt, izgalmas, fárasztó és veszélyes kaland, utazás a mindennaposnál valódibb valóság felfedezésére. Neki nem az egész számok, nem a definíciókkal és axiómákkal jól körülhatárolható fogalmak voltak a matematikában a lényegesek, hanem maga a végtelen, végtelen egyszerűségében, tisztaságában, feldarabolhatatlanságában. A matematika – szerinte – a végtelen létezésének a tudománya, közelebb a teológiához, mint a fizikához vagy éppen a technikához. A középkorban Georg Cantort valószínűleg megégették volna, vagy legalábbis kiátkozták volna tanait s magát. Derék, hasznos, pozitív polgártársai a XIX. század végén elébb egy kis vidéki városka jelentéktelen egyetemére dugták, azután elmegyógyintézetbe.

Ahogyan Kronecker vagy Dedekind esetében történt, Cantor matematikája mögül is elmaradt a filozófiája, s az általa teremtett halmazelmélet tisztán szakmai, matematikai eredményei miatt vált a mai matematikában nélkülözhetetlenné. Ma már az elemista matematika tankönyvek is halmazelmélettel kezdődnek, s a matematika minden területén nélkülözhetetlen a halmazelméleti módszer. Igaz, hogy nem abban az alakban, ahogyan Cantor ismerte. A mai halmazelmélet legalább annyira különbözik a Cantorétól, mint a mai Amerika attól az Amerikától, amit Kolumbusz Kristóf fedezett fel. De mégiscsak Amerika volt az, bár ő az Indiákat kereste.

Cantor alapvető ötlete az volt, hogy tetszőleges dolgok két tetszőleges összességét, *halmazát,* úgy lehet az elemeik száma szerint összehasonlítani, hogy a két halmaz elemeit „kölcsönösen egyértelműen" párosítjuk, megfeleltetjük egymásnak. Véges elemszámú halmazok esetében az eljárás az elemek egyszerű párosításából áll, egy-egy elemet véve mindegyik halmazból. Ha a két halmaz elemeinek száma végtelen, akkor a tényleges párosítás nem végezhető el, ilyenkor meg kell adni valamilyen meghatározott *eljárást,* amely a két halmaz elemei között kölcsönösen egyértelmű vonatkozást létesít. Pl. a pozitív egész számok meg a négyzeteik halmaza egyenlő sok elemből áll, egyenlő *számosságú,* mert, amint azt már Galilei tudta, megadható egy olyan kölcsönösen egyértelmű eljárás – a négyzetre emelés –, amely minden pozitív egész számhoz egy és csakis egy négyzetszámot rendel:

$$1, 2, 3, 4, \dots$$
$$1, 4, 9, 16, \dots$$

A négyzetek rohamosan növekednek, de – futja a végtelenből. Cantor megmutatta, hogy a racionális törtek számossága sem nagyobb az egész számokénál, sőt – ez egyik legszebb eredménye volt – nem nagyobb az algebrai számok halmazának számossága sem. Mindezek a halmazok egyértelműen hozzárendelhetők a pozitív egész számok halmazához, minden elemüket el lehet látni „első", „második", „harmadik" stb. jelzővel, *megszámlálhatók* akkor is, ha végtelen sok elemük van, mert az n-edik után mindig következik az $n + 1$-edik, és csak ez.

De vajon minden halmaz ilyen-e? Nincs-e olyan $\{x\}$ halmaz, amiben *több* elem van ennél az $\{n\}$ „megszámlálhatóan végtelennél"? 1875. december 7-én kelt levelében közli Cantor Dedekinddel azt az eljárást, amellyel sikerült igazolnia ilyen halmaz létezését. Bizonyítása roppant szellemes és egyszerű indirekt-bizonyítás. Abból a feltevésből indul ki, hogy az *összes* 1-nél kisebb pozitív szám valamilyen

$$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots \omega_n, \dots$$

sorozatba rendezhető, s azután kimutatja, hogy ez a feltevés ellentmondásra vezet. „így végül – írja –, úgy látszik, sikerült megokolnom, miért nem lehet a korábbi leveleimben $\{x\}$-szel jelölt összességet meg az $\{n\}$ összességet kölcsönösen egyértelműen egymáshoz rendelni." A nagy felfedezés nem hagyta nyugodni, s már két nap múlva újra írt Dedekindnek:

> „Az utóbb említett tételre – írja – már találtam is egyszerűbb bizonyítást… amiből minden további nélkül következik, hogy az $\{x\}$ összességet nem lehet egyértelműen hozzárendelni az $\{n\}$ összességhez, s ebből azt következtetem, hogy az összességek, a számhalmazok között olyan lényegbeli különbségek vannak, amelyeket egészen a legutóbbi napokig értelmezni sem tudtam. Elnézését kérem, hogy fentiekkel annyi idejét raboltam el…"

Ezután ritkulnak a levelek, csak 1877-ben szaporodtak újra, mikor Cantor fontos lépésekben igazolta, hogy az egységnyi hosszúságú vonalszakasz meg az egész egyenes, az egyenes és a sík, az egyenes és a tér pontjaiból álló ponthalmazok számossága mind ugyanaz. Dedekind, aki eleitől fogva kételkedéssel és kritikusan fogadta Cantor eredményeit, most is megjegyezte, hogy ez a tétel csak akkor bizonyítható, ha *nem folytonos* leképezést használunk a két halmaz összehasonlítására.

Cantornak azonban nem a leképezés folytonossága vagy nem folytonossága volt a fontos; nem ilyen geometriai tulajdonságok érdekelték őt, hanem a végtelen halmazok „aritmetikája". Ebből a szempontból ugyanis a végesen túli számok jellemzésére nem elegendő egyetlen jel, mint a véges számoknál. A véges számok esetében pl. 3 + 5 egyaránt jelenti a 3 számosságú meg 5 számosságú halmaz összeadásából keletkezett $\{8\}$ halmaz számosságát; de ugyanígy jelenti a harmadik meg ötödik számjegy összeadásából keletkező „nyolcadik" számjegyet is. A megszámlálhatóan végtelen sok elemből álló $\{n\}$ halmaz számossága azonban nem jelöli ki egyszersmind ennek az első végesen túli számnak a *sorrendjét* is a véges és végesen túli számok világában. Ha ehhez a számhoz hozzáadok 1-et vagy 2-t vagy akár megszámlálhatóan végtelent, az eredmény megint csak $\{n\}$ lesz, amint azt könnyen beláthatjuk, ha pl. a páros meg a páratlan számok külön-külön n számosságú halmazát a természetes számok $\{1, 2, 3, \ldots\}$ halmazává egyesítjük.

Ha túl akarunk jutni a megszámlálhatóan végtelenen, ki kell fejeznünk azt a valamit, amit az n elemből álló véges halmaz esetében az első n egész számot felbonthatatlan egységgé összefoglalva az „n-edik" szóval fejeztünk ki. Ez az „átmenet egész számok vég nélkül növekvő halmazáról, mely egész számok között nincs legnagyobb, a soron következő mindnyájuknál nagyobb egész számra", ez az átmenet adja meg az „összes természetes egész szám után következő első egész számot". Ennek az *átmenetnek az eredményét* jelölte Cantor

ω-val s nevezte később az első, megszámlálhatatlan végtelen számosságú számosztály *rendszámá*nak. ω-ból kiindulva ugyanúgy lehet tovább jutni, mint a közönséges számok esetében; $\omega + 1$ jelenti az ω után következő első számot, $\omega + 2$ az ω után következő második számot stb. Így folyamatosan fel lehet építeni az egész ω után következő $\omega + 1$, $\omega + 2$, ... ún. „második számosztályt", s a végtelen nem jelent többé megszakítást az egész számok, 1, 2, 3, … ω, $\omega + 1$, …, $\omega + n$, … sorában. Ezekre az ω számokra azonban éppen úgy, mint ahogyan a végtelen számosságokra, nem érvényesek a közönséges számok aritmetikájának a szabályai. Így pl. az összeadás nem felcserélhető: $1 + \omega = \omega$, azonban $\omega + 1$ különbözik ω-tól.

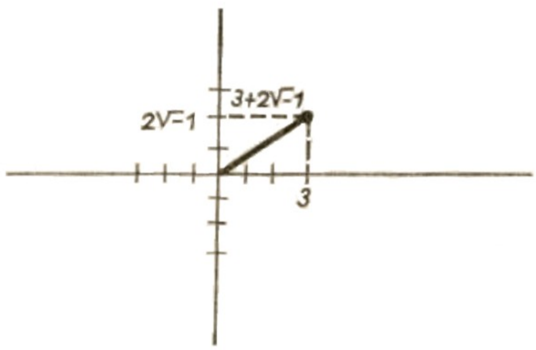
Nincs semmi a XIX. század hihetetlenül sokfelé ágazó gazdag matematikai termésében, ami fontosabb lenne a további absztrakció szempontjából a halmazelméletnél. A halmazelmélet valósággal a modern matematika anyanyelve lett: a matematika más területein dolgozó kutatók is kénytelenek ezen a nyelven beszélni, függetlenül attól, hogy mit mondanak. Cantor még megérte nagy műve diadalát, s a késői elismerésnek őszintén örült. De tragikus sorsához méltó befejezésként az egész matematika alapjává váló halmazelméletnek az alapjai egyelőre nem szilárdultak, inkább még folyton ellentmondásosabbá és vitatottabbá váltak. Csak lassan szokták meg a matematikusok, hogy az ellenmondásokat nem lehet végképpen kiküszöbölni a matematikából, valamilyen formában mindig megjelennek, hozzátartoznak a matematika lényegéhez. Ez volt az a nagy felismerés, amitől kezdve az új, XIX. századitól lényegesen eltérő matematika történetét lehet számítani. S ide az utat a halmazelméleten felnevelkedett matematikai gondolkozás mutatta meg.

*

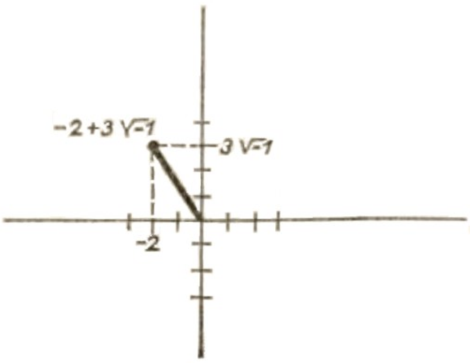
A modern matematika absztrakt irányú fejlődésében az algebrai számelmélet és a halmazelmélet volt a két legfontosabb inspirátor, de a XIX. században mindkét elmélet megmaradt a konkrét gondolkodás, a *számokkal* való gondolkodás keretei között. A XIX. század számok iránti szeretete sehol olyan szépen nem nyilvánult meg, mint éppen a matematikában. A XIX. századig a matematika inkább „mennyiségtan" volt, s a matematikai mennyiségek legmegfelelőbb ábrázolásának a vonalszakaszt tartották. Sokáig nem is fogadtak el másféle számokat, a XVII. században még a negatív számokkal is félve dolgoztak, s a „képzetes" számok egyenesen onnan kapták nevüket, hogy csupán képzeltnek, fikciónak gondolták a vonalszakaszokkal kifejezett „igazi" számokhoz képest. Az ember és a számok „viszonyában" a XIX. században következett be nagy fordulat, a XIX. század a matematikában is a számok százada. Még a XIX. század legeredetibb matematikusa, Georg

Cantor sem volt kivétel: ő is új számokat, végesen túli, „transzfinit számokat” teremtett. A XIX. században, néhány évtized alatt, több számféleséggel barátkozott meg az emberiség, mint a matematika egész addigi hosszú története alatt.

Először a komplex számok „titkát” sikerült megfejteni. Caspar Wessel (1745–1818), J. R. Argand (1768–1822) és Gauss a komplex számokat geometriailag ábrázolták, a komplex számsík egy pontjaként. De csak William Rowan Hamilton (1805–1865) oszlatta el teljesen a homályt a komplex számok körül, kimutatva, hogy a komplex számokat azok a *műveletek* definiálják, amiket a számpárokként előállított komplex számokra, a sík pontjaira, kiszabunk.



13. ábra. $3+2\sqrt{-1}$ *komplex szám geometriai ábrázolása*



14. ábra. szorzás $\sqrt{-1}$ *-gyel a geometriai képben 90°-kal való forgatás*

Hamilton azonnal általánosította a komplex szám fogalmát: megmutatta, hogy ehhez hasonlóan a térben számhármasokkal megadott pontokra ki lehet dolgozni olyan összeadási, kivonási és szorzási szabályokat, amelyek a számhármasokból álló együtteseket – Hamilton *kvaternióknak* nevezte őket – számokká tették, azaz konzekvens algebra szabályainak alávetett mennyiségekké. A szabályok megtalálása nagyon nehéz volt, mert ezeknek a számoknak az esetében a szorzás nem kommutatív, azaz $A\times B$ *nem* egyenlő $B\times A$-val. Hosszú töprengés után, 1843. október 16-án találta meg – séta közben – a nagy ír matematikus a kvaterniók szorzási szabályát: $A \times B = -B \times A$, s azonnal bevéste egy közeli kőhíd karfájába.

A számfogalom ezután következő fontos általánosítása is brit matematikusok, Arthur Cayley (1821–1895) és James Joseph Sylvester (1814–1897) érdeme. Felfedezték, hogy az elsőfokú egyenletrendszerekben az új változókra való áttérés, egy ún. „transzformáció", könnyebben elvégezhető, ha az egyenletek együtthatóit egy sorokba-oszlopokba elrendezett szkémába sűrítjük, pl. a következőképpen:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Itt az *a, b, c, d* tetszőleges számok, s az a nevezetes, hogy az *egész szkéma egyetlen számként fogható fel:* összegezhető, szorozható közönséges számokkal vagy más hasonló szkémákkal. Egy ilyen szkémát nevezünk „mátrix"-nak. A szorzás itt sem minden esetben kommutatív, a mátrixok ebben a tekintetben a kvaterniókhoz hasonlítanak. Egyébként is rokonok. Cayley 1858-ban megmutatta, hogy a kvaterniók mindig kifejezhetők mátrixokkal.

Hasonló fogalmat használt a komplex számok általánosítására, néhány évvel az angolok előtt, Hermann Grassmann (1809–1877), azonban az ő sokkal nehézkesebb és bonyolultabb rendszere nem terjedt el, hazájában még kevésbé, mint másutt. Az új algebrák első centruma Anglia volt.

*

A XVIII. század végén, XIX. század elején Angliában eléggé elmaradott volt a matematikai műveltség a kontinenshez képest. Sokáig azzal próbálták ezt magyarázni, hogy az angol matematika Newton-tiszteletében túlságosan ragaszkodott az „elavult" newtoni módszerekhez. A valódi ok azonban nem ez volt, hanem az, hogy Angliában másféle matematikára volt szükség, nem a kontinens kifinomult analitikus módszereire. Az angol ipari forradalom kapitányainak (tengerieknek és szárazföldieknek egyaránt) egyszerű számolásra volt szüksége, gyors és hatékony számolási módszerekre. Ezt pedig nem professzoroktól tanulták egyetemeken, hanem vándor számolómesterektől efemer „számolási akadémiákon". A nyugati partvidék és Észak-Anglia rohamosan fejlődő kereskedő- és iparvárosaiban mindennapos figura volt a vándorló számtantanár, a foglalkozás gyakran apáról fiúra öröklődött, s a legsikeresebb mesterek a XVIII. század harmincas-negyvenes éveiben már viszonylag hosszú életű akadémiákat alapítottak a nagyobb városokban, falvakban, s innen „szálltak ki" vidékre. Ez a matematika volt a kor élő angol matematikája.

Mert az egyetemeken a matematikai oktatás minden volt, csak élő nem. A cambridge-i egyetemen a helyzet megváltoztatására három diák, Charles Babbage (1792–1871), John Herchel (1792–1871) és George Peacock (1791–1858) vezetésével egy ún. „Analytical Society" alakult, amelynek az volt a célja, hogy legalább tankönyvi szinten megismerje a kontinens matematikáját. Valóban lefordították az analízis leghíresebb francia tankönyveit, de az igazi érdeklődésüket, maguknak az alapítóknak is, az algebra és a numerikus matematikai módszerek kötötték le. Így pl. Babbage alkotta meg a modern, nagy teljesítményű számológépek nem annyira ősét, mint inkább prototípusát, olyan sok szerkezeti részletét átvették gépének a mai gépek. Peacock vázolta először, hogy az algebrát ugyanolyan axiomatikus módszerekre kell építeni, mint Euklidész építette a geometriát.

Az angol algebristáknak jutott először eszébe, hogy az algebrában a *műveletek* a fontosak, nem a számok. A szokásos számok helyett lehet másféléket is venni, de nem szükséges ragaszkodni voltaképpen *semmiféle* számhoz sem, megfelelő algebrai műveleteket lehet tetszőleges jelekre is alkalmazni, vagy akár *logikai fogalmakra.* Csupán a jelek s a jeleken végzett *műveletek* „számítanak". S az algebrai műveletek lehetnek egészen általánosak, a „gondolkozás" műveletei is.

> „Ennek az értekezésnek a célja – így kezdi George Boole (1815–1864) a gondolkozás törvényeiről szóló híres könyvét – az, hogy vizsgálja az elme operációinak azon alapvető törvényeit, amelyek szerint a logikus gondolkozás történik; hogy kifejezze ezeket a törvényeket a számítás szimbolikus nyelvén, és hogy ezen az alapon felépítse a logika tudományát, és megszerkessze módszerét; azután pedig magát ezt a módszert egy általános módszer alapjává téve alkalmazza a valószínűség, a véletlen események matematikai elméletében; végül, hogy a vizsgálódás folyamán kapott különféle részletekből néhány valószínű következtetést állapítson meg az emberi elme természetéről és felépítéséről."

A könyv *(An Investigation of the Laws of Thought)* 1854-ben jelent meg először. Nemcsak az egész arisztotelészi logikát fordította le benne matematikai nyelvre, átlátszóvá s misztifikációtól mentessé téve ezáltal a logika klasszikus épületét, világosan látta azt is, hogy az arisztotelészi logika csak egyike a lehetséges logikáknak; a választott axiómák és definíciók miatt olyan, amilyen. Az ún. „princípium contradictionis, az *A* nem lehet *nem-A"* elvének $x^2 = x$ alakban történő matematikai megfogalmazása után pl. megjegyzi:

„Ennek a ténynek, ti., hogy a gondolkozás alapvető egyenlete másodfokú, ennek a ténynek a következménye, hogy az analízis és osztályozás műveleteit ellentétes párokba osztással végezzük, az, amit technikai nyelven *dichotomiának* neveznek. Mármost, ha ez az egyenlet harmadfokú lenne, … *trichotomia* útján kellene haladnunk, amit ugyan jelenleg adott képességeinkkel nem tudunk kellőképpen elképzelni, de amelynek a törvényei mégis vizsgálhatók mint értelmi spekuláció tárgyai."

Magának az $x^2 = x$ törvénynek a jelentése igen egyszerű. Előzőleg megadott axiómák és definíciók alapján ugyanis Boole $x - x^2 = 0$, majd $x(1 - x) = 0$ alakra hozza, s ha pl. x jelentése „ember", akkor $1 - x$ jelenti a „nem emberek" osztályát, s $x(1 - x)$ „azt az osztályt, melynek tagjai egyszerre »emberek« és »nem emberek«, és így az $x(1 - x) = 0$ egyenlet azt az elvet fejezi ki, hogy *olyan osztály, melynek tagjai egyszerre emberek és nem emberek, nem létezik".*

Az „osztály" s az „osztályba tartozás" Boole algebrájának alapvető fogalmai. A matematika egész további fejlődésében döntő tényező, hogy Boole-nál az „egyedi változót" felváltotta ennek az új kollektív egésznek a fogalma. Később, a halmazelmélet divatba jötte után szívesebben használják majd Boole osztálya helyett a halmaz elnevezést, s Boole-algebra helyett sokszor beszélnek „halmazok algebrájáról". A halmazok algebrája, a Boole-algebra, a mai matematika egyik legfontosabb pillére lett. Mindenütt megtalálható, a matematika sokféle, fontos alkalmazása el sem képzelhető nélküle.

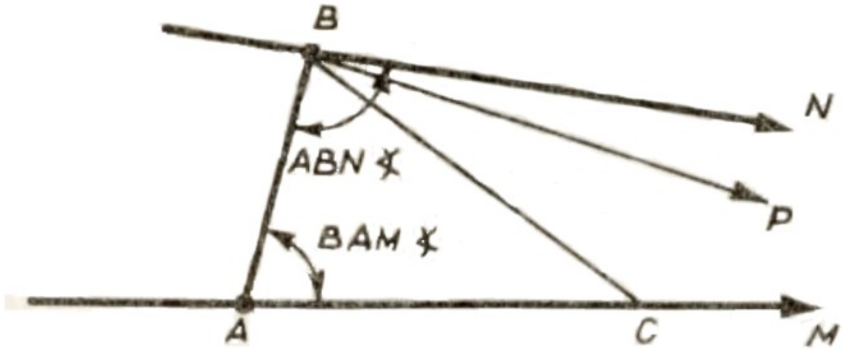
Boole igazi „self-made man" volt, szegény sorból küzdötte fel magát. Soha nem felejtette el, milyen nehéz volt ez, s minden erejével igyekezett, hogy másoknak legalább megkönnyítse a felemelkedés útját. Nevelési elveit korai halála után felesége, Mary Boole foglalta össze, s folytatta ezen a területen férje munkáját.

*

Európa peremén, a matematikai élettől elszigetelve, egymásról semmit nem tudva építette fel Nyikolaj Ivanovics Lobacsevszkij (1793–1856) és Bolyai János a geometria új világát. A használt téglák nem voltak újak, annyira nem, hogy matematikusok és matematikatörténészek, olyan neves önjelölttől kezdve, mint Gauss, minduntalan megkísérelték korábban megtalálni a nem-euklidészi geometria „eredetét". Pedig Bolyai geometriája lényegében előd nélküli és nem sejtetten új felfedezés volt. A geometriát ugyanis a reneszánsz óta – akármi volt az egyes kutatók véleménye az ókorban az V. posztulátumról – mindenki a szemlélet, a mindennapos tapasztalatból ismert tér tudományának tartotta. Bolyai nagy felfedezésének a következménye lett, hogy a geometria elvált a szemlélettől, s a szemléletes tér tudománya helyett a különféle szemlélettől független absztrakt terek matematikája lett.

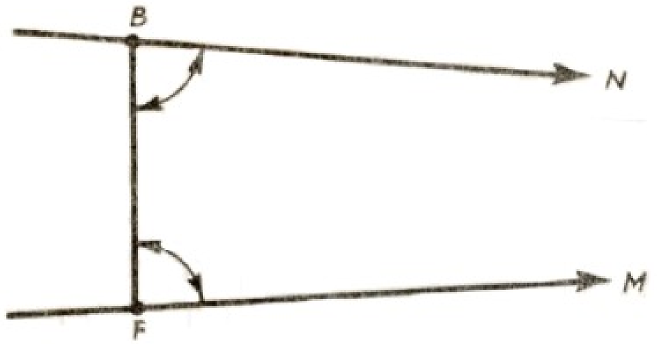
Soha senkinek Bolyai Jánosig eszébe nem jutott a szemléletre való hivatkozás nélkül, a szemlélet és a „józan ész” *ellenére* geometrizálni. Az ő könyvében már az első § első definíciója a szemlélet semmibevevése:

> „Ha a $\vec{B}N$ nem metszi, de az *ABN* síkban lévő bármely más $\vec{B}P$ metszi *AM-et,* akkor ezt $BN \parallel \vec{A}M$ által jelöljük. Világos, hogy bármely az $\vec{A}M$ egyenesen kívül fekvő *B* pontból kiindul ilyen $\vec{B}N$, de csak egy, és hogy $BAM \sphericalangle + ABN \sphericalangle \leq 2R$. Mert, ha *BC*-t a *B* körül addig forgatjuk, míg $BAM \sphericalangle + ABC \sphericalangle = 2R$ bekövetkezik, akkor közben valamikor először áll elő az a helyzet, hogy *BC* nem metszi $\vec{A}M$ -et, s ebben az állásban $\vec{B}N \parallel \vec{A}M$.”



15. ábra.

Az euklideszi geometria csak azt az esetet engedte meg a párhuzamosságra, amikor a *BC*-t a *B* körül addig forgattuk, míg $BAM \sphericalangle + ABC \sphericalangle = 2R$ azaz 180° bekövetkezett, csak ebben az esetben nevezte az *AM* és *BC* egyenest „egymást nem metszőnek”. A nem-metszés fogalmát az újkori kommentátorok szerint a „szemléletre” alapította. Bolyai geometriájában a „nem-metszés” és az „először-nem-metszés”, azaz a párhuzamosság, *logikai definíciók.* Érvényüket nem a szemléletből veszik, hanem abból a tényből, hogy segítségükkel éppen olyan ellentmondásmentes geometriai rendszer építhető fel, mint az euklidészi párhuzamossági definíció segítségével.



16. ábra. BFM ∢ = FBM ∢

Könnyen meg lehet például szerkeszteni azt az egyenest, amely két Bolyai-párhuzamossal egyenlő szöget zár be (lásd 16. ábra), vagy azt a görbét, amely az *AM*-mel párhuzamos minden egyenessel azonos szöget zár be. Ezt a görbét nevezte Bolyai „*L*”-nek. „Nyilvánvaló – írja az *Appendix* 11. §-ában –, hogy $\vec{A}M$ az *L*-t két egybevágó (congruens) részre bontja.” Ha *L*-et $\vec{A}M$ körül forgatjuk, akkor *L* egy felületet ír le, amelyet Bolyai *F*-nek nevezett el. Ebből a felületből minden, az *AM* egyenest tartalmazó sík *L* vonalat metsz ki. Az *L* vonalat és az *F* felületet nem lehet „elképzelni”, Bolyai később szenvedélyesen tiltakozott pl. az ellen, hogy a szemléletre hivatkozva „határkörnek” és „határgömbnek” nevezzék *L*-et és *F-et,* hiszen az *L*-nek és *F*-nek nincs „középpontja”. A Bolyai-párhuzamosak által definiált térben nem használhatók az euklidészi térből ismert képzetek. Bolyai azonban ebben az egészen másféle térben is talált olyan képződményt, olyan matematikai modellt, amely modellen viszont az euklidészi geometria volt érvényes. Ha ugyanis az *F* felületen az *L* vonalakat tekintjük párhuzamosaknak, akkor az *F* felületen az euklidészi párhuzamossági axióma, „valamint a sík egész geometriája és trigonometriája abszolút érvényesek”.

*

Lobacsevszkij tragédiáját is az okozta, hogy ugyanennek az „elképzelhetetlen elképzelésnek volt úttörője”. A nem-euklidészi geometriát a matematikusok világa csak azután ismerte el, miután E. Beltrami (1835–1900) fordítva is megjárta azt az utat, amit Bolyai János a nem-euklidészi párhuzamok teréből az *F* felület euklidészi geometriájának megteremtéséig megtett. Beltrami megmutatta, hogy az euklidészi térben meg lehet adni olyan felületet, amelyen viszont a nem-euklidészi síkmértan párhuzamossági axiómája s így az egész nem-euklidészi geometria érvényes. Beltrami nyomán Cayley, Felix Klein (1849–1925) és Henri

Poincaré (1845–1912) a nem-euklidészi geometriák egyre egyszerűbb modelljeit állították elő, s ezzel a modellező munkákkal párhuzamosan a matematika a geometria egészen új felfogásához jutott el. Felismerték, hogy az egyes geometriafeléségek osztályozásában és legmélyebb tulajdonságaik vizsgálatában *nem* geometriai elveket kell alkalmazni. Felismerték, hogy a geometriákat nemcsak egymásra lehet leképezni, hanem megadott feltételeket kielégítő *algebrai kifejezések* elméletére is. Ahhoz hasonlóan, ahogyan egyes geometriai görbéket ki lehet fejezni algebrai képlettel, egész geometriák megadhatók speciális algebrai kifejezések átalakítása *(transzformációja)* közben változatlanul maradó *(invariáns)* tulajdonságok vizsgálatával.

Az elmélet alapjait angolok dolgozták ki, A. Cayley és J. J. Sylvester, s az egész elmélet az angol algebrai iskola általánosító és absztraháló tendenciáinak a csúcsa. S ahogyan más dolgokban, a matematikában is Anglia lett a század utolsó negyedében Németország mintaképe, s az angol kezdeményekből ők alkották meg az algebrai geometria és invariánselmélet impozáns épületét. A német iskola megalapítója Rudolf Clebsch (1833–1872) volt, az általa 1868-ban elindított *Mathematische Annalen* lett az új irány első nemzetközi orgánuma. Weierstrass és Kronecker előadásai még biztosították a berlini egyetem óriási tekintélyét, de a század utolsó negyedében ez a *Mathematische Annalen* körül összegyűlt, anglomán és saját formalizmusaiba bonyolódó invariánselmélet és algebrai geometria volt már a legfontosabb német matematikai mozgalom. A „mozgalom” szó helyénvaló itt, mert két lelkes propagátora és vezére, Felix Klein (1849–1925) és Sophus Lie (1842–1899) akkora aktivitást fejtett ki elterjedése érdekében, amilyent addig csak más, pl. irodalmi vagy festészeti irányokkal kapcsolatban lehetett látni. Felix Klein volt a matematika történelmében az első „nagy organizátor”, az első, aki a matematika hatalmasan növekvő és menthetetlenül szakosodó világában a szervezés erejével próbált új egységet teremteni. Gigantikus méretű vállalkozása, az *Enzyklopedie der mathematischen Wissenschaften* az egyes szerzők egyéni ízlését tükröző, széthulló esszégyűjtemény maradt, az általa elképzelt egységet csak évtizedekkel később sikerült megvalósítani, egészen más alapokból kiindulva a Bourbaki-körnek. Félix Klein szerteágazó matematikai és matematikai-fizikai munkásságában csak a *stílus* volt az egység látszatát szuggeráló erő, az algebrai geometria és invariánselmélet művészi tökéletességig fejlesztett stílusa. Ma már inkább a vázlatai élnek: a híres „Erlangeni programm” (1872), amelyben a különféle geometriákat mint egy-egy transzformációcsoport invariánsainak az elméletét mutatja be, 1880–81-ben tartott egyetemi előadása az algebrai függvények Riemann-féle elméletéről, amelyben a komplex-változós függvények legmélyebb tulajdonságait *fizikai alkalmazásaik* felől közelíti meg, ragyogó esszéje az ikozaéder szimmetriacsoportjai és az ötödfokú egyenlet megoldása közötti összefüggésről…

A Klein-féle matematika fejlődésének a csúcsára francia matematikus, Henri Poincaré (1854–1912) ért, az automorf-függvények fogalmának és elméletének megteremtésével. Az automorf függvények elméletében minden egybeépül, amit a XIX. században lényegesnek hittek a matematikában; vaskos, nehezen megemészthető köteteket írtak róluk. Ma már a matematikának ez a fejezete inkább kuriozitás, ragyogó kitérő, olyan, mint a kortárs impresszionista festészet: lehetetlen folytatni s ilyen modorban dolgozni tovább, de lehetetlen kikerülni az *alapjait.* Látásmódunkat alakította át.

*

Ennek az egész szerteágazó, termékeny matematikai fejlődésnek a centrumában Bernhard Riemann (1826–1866) rövid időre korlátozott munkássága áll. Ha a XIX. század matematikájának a történetét a XIX. század szempontjából akarná valaki megírni, a könyv nagy része Riemann egyetlen kötetnyi Oeuvre-jével foglalkozna. Ez az aránylag vékony (558 oldal) kötet gyűjtőlencseként szedi össze a XIX. század matematikájának addigi eredményeit, s reflektorként világítja meg az utána következőket. A komplex-változós függvények elmélete szerepel itt, hatványsorokkal történő felépítésük és speciális differenciálegyenletekre kiszabott feltételek útján való definiálásuk szempontjából, azután a speciális feltételek mellett végzett határátmenet elmélete általában; az integrálás új, weierstrassi szigorúságnak megfelelő elmélete; a mérés szerepe a geometriában s összefüggése a terek görbületi viszonyaival; a matematikai problémák megvilágítása a fizikai intuíció segítségével. Ha korai halála s betegsége meg nem gátolja, s megismerheti az angol algebrai iskola hatásos formalizmusát, talán Riemann lett volna Felix Klein, Sophus Lie és Henri Poincaré egy személyben. A XIX. század igazi matematikai szimbóluma nem Gauss, hanem Bernhard Riemann.

Riemann matematikája is a Gausséhoz kapcsolódik, de nem közvetlenül, hanem mestere, Peter Gustav Lejeune-Dirichlet (1805–1859) matematikáján keresztül. A XIX. század kedvenc elméletei: a trigonometrikus sorok elmélete, a többszörösen periodikus függvények elmélete, a számelmélet Dirichlet elegáns, szellemes, nehéz formalizmusában hatottak Riemannra. Dirichlet nyomában lett Riemann a modern matematika egyik meglepő, nehéz, érdekes diszciplínájának, az „analitikus számelméletnek” az elindítója. Az egész számok törvényeinek a folytonosság fogalmára felépülő analízis segítségével történő vizsgálata termékeny, új területekre vezette a matematikát. Ezeknek a feltárásában igen fontos volt a P. L. Csebisev (1821–1894) körül kialakult pétervári matematikai iskola szerepe.

*

A pétervári iskola szinte egyetlen generáció alatt megtanulta mindazt, amit a Nyugat matematikája az analízisben alkotott, s ezt a hatalmas anyagot a fizikai és technikai alkalmazások szempontjából megrostálva, a XX. század egyik legfontosabb matematikai irányának, az ún. konstruktív függvénytannak a megteremtéséhez egyengette az utat. Pontosság, absztrakt fogalmazás és gyakorlati alkalmazhatóság egysége jellemző a pétervári iskola szemléletére.

> „Az elmélet és a gyakorlat kölcsönhatása – írta Csebisev – hozza létre a legszebb eredményeket, s ebből a közeledésből nemcsak a gyakorlat profitál, hatására a tiszta tudomány fejlődése is fellendül: új területeket nyit meg, vagy már régen ismert dolgok új aspektusát mutatja meg.”

A példát Csebisev mutatta: az analitikus számelméletre vonatkozó absztrakt kutatásai mellett alapvető a mechanizmusok elméletéről szóló munkája: ebben körvonalazta az analitikus függvények megközelítését, speciális többtagú kifejezéssel. Csebisev volt a későbbi alkalmazások szempontjából annyira fontos interpolációelmélet megteremtője is, itt főleg A. A. Markov munkái jelentősek az övéi mellett. A tágabb értelemben vett „megközelítés”, a maradéktag-elmélet problémái foglalkoztatták főleg Ju. V. Szohockijt (1842–1927), az ő munkái igen sok helyen érintkeztek a francia analitikus függvénytani iskola (Poincaré, J. Hadamard, E. Picard) munkáival. Poincaréval rokon eredményekre jutott a differenciálegyenletek megoldásának stabilitásproblémáival kapcsolatban A. M. Ljapunov (1857–1918), az ő nehéz, megerőltető és önfeláldozó munka árán kapott eredményei a XX. század matematikájában egy egész nagy, a technika fejlődése szempontjából sorsdöntő diszciplína kiindulásává váltak.

A pétervári iskola megjelenése s virágzása új korszak jele a matematika életében. Eddig a matematika eredményeiből a technika csak a legegyszerűbbeket használta, láttuk pl., hogy mennyire elmaradt a XIX. század elején az ipari forradalom szülőhazájában, Angliában a matematika. Az ipari forradalom vezérei egyebütt is megelégedtek az egyszerű számtannal, a magasabb matematika többnyire az egyetemek belügye maradt. A XX. század második-harmadik évtizedétől kezdve megváltozott a helyzet. Az elvont, absztrakt, nagyon nehéz matematikai elméletek egyre-másra behatoltak a technika s a gazdasági élet minden területére, úgyannyira, hogy napjainkban valóságos „matematikai civilizáció” kialakulásának lehetünk tanúi.

VI.

Hermann *Weyl* (1885–1955), a modern matematika egyik megteremtője, 1951-ben a XX. századi matematikát a Nílus deltájához hasonlította. Majdnem sivatagi magányban nőtt naggyá hosszú történelme alatt, s most, mikor a hatalmas folyam nagysága miatt ezer szétfutó ágra szakadt, a többi tudományok mind belőle igyekeznek vizet meríteni földjük öntözésére. Alig egy évtized múlva, 1964-ben Jean Dieudonné[7] ugyanabban az előkelő amerikai folyóiratban, amelyikben Weyl a Nílus-deltához hasonlította és ezerfelé ágazónak nevezte a modern matematikát, azt írta, hogy a matematika soha olyan egységes és összefogott nem volt, mint ma. Weyl az ezer felé hasadt matematika fejlődésében fontosnak érezte az alkalmazások, különösen a fizikai alkalmazások szerepét; Dieudonné egységes, büszke matematikájának semmi szüksége az alkalmazások inspirációjára.

> „Még ha a matematikát erőszakkal el is választanák – írja – az emberiség minden más problémájától, akkor is elég tápláléka maradna, saját kérdései körében, évszázadokig."

Ezerfelé ágazó és az alkalmazások tengerébe futó vagy egységes és önelégült tudomány a modern matematika? Akármilyen is, bizonyosan óriási. Olyan óriási, hogy Weyl is, Dieudonné is a modern matematika nagyon sok fejezetének még a nevét is kénytelen volt kihagyni összefoglalásából.

A modern matematika dzsungelében – a teljesség igényének még a látszatát is kerülve – az alábbiakban három szempont szerint próbálunk tájékozódni. Megkeressük a matematika sokféle szakadásának a forrását, leírjuk, miért tekintheti büszke önelégültséggel egységesnek és tökéletesnek önmagát, s vázoljuk, miként próbál megfelelni az alkalmazások igényeinek, s lesz eközben más, mint addig volt.

*

Igazában már a XIX. század matematikája sem volt egységes, kiváltképpen a század vége felé. A széthúzó törekvéseket azonban visszakényszerítette a sorba professzor Weierstrass porosz szigorúsága, s a közmatematikusok a nagy hadseregben mind egyforma fényesre csiszolták zubbonyukon az „epszilonotika" csillogó gombjait. Kifelé nem látszott, hogy foltos az egyenruha, és szorít a bakancs. Az a két ember, aki először le merte vetni a matematika

[7] Jean Dieudonné (1906–1992) *(– a szerk. kieg.)*

uniformisát, Bolyai János és Georg Cantor, kegyetlenül megbűnhődött bátorságáért. A nem-euklidészi geometria és a halmazelmélet minden addigi matematikától különbözött. A nem-euklidészi geometria szemlélettől független geometria volt, a halmazelmélet pedig nem-ellentmondásmentes matematika. A matematika fő büszkesége az eleaták nagy felfedezése óta éppen az ellentmondásmentesség volt, a nem-euklidészi geometriák létjogosultságát is ellentmondásmentes voltukkal indokolták.

Az új század matematikája azzal a megdöbbentő paradoxonnal kezdődött, hogy a matematika – éspedig éppen a szigorú weierstrassi matematika – megalapozásában alapvető „halmaz" fogalma nem-ellentmondásmentes. Az az egyszerű fogalom, hogy „az önmagukat nem tartalmazó halmazok halmaza" önellentmondás, önmagukat nem tartalmazó halmazokat nagyon könnyű megadni, egyáltalában nem kivételesek. Ilyen pl. a természetes számok $\{1, 2, 3, \ldots\}$ halmaza. A kapcsos zárójel jelzi az egyetlen halmazzá való összefoglalást. Az $\{1, 2, 3, \ldots\}$ halmaz mindegyik eleme pozitív egész szám, de maga az $\{1, 2, 3, \ldots\}$ halmaz *nem* az. Így az $\{1, 2, 3, \ldots\}$ halmaz, a pozitív egész számok halmaza olyan halmaz, amely nem tartalmazza önmagát, hiszen önmaga nem pozitív egész szám. Ebben semmi ellentmondás nincsen, az ellentmondás akkor jelentkezik, ha az *összes* önmagukat nem tartalmazó halmazokat össze akarjuk foglalni, az önmagukat nem tartalmazó halmazok *halmazát* akarjuk definiálni. *Ez* a halmaz önellentmondás.

Tegyük fel ugyanis, hogy létezne ilyen halmaz. Akkor ez a halmaz vagy 1) tartalmazná önmagát, ami ellentmond a feltevésnek, vagy 2) önmagát nem tartalmazó halmaz lenne. A logika szabályai szerint harmadik lehetőség nincs, *tertium non datur.* De a 2) eset is ellentmondás, mert feltételezett halmazunk nem tartalmazhatná az *összes* önmagát nem tartalmazó halmazt, hiszen feltevésünk szerint önmagát nem tartalmazó halmaz.

Ezt a Russell-féle paradoxont vagy valamelyik egyenértékű formáját a mai matematikusok legnagyobb része szójátéknak tartja, s bagatellizálni igyekszik. Azonban történelmi tény, hogy a század elején a legnagyobb matematikusokat izgatta a kérdés megoldása, s éppen a paradoxonok elleni küzdelemben lett nyilvánvaló az axiómarendszert fontossága. A mi szempontunkból most a többes szám a lényeges, mert az egyik legfontosabb tapasztalat éppen az volt, hogy a matematikában nem lehet egyértelmű axiómákat előírni. Az egyes axiómák megválasztása többé-kevésbé önkényes, csak az axiómák együttesétől, egy-egy axióma*rendszertől* lehet és szabad jól meghatározott tulajdonságokat követelni. Például azt, hogy az axiómarendszerből ne lehessen afféle megengedhetetlen fogalmakat levezetni, mint az önmagukat nem tartalmazó halmazok halmaza. Ilyen axiómarendszert azonban többfélét is ki lehetett gondolni, s aránylag nem is túl nehezen. A halmazelméleti példa a matematika minden területén hatott, egy-egy axiómarendszer kiválasztásával és vizsgálatával a matematika új, sokszor igen nagy jövendőjű ágait lehetett elkülöníteni. Íme, a sokfelé ágazás egyik oka.

*

Az axiómarendszerek kiválasztásának és vizsgálatának a problémáját itáliai matematikusok elevenítették fel a múlt század végén, de, mint egykor Euklidészé, most is egyetlen ember, David *Hilbert* (1862–1943), neve szimbolizálhatja a modern axiomatikát. Híres könyve, a *Geometria alapjai* valóságos XX. századi *Elemek*nek tekinthető, módszerét s hatásosságát illetően egyaránt. Az ebben a könyvben először összeszedett és kanonizált elveknek megfelelően dolgozta ki később Hilbert munkatársaival a halmazelmélet és a logika ellentmondásmentesnek látszó axiómarendszerét, s ugyanezen a nyomon haladva, részben még Hilbert iskolája előtt, Bertrand Russell[8] és Alfred N. *Whitehead* (1861–1947) az axiomatikus matematikai logikát. Mindkét vállalkozás közös őse a sokáig elfelejtett Gottlob *Frege* (1848–1925) volt. Ő fedezte fel, hogy a matematika megalapozásában másra vissza nem vezethető primitív fogalmakból és ezek között a fogalmak között létesíthető primitív relációkból kell kiindulni. Az ezekből levezethető tételekről szigorúan standardizált eljárás segítségével mindig el lehet dönteni, hogy két „logikai érték", az „igaz" és a „hamis" melyike tartozik hozzájuk. Tertium non datur. Frege gondolatai – Hilbert és Russell megfogalmazásában – látszólag legyőzték a halmazelmélet kételyeit, a logika segítségével ellentmondásmentesen megalapozhatónak látszott a matematika.[9]

*

De vajon maga a logika megalapozható-e „ellentmondásmentesen"? Van-e értelme afféle dogmatikus kijelentéseknek, mint a tertium non datur elve? Miért kellene kizárni a harmadik vagy akárhányadik lehetőséget? Miért kellene egyáltalán a logikára alapítani a matematikát, hiszen minden matematika alapja, a természetes számok 1, 2, 3, … sorozata semmiféle logikára vissza nem vezethető.

---

8 Bertrand Russell (1872–1970) *(– a szerk. kieg.)*

9 Lásd újabban: Gottlob Frege: Logika, szemantika, matematika. Válogatott tanulmányok. Ford.: Máté András]. Szerk., a kommentárokat, a bevezetést és az utóhangot írta: Ruzsa Imre. Bp., 1980. Gondolat. 249 p., [1] t. *(– a szerk. megj.)*

Ilyen s ezekhez hasonló kérdésekkel bosszantotta a század elején kollégáit Luitzen Egbert Jan *Brouwer* (1881–1966) holland matematikus. S mint honfitársa, Mondrian, a festészetet egyenes vonalakra, úgy akarta ő a matematikát a pozitív egész számokra visszavezetni. A törekvésből létrejött matematikai irány, az intuícionizmus ma már inkább csak emlék, az izmusok kora a matematikában is régen elmúlott. De egykor az intuícionizmus radikális követelése szenvedélyes vitákat váltott ki, Brouwer látványos harca a formalizmus vezérével, Hilberttel még jobban megosztotta a már amúgy sem túlságosan egységes matematikát. Még az olyan úgynevezett „mérsékelt intuícionisták" is, mint Hermann Weyl a klasszikus analízis módszereit megmenteni igyekvő formalizmus ellen fordultak.

> „Nem az igazság érdekli Hilbertet – írta Weyl 1927-ben –, hanem az, hogy megmentse a régi analízis ellentmondás-mentességét."

A Hilbert-féle axiomatika, ha megvalósulna, olyasmi lenne, mint az automata, „amely tetszőleges *A* tulajdonság bedobásával kiadná azt az *A* individuumot, melynek biztosan megvan az *A* tulajdonsága, feltéve, hogy ilyen individuum egyáltalán létezik". Ilyesféle matematikából sohasem fakadnának új megismerések, legfeljebb más és más rövidítések.

> „Hilbert – írja Weyl már említett, 1951-es összefoglaló cikkében – úgy próbálta megmenteni a klasszikus matematikát, hogy értelmes tételek rendszeréből értelmetlen formulákkal való játékká alakította át, s kimutatta, hogy ez a játék sohasem vezet két ellentmondó, *F* és nem-*F* formulára. Az ellentmondás-mentesség, nem az igazság, Hilbert célja. Az ellentmondás-mentesség bizonyítását célzó próbálkozásai feltárták a matematika bámulatosan komplex logikai struktúráját. Az első lépések biztatóak voltak. Azután Gödel felfedezése mély árnyékba borította Hilbert vállalkozását. Maga az ellentmondás-mentesség is formulával fejezhető ki. Mármost Gödel bebizonyította, hogy ha a matematikai játék történetesen ellentmondásmentes, akkor az ellentmondás-mentesség formuláját sohasem lehet magában a játékban bebizonyítani."

*

Kurt *Gödel*[10] világraszóló tételében talán még meglepőbb és fontosabb volt a bizonyítási módszer, mint amit bizonyított. Hiszen intuícionista vagy intuícionista-szimpatizáns matematikusok addig is szívesen tekintették a matematikát lényegében nem formalizálható,

[10] Kurt Gödel (1906–1978) *(– a szerk. kieg.)*

nyitott, keletkezésben levő rendszernek. A halmazelmélet egyik korai összefoglalója, G. Hessenberg például természetesnek találta a halmazelmélet paradoxonait, hiszen a számsor végtelenségéhez hasonlóan ezek is „a tapasztalat befejezhetetlen jellegét" tükrözik. De Hessenberg neokantiánus volt, s Fries filozófiájára hivatkozva fogadta el a paradoxonokat.

Gödel semmiféle filozófiára nem hivatkozott, egyszerűen számokat, közönséges számokat használt a bizonyításában. Ez a dologban a különös, ez a bizonyítás szépsége és eleganciája. Gödel a Russell-féléhez hasonló halmazelméleti paradoxonból indult ki, az ún. Richard-féle paradoxonból. Ez a paradoxon speciális módon megkonstruálandó számokra vonatkozik, és elkerülhető, ha gondosan megkülönböztetjük az aritmetikán *belüli* állításokat azoktól az állításoktól, amelyek magát az aritmetikát valamilyen jelölési rendszerben helyezik el, azaz megkülönböztetjük az ún. „metamatematikai" formuláktól.

Gödel először is kidolgozta, hogyan lehet minden formulát, a metamatematikai formulákat is, közönséges *számokkal,* tehát a közönséges aritmetikán belül reprezentálni. Azután olyan metamatematikai formulát tekintett, amely azt állítja *önmagáról,* hogy nem bizonyítható, és megkereste ehhez a formulához tartozó *aritmetikai* formulát. Megmutatta, hogy ha ez a formula az aritmetikában bebizonyítható, akkor bebizonyítható a formula formális tagadása is, márpedig ha egy axiómarendszerből egy formula és formális negációja egyaránt levezethető, az axiómarendszer nem ellentmondásmentes. Ha viszont az aritmetika axiómarendszere ellentmondásmentes, akkor sem ez a formula, sem formális tagadása nem bizonyítható, a formula az aritmetika axiómarendszerében eldönthetetlen. Minden formális axiómarendszer eldönthetetlen problémákkal terhes. A formalista matematika igazi ellensége nem az intuícionizmus volt, hanem a Gödel-tétel: belülről rombolta le.[11]

Az intuícionista matematika könnyebb helyzetben volt: az ő érvényességi kritériumát, az egész számok sorára való redukálhatóságot nem érintette a Gödel-tétel által okozott földrengés. Most jött meg az intuícionista matematika nagy kora, s a rekurzív függvények elméletében az intuícionista redukálhatósági elv a Gödel-tétel bizonyításában alkalmazott módszerekkel társulva egy egész nagy, új matematikai diszciplínát teremtett. Itt az axiómarendszerek vizsgálatát felváltja a számítási eljárások, az *algoritmusok* vizsgálata. A tétel „igaz" vagy „hamis" voltának a vizsgálata helyett az a kérdés, létezik-e valamilyen algoritmus a probléma *effektív kiszámítására.* Pontosabban: egyes tételek valamely axiómarendszeren belüli igazsága vagy hamissága helyett arra kell ebben az új matematikában

---

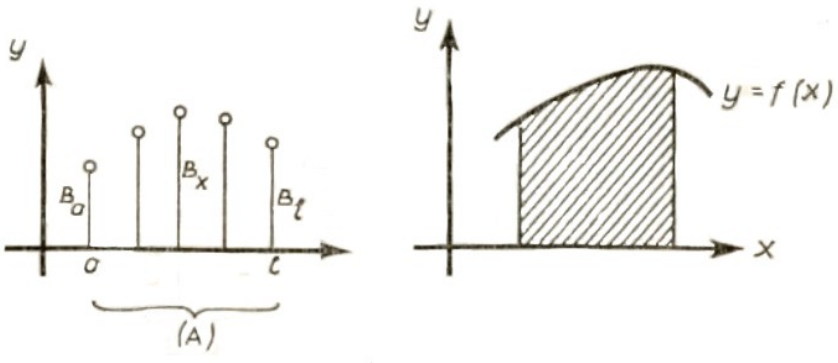
[11] Lásd újabban: Douglas R. Hofstadter: Gödel, Escher, Bach. Egybefont gondolatok birodalma. Metaforikus fúga tudatra és gépekre, Lewis Carroll szellemében. Ford.: Lipovszki Gábor. 3. utánny. Bp., 2005 [!2012]. Typotex. XXI, 777 p.; Raymond M. Smullyan: Gödel nemteljességi tételei. 3. kiad. Bp., 2006. Typotex. 165 p. (A logika világa) *(– a szerk. megj.)*

válaszolni, hogy adott típusú problémák *megoldhatók* vagy *nem-megoldhatók.* A megoldhatóság egy effektív kiszámítás, egy tényleges algoritmus megadásában áll, a megoldhatatlansághoz bizonyítani kell, hogy ilyen algoritmus nem létezik. Ha létezik ilyen algoritmus, akkor – legalábbis elvben – mindig megadható egy egyszerű szimbolikus számolási eljárásokkal definiált *„számológép”,* amely ezt a kiszámítást elvégzi. Az ilyen „elvi számológépet” (azaz a definiált matematikai műveleteket) kitalálója, Allan M. *Turing* (1912–1954) után *Turing-gépnek* nevezik. A Turing-gép természetesen nem anyagi berendezésekből álló gép, de – akárcsak az egész elmélet, amelynek keretében létrejött – a leghatalmasabb impulzus volt a tényleges, bonyolult szerkezetű modern számológépek megteremtéséhez. Ebben az új számológép-matematikában azután egészen különösen, minden addigitól eltérő módon keveredik anyagi realizáció és matematikai elmélet: egy kis túlzással képletesen azt lehetne mondani, hogy a matematika a gép „anyagi” alkatrészévé válik, annyira függ a gép anyagi struktúrájától, s egyben annyira megszabja ezt az anyagi struktúrát. A szakirodalom a gép „nyersanyagához” (hardware) hasonló szóképzéssel valóban úgy is nevezi ezt a „szellemi anyagot”, hogy „puha anyag”, *software.* A számológépek tehát nem „automaták”. *Anyagukhoz* tartozik a matematika elméleti fogalomvilága, amelyik – a Gödel-tétel óta mindenki által elismerten – nyitott és soha le nem zárható világ. A nagy teljesítményű számológépektől éppen ezért várta *Neumann* János (1903–1957), egyik megalkotójuk s a modern matematika legsokoldalúbb lángelméje, a matematika új területekkel gazdagodását és fokozatos átalakulását. Így vezetett a matematika logikai alapjainak vizsgálatából kinőtt gépi matematika is a nagy folyam még további differenciálódásához. Az alapkutatások a XX. század matematikájában végül mindig a nagy tudomány ágakra szakadását eredményezték.

*

A halmazelmélet, amelyik az alapkutatásokban ilyen szétágazóvá tette a matematikát, az egyes matematikai szakdiszciplínákon belül egészen másként hatott. Lassan mindenüvé behatolt, átalakította a matematika minden ágát. Az átalakulás a függvények tanában, az *analízisben* kezdődött. A halmazelmélet alapfogalmai: az „elem” és a „halmaz” és alaprelációja: a „halmazba tartozás” szempontjából a függvény addigi fogalma és az analízis korlátozása a „jó magaviseletű” függvényekre tűrhetetlenül primitívnek látszott. Úgy kellett általánosítani az analízist, hogy alkalmas legyen az új, halmazelméleti módon definiált függvények tárgyalására is. Ehhez mindenekelőtt az integrál fogalmát kellett megszabadítani a terület, ill. az (akárhány dimenziós) térfogat fogalmától. Hiszen például az egész számok vagy a racionális számok halmazának nincsen hosszúsága vagy területe, holott ennek és ilyesféle halmazoknak fontos szerepe van az analízisben. Francia matematikusok, René *Baire* (1879–1932), Émile *Borel* (1871–1956) és Henri *Lebesgue* (1875–1941) vették észre, hogy az új, halmazelméletnek megfelelő függvénytanban a térfogat fogalmát kell más, általánosabb fogalommal, a *mérték* fogalmával helyettesíteni. A mérték a térfogat *matematikai szempontból lényeges tulajdonságainak,* pl. az összegezhetőségnek, az absztrakciója. Éppen ez az *absztraktsága* a nagy előnye a térfogattal összehasonlítva. Semmi akadálya ugyanis, hogy pl. egy egyenes szakasz racionális pontjából álló halmaz mértékéről beszéljünk, holott a térfogatfogalom szerint egy ilyen halmaz reménytelenül üres. Lényegében véve persze „üres" a mértékfogalom szerint is, de ezt most úgy lehet mondani, hogy „nulla mértékű halmaz", s ez óriási, hihetetlenül nagy különbség.

Az új mértékfogalom segítségével definiálta Lebesgue az integrált. Egyszerűség kedvéért a kétdimenziós esetet tekintve azt lehetne mondani, hogy a klasszikus, Riemann-féle integrál az $y = f(x)$ görbe alatti területet adja meg az $x = a$ és $x = b$ pontokban emelt ordináták között, a Lebesgue-integrál pedig az x-tengely $x = a$ és $x = b$ pontja közé zárt korlátos $\{A\}$ ponthalmaz pontjaiban az $y = f(x)$ függvény által értelmezett Bx ordináták $\{B\}$ halmazának a *mértéke.* „Közönséges" esetben persze a Lebesgue-integrál eredménye ugyanaz, mint a Riemann-integrálé, de a Lebesgue-integrál sokkal kevesebbet kíván meg, s olyankor is alkalmazható, mikor a régi integrálnak semmi értelme nincs. Így pl. a Riemann-integrálhoz szükséges, hogy az x-tengely a és b pontja közötti halmaz egyenes szakasz legyen, a Lebesgue-integrálnál $\{A\}$ tetszőleges korlátos ponthalmaz, amely lehet pl. az a és b pontok közötti szakaszon levő racionális pontok halmaza.



17. ábra. Lebesgue-integrál *Riemann-integrál*

Az új integrálfogalom azért volt roppant fontos, mert azoknak a függvényeknek az összessége, amely függvények négyzete Lebesgue-integrálható, *Riesz* Frigyes (1880–1956) felfedezése nyomán matematikai műveletek tekintetében azonosnak, „izomorf-nak" bizonyult a Hilbert-féle megszámlálhatóan végtelen sok dimenziós euklidészi térrel. Ahogyan a Hilbert-féle vektortérben egy vektor hosszúságnégyzetének végtelen sok komponense véges négyzetösszegét tekintjük, úgy azon függvények osztályában, amely függvények négyzete Lebesgue-integrálható, egy *f(x)* függvény „hosszúságnégyzetét” a függvény négyzetének Lebesgue-integrálja definiálja. Utóbbi függvényosztály tehát úgy tekinthető, mint valami absztrakt tér, *függvénytér,* s ennek a függvénytérnek meg a Hilbert-féle végtelen sok dimenziós vektortérnek a közös tulajdonságait absztrahálva alkották meg az *absztrakt Hilbert-teret,* amely Neumann János munkája nyomán a kvantumelmélet matematikai alapja lett.

A matematikában magában ugyanakkor még általánosabb absztrakt terek elméletét dolgozták ki. Ezt az irányt, a modern absztrakt terek nagyon nehéz elméletét Riesz Frigyes mondatával jellemezhetjük legjobban: „Nem a számközt vagy ponthalmazt helyettesítem – írja 1937-ben – absztrakt halmazzal, nem a folytonos függvényeket általánosabb függvényosztállyal, hanem maguknak a függvényeknek a szerepét veszik át absztrakt elemek és a függvényosztályét ezeknek az elemeknek az összessége, melyet néhány, nagyon kevés, az elemek összeadását illető föltevéssel jellemzünk.” S így, az absztrakt terek globális szemléletével az új analízis a modern matematika egy másik rohamosan fejlődő ágával, az absztrakt algebrával fonódott egybe.[12]

*

Tudták azt már az angol algebristák a XIX. század közepén, hogy az algebrában a *műveletek* „számítanak”. A számoknak algebrai műveletek szempontjából történő vizsgálata a század végére nagy, önálló diszciplínává, az *algebrai mennyiségek elméletévé* sűrűsödött. Az algebrai számok, ugyanúgy, mint a valós számok, néhány egyszerű, az összeadásra és szorzásra vonatkozó axiómával jellemzett összességgé egyesíthetők. Ezt az összességet nevezték algebrai, ill. valós *számtestnek.* A számtesteket a következő axiómák definiálják:

(1) Az összeadás és szorzás *kommutatív* (magyarul „felcserélési”) törvénye: $a + b = b + a$ és $ab = ba$.

(2) Az összeadás és szorzás *asszociatív* („társítási”) törvénye: $(a + b) + c = (a + b) = c$ és $(ab)c = a(bc)$.

[12] Lásd: Riesz Frigyes összegyűjtött munkái. Sajtó alá rend.: Császár Ákos. 1–2. köt. Párizs – Bp., 1960. Gauthier-Villars – Akadémiai Kiadó. 1601 p., 2 t.; A matematikus Riesz testvérek. Válogatás Riesz Frigyes és Riesz Marcel levelezéséből. Összeáll.: Szabó Péter Gábor. Bp., 2010. Magyar Tudománytörténeti Intézet. 391, [5] p. (Magyar Tudománytörténeti Szemle Könyvtára 59.); Kiváló tisztelettel. Fejér Lipót és a Riesz testvérek levelezése magyar matematikusokkal. Összeáll.: Szabó Péter Gábor. Bp., 2011. Magyar Tudománytörténeti Intézet. 193 p. (Magyar Tudománytörténeti Szemle Könyvtára 87.) *(– a szerk. megj.)*

(3) A *disztributív* („beszorzási”) törvény, amely összekapcsolja az összeadást és a szorzást: $(a + b)c = ac + bc$.

(4) A kivonás axiómái: (4_1). Létezik 0 „zérus” elem, amelyre $a + 0 = 0 + a = a$ bármely a-ra. (4_2) Minden a számhoz megadható egy $-a$ szám úgy, hogy $a + (-a) = (-a) + a = 0$ legyen.

(5) Az osztás axiómái: (5_1). Létezik e egységelem, amelyre $ae = ea = a$ minden a-ra. (5_2) Minden $a \neq 0$-hoz létezik egy olyan $1/a$ szám, amelyre érvényes $a \cdot 1/a = 1/a \cdot a = e$.

Ezekben az axiómákban *a, b* és *c* tetszőleges racionális, valós vagy komplex szám lehet, s akkor az axiómák a racionális, a valós, illetve a komplex számtestet definiálják. Egész számok esetében azonban az (5) axiómák már nem érvényesek, az egész számok összessége *nem* test. De az (1)–(4) axiómák most is érvényesek, az egész számok összessége, az „integritástartomány” egyenesen definiálható ezekkel az axiómákkal. Mármost annak a mintájára, ahogyan az egész számok összessége beágyazódik pl. a racionális számtestbe, a lehető legáltalánosabb számtestben, az algebrai számtestben is sikerült konstruálni sok tekintetben az egész számokra emlékeztető képződményeket. Ezeket nevezte Dedekind *ideáloknak.* Az ideálok összessége megint olyan együttes, amely lényegében a fenti (1)–(4) axiómákkal definiálható. Egy ilyen együttest *gyűrűnek* neveznek, az ideálok speciális követelményeket kielégítő részgyűrűk, mint ahogyan a közönséges egész számok is az „integritástartomány” nevű gyűrű részgyűrűi.

Ezen a ponton azonban a számfogalom, még ha olyan általános is volt, mint az algebrai mennyiségek elméletében, fölösleges teherré vált, s ugyanilyen akadály volt a közönséges algebrai műveletekhez való ragaszkodás. Az algebra eldobta a számok, algebrai műveletek és egyenletek mankóit, s a XX. század második évtizedétől kezdve fokozatosan magától, mankó nélkül kezdett járni. Az első, aki ennek a forradalmi változásnak a jelentőségét felismerte, Ernst von *Steinitz* (1871–1928) volt.

> „Ha *S* elemek valamilyen rendszerét jelenti – írja 1910-ben, az absztrakt testek elméletét megalapozó dolgozatában –, akkor az *S* rendszer kompozíciótörvényének nevezek minden olyan megállapítást, amely ezen rendszer minden *a, b* elempárjához, melyek egyenlőek is lehetnek, ugyanezen *S* rendszer egyetlen *c* elemét rendeli hozzá.”

Mármost ha egy rendszerben *két* ilyen kompozíciótörvényt adunk meg, az egyiket összeadásnak, a másikat szorzásnak lehet *nevezni,* de ez lényegtelen elnevezés, a két kompozícióstörvény most nem számokra, hanem minden konkrét jellegtől megfosztott absztrakt elemekre érvényes, és a fenti (1)–(5) axiómák definiálják.

Látszólag csak a szempont változott, valójában azonban ez az absztrakt értelmezés kiszakította az algebrát egyenletekbe zártságából, és a modern matematika többi nagy diszciplínáival, halmazelmélettel, függvények vizsgálatával, geometriával kapcsolta össze. Az absztrakt algebra lett az egész modern matematika szíve és tüdeje: ez pumpálja a vért a nagy gólem minden szervébe és végtagjába, s ez frissíti meg a konkrét matematizálás munkájában elfáradt képleteket a maga afigurális, absztrakt tisztaságában. Az absztrakt algebra volt a két világháború közötti korszak matematikájának legnagyobb élménye és legfontosabb fejezete. Steinitz, Emmy *Noether* (1882–1935), Emil *Artin* (1898–1964), Bartel L. *Van der Waerden*,[13] Wolfgang *Krull*[14] munkája nyomán hatalmasan fejlődött az absztrakt testek és gyűrűk elmélete, s egyesült a múlt század több matematikai diszciplínájában megismert csoportfogalom absztrakciójából született *csoportelmélettel.*

Az absztrakt algebra páratlan sikerét nemcsak nagy általánossága magyarázza. Már Steinitz észrevette, hogy az absztrakt rendszerek egyik nagy előnye: könnyű – legalábbis elvben könnyű – összehasonlíthatóságuk.

> „Két kettős kompozíciójú absztrakt rendszert, S_1-et és S_2-t – írja – izomorfnak vagy azonos kompozíciós típusúnak nevezünk, ha elemeik kölcsönösen egyértelműen egymásra leképezhetők úgy, hogy az egyik rendszer bármely két eleméből képzett összegnek és szorzatnak a másik rendszerben az illető két elem képének összege és szorzata feleljen meg."

Ez a fogalom, az *izomorfizmus* fogalma volt a varázskulcs a különféle algebrai rendszerek szerkezeti problémáihoz.

*

A második világháború utáni korszak legnagyobb hatású matematikai irányzata elválaszthatatlanul összefonódott a *struktúrák* fogalmával. Az absztrakt algebra – célkitűzésével és munkamódszerével egyaránt – előkészítette a talajt a matematikai struktúrák vizsgálatához, de az új matematika kialakulásához még jelentős hangsúlyeltolódás volt szükséges az algebrai módszertől a struktúrák irányába. Az eltolódás egyben földrajzi is volt:

[13] Bartel L. *Van der Waerden (*1903–1996) *(– a szerk. kieg.)*
[14] Wolfgang *Krull (*1899–1971) *(– a szerk. kieg.)*

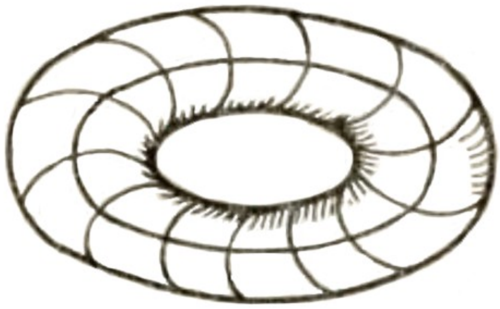
a harmincas évek elejétől kezdve a német matematika rohamosan elvesztette addigi vezetőhelyét, s élvonalba került a francia, amerikai és szovjet matematika.

A harmincas évekig a francia matematika eléggé elmaradt a fejlődéstől: nagy nemzeti tradíciói mind az új, absztrakt fejlődés ellen hatottak. Éppen ezen akartak segíteni a fiktív „Nicolas Bourbaki” fedőnév alatt rejtőzködő fiatal francia matematikusok, a „Bourbakisták”. Ők is az absztrakt algebra struktúráiból indultak ki, az izomorfia elvével felfegyverzetten. De náluk az absztrakció eredmény helyett *eszközzé* vált, eszközzé a matematika – s nemcsak az algebra! – nagy, alapvető strukturális összefüggéseinek a reprezentálására. A Bourbaki-matematika absztrakt elemekből álló absztrakt rendszerek közötti absztrakt összefüggéseket vizsgál, s bár az elemekből indul ki, ezeket az elemeket csakis a roppant bonyolult összefüggésekből álló absztrakt rendszerekben lehet értelmezni. Durván szólva azt lehetne mondani, hogy ez a folyamat elemtől elemig, miközben magának az elemnek a jelentősége is teljesen elvész (a *jelentése* már elébb elveszett), ez a struktúra. Vagy pontosabban, Bourbaki szavaival:

> „a matematikai struktúra névvel jelölt különféle fogalmak közös jellemzője, hogy: *semmiféleképpen nem specifikált* természetű elemek halmazára vonatkozik, egy vagy több reláció definiálja, melyben ezek az elemek szerepelnek, végül feltételezzük, hogy az adott relációk vagy megadott és felsorolt feltételekből vezethetők le, vagy a tekintett struktúra *axiómái.* Egy adott struktúra axiomatikus elméletét felépíteni annyi, mint levezetni a logikai következményeket a struktúra axiómáiból, de úgy, hogy eközben *tilos minden egyéb, a tekintett elemekre vonatkozó hipotézis* (kiváltképpen az elemek »természetére« vonatkozóan)”.

Bourbaki háromféle struktúrát különböztet meg, az *algebrai* struktúrákat, a *rendezett* struktúrákat és a *topologikus* struktúrákat. Algebrai struktúrákra már láttunk néhány példát, a rendezett struktúrák lényegében hasonlóak, csak itt az elemek között értelmezve van egy rendezési reláció, pl. „x nagyobb, mint y, vagy egyenlő vele”, „x magában foglalja y-t” stb. A rendezett struktúrák sokkal bonyolultabbak, sokkal feljebb vannak a „struktúrák hierarchiájában”, mint az algebrai struktúrák. A legelemibb rendezett struktúrában, a *részben rendezett halmazokban* egy $\leq$ reláció van megadva olyan axiómákkal, hogy két a és b elemre vagy az $a = b$, $a < b$, $b < a$ esetek egyike álljon, vagy egyik sem. Ha utóbbi eset nem lehetséges, azaz ha két elem nem lehet *összehasonlíthatatlan,* akkor a struktúra *teljesen rendezett,* vagy más néven *lánc.*

Vannak speciális részben rendezett halmazok, amelyek *két,* az „összeadással” és a „szorzással” analóg művelettel definiálhatók. Ennek a két műveletnek is rendezés az eredménye, de így, közvetve definiálva a rendezést a struktúra, amelynek *háló* a neve, közelebb kerül az absztrakt algebra struktúráihoz, és vizsgálata, a *hálóelmélet* az algebra egyik részévé válik. A hálóelmélet a harmincas évek második felében, a negyvenes években fejlődött ki, leginkább amerikai matematikusok munkája nyomán. Garrett *Birkhoff*[15] mutatta meg, hogy ennek a viszonylag egyszerű struktúrának a segítségével a matematika milyen sok, s meglepően távoli diszciplínáját kapcsolatba lehet hozni egymással, de – s ez az elmélet nagy szépséghibája volt – ehhez kölcsön kellett kérni egyet s mást a struktúrák hierarchiájának következő, nagy világából, a topológiából.

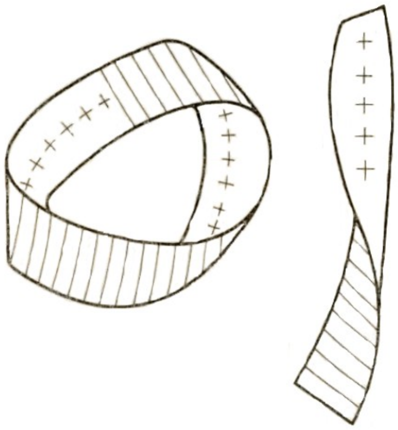


18. ábra.

A negyvenes-ötvenes évek matematikájában kétségkívül a *topologikus struktúrák* vizsgálatában elért eredmények voltak a legszenzációsabbak. Bourbakiék sejtése, akik már a harmincas években alapvetőnek tartották a matematika elvi felépítése szempontjából a topológiát, fényesen bevált. Absztrakt módon majdnem megfoghatatlannak látszó fogalmakat s relációkat kellett itt teljesen absztraktul és axiomatikusan megfogalmazni. Hogyan kell például absztrakt művelettel kifejezni egy tetszőleges felületből valamely irányított zárt görbe által kivágott lemezt és magát a görbét, mint a lemez *határát?* S azt a tényt, hogy vannak felületek, mint pl. az ábrán látható tóruszfelület, amelyeken irányított zárt görbék húzhatók, anélkül hogy lemezt vágnának ki a felületből? S hogyan kell – megint absztrakt, szemlélettől független módon – a kétféle irányított zárt görbét megkülönböztetni egymástól, s hogyan lehet ezt a különbséget a felületek változatlan jellemzőjévé alakítani, miközben a felületek a legkülönbözőbb *folytonos* torzításokat szenvedhetik: nyújthatók, zsugoríthatók, gyűrhetők, mosógépbe tehetők – éppen csak elszakítani és összeragasztani nem szabad őket. S ha a bonyolult felületeket a jobb áttekinthetőség kedvéért mégis feldaraboljuk, hogyan kell újra

15 Garrett Birkhoff (1911–1996) *(– a szerk. kieg.)*

egyszerűbb darabokból összerakni úgy, hogy a folytonos torzítások szempontjából állandó tulajdonságokat, beleértve a felület „irányítását” is, újból visszakapjuk? Milyen felületté lehet például szétvágni és újra összerakni az egyoldalú „Möbius-féle szalagot”?



19. ábra. Möbius-szalag

Természetesen sohasem szabad csupán kétdimenziós felületekre gondolni, a szemlélet csak mankó, és az absztrakt megfogalmazás egyik nagy előnye, hogy tetszőleges dimenziószámra érvényes. Magát a dimenzió fogalmát sem lehet megfogalmazni ilyen folytonos alakváltoztatásokra, topologikus transzformációkra való hivatkozás nélkül. A szemlélet ruhája és húsa alatt meg kellett keresni a roppant bonyolult kombinatorikával felépített absztrakt struktúra csontvázát.

Ezeket az új struktúrákat csak az absztrakt algebra formavilágán és módszerein felnőtt matematika találhatta meg, de az új tudomány, az *algebrai topológia* alapvető struktúrái már nem algebraiak, s még a – szokásos értelemben vett – halmazelmélet keretei között sem férnek el. Ezeknek a struktúráknak a magasságából hirtelen meglepő kilátás nyílott az egész matematikára, a fizikai alkalmazásokban oly fontos differenciálgeometriától kezdve a matematikai logika legelvontabb kérdéseit tárgyaló elméletekig, s nem lehetetlen, hogy agyvelőnk maga is topologikus szabályokkal dolgozva alakítja át a látott világ szemléletes formáit absztrakt képzetekké. Az egységes matematika, amelyet az „alapok” vizsgálatával nem sikerült megközelíteni, a folyton mélyülő és specializálódó kutatásokból végre megszületett. Az új matematika, napjaink matematikája, a matematikai „szakember” diadala.

*

A szakember, ha jó szakember, pontosan ismeri szakmája lehetőségeit és korlátait. A legtöbb órás például nem szívesen vállalkozik cipőfelsőrész készítésre, pedig nem lehetetlen, hogy finom műszereivel egészen különleges cipőket tudna készíteni. A matematikai alkalmazások szépsége azonban éppen az ilyen lehetetlennek és értelmetlennek látszó feladatok vállalása. Az újkori matematika születésétől kezdve tűrni kénytelen más szakmák igényeit s beleszólását, hiszen megszületését s gyors fejlődését is a mechanika és később a mechanikával párhuzamosan fejlődő mechanizmusok igényeinek köszönhette. S mikor a gyors fejlődés után, a XIX. században szigorú egyetemi professzorok vizsgáztatták a matematikát önmaga megismerése céljából, már legyőzhetetlen erővel jelentkezett egy új és nagy jövőjű szakma, az elektromosságtan követelése és igénye.

Az új matematika egyik legfontosabb s napjainkban legtöbbet emlegetett fejezete, az ún. „általánosított függvények" vagy „disztribúciók" elmélete például teljes egészében elektromérnökök munkájából született. A múlt század végén alkotta meg a diszciplína alapvető fogalmait és módszereit Oliver *Heaviside* (1850–1925) elektromos áramkörök jelenségeinek a tárgyalására, szemléletes és egyáltalában nem szigorú formában. Saját szavai szerint nem „rigoristáknak" írt, „hanem az olvasók sokkal nagyobb rétegének, akiknek kevesebb az előítéletük, bár matematikai tudásuk a rigoristákéhoz képest szalmaszál a kazalban". A „rigoristák" bosszúja nem is maradt el, Heaviside érdemeit sokáig inkább csak mérnök-matematikusok ismerték el, mint például Balthasar *van der Pol* (1909–1959), az új elmélet egyik legaktívabb kiépítője és alkalmazója. Mikor azután P. A. M. Dirac az elméleti fizikába is kénytelen volt bevenni egy ilyen „szabálytalan" függvényt, amely a klasszikus matematika szabályai szerint megengedhetetlenül viselkedik, és éppen e miatt a viselkedése miatt szükséges, a szakmatematikusok is érdeklődni kezdtek az új, Heaviside-féle függvényfogalom iránt, s nemsokára több, egymással egyenértékű megalapozási és felépítési módja született az új elméletnek a szigorú matematika világában. Az „általánosított függvényt" adott feltételeket kielégítő végtelen függvénysorral ekvivalens függvénysorok összessége definiálja: speciális függvénysokaságokon értelmezett függvény tehát, s így elmélete a függvényterek elméletéhez kapcsolódik, amelyeknek egyik esete volt az absztrakt Hilbert-tér. A gyakorlati alkalmazás igényéből született diszciplína így alig fél évszázad alatt az absztrakt matematika nagy áramába ömlött, s ebben az absztrakt, szigorú alakjában újabb, addig nem is remélt alkalmazásokat talált.

Ez az önindukciós kör alkalmazásoktól tiszta matematikán keresztül újabb alkalmazásokig a modern matematika egyik legjellemzőbb vonása. További példaként említhetnénk a valószínűség-számítást vagy az információelméletet, a véletlen események, illetve a híradástechnika problémáiból kinőtt két nagy diszciplínát. Említhetnénk a gazdasági és üzemi tervezés feladatait rendszerező operációkutatást, a különféle gépi és organikus szabályozóberendezések tulajdonságait absztraháló kibernetikát, a komplex mechanikai rendszerek bonyolult stabilitási problémáiból sűrűsödő nemlineáris módszereket, mindenütt ugyanezt a szoros kapcsolatot találnánk alkalmazás és elmélet között. A sikeres alkalmazások egyik legfontosabb ismertetője éppen az, hogy a „tiszta" matematikát is gazdagítják. Az alapok kíméletlen kritikája differenciálja, az egyes diszciplínák végsőkig követett absztrakciója egységesíti, az alkalmazások kihívása állandóan gazdagítja a modern matematikát. A három tényező bölcs egyensúlya a nagy tudomány sikerének s példátlan tekintélyének a titka. S mint minden ennyire komplex rendszer esetében, az egyensúly itt is kényes, és időlegesen eltolódhat valamelyik tényező irányába. Talán éppen kisebb-nagyobb eltolódásoknak köszönheti a modern matematika nagy alkalmazkodóképességét.

Epilógus

Euklidész valamelyik matematikára kíváncsi uralkodót – talán a dagadt lábú Ptolemaioszt – a legenda szerint ezzel a mondással rázta le: „a matematikához nem vezet királyi út". A mi korunk matematikusai nem ilyen zárkózottak. Nem vonakodnak a népszerűsítéstől, s különféle formában kínálják a matematika egyik-másik fennsíkjára vezető – turistautakat. S míg a kiránduló le nem tér a jelzett útról, rendszerint nincsen is nagyobb baj, legfeljebb elfárad, s feleútról visszaballag az ócska Colerus-presszóba. Aki pedig hajlandó egy kicsit kapaszkodni, feljuthat egyik vagy másik kilátóba, s gyönyörködhet a panorámában. Ha azonban letér a jelzett turistaútról, s a „maga fején" akar járni, akkor könnyen megtörténhet, hogy egy papírra rajzolt háromszögből s a feje feletti (vagy alatti?) csillagos égből „megérti a végtelent". Mindez persze növeli a laikus mélységes csodálatát, az eltévedt turisták és amatőr barlangkutatók valóságos iskolát teremtettek.

El is szaporodtak a turistautak úgy, hogy ember legyen a talpán (vagy talán inkább matematikus?), aki ki tudja választani, melyiken induljon. A jelzéseket ugyanis nem egységes rendszer szerint pingálták az út menti fákra, s megesik, hogy valaki az Ágasvárra indul, s a Zsíroshegyre érkezik. Nagy baj, igaz, ekkor sincsen, hiszen a Zsíroshegyen is ott a turistacsárda, s a hős kiránduló itt is megihatja a maga nem-euklidészi röviditalát, topologikus sörét vagy halmazelméleti dupláját. A „királyi utakért" ugyanis „fejedelmi nemtörődömséggel" kell fizetni, ez mindig így is volt, s így is lesz.

Napjainkban azonban – s ez már új jelenség – maguk a matematikusok is turistautakra és menedékházakba kényszerülnek, mihelyst elhagyják jól ismert sziklácskájukat vagy barlangocskájukat. A sok turistaút talán nem is csak a nagyközönségnek készül, talán a matematikusok is így próbálnak tájékozódni s tájékoztatni kollégáikat a matematika egyre vadabban növő őserdejében.

*

A mai matematikát bemutató válogatást így a nagy matematikusok tájékoztató-népszerű jellegű írásaival kellene kezdeni. Ha az ember papírral-ceruzával a kézben, szorgalmasan jegyzetelve olvassa ezeket az írásokat, többnyire megértheti matematikai előképzettség nélkül is. S ami így megértetlenül marad, amiatt nem kell fájjon a feje, azt ugyanis előzetes matematikai tudás birtokában sem mindig lehet megérteni. A matematikára is érvényes Max Planck bölcs mondása, ami szerint a megértés egyik alapkövetelménye a megszokás. Ma már például valósággal érthetetlen, az Élet és Tudomány szorgalmas olvasójának is, mit találtak száz éve a legnagyobb matematikusok annyira érthetetlennek a nem-euklidészi geometriában. Ha létezik egyáltalában királyi út a matematikához, az első szakasza bizonyosan a megszokás. A matematikai szövegeket nem lehet „olvasni" s nem elég egyszer elolvasni. Még a matematikus is gyakran csak ismételt elolvasáskor veszi észre egy-egy levezetés rejtett szépségét.

S éppen a szépség az egyik oka, amiért Euklidész óta keresik a laikusok a matematikához vezető könnyű utat. S talán nem is csak az a művészetekből ismerthez viszonyítható szépség, amelyet Tóth Imre elemzett a művészi és a matematikai „modell" szellemes összehasonlításával, hanem egy másféle, az esztétika fogalmaival megközelíthetetlen, vadabb szépség is, amelyről korunk egyik nagy matematikusa, G. H. Hardy vallott *Egy matematikus maga-mentsége* (Cambridge, 1940) című könyvecskéjében, s melynek szerinte a formális lehetőségeken túl a mély, jelentős, komoly gondolatokban található meg az aranyfedezete. Ez a komoly szépség az, amely világok és korok szakadékja felett közeli, baráti, „kollegiális" kapcsolatot teremt a görög s a mai matematikus között. Nem a professzorok és akadémikusok nagyképű „komolysága" ez, inkább a játszó gyereké, s így állandó megújulás s újrakezdés lehetőségét rejti.[16]

---

[16] Lásd újabban: G. H. Hardy: Egy matematikus védőbeszéde. Előszó: C. P. Snow. Ford.: Pataki János. Bp., 2001. Európa. 119 p. (Mérleg) *(– a szerk. kieg.)*

Hardy példaként azt az Euklidészből ismert bizonyítást említi, amely szerint a prímszámok száma bármely megadott számnál nagyobb, „végtelen”. A bizonyítás olyan egyszerű, akár a kiszámolós játék: „Egy-kettő-három-négy-kicsi-kutya-hová-mégy…”, s a szelleme is hasonló, mert a „prímszám-kiszámolósdiból” is mindig „kimarad valaki”, feltéve, hogy ragaszkodunk az előre megállapított játékszabályokhoz. A játékszabályok persze roppant fontosak, a veszekedések is többnyire a miatt a kérdés miatt törnek ki, hogy helyesen alkalmazzák-e a játékszabályokat, s már csak ezért is célszerű azokat pontosan megfogalmazni, megformulázni.

Sokan a formulák, a képletek ügyes alkalmazását tekintik a matematika lényegének, s a XVII. század végétől, Newton és Leibniz korától napjainkig tényleg képletekből kellett a matematikában majdnem mindent felépíteni. A képletek persze – legalábbis a be nem avatottaktól – meglehetősen elfedték a matematika meztelen, játékos szépségét, de a beavatottaknak hallatlanul megkönnyítették a gondolkozást, s máshol el sem képzelhető tömörséget, határozottságot, eredményességet s alkalmazhatóságot köszönhetett nekik a matematika. Valamit, amihez még a köznyelvben is a „lényeges” roppant tiszteletreméltó fogalmát szokás társítani, valamit, amiben már nem annyira a „szépség” számít, sokkal inkább az „elegancia” és a „siker”. Mindnyájan jól ismerjük ezt a matematikát pl. az integrál- és differenciálszámítás vagy az analitikus geometria képlet-sűrűjéből; vagy ha máshonnan nem, hát a sinustétel vagy a Püthagorasz-tétel képletéből, amelyet – mondani sem kell – soha Püthagorasz ilyen alakban meg nem ismerne. Él ez a „lényeges” matematika ma is, s valószínűleg még sokáig eleven marad, s legfontosabb fázisa volt a matematika eddigi történetének: nélküle soha nem sikerült volna meghódítani a folytonos változás, a „folytonos függvények” hatalmas birodalmát, nem sikerült volna felfedezni a végtelen sorok és sorozatok tulajdonságait, s alkalmazásukat a matematikai összefüggések és fogalmak megközelítésére. Ennek a matematikának a kedvéért teremtették meg a múlt század nagy matematikusai a „matematikai szigorúság” követelményét, s a matematikai szigorúság nevében szerkesztett példák és „ellenpéldák” azután a képletek matematikáját egyre jobban tökéletesítették. Annyira, hogy egyik legismertebb (bár egyáltalában nem leghasználtabb) összefoglalása éppen Hardynak köszönhető, aki szerint pedig „csúnya matematikának nincsen helye a nap alatt”.

Ehhez a matematikához számos, gondosan sepert turistaút vezet, amelyekből nehéz választani. A McGraw-Hill kiadó természettudományi lexikonában Salomon Bochner írt róla *Matematika* címszó alatt közérthető és tömör összefoglalást (1960), amelyet később (1966) újra kiadott külön is, *A matematika lényege* címmel.

A század elején aligha gondolhatta volna bárki, hogy ezt a hatalmas képlettudományt csakhamar utoléri majd a matematika egy, akkoriban meglehetősen szerény ága, az absztrakt algebra. Eleinte csak azt vizsgálták az absztrakt algebristák, hogy a számok miféle tulajdonságai miatt lehet a négy algebrai művelettel és a gyökvonással éppen a megoldható algebrai egyenleteket megoldani; ehhez azonban fokozatosan általánosítani kellett a számokat, elannyira, hogy végül már csak a számokat meghatározó és másra vissza nem vezethető absztrakt állítások számítottak, s azután már maguk helyett a számok helyett is meghatározatlan elemeket lehetett, sőt, kellett tekinteni.

Ősrégi, a görög matematika óta jól ismert módszer, az axiomatikus módszer újfajta alkalmazása született meg így: megfelelően kigondolt axiomatikával nagyon sokféle – elvben tetszőlegesen sok – absztrakt rendszert lehetett teremteni; a matematikus most már, a szerves kémikushoz hasonlóan, maga állíthatta elő vizsgálatai „anyagát" is, nemcsak a módszereit. Ez a „teremtő axiomatika" a húszas években élte első nagy virágkorát, Emmy Noether körül, Göttingenben. „Modern algebrának" nevezték, mert akkoriban a modern szót még az új és ígéret-teljes dolgok jelölésére használták, az „algebra" pedig az elmélet eredetére és egyik ősi alkalmazási területére utalt, bár voltaképpen nem sok köze volt hozzá, s már akkor sejteni lehetett, hogy az „új axiomatika" rövidesen forradalmasítja az egész matematikát. Sok kortárs matematikus azonban, még a legnagyobbak is, kicsit értetlenül figyelte a „modern algebra" gyors kibontakozását, s nemegyszer megjósolták ennek az „algebrai axiomatikának" közeljövőben várható kimerülését.

Legélesebben talán Franciaországban polarizálódott a helyzet, ahol kivételes képességű matematikusok a klasszikus „képletes matematika" valóságos fellegvárát építették fel a XIX. század végén, XX. század elején. Ez ellen szövetkezett a harmincas években fiatal egyetemi oktatók egy lelkes kis csapata, s elhatározták, hogy megtörik a szerintük érelmeszesedésben szenvedő és elaggott francia akadémikus matematika uralmát, s meghonosítják Franciaországban a modern algebra teremtő szellemét.

Jól ismert ma már ennek a „Nicolas Bourbaki" álnév mögött, sokáig teljes inkognitóban dolgozó kis matematikus brigádnak a története,[17] de jelentőségéhez képest elég kevéssé ismerik nálunk nagy művüket, a bourbakista *Elemek*et. Pedig Bourbakiék az Elemeket nemcsak matematikusoknak írták, minden jó szándékú és nyílt eszű fiatalemberre számítottak. Franciaországban tényleg érezhető volt a könyv hatása matematikus körökön kívül is; különösen a szürrealizmus első, nagy generációjában akadtak lelkes hívei, s például Raymond Queneau-t sokkal jobban tisztelték azért, mert megértette és megtanulta a *Bourbaki*-t, mint a verseiért.

[17] Lásd pl. Tóth Imre: Nicolas Bourbaki, S. A. = Valóság 8 (1965) No. 11. pp. 85–92.

Emmy Noether is mindig hangoztatta az új, teremtő axiomatika kimeríthetetlen gazdagságát, a lehetőségek grandiózus kiaknázása azonban Bourbakiéknak köszönhető, s így joggal nevezték könyvüket az Euklidészéhez hasonlóan *Elemek*nek. Az új axiomatika kilátójából Bourbakiék az egész akkori matematikát – legalábbis elvben, s az alapok szempontjából – át akarták tekinteni; ez a cél máig nem valósult meg, s valószínűleg nem is fog most már megvalósulni soha; Bourbaki – hiába küzd és tiltakozik ellene – megöregedett. A szellem kollektív kalandjai éppen úgy mulandók, mint az egyének, s még az sem lehetetlen, hogy egyik-másik nagy „Bourbaki fiú" egyéni alkotása hosszabb életű lesz nagy, közös művüknél. De ezeknek az alkotásoknak is a *Bourbaki* a háttere, nélküle elképzelhetetlenek, aminthogy elképzelhetetlen az egész mai matematika, s talán az egész mai gondolkozás is. Raymond Queneau szerint az egész mai gondolkozás „bourbakizálódik", s ez nagyon találó megállapítás. Bourbaki találta ki ugyanis korunk ócsárolt vagy imádott, finnyásan kerülget vagy slágerszerűen ismételt, de mindenképpen és mindenütt kikerülhetetlen fogalmát, a „struktúrát". Bourbakinál lett a matematika „mennyiségtanból" a különféle absztrakt struktúrák vizsgálatává. S ezzel – nemcsak a matematikában – lezárult a gondolkozás egy hosszú s termékeny periódusa; a mennyiségtan eredményei ezentúl már nem a matematika, hanem a matematika sokféle alkalmazása szempontjából fontosak. A bourbakisták elhagyták a mennyiséget, maguk mögött hagyták a régi típusú képleteket, s kivitorláztak a teremtő axiomatika ismeretlen óceánjára. A *Bourbaki*-t azóta óriáshajók váltották fel, s szó sem lehet többé róla, hogy bárki is feljuthatna fedélzetükre fáradságos, hosszú matematikai tanulmányok nélkül. Legfeljebb a kikötőkben csodálhatók, s találgathatjuk, mi lehet belül?

Bourbaki még háromféle „alapstruktúrát" különböztetett meg: algebrai struktúrákat, részben vagy teljesen rendezett rendszereket s topologikus struktúrákat. Ennek a három alapstruktúrának a különféle keverésével gondolta Bourbaki felépíthetőnek a matematikai struktúrák hierarchiáját.

Később kiderült – részben éppen az egyik Bourbaki, Henri Cartan munkássága következtében –, hogy nem ilyen egyszerű a dolog; az algebrai és a topologikus struktúrák különleges, bensőséges ötvözésével kell – persze szigorúan axiomatikusan – megalkotni azt az alapelméletet, amelyből azután ki lehet fejteni a többi matematikai rendszer elméletét. Emmy Noether és Bourbaki forradalma után a matematika még egy nagy absztrahálás előtt állott, s hogy ennek is megfelelt, léphetett csak még feljebb. Ez a lépés volt a homológiaelmélet, s a kategóriák és funktorok belőle kifejlődő elmélete.

Nem matematikusok talán a történeti úton juthatnak leginkább annyira-amennyire a funktorok és kategóriák vidékére. A homológiaelmélet is Göttingenben kezdődött, ahol a húszas években, Emmy Noether környezetében és hatására, P. Sz. Alexandrov és H. Hopf új algebrai módszereket kezdtek alkalmazni a topológiában. A topológia az alakzatok folytonos és kölcsönösen egyértelmű átalakítása közben, az alakzatok deformálása közben változatlanul maradó tulajdonságokat vizsgálja; két dimenzióban egy tetszőlegesen nyújtható és gyűrhető gumifelületre rajzolt idomok geometriájának képzelhető el. Az olyan fogalmak, mint „alak", „egybevágóság", „szög" vagy éppen „párhuzamosság" ebben a geometriában természetesen értelmetlenek, de itt is fontos pl. az idomok „határa", s éppen itt, a topológiában sikerült ezt a fontos alapfogalmat a „határképzés" műveletével definiálni. Mármost a határképzés művelete egy klasszikus, absztrakt algebrai „szerkesztés", afféle nagyon bonyolult „országosdi-játék", amelyben az adott idom felosztását és az osztóvonalak határrá egyesítését egy speciális „algebrai kés", az ún. „homológiacsoport" végzi. A homológiacsoport és a határképzés volt az egyik mag, amelyből a homológiaelmélet a maga roppant masinériáját kifejlesztette. A másik az a felismerés volt, hogy a topológiában lehetséges deformációkat is absztrakt algebrai fogalommal, az ún. *homotópiacsoport* segítségével lehet osztályozni. A harmadik alapfelismerés a klasszikus francia geometria egyik nagymesterétől, Élie Cartantól származott, aki a lineáris algebra egyik egyszerű „szorzási" eljárásáról mutatta meg, hogy „globálisan" tekintve ez is a határképzéshez hasonlítható absztrakt művelet. Mindez még a húszas-harmincas években történt. Még néhány hasonló jellegű, a matematika különböző részeiről származó eredmény kellett, s azután, a negyvenes évek elején, Henri Cartan, Samuel Eilenberg és Saunders MacLane „megteremtette" a homológiaelméletet, illetve az elmélet két fontos alapfogalmának, a funktoroknak és a kategóriáknak az elméletét. Az új elmélet az ötvenes évek végétől kezdve vált divatossá, s ma ez a matematikai kutatások lelke és gerince.

A funktorok és kategóriák elmélete nem egyszerűen egy új, nagy matematikai összefoglalás, ez az elmélet a matematika nyelvét változtatja meg, ahhoz hasonlóan, mint a XVII–XVIII. században az integrál- és differenciálszámítás és az analízis. Akkor a geometriai nyelvet váltotta fel az analitikus, most lezárulóban a matematikatörténet egy másik nagy periódusa, az analízis kora. Az analízis „mikroszkopikus matematika" volt, belülről szőtte át meg át a nagy tudományt, helyi, „lokális" tulajdonságokból bontotta ki képletlépcsők végtelen sorozatán keresztül a maga végtelen tereit. A kategóriaelmélet – s ebben a régi, analízis előtti geometriához hasonlít – inkább a „globális" tulajdonságokat keresi, struktúrákból álló halmazok viselkedését, kollektív sajátosságokat.

A régi matematika centrális fogalma a függvény volt, s – fontos kivételektől eltekintve – az összefüggés formája számított, minden egyéb legfeljebb mint „kezdeti" vagy „perem" feltétel jelentkezhetett. Az absztrakt algebra önállósította a struktúrák vizsgálatát, a

„függvény” már csak mint struktúrák „leképezése” szerepelt, s lényegében néhány egyszerű alaptípusra korlátozódott. A kategóriaelmélet szintetizálja a kétféle szemléletet, illetve a kétféle szemlélet bizonyos erősen absztrahált vonásait. A funktorok sok szempontból inkább hasonlítanak a régi matematika bonyolult függvényeire, mint az absztrakt algebra szkematizált leképezéseire; a funktorok objektumok és leképezések egy axiomatikusan meghatározott együttesét, egy ún. *kategóriát* képeznek le egy másik kategóriába. Kategóriába, mert a kép rendszerint nem tölti ki az egész kategóriát, hanem csak egy részét, ebben a tekintetben a funktorok az absztrakt algebra és az algebrai topológia leképezéseihez hasonlítanak. A matematika egyes fejezetei megfelelőképpen definiált funktorok tulajdonságaiként fejezhetők ki, akárcsak a klasszikus matematikában egy-egy függvénytípus elmélete. De a funktorok esetében ez a kifejtés nem egy egyszerű vagy bonyolult képletbe felírható összefüggéstől függ, hanem a funktor valamilyen „szimmetriájától”, helyesebben valamilyen „szimmetriatulajdonságot” kifejező diagramtól, illetve diagramrendszertől. *Ilyenek* vizsgálata a homológiaelmélet feladata.

A homológiacsúcsra még mindig nem vezetnek kijelölt, kényelmes turistautak. A nem matematikusnak meg kell állani a tövében. Odáig azonban könnyen eljuthat bárki, mert Emmy Noether nagy felismerésének a lényegét meg lehet tanulni Hermann Weyl Noether-nekrológjából (1935), Bourbaki matematikaképét ő maga elmondta *A matematika architektúrája* című közérthető esszéjében, s Bourbaki hatását és jelentőségét jól meg lehet érteni Quencau Bourbaki-tanulmányából. Aki közelebbről meg akar ismerkedni néhány egyszerűbb matematikai struktúrával, könnyen megteheti Petőfi S. János cikke[18] alapján. S ha azt akarja megérteni, hogyan jöttek létre a „közönséges” algebra axiomatizálásából az absztrakt struktúrák, Szele Tibor *Algebrá*-jának bevezető fejezeteiből tájékozódhat legkönnyebben.

*

Az eddigi úton a legbiztosabb alap, a megértéshez vezető kalauz volt a megszokás. A matematikát nem lehet tanulás nélkül megérteni, a műveletek s a műveletekkel meghatározott fogalmak csak gyakorlat árán s gyakorlat közben ismerhetők meg. Ahogyan a szerves kémikusnak az ujjaiban élnek a vegyületei szintéziséhez használt módszerek, a matematikus is csak teremtő axiómái és műveletei állandó használatával hódíthatja meg tudománya makacs fogalmait.

[18] Pető S. János: A matematikai gondolkozás változásának története. = Valóság 10 (1967) No. 12. pp. 12–31.

A matematikában azonban a megszokás haszna nem teljesen egyértelmű, s van a matematikának egy nagy és fontos területe, a matematika alapjainak a vizsgálata, ahol a megszokás egyenesen káros is lehet, s akadályozhatja a megértést.

Robert Musil fogalmazta meg legszebben a megszokás veszedelmét, a *Törless iskolaéveiben*:

> „Tudja – mondja a matematikatanár az imaginárius számokról érdeklődő Törlessnek –, magam is elismerem, hogy például ezek az imagináriusok, ezek az igazában nem is létező számértékek, haha… elég kemény dió egy ilyen ifjú diáknak, bele kell nyugodnia, hogy az ilyen matematikai fogalmak igenis tisztán csak matematikai-logikai szükségszerűségek. Gondolja csak meg: a tanítás elemi fokán, ahol még maga is tart, sok mindenre, amit érintenünk kell, nagyon nehéz megadni a megfelelő magyarázatot. Szerencsére kevesen érzik ezt, ha azonban mégis eljön valaki, mint most maga – bár, mint már mondottam, nagyon örülök neki –, akkor csak azt mondhatja az ember: »Drága barátom, nincs más megoldás, hinni kell; ha majd tízszer ennyit tudsz a matematikából, akkor érteni is fogod, de egyelőre: hinni!« Nem megy másképp, kedves Törless, a matematika külön kis világ, és sokáig benne kell élni ahhoz, hogy megítélhesse az ember, mi fontos és mi nem.”

Örök dicsősége a matematikának, hogy időről időre akadnak hitetlen diákjai, akik fellázadnak a megszokás hatalma és a matematika „külön kis világa” ellen. Ilyen lázadásból született a nem-euklidészi geometria, a matematikai logika és a halmazelmélet; az utóbbi kettő azután, kisebb-nagyobb lázadások sorozatán keresztül, teljesen átalakította a matematika alapjait.

Ebben a hosszú folyamatban Bertrand Russell volt az első hitetlenkedő diák. Ő a múlt század végén a halmaz akkori fogalmát nem tudta megérteni; leleplezte, hogy ez a fontos, s látszólag tiszta fogalom veszedelmes ellentmondást rejt. A megoldást is megtalálta – legalábbis a matematika *egy* részére – az ún. típuselméletben. Más matematikusok másféle megoldást kerestek és találtak, egyik nehezebb, mint a másik. Az elve azonban mindegyiknek közös s meglehetősen egyszerű, s ahhoz a jól ismert gyerekmondókához hasonlítható, ami szerint „nem minden fajta szarka farka tarka, csak a tarka fajta szarka farka tarka”. Azt, hogy melyek a tarka fajta szarkák, azaz a megengedhető halmazok, természetesen axiómákkal kellett körülírni és meghatározni. Mármost az a roppant nevezetes, hogy ennek az axiomatikának a nevén kívül jóformán semmi köze sincs az Emmy Noether-féle absztrakt algebrai vagy a későbbi homológiaelméleti axiomatikához; ez a halmazelméleti axiomatika nem „teremtő axiomatika”, nem lehet új matematikai „vegyületeket” szintetizálni a segítségével. Inkább nevezhetnénk – a „teremtő” axiomatika ellentétéképpen – ezt az axiomatikát „töprengőnek”, mert állandóan önmaga „teljességét” és „ellentmondás-mentességét” kutatja, az egyes axiómák függetlenségét, az egész axiómarendszer érvényességi körét, lehetőségeit és értelmét.

A századforduló legendás hírű matematikai óriása, David Hilbert vette észre az axiomatikában ezt a lehetőséget; épített is ezen az alapon egy hatalmas nagy szecessziós palotát, az ún. „bizonyításelméletet”, amelyben, mint általában az efféle szecessziós építményekben, alig lehet eligazodni a sok felesleges kiugrótól, beugrótól, görbe vonaltól, cirádától. Hilbert és kora azonban roppantul meg volt elégedve a palotával, s csak néhány „tisztaságra” törekvő intuicionista merte kritizálni a mű féktelen formalizmusát. Őket azonban elhallgattatták volna, ha a harmincas évek elején Kurt Gödel – a harmadik nagy lázadó diák, Russell és az intuicionisták után – be nem bizonyítja, hogy az egész épület statikája alapjaiban hibás. Gödel a matematika nyugodt, kartéziánus évszázadai után újból felfedezte a nagy tudomány pascali arcát: a választás kényszerét.

Vagy minden szarka farkáról meg tudja mondani az ember, hogy tarka szarka farka-e vagy nem tarka szarkáé, de ekkor óhatatlanul akad olyan szarka, amelyikről lehetetlen eldönteni, hogy tarka-e vagy sem; vagy nem tűr az ember efféle kivételt, de akkor meg abba az ellentmondásba kell belenyugodnia, hogy akad szarka, amelyiknek a farka tarka is meg nem is. Valamivel tudományosabban: az aritmetika axiómarendszere vagy ellentmondás-mentes, de akkor eldönthetetlen problémák jelennek meg benne, amelyeket akár új axiómáknak is lehet tekinteni, tehát az eredeti axiómarendszer nem teljes; vagy minden problémát el lehet benne dönteni, de akkor meg nem lehet az axiómarendszer ellentmondásmentes. S mivel a matematika az eleaták óta ragaszkodik az ellentmondás-mentesség követelményéhez, s ha ezt feladná, menthetetlenül összeomlanának legnemesebb részei, be kellett rendezkedni az eldönthetetlen problémákkal való békés egymás mellett élésre. S ez, mint kiderült, nem is bizonyult rossz üzletnek.

Ha ugyanis egy állításról be lehet bizonyítani, hogy egy adott axiómarendszer keretei között eldönthetetlen, akkor ezt az állítást, de az állítás tagadását is hozzávehetjük az illető axiómarendszerhez, anélkül hogy ellentmondást kapnánk; s így egy helyett két axiómarendszert, két elméletet nyerünk, amely két elmélet a kérdéses axiómánál ágazik el az adott törzs-axiómarendszerből.

Ha ugyanis egy állításról be lehet bizonyítani, hogy egy adott axiómarendszer keretei között eldönthetetlen, akkor ezt az állítást, de az állítás tagadását is hozzávehetjük az illető axiómarendszerhez, anélkül hogy ellentmondást kapnánk; s így egy helyett két axiómarendszert, két elméletet nyerünk, amely két elmélet a kérdéses axiómánál ágazik el az adott törzs-axiómarendszerből.

matematikusokat. Gödel mutatta meg a harmincas évek végén, hogy ha a halmazelmélet axiómarendszeréből a kiválasztási axióma eltávolításával kapott „törzs-axiómarendszer” ellentmondásmentes, akkor ellentmondásmentes marad a kiválasztási axióma és a kontinuum-hipotézis hozzávétele után is. Paul J. Cohen azután 1963-ban azt is igazolta, hogy a kiválasztási axiómát és a kontinuum-hipotézist nem lehet a „törzs-axiómarendszerből” levezetni, ez a két állítás a törzs-axiómarendszerben eldönthetetlen, s így maguk vagy tagadásuk axiómaként vehető hozzá a törzs-axiómákhoz. A kiválasztási axiómáról nem szívesen mondanának le a matematikusok, mert ezzel a szokásos matematika nagy része megsemmisülne, a kontinuum-hipotézis azonban nyugodtan helyettesíthető a *tagadásával,* a matematika legnagyobb részét ugyanis nem érinti praktikus szempontból, hogy az 1, 2, 3, … természetes egész számok „megszámlálhatóan végtelenje” után közvetlenül az egyenes pontjainak „kontinuumnyi végtelenje” következik-e (ezt állítja a kontinuum-hipotézis), vagy pedig a kétféle végtelent egymást követő végtelennek végtelenje választja-e el egymástól.

Így tehát – a matematika minden eredményének érintetlenül hagyásával – kétféle halmazelmélet lehetséges; a matematika alapjául szolgáló halmazelmélet a kontinuum-hipotézisnél – helyesebben, most már kontinuum-axiómánál – kétfelé ágazik. Az eddigi matematika, ha nem is kimondottan, többnyire úgy dolgozott, mintha a Cantor-féle kontinuum-hipotézis igaz lenne, hallgatólagosan elfogadta ezt a hipotézist. Nem tudhatjuk, hogy az új lehetőségnek, amely mintegy „széttolja” egymástól a kétféle (addig „szomszédosként kezelt”) végtelent, nem lesznek-e érdekes, nem is sejtett következményei. Cohen módszere, amellyel a kiválasztási axióma és a kontinuum-hipotézis többi axiómáktóli függetlenségét bizonyította, máris szédületes karriert futott be az alapkutatások módszertanában.

A problémát s a módszert Cohen két népszerű változatban is megírta, az egyik változat[19] a matematikusoknak szól, a másik, amely a Scientific American 1967. évi decemberi számában jelent meg, matematikához nem értő embereknek készült. Azért az utóbbi sem egészen könnyű olvasmány, s mielőtt a matematikában járatlan olvasó belefogna, jól teszi, ha tanulmányozza Péter Rózsa kis népszerűsítő remekét, a *Játék a végtelennel*-t.

*

[19] Set theory and the continuum hypothesis. New York–Amsterdam, 1966. Benjamin. 154 p.

Tételezzük fel, hogy a feladat nem lehetetlen, a nagy matematikusok népszerűsítő szövegeiből a matematikában teljesen járatlan olvasó is megértheti a nagy tudomány szellemét, s megérezheti a levegőjét. Többről nyilván nem lehet szó, hiszen például ha valaki – nem csekély fáradtság árán – megértette a fentebb tárgyalt kétféle matematika: a „teremtő" és a „töprengő" axiomatika, azaz a matematikai szakkutatás és a matematikai alapkutatás lényegét, akkor még mindig csak egy elenyészően kicsiny részt pillantott meg a mai matematikából. Érdemes-e tovább erőlködnie? Vagy akár ennyi fáradtság is, megéri-e? Kell-e egyáltalában bármit is tudni – az elemi számoláson túl – a matematikából annak, akit szakmája nem kényszerít rá?

Annak ellenére, hogy ma – talán túlságosan is – elismerik a matematika szükségességét és mindenütt jelenvalóságát, nagyon kevesen értik a matematikát. Azt mondhatnánk, hogy ha az alkalmazásához szükséges részét jól tudja, akinek szükséges, a többi voltaképpen közömbös is. Teljesen felesleges például, hogy a mérnök a nem-cantori halmazok vagy a kategóriák nyaktörő útjain járjon, a közgazdász pedig örüljön, ha legalább nagyjából megérti a statisztika képleteinek valószínűség-számítási alapjait. Talán az elméleti fizikus az egyetlen kivétel, tőle megkívánja a laikus is az alapos matematikai képzettséget.

Csakhogy a matematika nem egyszerűen egy a sok szaktudományból. Sejthette ezt már a dagadt lábú Ptolemaiosz is – ha ugyan ő volt, hiszen minden korok leghatásosabb matematikakönyvének szerzőjéről semmi életrajzi adatot nem tudunk –, vagy talán tudta is, s ezért kérte Euklidészt, hogy mutassa meg neki a matematikához vezető királyi utat. S már évszázadokkal előtte, Nabukodonozor király azzal szokott volt dicsekedni, hogy senki az „agyagtáblák házában" nála jobban számolni nem tudott. S a „gondolkozás királyai", a nagy filozófusok gyakran voltak egyben nagy matematikusok is, s többnyire kiválóan értettek a matematikához.

Talán – gondolhatná valaki – azért, mert a matematikai bizonyítások koroktól függetlenek, s időtállásukban „örök igazságoknak" tekinthetők? Lakatos Imre figyelmeztetett rá, s mutatta meg, hogy a matematikai „igazság" fogalma és az „igaz" kritériuma – ha nem is olyan gyorsan, mint maga a matematika – folyton változik, s későbbi korok megváltozott igazságfogalmuknak megfelelően újraértékelik elődeik egész matematikáját. Ha az „igazság" szeretete vonzaná a filozófusokat a matematikához, akkor meglehetősen időleges és végső soron empirikus igazságokat találnának a matematikában, amelyek semmi lényeges tekintetben nem különböznének a többi tudományok igazságaitól. S egyébként is az ő belügyük maradna a dolog, nem indokolhatná a nem filozófusok matematikatanulását.

Maradna még a matematika játék-interpretációja, amely szerint a matematika valami magasrendű elmesport, szellemi labdarúgás. Korunk kiterjedt játékkultuszát tekintve nem lenne nehéz híveket toborozni efféle értelmezésnek. A matematika egyes részei tényleg tekinthetők valamilyen felnőttjátéknak, magasrendű sakkszerűségnek, azonban az igazi, a fontos matematika legfeljebb ha olyan értelemben tekinthető játéknak, mint a gyereké, amely mindig képzeletgazdag s teremtő foglalkozás, ellentétben a felnőttek unalmas, butító, sztereotip ügyességi játékaival. A matematika, az igazi matematika – hadd ismételjük meg Hardy figyelmeztetését – roppant komoly dolog. Annyira, hogy nem is maradhat a matematikusok belügye. Mindnyájunkra tartozik.

A XVIII. század végéig mindig is nélkülözhetetlennek érezték a matematikai tudást ahhoz a nehezen definiálható, de csalhatatlanul megérezhető valamihez, amit ma – irtózatosan rossz szóval – „műveltségnek” nevezünk. Euklidész XVI. századi kiadásaiban gyakori címlapábra, hogy az ismeretlen szigetre érkező utasok hirtelen geometriai ábrákra bukkannak, s mozdulataikból és arcukról leolvasható a bizonyosság: itt emberek élnek.

Íme, a laikus-matematikatanulás szükséges és elegendő indoka. A XIX. század viharos szakmai fejlődésében és differenciálódásában nagyon eltávolodtunk tőle, de ma, a sok megkülönböztetés és szétválasztás terhe alatt nyögve s az összekötő szálakat keresve, szükségképpen megtaláljuk újra, ha nem másként, vágyainkban.

Tudás és mágia[20]

Az ókori Kelet világában két nagy kulturális központ alakult ki: az egyik a Nílus mentén és deltájában, a másik a Tigris és az Eufrátesz vidékén. Utóbbit alakja miatt „termékeny holdsarló”-nak nevezik, mert a déli deltától nagy ívben Palesztináig, Jeruzsálemig terjedt.

Vizsgáljuk meg előbb a „holdsarló” helyzetét. Az élelemtermelés és a háziasítás következtében népes városok koszorúja alakult itt ki, és vette körül a sivatagosabb részt, ahol viszont különféle állattenyésztő törzsek nomadizáltak. Úgy hívják az ilyen gazdasági elhelyezkedést, hogy „zárt nomadizálás”. Azért zárt, mert városok között éltek a nomádok, kereskedtek a városlakókkal, olykor megtámadták a városokat, de gyakran maguk is városlakókká váltak. Ilyen nomádok voltak eredetileg az izraeliták is, akik nagy királyaik, Dávid, Salamon vezetésével kánaáni városokat foglaltak el – Jeruzsálemet például –, ahol azután átvették az ottani kánaániták kultúráját, technikáját, s folytatták ott, ahol amazok abbahagyták. Azonban hogy megemlékezzenek a régi nomadizáló korszakukról, időnként nagy ünnepeken, az úgynevezett sátoros ünnepeken – innen a név, máig megtalálható – kivonultak újra a pusztába, hogy ott az ősökre, a régi nomád életre, a nagy vándorlásokra emlékezzenek.

Ez a világ – a maga sűrű lakosságával – néhány alapvető felfedezésből rendkívül változatos technikát teremtett.

A kereket például nemcsak arra használták, hogy kocsit építsenek, s a kocsival díszelegjenek és temetkezzenek. A kereket fazekaskorong gyanánt is igen ügyesen fel tudták használni, sőt azt is észrevették, hogy a kerékkel esztergálni lehet. Nem úgy esztergáltak ugyan, ahogy a lábhajtós esztergával a középkorban, hanem egy íjra ráhurkolták a tengelyt, és fel-le húzgálva az íjat, keltettek forgó mozgást.

A két nagy ókori keleti központban valóságos technikai forradalom zajlott, s a találmányok messzire elterjedtek a Kaukázuson keresztül az eurázsiai sztyeppékre, Kisázsián, a Balkán félszigeten, a Kárpát-medencén keresztül pedig egészen az Atlanti-partokig. Ezt a nagy technológiai egységesedést azonban sehol sem követte annak a más jellegű tudásnak az elterjedése, ami a mezopotámiai agyagtáblákon és az egyiptomi papirusztekercseken rögzült. Nem követte az a valami, amit ha fenntartásokkal is, de már tudománynak nevezhetünk. A szülőhelyeire lokalizálódott írni és számolni tudás. Nincs ezen mit csodálkozni, hiszen a

[20] Forrás: Vekerdi László: Tudás és mágia. In: Vekerdi László: Gólyavári esték. A gondolkodás évszázadai. Bp., 1986. RTV–Minerva. pp. 19–25. – A kézirat lezárva: 1984. X. 13.

technikai s az eme másféle tudásnak édeskevés köze volt egymáshoz. A művelőik se voltak azonosak; a tudománnyal főleg az írnokok foglalkoztak. Ez azonban nem azt jelenti, mintha a kézművesek dolga könnyebb lett volna. Ellenkezőleg.

A fémművéseknek például úgyszólván a semmiből kellett kitalálni, hogyan csináljanak jó acélt, hisz az elvi alapokat csak évezredek múlva tisztázta a kémia. Nem tudta a tudományos magyarázatot Homérosz korában a görögség sem, az időszámítás előtti VIII. században mégis pompásan értettek az acél titkaihoz.

Homérosz pontosan leírta az akkori módszereket az Odüsszeiában az acélkészítés akkori szavaival. Ilyesféleképpen írja le Homérosz Polifémosz megvakítását: megfogta Odüsszeusz a nagy kihegyezett izzó fadorongot, és beledöfte Polifémosz szemébe, és közben az óriás egyetlen szeme elkezdett sisteregni, forrongott úgy, mint amikor a kovács a hidegvízbe mártja a vasat. Csakhogy ő nem úgy írta, hogy „edzeni mártja" – mint Devecseri fordította –, hanem úgy írta, hogy pharmasszón. Pharmasszó görögül azt jelenti, hogy gyógyítok. Homérosznál persze nem gyógyította Odüsszeusz az óriást, hanem a hasonlatban úgy sistergett annak az egyetlen szeme, mint amikor a kovács a vasat „gyógyítja". Nagyon fontos szó. A faszénben tüzesített, így szenet felvevő vasat hideg vízbe dugva „gyógyítja" a kovács jó acéllá. Ez ugyanolyan titokzatos és nehéz mesterség volt, mint a gyógyítás. Valamiféle mágikus dolog volt. Nem tudták megmagyarázni, hogy mi miért történik. Így kell csinálni. Miért? Csak. Így csinálta már a nagyapjuk, az ősapjuk. Hagyományozódott a tudás szájról szájra. Nem csoda, hogy a kovácsok körül annyi sok legenda született és élt egészen a XVII., XVIII., sőt XIX. századig. Gondoljunk Petőfi „A helység kalapácsá"-ra! Az a kovács mindentudó és agyafúrt ember – Petőfinek még így élt emlékezetében a falusi kovács. A falusi kovácsoknak ez a mitikus képe még innen datálódik, ezekből az ősrégi időkből, az ókori Keletről, meg az ókori Kelettel szervesen összefüggő homéroszi időkből.

Ne gondolják, hogy a matematika sokkal racionálisabb és pontosabb volt az ókori Keleten, mint a vas gyógyítása, csak ott a számokat kellett gyógyítani. Nem ment ez sem olyan könnyen. Az egyiptomi írnokoknak például rendkívül nehezükre esett szorozni – nekünk is, az új oktatásnak hála –, de mindenki másnak is az ókori Keleten. A harmadik Ur-i dinasztiának egyik nevezetes egyénisége volt Sulgi király. Ő egy versikét íratott az írnokával, amiben két dologgal dicsekedett: olyan erős és vad, mint a puszták szamara, s úgy tud számolni, hogy az írnokok házában – az akkori „iskolában" – senki nála jobban összeadni, kivonni nem tudott. Vad szamárnak lenni is elég nehéz, de mindez semmi a kivonáshoz, összeadáshoz képest. A fáraók ilyen hiábavalósággal mint szorzás, kivonás nem is bajlódtak, még ifjúkorukban sem. Ám írnokaik annál jobban értettek hozzá. B. L. van der Waerden könyvében megtalálható, hogyan szoroztak az egyiptomi írnokok. „Egy tudomány ébredése” címmel jelent meg jó néhány éve a könyv magyar fordítása a Gondolat Kiadónál, lássunk belőle egy példát. Szorozzunk össze például 12-t 12-vel. Hogy járt el az egyiptomi írnok? Azt mondta, hogy 1 × 12 = 12, 2 × 12 = 24, 4 × 12 = 48, 8 × 12 = 48-nak a kétszerese, azaz 96 ugyebár. Na most akkor van egyszer 4 × 12, meg van 8 × 12 – ő csak egy vesszőt rakott melléjük, és összeadta a kettőt: 4 × 12 meg 8 × 12 az éppen 12 × 12, az annyi mint 48 + 96 = 144. Meg is volt az összeg, 144, és ha még nagyobb számokat kellett szorozni, folytatta a sort, ameddig kellett, a papiruszból futotta. Mi a különös ebben? Perjés Géza fedezte fel, hogy Rákóczi táborában a számvető írnokok még mindig ugyanezzel az egyiptomi eljárással számoltak. Tehát nem lehetett ez olyan rossz. Egy-egy ügyes technika meglepően hosszú ideig élhet. Láttuk például, hogy a kerék abban a formában, ahogyan az európai vaskorban készítették – ráhúzták az izzó ráfot a kerékre –, olyan sikerült szerkezet volt, úgy bírta a göröngyös utakat is, hogy megmaradt máig. De térjünk vissza a számokhoz. Az osztás már csak a szorzás megfordítottja, az írnokok játszva elvégezték. El kell osztani 144-et 12-vel? Akkor induljunk el szorozgatni 1 × 12-től, míg 144-et nem kapunk, válasszuk ki azokat a „részletösszegeket”, amik épp 144-et adnak – ez itt 4 × 12 = 48 és 8 × 12 = 96, és akkor a „részletszorzatokhoz” – 48-hoz és 96-hoz tartozó duplázási számok – a 4 és a 8 – összege megadja a „hányadost”. A maga nemében nagyon szép eredmény ez, ám sokkal tovább az egyiptomiak soha nem jutottak. Még a törtekkel bántak ügyesen: az egységtörtekkel, meg az olyan törtekkel mint 2/3-ad, meg 3/4-ed, amiket ők valamiképpen csaknem egész számoknak tekintettek. Az egésznek a lényegébe nem láttak bele, tán nem is akartak.

A babiloniak ellenben többet akartak, talán éppen azért ismerik félre a történészek máig a babiloniak számítási technikáját holmi babiloni „algebra” gyanánt. A babiloni matematikai táblázatokon rendszerint elkezdődik egy számsor, és folytatódik végestelen-végig. Például elkezdik a mai nevén Püthagorasz-féle számhármasokat írni, tehát olyan egész számokat, amelyekre igaz az $a^2 + b^2 = c^2$ összefüggés. Maradt is Hammurapi korából egy ilyen tábla, amin egy négyzet két oldalához az átló meglepően jó közelítő értéke van felróva ékes ékírással. Olyan számokból azonban, amikből pontos megoldás adódik a Püthagorasz-féle számhármasokból, ott kiírták ezeket táblázatba végig, következetesen. A feltüntetett „püthagoraszi” számok alapján már most könnyű azt hinni, hogy a fenti közelítő értéket egyenletből számították ki, tehát ismerték volna a $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ képletét. Ezt azonban pusztán az eredmény láttán nem lehet állítani.

A matematika olyan tudomány, ahol a helyes eredményre sokféleképpen rá lehet jönni, és amiért a helyes eredményre rábukkantak, egyáltalában nem bizonyos, hogy ők is egyenletekkel dolgoztak. Sőt, bizonyos, hogy nem dolgoztak egyenletekkel, ismerjük ilyen jellegű számításaikat. Nagyon kevés olyan tábla maradt meg az ékírás világából, ahol megvan maga a feladat megoldása is, többnyire csak az eredményeket közlik. A századforduló táján Bruno Meissner azonban leírt néhány feladatmegoldást, és ezek között előfordul egy feladvány, amelyben ki kell számítani egy téglalapnak az átlóját. Mi persze a Pitagorasz-tétel alapján dolgoznánk, de a babiloniaknál közelítő eljárást találunk, és – ez benne az érdekes – a babiloni írnok figyelmeztetést ír az egyébként jó közelítő számítási recept mellé: másként kell az olyan téglalap átlóját számolni, amelyik a négyzethez közelítő alakú, és megint másként az olyanét, ahol az oldalak hossza nagyon különböző. Mi természetesen mindig ugyanazt a képletet alkalmazzuk; a babiloni matematikus ellenben egyáltalán nem így gondolkodott. Valami többet akart már, mint az egyiptomiak, nemcsak számolni akart, valamiféleképpen ki akarta fejezni az „átlót”, de soha fel sem merült benne, hogy a tömzsi meg a hosszú téglalapokra összefoglaló, egységes eljárást lehetne adni. Ő külön bütykölt mind a kettővel, nem általánosított, nem talált – és nem is keresett – minden esetre érvényes képletet. Nem írt fel „egyenletet”, nem ismerte az „algebrát”. Ő csak „gyógyította” azt a téglalapot – mint Homérosznál a kovács a vasat –, valahogy titokzatosan, előírásokat adott a tanítványainak, és az eredményeket aztán táblázatba foglalták. A táblázatok eredményei persze kiszámíthatók a mi „képleteinkkel” is, ebből a félreértésből született a „babiloni algebra” képzete a mai matematikatörténészek agyában, erről azonban a babiloniaknál természetesen szó sem volt. Ez persze nem csökkenti az érdemeiket, mert ilyen megközelítő számításokra agyafúrt módszereket kigondolni éppen olyan nagy dolog, mint az acél titkának a fellelése, holott egyiknek az alapjait sem ismerték.

Gyűlik tehát egy csomó tudás, aminek nem ismerik az alapjait, amit nem lehet összegezni, de azért gyülekezik, és ugyanígy van ez a csillagászat terén is. A csillagászatban sem tekinthetők ezek a régi egyiptomi és babiloni csillagászok a mi igazi elődeinknek, de valamiféleképpen mégiscsak előkészítették a mai tudomány megszületését. Már a célkitűzésük is merőben különbözött a miénktől. Az ő csillagászatuk naptártudomány volt, a naptár titkai izgatták őket. Ebben ismét megegyezik az egyiptomi és a babiloni világ, részletekben azonban erősen különböznek, mert két különböző égi eseményhez igazították a maguk naptárát.

A mezopotámiaiak már a sumér időktől kezdve a Hold szerint mérték az időt. A Hold azonban rendkívül szeszélyes „isten” – ők ugyanis annak hitték –, nem mozog olyan egyenletesen, mint a Nap. Nagyjából persze úgy 29 és fél nap alatt jut el újholdtól újholdig, de csak nagyjából. Babilónia szélességi körén nagyon különbözik egymástól a Hold útja nyáron meg télen. Ráadásul az ekliptikához – azaz a Nap pályasíkjához – képest a Hold pályája nagy szög alatt hajlik. Ez megint erős változásokat okoz. Azok a pontok, ahol a Nap pályasíkját metszi a holdpályáé – az ún. „csomók" –, igen bonyolultan mozognak, úgyhogy csak a XVIII–XIX. századi csillagászok birkóztak meg a Hold mozgásaival. Hogyan is birkóztak volna meg vele szegény babiloniak? Két fényváltozati hónap között akár 3–4 napos különbség is adódhat, a holdnaptárt tehát igen bajos feladat a Nap járásához igazítani. Azonban, ha kivár az ember pontosan 223 fényváltozati hónapot, azaz 18 év és 11 napot, tehát 6585 napot, akkor olyan periódushoz jut, ami mindig pontosan ugyanakkora.

Mi már persze jól tudjuk, hogy miért: ennyi idő, 6585 nap kell ahhoz, hogy a Nap, a Hold és a Föld újból pontosan ugyanolyan helyzetbe kerüljön egymáshoz képest. A babilóniai írnokok azonban semmit nem tudtak a szférikus csillagászatból; ők azt mondták, hogy ez a nagy periódus, ez az „igazi" év. Ha ezt sikerül a naptár alapjául tenni, akkor – ők azt hitték – eleget tesznek az istenek akaratának. Sikerült nekik, mert meg tudták oldani azt a még nekünk is nagyon nehéz feladatot, hogy ezt a nagy periódust, a 223 fényváltozati hónapot összeegyeztessék valahogyan a Nap járásával. Eközben észrevették, hogy az év folyamán a Nap nem egyforma sebességgel mozog.

Mi persze Kepler törvényei óta jól tudjuk, hogy mi ennek az oka: a Nap a Föld pályájának nem a közepén helyezkedik el, a Föld Napközelben gyorsabban, távolabb lassabban jár. Az okokat a babiloniak nem ismerték, de a jelenséget felderítették, és pontosan használható naptárat dolgoztak ki a 6585 napos ciklus alapján. Számítási eredményeiket táblázatokba foglalták össze a maguk szokása szerint; az impozáns táblázatokat aztán Otto Neugebauer és Van der Waerden félreértették, és azt hitték, hogy valamilyen „cikcakk fügvényekkel" írták le a Hold mozgását. Valójában szó sem volt se cikcakkról, se függvényről – a „függvény" majd csak a XVII. században Leibniznél jelenik meg, és előtte Galileinél valamilyen ködös formában –, a babiloniak a maguk primitív közelítő módszereivel dolgoztak.

Az egyiptomi csillagászoknak ilyen eredményei nem voltak. Ők nem a Hold járására alapozták a maguk naptártudományát, hanem a Napéra. Nagyon fontos szerepet kapott így az egyiptomi naptárban a Sziriusz, vagy ahogyan ők nevezték, a Szótisz, mert ez a csillag a Nílus áradása idején éppen napfelkeltekor emelkedik fel az égre. A Nílus áradása termékenyítette meg a földet, ez pedig az életet jelentette az egyiptomiaknak. Az életet, de ez az élet csak a kiváltságos keveseknek volt kellemes vagy akárcsak tűrhető. Az egyiptomi parasztok sírtak, mert menni kellett építeni az öntözőcsatornákat, taposni kellett az átkozott sarat, ami féreggel fertőzte őket. Átlagosan 20–25 éves korában az egyiptomi paraszt már el is pusztult. Ezzel azonban se urak, se írnokok nem igen törődtek. Nekik az élet nagy eseményét – a Nílus áradását – jelezte a Szótisz első kelése, erre alapították hát az időszámításukat. Itt is adódott egy kicsi eltolódás; nem akkora, mint a babiloniaknál, mert a Nap nem annyira „pontatlanul" jár az égen, mint a Hold. Ámde az egyiptomiak csak 365 nappal számolták az évet, holott az valójában 365 és egy negyed. Ezt a negyed napot ők elhanyagolták, nem iktattak be szökőéveket. Ezek a negyed napok összegyűltek, ezt azután idővel helyre kellett igazítaniuk. Illetve megvárták – volt rá idejük, futotta a birodalom évezredeiből –, amíg a naptár kiigazítja önmagát, amíg újból a naptár első napjára esik a Szótisz első hajnali kelése. Ez 1441 évenként következett be, ekkor a Szótisz első hajnali kelése jelezte egyben az évnek az első napját is, és ilyenkor az egyiptomiak hatalmas ünnepségeket rendeztek, és hálálkodtak az isteneknek.

Az ókori Kelet világában az ember minden tevékenységét fensőbb hatalmak igazgatták. A csillagoknak is éppen ezért volt akkora jelentősége: kinyilvánították az istenek állandóságát és kegyelmét. De ezen túl az ember testi és lelki épségére is istenek és démonok vigyáztak, illetve istenek és démonok vették el az egészségét. Mindenféle betegséget, mindenféle elváltozást külső okoknak tulajdonítottak, démonok rossz hatásának. Varázslónak kellett tehát a démont kiűzni, méghozzá meglehetősen drasztikus módszerekkel. A diagnosztika eszközei is ugyanilyen démonikusak voltak. A beteget az orvos sokszor meg sem nézte, elővett egy disznót, felvágta a máját, és abból mondta meg, hogy mi a baja a nagymamának. Bonyolult kapcsolatokon keresztül egész világuk egy emberfeletti világgal állott összeköttetésben, a maguk gyógyító eljárásait is eszerint alkalmazták emberfelettien és meglehetősen embertelenül. A gyógyítás többnyire több bajt okozott, mint maga a betegség. Nyúzták, főzték a beteget, s ha a betegséget ki is bírta, a gyógykezelést nagyon ritkán. Ennek ellenére, bár nagyon ritkán, akad gyógyászatukban racionális felismerés is. Egyiptomban például, ahol a sivatag homokja miatt rengeteg volt a szembaj, elég jól értettek a szembetegségek diagnosztizálásához és gyógyításához. De a hiedelemmel ellentétben semmit sem értettek az egyiptomi papok az anatómiához, holott rengeteg embert balzsamoztak be. Az egyiptomi papok nem úgy boncoltak, mint később Vesalius, nem az érdeklődő ember tudós kíváncsisága vezette őket, hanem misztikus elképzelések és hagyományos receptek. Az egyiptomiak a rengeteg mumifikálással semmit sem tanultak; úgyhogy amikor a görögök – Hippokratész korában – elkezdtek gondolkodni a betegségekről, szó szerint mindent újra kellett kezdeniük. Hérodotosz, a nagy történetíró hivatkozik ugyan az egyiptomiakra, azonban ez inkább csak afféle ősiségnek kijáró kegyelet. A valóság az, hogy a gyógyítás empíriájának meg kellett szabadulnia ezektől a hiedelmektől, ki kellett emelkednie a mindent beburkoló babonák ködéből.

Az Euklidés előtti matematika felfedezése[21]

A tudománytörténet-írás legnehezebb kérdései közé tartozik a matematika eredetének a problémája. Amíg a görög matematika élő valóság volt, Bolyai és Lobacsevszkij felfedezéséig, ez a kérdés nem okozott túl sok gondot. A görög matematika Euklidésszel és a Platón körében kialakult magasabb geometriai módszerekkel kezdődött. Euklidés rakta le a görög geometria szigorú logikai-axiomatikus alapjait, a Platón körében kialakult magasabb geometria pedig a kúpszeletek és a geometriai hely elméletére vezetett. Euklidés ezenkívül összeköttetést jelentett a platoni iskola és a hellenisztikus kor matematikája között, amennyiben a reductio ad absurdum módszerének a bevezetésével lehetővé tette az irracionalitás formájában felmerült infinitézimáfis kérdések indirekt úton való megoldását. Az infinitézimális geometria területén ugyanis a görög geometria „nem volt még elég előrehaladott ahhoz, hogy direkt bizonyításokat szolgáltasson".[22] Így látta a matematika kezdeteit a múlt század közepén Michael Chasles, a kor egyik legnagyobb geométere. Rövid öt oldalon tekinti át a görög matematika kezdeteit, s azután rögtön áttér az Euklidés utáni, hellenisztikus matematikára, amit részletesen ismertet, harminchét oldalon keresztül.

A görög matematika történetének egy kitűnő, modern összefoglalása,[23] amit a XX. század egyik legnagyobb matematikusa és matematikatörténésze, B. L. van der Waerden írt, nyolc fejezet közül mindössze kettőben foglalkozik a hellenisztikus matematikával, alig ötven oldalon. A könyv nagy része, az első hat fejezet, a korai babiloni és görög matematikáról szól.

Amikor Chasles írt, akkor a hellenisztikus kor, beleértve a késő hellenisztikus, római és kora bizánci fejlődést is, jelentette a tudományt.[24] A korai idők, Thalés, Pythagoras legenda és mítosz homályába burkolt, talán csak a megbízhatatlan korai tradíció által kitalált alakok voltak.

---

[21] Forrás: Vekerdi László: Az Euklidés előtti matematika felfedezése. = A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai és Fizikai Tudományok Osztályának Közleményei. Vol. 13. (1963) pp. 133–150. – A kézirat beérkezésének ideje: 1962. XII. 9.

[22] Chasles, M.: Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie. Paris, [2]1875. ([1]1837) pp. 4–9.

[23] Warden, B. L. van der: Science awakening. Groningen, 1954. (Ontwakende wetenschap. Egyptische, babylonischen en griekse wiskunde. Groningen, 1950.) – Magyar ford.: Egy tudomány ébredése. Egyiptomi, babiloni és görög matematika. Ford.: Pollák Györg. Bp., 1977. Gondolat. 478 p. *(– a szerk. kieg.)*

[24] Lásd pl. J. G. Droysen: Geschichte Alexanders des Grossen. Berlin, 1833. – Durch Aristoteles war jener grossartige Empirismus ins Leben gerufen, dessen die Wissenschaft bedurfte, um des ungeheuren Vorrates von neuem Stoff, den Alexanders Züge jedem Zweige des menschlichen Erkennens eroberten, Herr zu werden. Die eigentümliche Entwickelung des griechischen Geistes hatte bisher die Philosophie als den Inbegriff alles Wissens dargestellt; jetzt emanzipierten sich die einzelnen Richtungen des Erkennens. (Kröners Taschenausgabe, Leipzig, é. n. pp. 482–483.)

B. L. van der Waerden korára a helyzet megfordult: a hellenisztikus kor vált legendák, vallások és mítoszok szülőjévé, amelyik csak fenntartotta, vagy részletezte, s később hanyatlásba vitte a korai tudományos fejlődés eredményeit.[25] A hellenisztikus kor a XX. században a vallástörténet területe lett, a korai idők, Babilon és a görög hatodik és ötödik század a tudománytörténet-írásé.

Az első tudomány, a matematika születésének a megítélésében a vélemények nagyon eltérőek. A matematika kezdeteit a történészek egy része a görög világba helyezi, mások a babiloni kultúrkör ajándékának tekintik, s a második-harmadik évezred fordulójára viszik vissza.

Az első irány elindítója Paul Tannery volt, a másik irány több szálból fonódott össze, s ma Otto Neugebauer a legjellegzetesebb képviselője.

Paul Tannery[26] eredetileg mérnök volt, s a francia dohányiparban dolgozott. Mint tudománytörténésznek a korai görög tudomány mellett a XVII. század természettudománya volt a legfontosabb szakterülete. Az ő nevéhez fűződik Fermat műveinek kiadása, s élete utolsó évtizedei a monumentális Descartes-kiadással forrottak össze.

[25] Tarn, W. W.: Hellenistic civilisation. London, [3]1952 ([1]1927). – Everything was ready for an outburst of activity, which came as soon as Alexander had in effect quadrupled the rise of the known world. (p. 259.) Pár generáción keresztül páratlan tudományos virágzás következik be. But it contained also one of those queer contradictions of which Hellenism was full; we regard science as essentially European, but Hellenistic astronomy was partly due to Babylonians. (p. 296.) A görögök geometrizálták a babiloni csillagászati empíriát, ez vezetett a geocentrikus rendszer végleges megszilárdulására. The pity of it was that, could heliocentrism have been established, it should have killed astrology and saved the world infinite trouble. (p. 298). Ezzel szemben vö. Georg Sarton: A history of science. Hellenistic science and culture in the last three centuries B. C. (Cambridge, Mass., 1959. p. 317.): It is not true, as Tarn claims, that Hipparchos' rejection of heliocentrism assured the success of astrology, but his acceptance of the astral religion implied astrological possibilities. Ezenkívül Sarton szerint az asztrológia előretörését a Stoa epikureizmus feletti győzelme döntötte el. Viszont S. Sambursky: Physics of the stoics (London, 1959) éppen a stoikusokban látja a modern fizika megalapozóit. Utóbbi interpretáció azonban erős ellenzésre talált. Vö. Ch. C. Gillispie, Isis Vol. 49. (1958) pp. 356–358. és M. E. Seesor, Isis Vol. 51. (1960) p. 233. – M. Clagett, aki a középkori tudomány specialistája, még a késő görög tudományban sem hanyatlást, hanem kiegyenlítődést lát: This leveling off was undoubtedly tied up with complicated social and political changes brought about in the Mediterranean area by the rise and spread of Roman power. But it would have taken a fine eye in the first two or even three centuries of the Christian ere to detect any decline in Greek science or the Greek rational spirit by an examination alone of the works of the best scientists. (M. Clagett: Greek science in antiquity. New York, 1955. p. 115.) Clagett szerint a görög csillagászat csúcsát Ptolemaios jelenti, és még asztrológiai főműve, a Tetrabiblos is „kritikai szellemet sugároz". (Uo. p. 116.)
Nyilvánvaló, hogy a tudománytörténet-írás még az előfeltételéig sem jutott el annak, hogy megírható legyen a hellenisztikus kor tudománytörténete. Karl Reinhard két könyve: Poseidonios (München, 1921) és Kosmos und Sympathie (München, 1926) mutatja, mi minden vár még ezen a területen tisztázásra. Először is el kell jutni a források, a kifejezések és a szavak megértéséig, vagy helyesebben, hogy a reinhardti metodikához hűbben fejezzük ki magunkat, a megértésük kapujáig. Azután újra és újra meg kell kísérelni eljutni más irányokból ugyanezekig a kapukig, anélkül, hogy korai szintézis csábítását követve, átlépnénk rajtuk.

[26] Tannery életéről és működéséről lásd: Osiris Vol. 4. (1938) Part 2. pp. 633–689. és Revue d'Histoire des Sciences Vol. 7. (1954) No. 4.

Számos közleményén kívül három fontos könyve jelent meg a görög tudomány kezdeteiről: *Pour l'historie de la science hellène de Thalès a Empédocle* (Paris, 1887); *La géométrie grecque. Essai critique* (I. P. Paris, 1887); *Recherches sur l'histoire de l'astronomie ancienne* (Paris, 1893). Utóbbiban az első nagy áttekintést adja a görög tudomány egészéről. A Bevezetésben a görög tudomány történetét négy periódusra osztja: hellén tudomány (Aristoteléssel bezárólag), alexandriai tudomány (Eudémostól kb. i. sz. kezdetéig), görög–római tudomány (i. sz. kezdetétől kb. Constantinusig) és a kommentátorok kora (i. sz. VI. század végéig). Mindegyik periódus kb. 300-300 évig tart. Igazán teremtő csak az első: ekkor rakják le a görög tudomány (és nem filozófia!) alapjait. A második periódusban már csak a matematika fejlődik. „Epikureusok és stoikusok foglalkoznak ugyan fizikával, mégpedig sokat; de az előbbiek nézőpontja – egy általános a priori hipotézissel összeférő különböző magyarázatokkal szembeni teljes közömbösség – minden természettudományos haladásnak a tagadását jelenti, az utóbbiaknak pedig még az alaptanításaik is ellentétesek a természettudománnyal."[27] A harmadik, a görög–római periódus elején Tannery szerint a stoa uralkodik, de az i. sz. III. században visszafordulnak a régi mesterek, Platón, Aristotelés, Pythagoras felé. Ez az eklektikus, misztikus, szinkretizmusra törekvő irány azonban nem vezet új szintézishez, és a Constantinusszal kezdődő új korszak a lélek nélküli utánzás, a kompiláció, a kommentátorok kora lesz.[28]

A négy periódusból az első, s a másodikból száz év: ez az antik világ 1200 évéből a teremtő, a legérdekesebb korszak; ez Tannery nagy áttekintésének a végső következtetése. Közel 70 év múlva Tobias Dantzig kimutatást készít a 27 legjelentősebb görög matematikus születési helyéről és a fenti négy periódus szerinti megoszlásáról: I. e. 600 és 300 közé esik 13 matematikus 9 városból, 300 és 0 közé 10 matematikus 5 városból, i. sz. 0 és 300 közé 4 matematikus egyetlen városból, Alexandriából.[29]

Ma már természetesnek tűnik, hogy a görög tudomány legérdekesebb periódusa az első, a hellén-korszak. Tannery előtt azonban ezt a kort egyáltalán nem tartották a természettudomány és a matematika szempontjából lényegesnek: Aristotelés szemüvegén át filozófusoknak, metafizikusoknak, titokzatos és mély értelmű bölcseknek tekintették a Thaléstől Empedoklesig terjedő gondolkozók sorát. S Tannery könyve után egyszerre „nem elérhetetlen metafizikusok többé, hanem tapasztalatlan tudósok, nagyon egyszerűek és éppen ezért annál merészebbek, ... fogalmaikban és formuláikban felhagynak minden misztikus jelleggel és gyakran ismerjük fel tanításaikban mai tudományunk egynémely jellegzetes

[27] Tannery, P.: Recherches sur l'histoire de Pastronomie ancienne. Paris, 1893. p. 3.
[28] Uo. pp. 6–7.
[29] Dantzig, T.: The bequest of the greeks. London, 1955. p. 14.

tendenciáját" – írja Tannery egyik tanítványa, Gaston Milhaud.[30]

Tannery ismeri fel például az eleai Zénón jelentőségét a matematika fejlődése szempontjából. Zénón maga nem volt matematikus, „de egyike azoknak, akik legtöbbet tették a matematika elvei érdekében, szigorúan körülírva a pont és a pillanat alapvető fogalmait" és frappáns módon alkalmazva a görög gondolkozásra egyébként is oly jellemző reductio ad absurdum módszerét.[31] Zénón nem Anaxagoras vagy Leukippos ellen támad híres paradoxonaival, mint általában hiszik, hanem a pythagoreusok ellen. „Parmenidés olyan környezetben írta művét, ahol mint gondolkozók, egyedül a pythagoreusok állottak köztiszteletben." Zénón pedig nem a mozgás lehetetlenségét igyekszik kimutatni, hanem azt bizonyítja be, hogy a .kontinuum nem képzelhető el indivizibilis elemek összegeként, „mert, ha ezeknek az elemeknek nincs semmi nagysága (grandeur), akkor összegük sem lehet, másrészt, ha van nagyságuk, akkor, mivel számuk végtelen, összegük is végtelen lenne".[32]

Egy évtizeddel Tannery könyve előtt Herrmann Hankel[33] még úgy tartotta, hogy Zénón nem tudott megbirkózni a végtelen és a mozgás kérdésével s a görög matematikai tudományok végleg száműzik a végtelen, a változás és a mozgásfogalmait. A görögök infinitézimál-fóbiájáról szóló legendát Tannery műve sem tudja eloszlatni, még Heibergnél[34] is tartja magát, aki pedig Tannery műveinek egyik kiadója, s kitűnő filológus volt. Az infinitézimális számítás fejlődéstörténetének monográfusa, Otto Toeplitz, jól tudja, hogy a görögöknél szó sincs a végtelentől való irtózástól, s ő is Zénón paradoxonait tekinti a végtelen fogalmával dolgozó matematika kezdetének. Zénón „csak olyan végtelen processzus ellen tiltakozik, amivel kontinuum átfutásakor találkozunk".[35] Ugyanez volt lényegében Tannery véleménye is.

Az ugyancsak 1887-ben megjelent *La géométrie grecque* mintaszerű és a tudománytörténet-írásban úttörő analízissel kezdődik. Megvizsgálja a hozzáférhető szövegek tükrében a proklosi adatokat, s annak a segítségével, amit megbízhatónak talált belőlük, analizálja az euklidési „Elemek"-et. S ezzel elkezdődött a tudománytörténet egyik legérdekesebb és legfontosabb kalandja, az „Elemek" egyes könyveinek és tételeinek részletes vizsgálata abból a szempontból, hogy a korai görög matematika fejlődésének melyik fázisába tehetők. A nehézséget az jelenti, hogy a korai görög matematika egyes fázisait jóformán alig

30 Milhaud, G.: Revue des Idées, 1906. No. 25. pp. 28–39.
31 Tannery, P.: Pour l'histoire de la science Hellène. De Thales a Empédocle. Paris, 1887. p. 249.
32 Uo. p. 255.
33 Hankel, H.: Zur Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter. Leipzig, 1874.
34 Heiberg, I. L.: Geschichte der Mathematik und Naturwissenschaften im Altertum. München, 1925. p. 4.
35 Toeplitz, O.: Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung. Eine Einleitung in Infinitesimalrechnung nach der genetischen Methode. Erster Band. Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1949. p. 2.

ismerjük máshonnan, mint éppen az „Elemek”-ből. Ezenkívül egy pár korai töredék – Archytas kockamegkettőzése, és Hippokratés holdacskák területére vonatkozó vizsgálatai – és Aristotelés sok, de matematika iránt nem nagy megértést mutató locusa, s a késői kommentátorok nagyon is kérdéses megbízhatóságú adatai állnak rendelkezésre. Érthető, ha az Euklidés előtti görög matematika rekonstrukciója távolról sem tekinthető megoldott kérdésnek. Ezen a területen való munka a matematikai hozzáértésen, a fokozott filológiai és forráskritikai gondosságon kívül sok leleményességet is igényel. És állandóan fennáll egy sajátos circulus vitiosus veszélye: az „Elemek”-ből rekonstruált korai görög matematika szolgál keretül az „Elemek” egyes tételeinek a kronológiájához.

Tannery még csak nagyjából osztja fel az „Elemek”-et a korai görög matematika egyes korszakai között. Az „Elemek”-et addig a görög elemi geometria tankönyvének tekintették, Tannery egy hosszú történelmi fejlődés filológiai jellegű összefoglalását ismeri fel benne, amelynek a kezdetei legalábbis az i. e. V. század közepéig nyúlnak vissza. Tannery szerint már ekkor lennie kellett a görög geometriában kézikönyvszerű összefoglalásoknak. Ezen túl a Hippokrátéstől fennmaradt töredék azt mutatja, hogy már a görög felsőbb mennyiségtan, a körzővonalzóval meg nem oldható feladatok geometriájának az alapjai is készen vannak.[36]

A hagyomány magának Hippokratésnek is tulajdonított egy „Elemek”-et, De semmit sem mond arról, mit tartalmazhatott. Tannery jóformán semmiből rekonstruálja ezt a korai „Elemek”-et. Szerinte legalábbis kérdésfelvetésben mindent tartalmazott, amit Euklidés „Elemei” az aritmetikai könyvek, a VII., VIII. és IX, kivételével magukban foglalnak. Ezek a hippokratési „Elemek” pedig valószínűleg magáig Pythagorasig vagy Pythagoras közvetlen tanítványaiig visszanyúló pythagoreus geometriára támaszkodnak.[37]

Volt-e ennek megfelelő pythagoreus aritmetika is? Tannery szerint ugyanis az euklidési „Elemek” aritmetikai könyvei nem pythagoreus eredetűek, a pythagoreus aritmetika ennél primitívebb kellett hogy legyen, és mást is kellett tartalmazzon – legalábbis ha az i. sz. I–II. századból származó neopythagoreus forrásoknak némi hitelt adunk. Megint az a kérdés, mit lehet elhinni ezekből a késői forrásokból? Tannery felhívja rá a figyelmet, hogy már Aristotelés kifejezetten a pythagoreusoknak tulajdonít egy, a négyzet átlójának és oldalának az incommensurabilitására vonatkozó bizonyítást, ami azon alapszik, hogy a

[36] Tannery, P.: „Geometria.” (1895). In: Mémoires Scientifiques II. Paris, 1912. pp. 472–486. – Tannery megállapításai, mint általában, itt is inkább a geniális megsejtés, mint a bizonyított interpretáció szintjén mozognak, amit ő maga is kiemel: „En résumé, lés origines véritables de la géométrie théorique chez les grecs restent passablement obscures; on peut simpliment en dire que le gout pour l'étude des propriétés des figures parait un trait caractéristique de la race grecque...” (p. 475.)

[37] A La géométrie grecque (Paris, 1887) számomra nem volt hozzáférhető. Tannery véleményét itt másodkézből idézem: P.-H. Michel: De Pythagore a Euclide. Paris 1950. pp. 168–209. Ez a könyv a kérdésre vonatkozó szakirodalmat is bőven tárgyalja a harmincas évek végéig.

commensurabilitás egyszerre követelné meg ugyanazon szám páros és páratlan voltát. Ez a bizonyítás, ami Euklidésben is megtalálható, olyan számfogalmon alapszik, ami az euklidésinél sokkal primitívebb. Ez a számfogalom lehetett a pythagoreus aritmetika alapja.[38] Mindez azonban csak sejtés, és a nyitott kérdések özönét hagyja maga után. „Voilà, les questions qui restent toujours ouvertes, car, si j'ai cherché à les discuter, je n'ai nullement prétendu leur donner une solution définitive."[39] Mindenesetre annyi gyanítható, fejezi be Tannery, hogy „egy, elsősorban minden szám általános tulajdonságát, s azután a tíz első szám speciális tulajdonságait tárgyaló aritmetika terve nem képzelhető el Archytas előtt, de feltétlenül megvan az őt közvetlenül követő generációban".[40]

Foglaljuk össze még egyszer a Tannery-interpretáció centrális gondolatát: Az „Elemek" minden lényeges eredménye és a tárgyalási mód is már messze Euklidés, sőt Platón előtt készen áll, a geometriai könyvek a pythagoreus matematika gyors fejlődéséből emelkedtek ki az V. század során, az aritmetikai könyvek Archytas vagy az őt közvetlenül követő generáció művei. Platónnak már semmi egyéb szerepe sem marad a görög matematika fejlődésében, minthogy felhívja a figyelmet a térgeometriai problémák fontosságára.

Ezt az interpretációs vázat töltötték ki a XX. század során részletekkel. Ahol Tannery általánosságban korokat és generációkat jelölt meg, ott meg kellett keresni az „Elemek" egyes könyveihez tartozó neveket, illetve iskolákat. Az alábbiakban, mintegy példaként az ilyen típusú rekonstrukciók szerkezetére, analizáljuk a matematikus Theaitétos „feltámasztásának" a történetét.

Abban az időben, amikor Theaitétos, a matematikus modern hírneve megalapozódott, a klasszika-filológiában U. von Wilamowitz-Moellendorff interpretációs iránya uralkodott. Ő volt a XX. század első felének legnagyobb nevű klasszika-filológusa. Nietzsche intuitív-impresszionista „Zukunftsphilologie"-je elleni éles támadással kezdte gyorsan felfelé ívelő pályáját. A század elején már Berlinben professzor, tekintélye és népszerűsége óriási. De a George-kör nagy megvetéssel nézte működését, s Platón-biográfiáját „ein Platon für Dienstmädchen"-nek minősítette Gundolf. Wilamowitz-Moellendorff Momsen pozitivista, ténytisztelő módszerein nőtt fel. Az interpretációnak a tények gondosan halmozott tömegére kellett felépülni. Semmiféle kitalálásnak, álmodozásnak nem volt benne helye. Az így megalapozott interpretáció a természettudományhoz fogható komoly tudomány igényével lép fel, hatalom lesz. Egy Wilamowitz-Moellendorff-tanítvány, Eva Sachs doktori disszertációja

[38] Tannery, P.: Pour l'histoire de la science Hellene. Paris, 1887. pp. 369–391. Appendice II. Sur l'arithmétique pythagorienne.
[39] Uo. p. 391.
[40] Uo. pp. 379–380.

körvonalazta a matematikus Theaitétos alakját Platón hasonló című dialógusa alapján 1914-ben.[41]

H. G. Zeuthen, aki matematikus volt, a modern matematikai fogalomképzés felől közeledett Platón dialógusához, s Theaitétos mesterében, Theodorosban ismeri fel annak az új, nagy fontosságú matematikai elvnek a felfedezőjét, aminek az alapján Theaitétos az „Elemek" VII., VIII. és X. könyveit megírta. Theodoros a 3-tól 17-ig terjedő nem-négyzet számok négyzetgyökeinek az irracionalitását Zeuthen szerint egy olyan új kritérium alapján bizonyítja, ami a végtelen törteken alapul, „servant à déterminer le plus grande commune mesure de deux nombres donnés: si cette opération, appliquée à des quantités générales représentées par des segments de droite, s'arrête d'elle-même, les quantités seront commensurables, si elle se continue à l'infini, incommensurables."[42]

Abel Rey Theodorost, s rajta keresztül Theaitétost a pythagoreus matematika képviselőinek tartja.[43] O. Becker egy-egy külön fejlődési fokot fűz a Theodoros és Theaitétos nevéhez,[44] s végül B. L. van der Waerden a platóni dialógus és az „Elemek" X. könyve alapján rekonstruálta Theaitétos elveszett könyvét.[45]

Láttuk, hogy Zeuthen a VII., VIII. és X. könyvet mind Theaitétos munkájának tartotta s ezáltal Theaitétos műve elsősorban aritmetikai jelleget öltött. Van der Waerden a VII. könyvben az Archytas előtti pythagoreus aritmetikai kézikönyv primitív formáját látja és a VIII.-ban ennek folytatását. De szemben a VII. könyv logikai egységével, a VIII. könyvet logikai tekintetben gyengének tartja. A VIII. könyvben egy általános elvekig felemelkedni nem tudó arányelméletet lát, ami teljes ellentétben áll a X. könyv logikai zártságával. A X. könyvet Platón tanítványának, Theaitétosnak tulajdonítja. A VIII. könyv szerinte a Platónt egy generációval megelőző Archytas műve. A VIII. könyv logikai gyengéi nem a kor matematikájának közös hibái: a VII. könyv ugyanis magas logikai készültséget árul el, s Aristotelés is ezen kor matematikai kézikönyveiből vonta le logikai szabályait. Ez a logikai lazaság Archytas sajátja, ő van der Waerden szerint „is constantly at odds with logic, trying unsuccessfully to meet its strict demands".[46]

---

41 Sachs, Eva: De Theaeteto atheniensi mathematico. Berlin, 1914.

42 Zeuthen, H. G.: Sur l'origine historique de is connaissance des quantités irrationnelles. In: Oversigt over det kgl. danske Videnskabernes Selskabs forhandlingen. Copenhague, 1915. pp. 333–362. Idézi P.-H. Michel: De Pythagore a Euclide. Paris, 1950. p. 468.

43 Rey, A.: L'apogée de la science technique grecque. Paris, 1946. pp. 189–190.

44 Becker, O.: Die Lehre von Geraden und Ungeraden im neunten Buch der euklidischen Elemente. In: Quellen und Studien zur Geschichte der Mathernatik, Astronomie und Physik. B3 (1936) pp. 533–553.

45 Waerden, B. L. van der: id. mű V. és VI. fejezet.

46 Uo. p. 155.

A VII. könyv is arányelmélet, Waerden ezt tartja annak a pythagoreus kézikönyvnek, aminek a létezését már Tannery sejtette. Waerden szerint feltehető, hogy ennek az elméletnek a kidolgozására a törtekkel való számolás vezetett. Törtek a hivatalos görög matematikában Archimédés előtt nem fordulnak elő, de a gyakorlatban természetesen használni kellett őket Annak az oka, hogy a törteket az elméletből kiküszöbölték, az egység elméleti oszthatatlansága volt. A törtek fogalmának matematikai aequivalense a számok aránya lett. „Törtek legkisebb kifejezésekre való redukciója helyébe számok arányának legkisebb kifejezésekre való egyszerűsítése lép, ezt kutatja elméletileg a VII. könyv."[47] Ennek a pythagoreus arányelméletnek a geometriai segédeszközeit jelentik a II. könyv bizonyos tételei, s ebbe a keretbe illik Archytas híres kockamegkettőzése: két adott számhoz két középarányos szerkesztése. És hogy az egész gondolatkör mennyire a pythagoreus világkép szerves része, azt szépen demonstrálja Waerden az *Archytas*-féle szerkesztés zeneelméleti megfelelőjére való utalással.

Ezt az egész jól kiépített *pythagoreus* gondolatkört egyetlen veszély fenyegette: az, hogy „vonalszakaszokat nem mindig lehet számokkal kifejezni, vagy pontosabban fogalmazva, vonalszakaszok arányai nem mindig fejezhetők ki egész számok arányaiként. Más szóval: léteznek iricommensurabilis vonalszakaszok."[48] Ez a tény, s nem pedig mint Tannery hitte, a $\sqrt{2}$ irracionális voltának a felfedezése vezetett Waerden szerint a görög matematika fokozódó geometrizálódására. A pythagoreusok nagyon jól ismerték az irracionális arányokat, más oka volt, hogy a $\sqrt{2}$ -t nem tekintették számnak: a szám definíciójához való ragaszkodásuk. „Arithmos számot jelent, ezért egész számot, logikai szigoruk még azt sem engedte meg, hogy törteket vezessenek be; egész számok arányaival helyettesítették őket."[49] Így válik centrális kérdéssé a görög matematikában számok és vonalszakaszok egymáshoz való kapcsolata. Erről szól Platón Theaitétosának sokat idézett része, erről szól az „Elemek" X. könyve, ami Waerden szerint nem egyéb, mint Theaitétos Euklidés által kissé elrontott, elveszett könyve.

Fontossága miatt hosszan kell idéznünk Waerdennek a X. könyvről adott analízisét: „Mérhetőnek (measurable) nevezünk a továbbiakban egy vonalszakaszt (vagy egy területet), ha commensurabilis egy rögzített e vonalszakasszal (vagy egy e^2 négyzettel). Euklidésben a mérhető területeket kimondhatónak (expressible) ($\rho\eta\tau\acute{o}\varsigma$) nevezik. Másrészt azokat a vonalakat nevezik kimondható (expressible) vonalaknak, amelyek mérhető négyzetekre vezetnek, tehát nemcsak mérhető vonalakat, hanem olyan nem mérhető vonalakat is, mint a 3, 5, ...

47 Uo. p. 115.
48 Uo. p. 158.
49 Uo. p. 125.

területű négyzetek oldalai, amiket Theodoros vizsgált. Ez a terminológia egyik első következménye azon osztályozási elvnek, amely a vonalszakaszokat az általuk előállított négyzetek szerint osztályozza. Minden egyéb vonalszakaszt irracionálisnak *(άλογος)* neveznek."[50] Ugyanez a beosztás jelentkezik Platón dialógusában is, ahol Theaitétos bizonyos vonalszakaszok incommensurabilitására a feléjük emelt négyzetekből következtet. S mivel bizonyos, a X. könyvben definiált irracionális vonalak esetében ez a vizsgálat téglalapok négyzetté alakítását követeli meg, a X. könyv felhasználja a II. idevonatkozó eredményeit.

Az egész X. könyv egységes szellemű. Waerden szerint még az is bizonyít, ami a könyvből hiányzik : ti. egy logikailag odaillő arányelmélet, ami összeköttetést jelentene a X. 2. és 3-ban bevezetett antanairesis-en alapuló commensurabilitás-kritérium és a később tárgyalt irracionális vonalszakasz típusok között. Euuklidés itt az V. könyvön alapuló arányelméletet alkalmaz, amit Theaitétos nem használhatott, mert az V. könyv Eudoxos műve. Ugyancsak nem használhatta a régebbi, VII. könyv által reprezentált arányelméletet sem, mert az incommensurabilis vonalszakaszokra nem érvényes.

Waerden szerint Aristotelés egy helye (Topica 158 b) vet fényt rá, mit hagyott itt ki Euklidés. Aristotelés általánosságban beszélve a definícióról, megemlíti, hogy „két terület és két vonal akkor arányosak, ha a területek és a vonalak azonos antanairesissel *(άνταναίρεσις*) rendelkeznek".[51] Mint egy ilyen arányelmélethez szükséges előzmény érthető meg a X. 1. „Most már minden világos – írja Waerden – Theaitétos nyilvánvalóan egy antanairesis-definíción alapuló arányelmélettel kezdette volt a könyvét. Szokása szerint járva el, később felhasználandó lemmákkal indult; ezek közé tartozik a X. 1. A X. 2–3. tételekben bevezeti a végtelen és véges antanairesis elméletét, s egyben kritériumot nyer két vonalszakasz vagy két terület commensurabilitására. Valószínű, hogy a következő lépés arra az antanairesis-definícióra alapított arányelmélet volt, amelyikre Aristotelés célzott. Euklidés ezt a részt kihagyta, mert ő már adott egy másik arányelméletet az V. könyvben ... A továbbiakban Theaitétos racionális mennyiségekre és arányaikra vonatkozó elméletét fejtette ki arányelmélete alapján (X. 4,5. és 9–13.). Ebben a részben Euklidés a bizonyításokat másokkal cserélte fel, amiket Archytas és iskolájának az eredményeiből kölcsönzött. A következő főrészét a X. könyvnek, ami a 13-féle irracionális vonallal foglalkozik, gyakorlatilag változatlanul hagyta Euklidés."[52]

Ezek a hosszú idézetek nagyon jellemzőek nemcsak Euklidés, hanem – s a mi szempontunkból ez a fontosabb – van der Waerden munkamódszerére is. Már két algebrista

50 Uo. p. 167.
51 Uo. p. 177.
52 Uo. p. 179.

generáció nőtt fel a *Moderne Algebra*[53] kristálytiszta vonalvezetésű fejezetein: a számfogalom rövid, halmazelméleti bevezetése – közelítése a csoportelméleten át ahhoz, amit az algebra ért a szám fogalmán –, azután a gyűrűk és testek további beszűkítésén átvitt számoknak mint a „feléjük emelhető" magasabb képződményeknek, polinomoknak részletes vizsgálata – mindezt Theaitétos sem építhette volna fel logikusabban, s Platón bizonyosan nagyon meg lett volna elégedve vele.

Waerden Theaitétosa a csúcsát jelenti annak a gazdag lehetőségeket nyújtó interpretációs iránynak, ami Tanneryből indult ki.

Ennek az interpretációs iránynak a nagy eredményei közé kell sorolnunk a babiloni matematika felfedezését is, jóllehet eredményei ellentmondásban látszanak lenni a matematika kezdeteiről Tannery által kialakított képpel. Waerden kitűnően ismeri a babiloni matematikát, s neki sikerült egységes képpé ötvöznie a matematika kora görög eredetének elméletét a babiloni kezdet teóriájával. Szerinte a görögök a babilóniaiaktól veszik döntő matematikai inspirációikat, mégis már nagyon korán, az ötödik század folyamán, ahogy Tannery tartotta volt, kialakítják a babilonitól annyira eltérő szellemű és formájú matematikájukat.

Ma már közismert a mezopotámiai kultúra felfedezéséért folytatott másfél évszázados küzdelem. Kevésbé ismeretes az a harc, amit Franz Xaver Kugler SJ., a babiloni asztronómia egyik legnagyobb ismerője folytatott a század elején a pánbabilonisták ellen. Utóbbi irány képviselői a Gilgames-legendakör és néhány szakmai ékírásos tábla megfejtése alapján nemcsak a Bibliát, hanem az egész modern tudományos fejlődés alapjait, csillagászatot, matematikát, orvostudományt Babilonból kísérelték meg levezetni. Kugler legfőbb bűne a pánbabilonisták szemében az volt, hogy a mitológiát és a tudományt szigorúan szétválasztotta: nem vezet olyan könnyű út a csillag-mitoszoktól a csillagászathoz – hangoztatta –, mint ahogy azt a pánbabilonisták hiszik. Nem lehet Hipparchos felfedezésének alapjait Babilonban megtalálni. A babiloni csillagászat nem évezredes, hanem az i. e. utolsó hét évszázadban fejlődött ki. A babiloni tudomány megértését csak komoly asszirológiai, matematikai és csillagászati tudás birtokában lehet remélni, tanította Kugler.[54]

Kugler atya örökségét: a British Museum agyagtábláiról készített másolatait és az asszirológiai s matematikai tudás egyesítését Otto Neugebauer vette át.

---

53 Waerden, B. L. van der: Moderne Algebra I. Berlin, [1]1936., [3]1950.

54 Kugler, F.-X. S. J.: Im Bannkreis Babels. Panbabylonistische Konstruktionen und Religionsgeschichtliche Tatsachen. Münster i. W. 1910.

Otto Neugebauer Göttingában tanult matematikát, ő adta ki Félix Klein híres felolvasásait a XIX. század matematikájáról.[55] Neugebauer ugyanazt tette a babiloni tudományért, mint Tannery a korai görög tudományért: kimutatta egy addig elsősorban misztikusnak és filozofikusnak tartott fejlődésről, hogy szigorú, egzakt s meglepően modern fogalmakkal dolgozó tudomány rejlik mögötte.

Azt már régen tudták, hogy Mezopotámiában nagyon korán, még a sumér korszakban, az ékírás felfedezésével körülbelül egy időben bevezettek egy hatvanas számrendszert, aminek a segítségével az alapműveletek elvégezhetőek voltak. A számrendszer azonban nem volt következetes, mert egyrészt kereszteződött a tízes számrendszerrel, másrészt kétértelműek a számjegyei, mert a korai időkben hiányzik a számjegyek közül a nulla. S egyébként sem jutnak képletekhez, általános algoritmushoz, mert a táblázataik ugyanazon típusba tartozó egyedi feladatok felsorolásából állanak. Sokszor valószínűleg nem egyebek iskolai gyakorlatoknál.[56]

Neugebauer éppen ezekben a hibákban ismeri fel a sumér számrendszer legnagyobb előnyét. Valóban, a nulla nem fordul elő benne, s ez a tény határozatlan helyértékrendszert eredményez – a mi tízes számrendszerünk határozott, abszolút helyértékrendszerével szemben. Ebben a határozatlan hatvanas számrendszerben „elvileg minden számjegyet szorozni lehet 60 egy tetszőleges pozitív vagy negatív hatványával, anélkül, hogy ez a szám írott kifejezésén változtatna".[57] Az egyes számjegyek helyértékét csak a számolás összefüggéséből lehet eldönteni. Ezáltal olyan számrendszer áll elő, amely páratlanul alkalmas a törtekkel való számolásra. Ha a egész szám, akkor annak, hogy $\frac{1}{a}$ véges hatvanados törtként legyen előállítható, szükséges és elegendő feltétele az, hogy $a = 2^{\alpha}3^{\beta}5^{\gamma}$ alakú legyen. Az ilyen számokat Neugebauer regulárisoknak, a nem ilyeneket irregulárisoknak nevezi. Az $\frac{1}{a}$ tört jelzésére az $\bar{a}$ jelölést vezeti be.

S ebben az interpretációban az addig iskolai gyakorlatoknak tartott számtáblák mint reciprok táblák lepleződnek le, olyan számok listái, amelyeknek szorzata mindig hatvan, azaz az egység. Beleértve természetesen mint mindig egy 60 valamely hatványával történő szorzást: egy n szám ugyanis nem különböztethető meg $n \cdot 60^{k}$ számtól. Ezeknek a reciprok tábláknak a célja osztás: egy b számot úgy osztanak egy a számmal, hogy szoroznak $\bar{a}$ -val. A

55 Klein, F.: Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert. Berlin, 1926.

56 Meissner, B.: Babylonien und Assyrien II. Heidelberg, 1924. pp. 386–387.

57 Neugebauer, O.: Vorlesungen über Geschichte der antiken mathematischen Wissenschaften. I. Vorgriechische Mathematik. Berlin, 1934. p. 5.

táblák kifejezetten mutatják, hogy a sumér matematikusok tisztában voltak az irreguláris számok kivétel jellegével: 7 igi nu–7 nem oszt, jegyzi meg pl. egy ilyen tábla.[58]

Neugebauer felismeri a számlisták törvényszerűségét. A számok mind $2^{\alpha}3^{\beta}5^{\gamma}$ alakúak, s ebből a feltételből egy szellemes geometriai reprezentáció segítségével teszi érthetővé a reciprok táblák előállítási módját.[59] A táblák szorzásra és gyökvonásra is alkalmasak, és a sumér matematikusok ilyen számolási segédeszközök birtokában nem haboztak területekből vonalakat kivonni, vagy területeket összeszorozni, „amit a nagyon óvatos Euklidés sohasem tett volna meg”.[60]

„Ez a táblarendszer, ahogy már i. e. 1800-ban létezett, egymagában az egész antikvitás számolói felé helyezte volna a babilóniaiakat. I. sz. 350 és 400 között az alexandriai Theon magyarázatok oldalait fűzi Ptolemaios hatvanas számrendszerben végzett számításaihoz Almagest-jéhez írott kommentárjaiban. Egy babiloni templom birtokának adminisztrációs írnoka 2000 évvel Theon előtt joggal csodálkozott volna ily egyszerű technikára vesztegetett annyi sok szón.”[61] Ugyanígy számtáblákban fejezik ki a babiloni matematikusok a Pythagoras-tételt is, másfél évezreddel Pythagoras előtt. „Mindezek a problémák – írja Neugebauer – valószínűleg sohasem voltak élesen elválasztva olyan módszerektől, amelyeket mi ma algebrainak nevezünk. Az egész csoport középpontjában a kétismeretlenű másodfokú egyenlet megoldása áll.”[62]

Tipikus az

$$x\bar{x}=1 \quad x+\bar{x} = b$$

probléma. Számos esete van, legfontosabb „az a típus – írja Neugebauer –, amit normálalaknak nevezek: két számot kell találni ha a, szorzatuk és b, összegük vagy különbségük adott. Számtalan példa célja nyilvánvalóan az, hogy megtanítsa a bonyolultabb kvadratikus problémáknak eme normálalakokra való transzformálását

$$x \cdot y = a$$
$$x \pm y = b,$$

58 Uo. p. 8.
59 Uo. pp. 9–11.
60 Waerden, B. L. van der: Science awakening. Groningen, 1954. p. 72.
61 Neugebauer, O.: The exact sciences in antiquity. Providence, Rhode Island, [2]1957. pp. 34–35. – Magyar ford.: Egzakt tudományok az ókorban. Ford.: Guman István. Jegyz.: Gazda István. Bp., 1984. Gondolat. 260 p., [16] t. *(– a szerk. kieg.)*
62 Uo. p. 40.

amiből a megoldás mint

$$x = \frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 \mp a}$$

$$y = \pm \frac{b}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 \mp a}$$

adódik a két eredeti egyenletet két lineáris

$$x \pm y = b$$
$$x \mp y = \sqrt{b^2 \mp 4a}$$

egyenletre transzformálva. Más szóval, a négyzetes egyenletet normálalakjára redukálni annyit jelent, mint lineáris egyenletek legegyszerűbb rendszerére hozni.”[63]

A matematikai táblák gondos tanulmányozása megmutatta, „hogy a régen ismert és sajátságosan primitív egyiptomi matematika és a legélesebb logikai analízissel átdolgozott görög matematika mellett létezett a mediterrán kultúrkörben még egy harmadik matematikai ideavilág is: a babiloni matematika algebrai fogalomképzése”.[64]

Hová lett ez a korai algebra? Erre is Neugebauer válaszolt leghatározottabban, s őt követte van der Waerden: ez a babiloni algebra öltözött át geometriai formába a görög matematikában. A kérdés története hosszú s mint a görög matematika történetírásában majdnem minden, ez is Tanneryre nyúlik vissza.

Tannery már 1882-ben felismeri,[65] hogy a másodfokú problémáknak a II. könyvben található megoldásai, ahol az ismeretlenek, mint hosszúságok, a szorzataik pedig mint felületek jelentkeznek, s amely problémákat mi $x^2 + px + q = 0$ egyenlet alakjában írjuk fel, még a legelső pythagoreusokra kell visszanyúljanak. Ugyanezeknek a problémáknak a VI. könyvben való megismétlése azért vált szükségessé, mert a görög matematika kezdetén felfedezték, hogy nem minden hosszúság-összehasonlítás fejezhető ki egész számok arányával, nem minden hosszúság mérhető össze egymással. Érthető, hogy ez a pythagoreusok számára, akik a dolgok lényegének az egész számokat tekintették – un véritable scandale logique, une redoutable pierre d'achoppement volt.[66] Ha valamit, hát ezt a felfedezést érdekükben állott eltitkolni, s száműzni ahonnan csak lehetett a kétes

[63] Uo. pp. 40–41.

[64] Neugebauer, O.: Vorgriechische Mathematik, 2. – Ebben a tekintetben a The exact sciences in antiquity felfogása egészen más. A Vorgriechische Mathematik a különbségekre helyezte a súlyt, az Exact sciences a tudományos fejlődés változatlan jellegű vonatkozásaira. Nem lehet figyelmen kívül hagyni, anélkül, hogy bármiféle közvetlen hatásra gondolnánk, azt a tényt, hogy a nyugati történetírás a két könyv kiadása között ugyanezt az alakulási tendenciát mutatta: a kultúrkör elmélettől az ideatörténet felé.

[65] Tannery, P.: De la solution géométrique des problemes du second degré avant Euclide. (1882). In: Mémoires Scientifiques I. Paris, 1912. pp. 254–280.

[66] Uo. p. 268.

mennyiségeket. Ez történik a második könyvben, ahol területek összeadásával vagy kivonásával oldva meg a problémákat, elkerülik a vonalak kivonásakor, ill. aránybaállításakor felmerülő nehézségeket.[67] De a görög matematika nem a mi algebránkhoz hasonló módon alkalmazta ezeket a geometriai számolási eszközöket. Tannery éppen azt hangsúlyozta, hogy milyen különbség van ugyanazon problémáknak a görög és modern megoldása között. A görög „szerkesztések nem egyenletek megoldásai, a görögök úgy látszik, sohasem láttak mást az egyenletekben, mint konkrét vagy ilyennek feltételezett mennyiségek között fennálló valódi relációkat. Épp ezért náluk az ismeretlennek csak egyetlen értéke lehetett", amit nem lehet a mi másodfokú egyenletünk gyökeivel összehasonlítani.[68]

H. G. Zeuthen látszólag egészen kis módosítást vitt be Tannery interpretációjába, éppen mert a II. és VI. könyv geometriai számolása és a mai algebra közötti hasonlattevésnek nem tudott ellenállni. Csaknem mindent átvesz Tannery értelmezéséből. Elfogadja az incommensurabilitás felfedezése következtében beállított „botrány" elméletét s azt a feltevést, hogy a pythagoreusok az így előállított nehézségek elkerülésére geometriai aritmetikájuk továbbfejlesztéseként alakítják ki a második könyvben leírt geometriai számolást. Nem vetik el ezt a számolási módot az incommensurabilitásnak Eudoxos általi legyőzése után sem – s itt lép túl Tannery óvatos interpretációján –, mert felismerik, hogy olyan jelrendszert (Zeichensprache) alakítottak ki benne, ami ugyanazokat a feladatokat képes megoldani, mint a mi algebránk, míg az utóbbi nem lép túl másodfokú kifejezések tárgyalásán. Az így kialakított geometriai algebrájuk éppen a mi másodfokú egyenleteink megoldására alkalmas.[69] Zeuthen geometriai algebra hipotézisét *Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum* (Koppenhagen, 1886) című művéből lehet legjobban megérteni. A kúpszeletek tárgyalásához a görögöknek is analitikus segédeszközökre volt szükségük, és Zeuthen analitikus segédeszközökön magától érthetődően analitikus geometriát ért. Természetesnek veszi, hogy a görögök már alkalmazzák a koordinátarendszert, ha a fogalmat explicite nem is vezetik be. „A koordinátákat azonban mi az algebrával együtt használjuk, s ezt a görögök nem ismerték. Meg kell tehát vizsgálni, mi lép náluk a koordináták használatánál, valamint más vizsgálatoknál is, ahol mi most az algebrát használjuk, az algebra helyébe." Zeuthen szerint erre a célra két segédeszközt használtak: az arányelméletet és a geometriai szerkesztésekkel való számolás módszerét, amint az az „Elemek" II. könyvében jelentkezik. Az arányelmélet azonban az incommensurabilitás felfedezése után nehéz helyzetbe jutott, s míg Eudoxos ki nem bővíti a számfogalmat az irracionális számok definíciójával, addig az arányelmélet nem volt általános

[67] Uo. p. 257, 263.
[68] Uo. p. 280.
[69] Zeuthen, H. G.: Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum. Koppengahen, 1886. pp. 5–11.

mennyiségekre (valós számokra) alkalmazható. Ezért egy másféle, „bizonyos határok között teljesen általános mennyiségekre is alkalmazható” jelbeszédet alakítottak ki, a geometriai szerkesztésekkel történő számolás módszerét. Ezt a módszert az incommensurabilitás felfedezése nem zavarta. Az így kialakult módszert joggal lehetett Zeuthen szerint geometriai algebrának nevezni, mert ez, mint az algebra, alkalmas általános mennyiségekkel való munkára és a közönséges beszédtől különböző eszközöket használ eljárásai szemléletessé tételére. Ez a geometriai algebra Euklidés korára olyan fejlettséget ért el, hogy ugyanazon feladatok megoldására volt képes, mint a mi algebránk, amíg ezek a feladatok nem mennek túl másodfokú kifejezéseken.[70]

Összefoglalva, ha a görög kúpszelet-elméletet analitikus geometriának tekintjük, akkor az „Elemek” II. és VI. könyvében megadott szerkesztések felfoghatók egy ehhez szükséges geometriai algebraként. S ha a premissza nem áll? Ha a görög kúpszelet-elmélet nem tekinthető analitikus geometriának? Akkor annak sincs semmi értelme, hogy a II. és VI. könyvet valamiféle algebrának interpretáljuk. Zeuthen természetesnek vette, hogy a görög kúpszelet-elmélet analitikus geometriának tekinthető, s épp ezért algebrásította a görög szerkesztéses számolást. A későbbi matematikatörténészek nem veszik ezt ilyen természetesnek. H. De Vries szerint analitikus geometria a XIX. század előtt egyáltalán nem létezik.[71] Ugyanez a véleménye R. Tatonnak[72] is. Az analitikus geometria történetének monográfusa, C. B. Boyer szerint sem lehet a görögöknél analitikus geometriáról beszélni, az analitikus geometria a szimbolikus algebra kifejlődését feltételezi s a görögöknek erről még csak fogalmuk sem volt.[73] Ezt a nehézséget a görög analitikus geometria létezését védő matematikatörténészek is érzik, pl. J. L. Coolidge, aki a görög kúpszeletelmélet legfontosabb segédeszközének nem az algebrai geometriát tekinti, hanem az *eudoxosi* arányelméletet.[74]

Amint a fentebb ismertetett interpretációkból kitűnik, a geometriai algebra kérdése nem választható el a görög analitikus geometria kérdésétől. A geometriai algebra kérdése Zeuthennél a kúpszelet-elméletből merült fel. Otto Neugebauer azonban a fordított irányból indul ki. Először is bizonyítottnak veszi a görög geometriai algebra létezését, s azután kimutatja, hogy ennek a geometriai algebrának az egyes tételei semmi egyebek, mint a babiloni algebra eredményeinek a geometriai algebra nyelvére való átültetései. „Ha így fogalmazzuk meg a problémát – írja Neugebauer – minden további teljesen triviális és a

---

70 Uo. pp. 1–7 .
71 Vries, H. de: How analytic geometry became a science. = Sripta Mathematica Vol. 14. (1948) pp. 5–15.
72 Taton, R.: La préhistoire de l'analyse géométrique. = Archives Internationales d'Histoire des Sciences 29 (1950) pp. 89–102.
73 Boyer, C.: History of analytic geometry. New York, 1956. p. 20.
74 Coolidge, J. L.: The origins of analytic geometry. = Osiris Vol. 1. (1936) pp. 231–250.

babiloni algebra simán csatolható Euklidés formuláihoz. A babiloni $xy = a$; $x + y = b$, illetve $xy = a$; $x - y = b$ normálalakok közvetlenül átfordíthatók geometriai nyelvre és a megoldás itt sem egyéb, mint a babiloni $\frac{x}{y} = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c^2}$ formula szó szerinti lefordítása."[75]

A babiloni algebra nagyra értékelésében nem minden matematikatörténész ért egyet Neugebauerrel. Ettore Bortolotti az *Osiris* első évfolyamában kimutatta, hogy a babilóniaknál nyoma sincsen még az algebrai módszernek. Szerinte egyenletek, normálformákra való redukció csak a modern fordítók mesterkedései, a babiloniak számkörében elképzelhetetlen minden racionális algebrai elmélet.[76] Márpedig Neugebauer éppen a babiloni számrendszert tartotta tökéletesnek, tökéletesebbnek, mint az azt követő görögöt, és a babiloni számfogalom analízise során jut arra a felismerésre, hogy bizonyos számtáblákat egyenletmegoldásként értelmezzen. Annyi azonban kétségtelen, hogy a *Neugebauer*-féle babiloni számfogalom Gauss számelmélete nélkül nehezen képzelhető el. „Két a és b számot – írja Neugebauer – amelyek csak 60 (pozitív vagy negatív) hatványának szorzatával különböznek egymástól 60 mint faktor szerint kongruensnek fogunk nevezni, és $a = b$ (fact 60)-val jelölünk. Ékírásban felírva az ilyen kongruens számok nem különböztethetők meg."[77] Ez a speciális számfogalom teszi lehetővé az osztó- és szorzótáblák összeállítását és használatát, s a számolási műveletek algebrai interpretációját.

De hátha a babiloni számfogalom csak a *Gauss*-féle számelmélet ismeretében hat olyan modernnek? Kétségkívül értelmezhetők az ékírásos táblák modern matematikai szempontból úgy is, ahogy Neugebauer teszi, de vajon így értelmezték-e őket a babilóniak is?

Hasonlóképpen a görög geometriai algebra is csak akkor interpretálható algebrának, ha a vonalszakaszt általános matematikai mennyiségként (valós számként) fogjuk fel, s a reáemelt négyzetet ennek a számnak a második hatványaként. És a szokásos algebrai írásmódra még akkor is csak úgy térhetünk át, ha a vonalszakaszszám és négyzete között semmi elvi különbséget nem teszünk, ha egy szám négyzetét, köbét stb. ugyanolyan számnak tekintjük, mint magát a számot. Egyszóval, ha rendelkezünk a hatvány fogalmával.

Jól tudjuk, hogy ezeket a nagy újításokat csak Descartes hozta be a matematikába. Ezek tették számára lehetővé az algebrai egyenletek geometriai szerkesztésekre történő kölcsönösen egyértelmű leképezését. A „Geometrie" első könyve ezekkel a sorokkal kezdődik: „A geometria minden problémáját könnyen lehet olyan kifejezésekre redukálni,

75 Neugebauer, O.: Zur geometrischen Algebra. Studien zur Geschichte der antiken Algebra III. In: Quellen und Studien etc. B3 (1936) pp. 245–259.
76 Bortolotti, E.: L'algebra nella storia e nella preistoria della scienza. = Osiris Vol. 1. (1936) pp. 184–230.
77 Neugebauer, O.: Vorgriechische Mathematik, p. 5.

hogy azután már nincs szükség egyébre megkonstruálásukhoz, mint néhány egyenes vonal hosszúságának az ismeretére.

És mint ahogy az egész aritmetika semmi egyébből nem áll, mint négy vagy öt műveletből," úgy a geometriában is csupán definiálni kell ezeket a műveleteket a fent mondott vonalszakaszokra, s akkor itt is lehet egyszerűen számolni. „De gyakran nincs szükség ezeknek a vonalaknak papíron való megrajzolására, elég néhány betűvel jelölni őket, mindegyiket külön betűvel ... ahol meg kell jegyezni, hogy a^2 vagy b^3, vagy hasonlókon általában semmi egyebet nem értek, mint egészen közönséges vonalakat, bár az algebrában megszokott neveket használva négyzeteknek, köböknek stb. nevezem őket."[78]

Az algebrát, mint a négy egyszerű művelet és a gyökvonás véges számú alkalmazásából nyert kifejezések vizsgálatát Descartes teremtette meg. Ezt az algebrát egyaránt lehet vonalszakaszokra vagy tetszőleges jelekre, betűkre leképezni. Descartes algebrai módszerekről alkotott fogalmát már alig lehet megkülönböztetni attól, amit egy mai tankönyv ért algebrai módszereken „A tisztán algebrainak nevezhető módszerek és eredmények a matematika olyan tényein alapulnak, amelyek a négy alapművelet és az egyenlőségi jel véges számú alkalmazásával megfogalmazhatók."[79]

Ilyen értelemben vett algebráról Descartes előtt nem beszélhetünk. Amit ő előtte így neveztek, az csupán egyes egyenletek megoldása volt s a görög geometriai algebrában még egyenletekről sem lehet szó. A görög matematika nem geometriai szerkesztések és egyenletek, hanem geometriai szerkesztések és arányok között keres kapcsolatot, s ez nagyon különböző attól, amit Descartes teremtett meg.

Éppen azért foglalkoztunk olyan részletesen van der Waerden Theaitétosával, mert Waerden az egyik első matematikatörténész, aki határozottan kidolgozta a korai görög matematika arányelmélet jellegét. Ebben a matematikában a mi algebránktól merőben idegen fogalmak szerepelnek, mint pl. *άνταναίρεσις*, *άλογος*-nak nevezett vonalak, *ρητος*-nak mondott területek. Miért nevezik *άλογος*-nak az incommensurabilis vonalakat, miért indulnak ki a vonalak osztályozásában a rájuk emelhető négyzetekből, mit jelent az, hogy Archytas két középarányost ír be ott, ahol mi egy harmadfokú egyenletet oldanánk meg?

Az első ilyen jellegű kérdéseket egy Tannery-tanítvány, Pierre Boutroux vetette fel.[80] Ő látta először világosan, hogy a görög matematika fogalmai nem írhatók át modern jelekkel. Utána Kurt Reidemeister, a modern algebrai geometria egyik megteremtője közeledett ilyen

78 Oeuvres de Descartes. Publiées par Ch. Adam & P. Tannery. Tome VI. pp. 369–371.
79 Szele Tibor: Bevezetés az algebrába. Bp., 1953. p. 9.
80 Boutroux, P.: Les principes de l'analyse mathématique. Exposé historique et critique. Paris, 1914. I. p. 486, 1. lábjegyzet, uo. p. 280, 326.

kritikus módon az alapfogalmak saját matematikai gondolatvilágukból való megértésének az igényével a görög matematikához. Cantor, Heath, Tannery, Zeuthen, Stenzel és Becker – írja Reidemeister – mind a késői teljesen megbízhatatlan neopythagoreusok hatása alá kerültek, s elhitték, hogy a középelmélet, a figurális számok, az irracionális felfedezésének botránya tények. Valójában ezek neopythagoreus mesék. Az irracionális felfedezése semmiféle gondolkozási krízist nem okozott, ellenkezőleg, a görög geometria természetes fejlődési vonalába esett. Ez a vonal a szemlélettől való fokozatos megszabadulás volt, s az irracionalitás felfedezése logikusan következő lépés egy dyadikusan felépített aritmetikában. A görög aritmetika a zenei intervallumok elméletével karöltve fejlődik, és a geometriai számolási mód teljesen független az irracionális problémájától. A tizedik könyvben sem bikvadratikus egyenletek feloldásának a geometriai algebrájáról van szó, hanem a különféle típusú irracionalitásoknak bizonyos racionális nevekre (Namen) való visszavezetéséről. Theaitétos pedig valószínűleg nem egyéb, mint a platóni dialógus körül kikristályosodott legenda. A X. könyv már Platón hatását sejteti, és olyan teljesítmény „ami mélységben és értékben az Eudoxoséval mérhető össze”.[81]

Szó sincsen tehát külön „theaitétosi” és eudoxosi fejlődési fokról, mint O. Becker és Waerden hitték, a görög matematika nagy teljesítményei Reidemeister szerint nem koraiak, hanem egy olyan időszak termékei, amelyik gondolatvilága Platón filozófiájában tükröződik. Másrészt Reidemeister a babilonból való átvétel elméletét is elveti. Honnan és hogyan állanak akkor elő a görög matematika bizonyításai, tételei, szakkifejezései? Kurt von Fritz[82] az „Elemek” egzakt, tudományos felépítését az aristotelési filozófia hatásának tulajdonította, de az „Elemek” egyrészt nem tökéletes logikai zártságú könyv, másrészt tételei nagy része bizonyosan sokkal régibb Aristotelésnél.

Példa a IX. 20., amelyik azt mondja ki, hogy minden előre megadott prímszámnál létezik nagyobb prímszám. Szabó Árpádnak sikerült erről a tételről bebizonyítania, hogy éppen úgy korai pythagoreus eredmény, mint az „Elemek” másik transfinit tétele, amelyik a négyzetátló és -oldal incommensurabilitását mondja ki. A két tétel bizonyításmódja is azonos: reductio ad absurdum.[83] Honnan jön ez a bizonyítási mód a korai görög matematikába? S egyáltalán miért éppen a korai pythagoreus matematikában olyan gyakori? Ugyanis a fenti két transfinit tételen kívül ugyanerről a bizonyítási módról van szó az O. Becker által

81 Reidemeister, K.: Die Arithmetik der Griechen. – Das exakte Denken der Griechen. Hamburg, 1949. pp. 15–43.

82 Fritz, K. von: Die APXAI in der griechischen Mathematik. = Archiv für Begriffsgeschichte Vol. 1. (1955) pp. 13–116.

83 Szabó, Á. Ein Lehrsatz der pythagoreischen Arithmetik. = Elemente der Mathematik 11 (1956) No. 5. pp. 101–105.

rekonstruált, és Reidemeister által is ősi pythagoreus matematikának elismert páros-páratlan elméletben is. Azon tulajdonságok egyike, amelyeket Becker oly jellegzetesnek talált a páros-páratlan elmélet bizonyításmódjára, nem egyéb, mint a Parmenidés által bevezetett bizonyítási módszer, az ún. „hármas út” módszere. Szabó Árpád emlékeztet rá: Karl Reinhardt már 1916-ban kimutatta, hogy Parmenidésnek ezt a módszerét gúnyolta ki i. e. 500 körül egy szicíliai komédiaíró, Epicharmos. És éppen ebből a komédiából fennmaradt töredékben fordul elő először a páros-páratlan szám elnevezés. A töredéket O. Becker és van der Waerden a páros-páratlan elmélet korai voltának a bizonyítására használták fel, és úgy értelmezték, mint a pythagoreus matematika kigúnyolását. Szabó Árpád a Becker és Waerden eredményeit összevetve a Reinhardt megoldásával, kimutatja, hogy itt, a páros-páratlan elméletben az eleata „hármas út”, az ellentmondásmentesség kritériuma kerül át az eleata filozófiából a pythagoreus matematikába.[84] S ennek az eleata bizonyítás kritériumnak a hatására válik a pythagoreus matematika deduktív tudománnyá.[85]

De honnan ered a pythagoreus matematika sajátos számfogalma, az oszthatatlan egységekből álló szám fogalma? A megelőző matematika, a babilóni ugyanis éppen a számok oszthatóságára épült fel: a „határozatlan helyértékrendszeren” belül bármely két szám szorzata az egység – modulo 60. Innen kiindulva nem lehetne megérteni a görög számfogalmat. Az egység euklidési definíciója „egy az, ami szerint minden dolgot egynek mondunk” – egészen más forrásokból táplálkozik.

Szabó Árpád Platón „Állam” c. dialógusának analízisén keresztül mutatja ki, hogy ez a számfogalom Parmanidés létezőről szóló tanítására vezethető vissza. S ez az egység megsokszorozásából álló számfogalom tette szükségessé az „osztás” és a „rész” pontos megfogalmazását. A folyamat nyomon követését a használt terminus technicusok teszik lehetővé. „Kézenfekvő volt – foglalja össze idevonatkozó vizsgálatait Szabó Árpád – a legegyszerűbb fajta oszthatóság (a ’felezhetőség’) jelölésére a leggyakrabban használt eleai terminust, a *διαιρειν* igét használni. Ugyanakkor viszont azt a névszót – ’rész’ = *μέρος* –, amely az eleaták által még tagadott ’osztás’ eredményét jelölte, fölhasználhatták a számok egyéb oszthatóságainak a megjelölésére.”[86] Ebben az összefüggésben érthető meg Euklidés nyolcadik axiomája: „az egész nagyobb mint a rész”, Ugyanis az eleata-pythagoreus egység fogalom a geometriára alkalmazva a „pont” fogalmához vezet: „pont az, amelyiknek része nincs”, s ekkor a véges vonalszakaszt éppen a 8. axiomával lehet megvédeni Zénón „fele idő

84 Szabó Á.: Eleatica. = Acta Antiqua Academiae Scientiarum Hungaricae 3 (1955) No. 1–2. pp. 67–102.

85 Szabó Á.: Hogyan lett a matematika deduktív tudománnyá? I–II. = Matematikai Lapok 8 (1957) No. 1–2. pp. 8–36., No. 3–4. pp. 232–247.

86 Szabó Á.: A görög matematika definíciós-axiomatikus alapjai. = Matematikai Lapok 10 (1959) No. 1–2. pp. 72–121.

egyenlő a duplájával” paradoxonával szemben.[87]

Az eleata logikának a geometriára való alkalmazása sokkal nehezebb feladatot jelentett, mint az aritmetikai alkalmazása. A görög matematika a geometria területén fokozottan kényszerül a maga álláspontjának az eleata filozófiával szembeni rögzítésére. A folyamat végeredménye a görög geometria axiomatikus-definitorikus megalapozása lett. A részletek valamelyes felderítése a megbízható források teljes hiányában csak a használt terminusok analízise alapján volt lehetséges. A terminusok változásainak a felderítéséből következtetni lehet az általuk takart jelentésre, ami végső, kialakult formájukból már alig remélhető.

Így az *ἀξιώματα* helyett már közvetlenül Euklidés után *κοιναί ἔννοιαι*-it kezdenek alkalmazni, s csak Proklos tér vissza újból, s ő sem következetesen az *ἀξιώματα*-ra. A definíciók – *ὅροι* – helyett pedig gyakran használ Proklos *ὑποθέσεις*-t. Aristotelés erősen tiltakozott ennek a kettőnek a felcserélése ellen, de Platón még *ὑποθέσεις*eknek nevezte a geometria és aritmetika definícióit. Honnan erednek ezek az ingadozások, mit jelentenek a szavak a köznyelvben, a filozófia és a logika használatában és hogyan kerülnek a matematikába?

Platón a *ὑπόθεσις* szót a *ὁμολόγημα* szinonim szavaként „nem bizonyítható feltevés”, „előzetes megállapodás” értelemben használja. De ez a fogalom nem jelent teljes önkényességet: olyannak kell lennie, hogy ellentétét feltételezve indirekt bizonyítás lehetősége álljon fenn. „Lényegében minden tökéletesen végbevitt indirekt bizonyítás – írja Szabó Árpád – ilyen kettős *ὑπόθεσις* alkalmazásból áll, és éppen erre épül fel az egész platóni dialektika.”[88] A módszert a matematikából veszi át: az indirekt bizonyítás az i. e. V. század matematikájának fő bizonyítási módszere. Ide pedig az eleata logikából jutott. A definíció fogalmának az eredetét az eleata logikában kell keresni. Ugyancsak a dialektikában lehet megtalálni az *ἀξίωμα* kifejezés eredetét is. Euklidés axiómái lényegében mind egyetlen fogalom, az egyenlőség meghatározására valók. Platón erre a célra két definíciót használ, s így is nevezi őket, *ὁμολογήματα*. Az eklidészi *ἀξιώματα* azonban csak az érzékszervek által igazolható, empirikus tételek, s így nem léphetnek fel a *ὁμολογήματα*-vá váláshoz szükséges közös megegyezés igényével, mert az eleata dialektika szerint csak az értelemmel megragadható tételek érdemlik meg ezt a nevet. Az *ἀξίωμα* helybenhagyását meg kell követelni a vitapartnertől, éppen úgy, mint a postulatumét; épp úgy „függőben marad” a vita során, mint az utóbbi. Az *ἀξίωμα*-nak ezt az értelmét csak Aristotelés sorvasztja el, csak utána veszi fel a „természetszerűen igaznak tartott tétel” jelentést. De a matematika még sokáig

[87] Uo. pp. 106–118.

[88] Szabó, Á.: Anfänge des Euklidischen Axiomensystems. = Archive for History of Exact Sciences 1 (1960–1962) No. 1. pp. 37–106.

annyira érzi az eredeti értelmet, hogy az euklidési szövegben inkább felcseréli *κοιναί ἔννοιαι*-ra.[89] Eredetileg azonban az *ἀξιώματα* éppen úgy az eleaták kritikája ellen felállított követelmények voltak, mint az *αἰτήματα*. Nem formális logikai jellegük, hanem tartalmuk különböztette meg őket. Előbbiek az „egyenlőség" fogalmának a megvédését szolgálták, utóbbiak a „geometriai mozgását": a szerkesztését.[90]

Ismét a már érintett ténnyel állunk szemben: a geometria területén a görög matematika lényegesen nagyobb erőfeszítéseket tesz álláspontja rögzítése érdekében, mint az aritmetikában. Az aritmetikában ugyanis két szám viszonyának, a *λογος*-nak az egyenlőségére már a legkorábbi időben bevezet a görög matematika egy kifejezést: *ἀνά λόγον ἴσοι*, a logos szerint egyenlőek. Az *ἴσον* csakhamar elmarad, az *ἀνάλογον* átkerül a matematikai szaknyelvből a köznyelv be és a grammatikába, az *ἀνα* prepozíció eredeti disztributív jelentése elvész, s az analógia felveszi mai jelentését, amiből az eredeti jelentést többé kihámozni nem lehetne.[91]

Nagy és nehezen kibogozható problémát jelent a szavak élete. Ugyanazok a szavak korszakonként egészen mást jelentenek, s ugyanazon dolgok jelölésére használnak korszakonként egészen más szavakat. Egy szó lefordítása távolról sem jelenti még a szó megértését. Sőt: sok esetben éppen a lefordítás lehet a megértés legfőbb akadálya. Mutatja ezt a *δύναμις* esete.

Ennek a szónak a félreértéséért Tannery felelős. Ő adta meg a szónak négyzet-*oldalként* fordítva azt az értelmet, amelynek a segítségével később azt mutatták ki Theodorosról, hogy a $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \ldots \sqrt{17}$ irracionalitását akarja bizonyítani esetenként, mert általános tételt még nem tudott hozni az irracionalitásokról, s 17-nél azután abbahagyta. Az irracionalitások teljes, általános elméletét tanítványa, Theaitétos adta meg az „Elemek" X. könyvében.

Szabó Árpád a kérdéses Platón-helyet az egész dialógus keretében, nagyon figyelmesen analizálva kimutatja,[92] hogy a *δυνάμις* nem négyzet*oldalt* jelentett, hanem négyzetet, ill. a *δυνάμει συμμετρος* rövidítése. A kérdéses Theodoros-jelenetben nem a $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \ldots \sqrt{17}$ irracionalitásának tökéletlen, egyedi bizonyításáról van szó, hanem egy általános megkülönböztetésről „hosszúságuk szerint commensurabilis" – *μήκει σύμμετρος* – és a „föléjük emelhető négyzet szerint commensurabilis – *δυνάμει σύμμετρος* – vonalak között.

[89] Uo. p. 78.
[90] Uo. pp. 78 –84.
[91] Szabó, Á.: ΑΝΑΛΟΓΙΑ. = Acta Antiqua Academiae Scientiarum Hungaricae 10 (1962) No. 1–3. pp. 237–245.
[92] Szabó, Á.: Der mathematische Begriff δύναμις und das sog. 'geometrische Mittel'.(megjelenés alatt.) – Szabó Árpád tanulmánya megjelent: Maia. Rivista di letterature classiche. Nuova Serie 15 (1963) No. 2. pp. 219–256. *(– a szerk. megj.)*

„Theodoros tanítványai tehát tulajdonképpen csak egy odaillő *elnevezést*, *nevet* kerestek arra, amit éppen megtanultak.” „Theaitétos”, a matematikus, pedig késő antik, neopythagoreus legenda.

De mit jelentett maga a *δύναμις* szó egyébként a görög nyelvben? S van-e ennek a jelentésnek jelentősége a görög matematika története szempontjából? Megengedi-e a *δύναμις* szó használata a „hatvány”-ként való fordítását és interpretációját, mint Tannery tette volt? Szabó Árpád az ige, *δύνασθαι*, köznyelvben, gazdasági és politikai szóhasználatban való előfordulásait végigkövetve kimutatja, hogy mindig valamilyen értékegyenlőséget fejez ki. Geometriai szóhasználatban pedig négyzetérték szerinti egyenlőséget. Semmi értelme sincs tehát a „négyzetet létrehozó oldal”, a „hatvány”-ként való Tannery szerinti fordításnak.

*

Az Euklidés előtti matematika története a történetírás különleges, szélső esetét jelenti, ahol közvetlen források csaknem teljes hiányában, a primér forrásokról évszázadokkal később, sokszor több közvetítőn keresztül történt feljegyzések között kell haladni, feltevést feltevésre állítva és eldobva, óvatosan és merészen egy, legfeljebb részben helyes interpretáció felé.

A görög matematika hajnala[93]

Az Euklidész előtti görög matematika kutatását roppant megnehezíti a források teljes hiánya. Egy-két töredék, Platón néhány művészi formába burkolt utalása, egy csomó legendává hígult és teljesen megbízhatatlan későantik hagyomány, s végül és elsősorban maga az euklidészi *Elemek*: ez volt minden, amiből rekonstruálni próbálták a görög – de talán az egész – matematikatörténet legfontosabb periódusát. A töredékeket s a hagyományt C. A. Bretschneider, a gothai gimnázium tanára gyűjtötte össze s adta ki 1870-ben;[94] ő fedezte föl a híres „Eudémosz-töredéket" Szimplikiosz Arisztotelész-kommentárjában. Ebben a töredékben Eudémosz egy i. e. V. századi matematikus, a chioszi Hippokratész holdacska-kvadratúrájáról értesít. A dologban az a nevezetes, hogy az i. e. V. századi görög matematikus lényegében ugyanazt a matematikai módszert használja, mint Euklidész, aki az i. e. III. században írt, Alexandriában. Az *Elemek* módszere tehát sokkal korábbi időből kell származzon, mint addig hitték.

Az *Elemek*-et Paul Tannery, a modern tudománytörténet-írás megalapozója vizsgálta meg abból a szempontból, hogy mi tekinthető belőle korábbi korok termékének. Azóta áttekinthetetlenné növekedett az Euklidész előtti görög matematikáról szóló irodalom, a legfontosabb eredményeket Paul-Henri Michel 1946-ban egy 699 oldalas vaskos könyvben foglalta össze.[95] Ez a fontos összefoglalás lényegében a harmincas évek közepével-végével zárul, és a Bretschneider–Tannery nyomán tájékozódó pozitivista kutatásokat summázza. Ezek a kutatások az antik matematikát az újkori jelöléseivel s szellemében tárgyalták, s nem vették észre, hogy a modern köntösben teljesen elveszett a görög matematika eredeti jellege, úgyhogy ez az interpretáció inkább csak a görög eredmények jelentőségét érzékeltette.

Michel vaskos összefoglalásából majdnem teljesen hiányzik a másik nagy irány, amely ugyan szintén modern jelölésekkel és fogalmakkal, de a görög matematika „szellemében" igyekszik megközelíteni a tárgyát. Ez a „szellemtörténeti" interpretációs irány elsősorban Oscar Becker, Otto Neugebauer, Bartel Leendert Van der Waerden és – tőlünk függetlenül s kissé különböző értelemben – Kurt von Fritz munkásságán alapul, s a lényege jól

[93] Forrás: Vekerdi László: A görög matematika hajnala. In: Vekerdi László: Befejezetlen jelen. Bp., 1971. Magvető. 463–476. (Elvek és utak) – Korábban megjelent: Antik Tanulmányok 16 (1969) No. 2. sz. pp. 222–227. A kötet szövegét vettük alapul, kiegészítve az Antik Tanulmányokban közreadott jegyzetekkel.

[94] Bretschneider, C. A.: Die Geometrie und die Geometer vor Euklides. Ein historischer Versuch. Leipzig, 1870. Teubner. IV, 184 p. 1 t.

[95] Michel, P.-H.: De Pythagore à Euclides. Contribution à l'histoire des mathématiques préeuclidiennes. Paris, 1950. Les Belles Lettres. 699 p. (Collection d'études anciennes)

megismerhető egy Otto Becker által nemrégiben kiadott rangos tanulmánygyűjteményből.[96] Ez a tanulmánygyűjtemény tartalmazza Szabó Árpád első nagy nemzetközi föltűnést keltő matematikatörténeti munkáját is, az euklidészi axiómarendszer kezdeteiről,[97] jelezvén mintegy a Szabó Árpád-féle új interpretációs irány matematikatörténeti eredetét, de azt a határt is, ameddig az ő értelmezése elfér a régebbi keretei között.

Az euklidészi axiómarendszer keletkezése mindig a matematikatörténelem egyik fő problémája volt. Bretschneider fölfedezése óta erősen gyanították, hogy jóval az Euklidészé előtt kellett az övéhez hasonló *Elemek*-nek létezni, de nemigen tudták elképzelni, hogy ilyen tökéletes rendszer az arisztotelészi logika nélkül létrejöhetett volna. Az ellentmondást Kurt von Fritz oldotta föl egy méltán híres, hosszú tanulmányban, kifejtve, hogy bár az euklidészi *Elemek* axiomatikája tényleg nem képzelhető el az arisztotelészi logika nélkül, Arisztotelész sem fogalmazhatta volna meg a matematikusok megelőző vizsgálatai nélkül a bizonyító tudomány „első principiumait”.[98] Ezt a régen várt megoldást robbantotta szét s helyettesítette jobbal Szabó Árpád említett dolgozata.

A matematikára ma a levezetések és a bizonyítások jellemzők, de hogyan lett – kérdezte matematikatörténeti vizsgálatai alapján Szabó Árpád – a matematika deduktív tudománnyá? (Érdekes, hogy ez a logikus kérdés eddig senkinek nem jutott eszébe, annyira meg voltak győződve, hogy a matematika némi empirikus alapok után vagy már azokkal egy időben *mindig is* deduktív tudomány volt.) Szabó – a matematikatörténészekkel ellentétben – otthonosan kalandozott a görög filozófiatörténetben, s észrevette, hogy a matematika fontos, ma is gyakran használt bizonyítási módszere, az ún. „indirekt bizonyítás”, amely egy „feltevésből” – hüpotheszisz *(ὑπόθεσις)*, homologéma *(ὁμολόγημα)* – ellentmondást vezet le, s így bizonyítja, hogy a feltevés „lehetetlen” *(adünaton – ἀδύνατον)*, az eleata dialektikából került át a matematikába, valószínűleg még az i. e. V. század elején. Csakis az eleata dialektika ellentmondás-mentességi kritériuma kényszeríthette a matematikusokat – vette észre meglepődve Szabó professzor – állításaik s tételeik szigorú igazolására. Gondosan elemezni kezdte a *szakkifejezések* fejlődését, s csakugyan kiderült, hogy az „axiomatikus” módszer az *eleata dialektikából* fejlődött ki az i. e. V. század során. Mi több, nemcsak a hüpothesis-alkalmazást vette át a matematika, adaptálta a dialektikus eljárás egész szkémáját is, ami szerint lehetőleg pontosan meg kellett határozni, miről akarnak vitatkozni, s az egyik

---

[96] Becker, O.: Zur Geschichte der griechischen Mathematik. Darmstadt, 1965. Wissenschaftliche Buchgesellschaft. XXI, 461 p. (Wege der Forschung 33.)

[97] Szabó, Á.: Anfänge des Euklidischen Axiomensystems. = Archive for History of Exact Sciences 1 (1960–1962) No. 1. pp. 37–106. – Becker tanulmánykötetében lásd: pp. 354–462. *(– a szerk. kieg.)*

[98] Fritz, K. von: Die APXAI in der griechischen Mathematik. = Archiv für Begriffsgeschichte Vol. 1. (1955) pp. 13–116.

vitapartnernek meg kellett követelni a másiktól, hogy fogadjon el a meghatározott definíciókra – horoi *(όροι),* hüpotheszisz *(ὑπόθέσεις)* – vonatkozó posztulátumokat, követelményeket *(*aitémata – *αἰτήματα,* axiómata – *ἀξιώματα).* Szabó Árpád a későantik hagyomány, Platón és az *Elemek* bravúros összehasonlításával igazolta, hogy eredetileg a matematika is ugyanúgy s ugyanolyan értelemben használta ezeket a fogalmakat s eljárásokat, mint a dialektika, csak akkor felejtették el a matematikusok a módszer dialektikus eredetét és jellegét, amikor az eleata dialektika már rég feledésbe merült. S ez végül is érthető, hisz a nagy jövőjű fattyú, a matematika rohamosan növekedett, s messze maga mögött hagyta szülőanyját. Az euklidészi axiomatika kifejlődését azonban csak a dialektika matematikai alkalmazásaként lehet megérteni.

Sikerült, úgyszólván a születés állapotában, rajtacsípni az alkalmazás értelmét is: az volt a célja, hogy ki lehessen védeni az aritmetika és a geometria alapeljárásai ellen irányított eleata kritikát. Így pl. az *Elemek* VII. könyvének definíciói az aritmetizálás lehetőségét biztosították, az öt posztulátum – aitémata *(αἰτήματα)* – a geometrizálását. Az axióma *(ἀξίωμα)* a dialektikában, tehát eredetileg a matematikában is, az aitéma *(αἴτημα)* szinonimája volt, posztulátum, melynek érvényességét *előre meg kellett követelni* a vitapartnertől. Külön helyre az axiómák az euklidészi matematikában nem a *jellegük*, hanem a *feladatuk* által kerültek: a *rész* és az *egész* viszonyát problémásító Zénón-féle paradoxonok (az Akhilleusz, a Stadion) ellen mondanak ki, *véges halmazokra* vonatkozó tapasztalatok általánosításával, egyenlőségi *követelményeket*. Csak miután már az eleata dialektika lényege feledésbe merült, tehát Platón kora után, értették félre az axiómákat – természetes alapigazságoknak.

Ez a rekonstrukció szellemes volt, merész, s végeredményben elég egyszerű; a sikerét azonban nem ennek köszönhette. Az volt a szerencséje, hogy a matematikusok és a matematikatörténészek a *modern* axiomatika euklidészinél lényegesen szabadabb és rugalmasabb *elődjét* ismerhették föl benne; az interpretáció tehát – legalábbis látszólag – a görög matematikát modern matematikai konstrukciókkal „modellező" divatos matematika-történeti tendencia irányába esett.

Azonban ez a megegyezés a Szabó Árpád-féle módszer szempontjából inkább csak szerencsés véletlen volt, az ő módszere, amint a könyvében (A. Szabó: *Anfänge der griechischen Mathematik.* Akadémiai Kiadó, Bp., 1969) kibontakozik, többnyire modern matematikai fogalmakkal *meg nem közelíthető* eredményekre vezet. Ezek az eredmények csak a görög matematika *saját kontextusában értelmezhetők,* modern fogalmak visszavetítése a megismerést zavarja, sőt, meg is akadályozhatja. Az eredeti kontextust azonban csak fejlődésében, a terminustörténeti analízis és a matematikai fogalomképzés belső ötvözéséből kialakított módszerrel lehet föltárni.

A fentiekben röviden ismertetett dolgozat kibővítve s a szerző korai görög matematikai bizonyításokra vonatkozó vizsgálataival egyesítve képezi a könyv harmadik részét; az első két részben Sz. A. a módszert még nehezebb területre, meghatározott matematikai fogalmak és műveletek megfejtésére alkalmazza. S itt már azonnal kiderül a különbség a modernizáló interpretáció és az ő módszerével talált eredmények között.

Az első rész tulajdonképpen egyetlen szó, a dünamisz *(δύναμις)* megfejtéséről szól, de a megfejtés detektívregényszerűen izgalmas históriájában benne kavarog úgyszólván az egész Platón kora előtti görög matematika problematikája. Azt természetesen mindig tudták a matematikusok és matematikatörténészek, hogy a dünamisz a matematikában speciális szakkifejezés; Bretschneider – helyesen – „négyzet”-nek fordította, ugyanúgy, mint a tetragónon-t *(τετράγωνον)*. Azonban már Tannerynek föltűnik, hogy a dünamisz valamiképpen nem ugyanúgy „négyzet”, mint a tetragónon, s először azt hitte, hogy a dünamisz kettős jelentésű: a négyzetet is jelenti meg a négyzet *oldalát* is. Később ezt a tévedését maga korrigálta (a tudománytörténet-írásra roppant jellemző módon) – egy újabb tévedéssel: a dünaszthai *(δύνασθαι)* ige köznyelvbéli jelentéséből a dünamiszra a „ható vonal” – dünamené *(δυναμένη) = la ligne qui peut)* főnevet képezte. Hasonlóan, a szakkifejezés és a köznyelvi jelentés *összetévesztésével* sikerült másoknak a dünamiszt „hatvány”-nak félreérteni, holott azt a fogalmat a korai görög matematika egyáltalában nem ismerte. Szabó Árpád azonban nem pusztán kedves maliciából tárja föl ragyogóan a szó félreértés-történetét. A szó meg nem értése ugyanis – s ezért a hosszú analízis – azt is meggátolta, hogy meg lehessen érteni a korai görög matematika csúcsteljesítményét: az irracionalitás fölfedezését. A meg nem értés által hagyott ürességbe azután szükségképpen benyomultak a későantik legendák, s a modern matematikatörténet-írás is az irracionalitás fölfedezése által okozott matematikai „botrányról” és „krízisről” kezdett – többé-kevésbé szalonképesített formában – beszélni.

Szabó Árpád a nyelvet használva forrásként először is észrevette, hogy a dünamisz *(δύναμις)* megértéséhez csakugyan a dünaszthai *(δύνασθαι)* igéből kell kiindulni, de nem a köznapi értelméből, hanem abból, ahogyan a pénzváltók használják, mikor az egyik pénznemet azonos *értékben* átváltják a másikra. Tőlük vették át a püthagoreus matematikusok az igét annak a műveletnek a jelölésére, amellyel egy téglalapot azonos területű négyzetté alakítanak át. A dünamisz tehát úgy „négyzet”, hogy egy *téglalap négyzetértéke*; területmérték tehát, de nem úgy, ahogyan mi mérjük négyzetméterekkel vagy négyszögölekkel egy téglalap alakú telek területét. Mi „belülről” mérünk (képzeletben) egymás után kis négyzetekkel telerakva a mérendő alakzatot, a püthagoreus geometria „kívülről” mért, „globálisan”, az *egész* mérendő alakzatot négyzetté alakítva át, „négyzetesítve”. Mi a megmérendő téglalap oldalait mérjük meg tetszőleges pontossággal, tizedestörtekkel kifejezve. A görög matematika azonban nem ismerte a tizedes törteket, a mérés nekik mindig összemérés volt, két egyenes szakasz pedig csak akkor „összemérhető hosszúság szerint”, csak akkor mékei szümmetrosz *(μήκει σύμμετροι),* ha az egyik maradéktalanul benne foglaltatik a másikban. Nyilvánvaló, hogy a hosszúság szerinti összemérhetőség, a „kommensurabilitás” elnevezése és fogalma összefügg a hosszúság szerinti *in*kommensurabilitás fölfedezésével. Egy folyton idézett s sokféleképpen értelmezett Platón-dialógus gondos nyelvi *és* matematikai elemzésével mármost Szabó Árpád igazolta – s ez igen meglepő, az *egész* görög matematika történetére új fényt vető fölfedezés volt –, hogy a két elnevezés, illetve fogalom összefüggése és létrejötte csak a (helyesen értelmezett) dünamisz segítségével érthető meg.

Platón Theaitétosz című dialógusában Theaitétosz részletesen s lelkesen meséli el, mire tanította őket, ifjakat, az öreg Theodorosz, a matematikus. Fölsorolta a számokat 3-tól 17-ig, s azután megmutatta, hogy a 4, a 9 és a 16 másféle szám, mint a többi. Ha ugyanis a 3 és 17 közötti számok valamelyike a 4, 9 és 16 kivételével, szóval a 3, 5, 6, 7, 8, 10 stb. számok bármelyike egy négyzet területét jelenti, akkor az ilyen négyzet oldala – *mi* úgy mondanánk, hogy $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}$ stb. – „hosszúság szerint összemérhetetlen” – mékei aszümmetrosz *(μήκει οὐ σύμμετρος)* – az egységgel, de igenis összemérhető „négyzetérték szerint” – azaz mint 3, 5, 6 stb. –; tehát mékei aszümmetrosz, de ugyanakkor dünamei szümmetrosz *(δυνάμει σύμμετρος*). S most Szabó Árpád az idézett szövegrészt az egész dialógus kontextusába helyezve, fölvillantva a püthagoreus aritmetika jól ismert, területtel *is* reprezentálható számfogalmát, hihetetlenül gazdag nyelvi s ezzel összefüggésben elemi, de nem matematikusnak bizony nem könnyen követhető matematikai analízissel megmutatja, hogyan is vezetett a négyzetesítés problematikája szükségképpen a kvadratikus kommensurabilitás *és* a lineáris inkommensurabilitás – azaz az irracionális vonalszakaszok – fogalmához. A bonyolult elemzés gazdagságára itt természetesen még utalni sem lehet, legföljebb figyelmeztethetünk arra a finom és éles szellemességre, ahogyan Szabó Árpád az irracionalitás fölfedezése körül matematikatörténészek és klasszika-filológusok generációi által bogozott csomókat sorra elmetszi dünamisz-borotvájával. Széljegyzetekben s apró-betűs részekben semmisít meg roppant tekintélyes elméleteket és Platón-szövegből „rekonstruált”, valójában sohasem létezett „nagy matematikusokat”; mint például Theaitétoszt, akinek az életéről tudós monográfiákat írtak, s az *Elemek* aritmetikai könyveit tulajdonították neki, s Theodoroszt, akinek a nevéhez s „munkásságához” nem kisebb tudós, mint O. Becker a matematikatörténet egy egész korszakát fűzte. S szétoszlik a megértett dünamisz *(δύναμις)* tiszta fényében magáról Platónról, mint nagy matematikusról szóló ősi legenda is, hogy annál nagyobbra nőjön – apró betűs részben persze, hiszen az *Anfänge…* tudós matematikatörténeti monográfia – Platón, a *művész.* Igen nehezen érthető és többféleképpen értelmezhető Platón szövege és sok helyütt kinevetni látszik késői kommentátorait. „De hát miért is lenne Platón, a nagy művész, kevésbé talányos, mint a Gioconda alkotója?”

S vajon kevésbé talányos-e – kérdezi az olvasó Szabó Árpád sorait követve önkéntelenül – az ember csodálatos talányteremtő vállalkozása, a matematika? A matematikatörténet-írásnak, ha a regisztráláson túl a történetet is meg akarja érteni, alkalmazkodnia kell ehhez a talányossághoz. Arisztotelész egy odavetett megjegyzéséből – „a tetragóniszmosz *(τετραγωνισμός)* lényege két tetszőleges vonalszakasz *középarányosának* a megkeresése” – például meg kell fejteni tudni a korai, Platón kora előtti arányelméletet.

Az arányelmélet kialakulásáról, geometriai alkalmazásáról s a lineáris inkommensurabilitás fölfedezésével való összefüggéséről szól a könyv második része. Az alkalmazott módszer itt újabb részlettel bővül: a terminustörténeti analízishez és a terminustörténeti fejlődés matematikai értelmezéséhez a püthagoreus zeneelmélet változó terminusainak s a mögöttük rejlő *műveleteknek* a megfejtése járul. Tán egy ismeretlen írás kibetűzéséhez hasonlítható leginkább az a gondos, nagy leleményességet s türelmet kívánó módszer, ahogyan Szabó Árpád az elnevezések és a műveletek használatából, fejlődéséből és matematikai interpretációjából, s nem – mint eddig tették – csupán a gyér adatok s a több mint kétes későantik hagyomány alapján – rekonstruálja a püthagoreus zeneelmélet matematikáját. S az olvasó az így szeme előtt kibontakozó matematikában bámulva ismeri föl a görög arányelmélet fejlődését, s a püthagoreus zenei gyakorlat és elmélet számolási műveleteiből megérti végre olyan – ez ideig minden értelmezési kísérlettel dacoló – elnevezések és *eljárások* eredetét, mint például a titokzatos anthüphaireszisz *(ἀνθυφαίρεσις)*, az „euklidészi algoritmus”.

A megfejtési procedúra persze túlságosan nehéz s bonyolult ahhoz, hogy akár a vázát is ismertethetnénk, azonkívül a részleteknek, mint mindenféle talányfejtésben, itt is döntő a jelentősége. Röviden s modern nyelven – tehát szükségképpen anakronisztikusan – megfogalmazva, a Szabó Árpád-féle megfejtés kulcsa az a fölfedezés, hogy a püthagoreusok a monochorddal, ill. később a tizenkét részre beosztott mérőlappal fölszerelt monochorddal, a „kanon”-nal végzett kísérleteik alapján az oktávnak, kvartnak és kvintnek a húr meghatározott szakaszait feleltették meg. Az így kialakuló megfejtés-rendszerben az összhangzatok egyrészt két egész szám arányaként, másrészt az egész húr jól meghatározott szakaszaként jelentkeztek, s ezáltal nemcsak a hangok absztrakt arányát szemléltették – mondhatnánk

„kvázigrafikusan” –, hanem megfordítva, a vonalszakaszok és a vonalszakaszokból összetett geometriai alakzatok vizsgálatára is új, absztrakt, s a „kanon”-nal empirikusan kipróbálható lehetőséget nyertek. így azután zeneelmélet, aritmetika és geometria megfeleléseiből érdekes matematikai problémák egész sora bontakozott ki. Az eredetileg zeneelméleti fogalmak és eljárások aritmetikai és geometriai alkalmazása ugyanis sohasem történt mechanikusan. „Ellenkezőleg! Úgy látszik, hogy a zeneelmélet csak az *ötletet* adhatta. Az új területre való alkalmazás által megváltoztak részben maguk a fogalmak is.” így például maga a logosz, amely – amint Szabó Árpád a második Arkhütász-töredékben fölfedezi – a zeneelméletben s a korai (zenei) arányelméletben még nem két szám vagy mennyiség arányát jelentette, hanem pusztán két szám valamilyen, pontosabban meg nem határozott kapcsolatát. S jóllehet már a zeneelméletben szerepelt két-két szám „logosz szerinti”, ana logon *(ἀνά λόγον)* összehasonlítása, a logosz szerinti *egyenlőség,* az analogia *(ἀναλογία)*, csak a számokat téglalapokkal reprezentáló püthagoreus „geometrizáló aritmetikában” vált fundamentális fogalommá. „Hiszen a zeneelméletben legföljebb annyit lehetett megállapítani, hogy pl. a *kvint* arányszámai – 3 : 2, 12 : 8 vagy 9 : 6 – mindig egyenlők egymással (3 : 2 = 12 : 8 = 9 : 6). De ebből a felismerésből még semmiféle újabb fölfedezés *nem* következett.” A geometrizáló aritmetikában ellenben tüstént kiviláglik a logosz szerinti egyenlőség jelentősége, hiszen a téglalapszámok megfelelő oldalainak (faktorainak) „logosz szerinti egyenlősége” a két téglalap *hasonlóságát* fejezi ki. S két hasonló téglalapszámhoz (aminők például $3 = 1 \cdot 3$ és $12 = 2 \cdot 6$, ahol $1 : 2 = 3 : 6$) mindig található középarányos (a példában 6, ugyanis $3 : 6 = 6 : 12$). A középarányos természetesen megoldja a téglalap négyzetesítését (pl. azon téglalap esetében, melynek oldalai 3 és 12, a terület $3 \cdot 12 = 6^2$) azonban nyilvánvaló, hogy ilyen megoldás csak különleges esetben lehetséges, s például a kvart (4 : 3), a kvint (3 : 2) és az oktáv (2 : 1) arányaiban a két számhoz nem található középarányos szám. „A püthagoreusokat nyilván éppen ez a zeneelméleti kudarcuk kényszerítette, hogy általánosabb alakban fogalmazzák meg a kérdést. Mikor lehetséges egyáltalán két *szám* között találni egy harmadikat, amely mindkettőhöz ugyanazon arányban áll? Mikor létezik egyáltalán két szám középarányosa?” A felelet: csakis hasonló téglalapszámok esetében. Ez a megállapítás a püthagoreus geometrizáló aritmetika egyik nagy eredménye volt, s amikor aztán kiderült, hogy geometriai úton két *tetszőleges* vonalszakaszhoz, azaz mennyiséghez is szerkeszthető középarányos, azonnal fölbukkant a kérdés: „Mik tulajdonképpen ama négyzetek, melyek területmérték szerint olyan négyszögekkel egyenlők, melyeknek oldalai *nem* hasonló téglalapszámok?” Nyilvánvaló, hogy ezek az oldalak nem lehetnek a hosszegységgel maradéktalanul összemérhető számok, hiszen ez ellentmondana az előbbi megállapításnak

Ezzel azonban már el is jutottunk a lineáris inkommensurabilitás fogalmához, melyet, lám, a négyzetesítés húzott ki, egész természetesen és mindenféle mégoly szelíd „botrány” vagy „krízis” nélkül, a püthagoreus zenei-matematikai arányelméletből. Mindehhez persze nem volt elegendő a zenei kísérletekre, intuicióra és általánosításokra épülő korai püthagoreus arányelmélet; itt már bizonyítani kellett, ki kellett dolgozni a matematika hatalmas, saját levezető és bizonyító apparátusát. A bizonyító módszer lényegét s genezisét tökéletesen föltárja az *Anfänge...* III. része, a matematikai fölfedezések részleteit, azaz a klasszikus görög matematikát, azonban ma még lényegében megfejtetlenül rejti az *Elemek* hatalmas összetett kristálya. Az Anfänge-ben egy rövid függelék jelzi, merre lehetne tán keresni az utat az *Elemek* titkához; ám a könyv Szabó Árpád egykori mesteréhez, Karl Reinhardthoz hűen és méltóan végződik: „Es wird vor Türen geführt, in die man nicht eintritt – Ajtókhoz érkezünk, ám a küszöböt nem lépjük át.”

Ha a könyv helyét próbáljuk meghatározni a tudomány-történetírás rohamosan fejlődő világában, akkor is leginkább Reinhardt *Parmenides*e vagy *Poseidonios*-a kínálkozik összehasonlításul. Ahogyan Reinhardt a filozófiatörténetre, úgy fordítja itt Szabó Árpád a matematikatörténetre a filológia reflektorát, s nem vonakodik ő sem a reflektor tiszta fényében meglátott világ leírásától csak azért, mert szokatlan vagy mert nem tartozik a klasszika-filológia „hatáskörébe”. Mint minden hasonló termékeny „hatáskörsértés”, az *Anfänge* is valószínűleg lelkes híveket fog szerezni, s heves támadásokat vált ki, ahogyan Reinhardt művei is a maguk korában. A modern szimbolizmus gyorsírásához szokott matematikus és matematikatörténész elfárad a filológia konkrét adattömegében, a filológusok nagy része pedig valószínűleg tehetetlenül nézi a jóllehet elemi, de egyáltalában nem könnyen érthető matematikai megfontolásokat. Az *Anfänge* nagy érdeme, kellően nem hangsúlyozható jelentősége viszont épp a filológiai részletek és a matematikai gondolkozás szintézise, csak így sikerült föltárni a fogalmak s műveletek kialakulását és fejlődését.

A modern matematikatörténet-írás zöme nem ezen az úton halad. A szellemtörténeti irány (amit a tudománytörténet-írásban „Problemgeschichte”-nek neveznek) folytatása és öröksége képpen itt is a különféle „strukturalista” módszerek hódítanak: mai matematikai „modellek” segítségével próbálják megvilágítani régmúlt korok matematikai „struktúráit”. így például egy hosszú és alapos, nagy elismerést kiváltó tanulmány[99] azt mutatta meg, hogyan kell modern igényeket kielégítő hiánytalan axiómarendszert összeállítani az Elemek V. könyvéhez, s az így konstruált modell alapján próbált arra következtetni, hogyan tért át a

[99] Beckmann, F.: Neue Gesichtspunkte zum 5. Buch Euklids. = Arcive for History of Exact Sciences 4 (1967) pp. 1–144.

matematika az „arányokra” a „mennyiségekről”. A konstrukció természetesen roppant érdekes és nagyon tanulságos, noha az arányokhoz és mennyiségekhez úgy, ahogyan azok az *Elemek*-ben előfordulnak, nincsen semmi köze. A matematikusokat azonban mindez nem zavarja, a matematikatörténet-írásba még alig-alig hatolt be az a történeti hűségre törekvő szemlélet, amely – elsősorban Anneliese Maier és Alexandre Koyré nyomán – a tudománytörténet-írást (elég lassan) átalakítja. A matematikatörténet-írás még alig-alig próbálja egy-egy korszak fejlődését az *akkori* matematikai fogalmak, műveletek és tudás alapján megérteni, pedig *modern* matematikai fogalmakkal és jelölésekkel legfeljebb ha utalni lehet a régi matematikusok gondolataira. A modern jelölésekből következő könnyebbség természetesen hasznos, mindaddig, amíg el nem felejtődik, hogy csak utalás, amely mögött meg kell keresni a régi matematikát. Ez azonban eddig nagyon kevés embernek jutott eszébe, s az Anfänge az első mű, amelynek egy nagy s fontos korszak matematikájában *sikerült.* Ez a szerény recenzió csupán azt szerette volna érzékeltetni, hogy ezáltal milyen fontos határkőhöz érkeztünk a matematika-történetírásban. Az *Anfänge* nyomán újra kell írni a görög matematika történetét, meg lehet végre közelíteni az antik gondolkozás legfontosabb aspektusait.

Tóth Imre „Ahile” című könyvéről[100]

Tóth Imre könyve („Ahile”. Paradoxele eleate la fenomenologia spiritului) *nem* úgy használja a matematikát, ahogyan azt a ma divatos filozófiai monográfiáktól megszoktuk. Fontos ezt rögtön indulásként hangsúlyozni. A szabályos modern „okos könyvek” ugyanis úgy indulnak el a matematikától, mint az egyszeri táncos a kályhától, s formabontó elmetáncuknak is körülbelül annyi a köze hozzá. Az *Ahile* ellenben nem kályhának használja a matematikát, és nem is azért firtatja, hogy megtudja általa, mik a gondolkozás „törvényei”, netán mi az „igaz” és a „hamis”; bár valamiképpen a gondolkozásról szól ez a könyv, és az „igaz”-ról, helyesebben tán az „igaz” létezésének a gondolkozásban kibomló paradoxonáról, azaz ez a könyv... Azonban jobb, ha fölhagyunk a meghatározás meddő kísérletével, s elfogadjuk a maga választotta műfaji definíciót: khelonomahia – teknőcküzdelem.

A khelonomahia a klasszikus példa – Akhilleusz és a teknős versenye – részletes analízisével és rekonstruálásával indul. Az olvasó, ha legalább konyít valamit a matematikához, meglepődve veszi észre, mi mindent rejt ez a rendszerint könnyen, s (Arisztotelész nyomán) még ma is a mozgás elleni paradoxonként elintézhetőnek vélt kis mese. Tóth Imre páratlanul ért hozzá, hogyan kell ismert és könnyen elintézhetőnek vélt dolgok gazdag és rejtett összefüggéseit kibogozni, s így a gyors lábú Akhilleusz és a cammogó teknőc egyszerű meséjéből a szemünk láttára bomlik ki a gondolkozás odisszeájának tán legfontosabb korai kalandja: az *értelem* és a *tapasztalás* küzdelme. Mert erről szól ez a kis „meta-mese”.

Tóth Imre mindenekelőtt a verseny feltételeit fejti meg. Paradoxon ugyanis csak akkor jelentkezik, ha meghatározott feltételek teljesülnek. Ezek a feltételek mai matematikával viszonylag könnyen megfogalmazhatók, hisz lényegében azt követelik, hogy az egymás utáni időpontokban Akhilleusz és a teknősbéka egyre közelébb kerüljön egymáshoz, azaz az egymás utáni távolság-különbségekből álló sorozat egyre inkább közeledjen a zérushoz. Azonnal nyilvánvaló, hogy Akhilleusz és a teknőc *matematikai* találkozása, koincidenciája *nem* olyasmi, mint a sorozat tagjai, hisz a távolságkülönbségek, bármily kicsinyek is, szükségképpen nagyobbak zérusnál: az *A* pont bármely előre megadott értéknél közelébb juthat a *B* ponthoz, el azonban nem érheti. Ez az elérthetetlenség azonban – hisz a *feltételei*

[100] Forrás: Vekerdi László: Tóth Imre könyve. [„Ahile”. Paradoxele eleate la fenomenologia spiritului. Editura Sliintifică, Bucureşți, 1969.] (Ism.) = Valóság 13 (1969) No. 5. pp. 110–111.

pontosan megfogalmazhatók – tekinthető valami *új, más* fogalom meghatározásának is. Ennek az új, így definiált fogalomnak a neve a matematikában *határérték*. Ezt hozzávéve a végtelen sorozathoz, azt is mondhatjuk, hogy itt az *A* pont „utoléri" a *B*-t. A tagadás tehát új fogalmat teremtett, ezáltal azonban még nem szűnt meg a paradoxon, hisz az „utolérhetetlenség" definiálta épp az „utolérhetőséget", mely e nélkül a definíció nélkül, csak úgy magában, természetesen soha nem is létezett.

A „létezés" tehát – s ez Tóth Imre elemzésében a lényeg – elválaszthatatlanul összefügg az „alkotással" a sorozat határértéke „teljesen új fogalmi entitásként jelenik meg a gondolkozás univerzumában. Nem *kívülről* jön, de még sincs az addig ismert fogalmak között: *abszolút új* noetlkus objektumként jelentkezik az észlelés ama tisztán noetikus univerzumában, ahol a szellemben folyó titokzatos metamorfózis következtében megjelenik, kezdetben ahhoz hasonló vegetatív öntudatlansággal, ahogyan a test lélegzik. Ez a metamorfózis: *a nem létező átalakulása létezővé*. És ez a metamorfózis, ez az állandó ontológiai halmazállapotváltozás a nemlétezésből a létezés állapotába, ez éppen a szellem életének a tulajdon specifikus létezési módja."

Ez a szellemi létrehívás persze nem korlátozódik a matematikára, a gondolkozás általános tulajdonsága, a matematikában csupán legtisztábban tanulmányozható az „alkotás logikája", mely lényegében abból áll, hogy a gondolkozás új fogalmakat teremt a már ismert fogalmak részleges vagy teljes tagadása által. Ez az alkotó tagadás – s ez is kitűnően látható a matematika példáján – nem azonos a formális logikai negációval, nem az igen–nem durva kettős szkémája szerint halad. Az összetartó végtelen sorozat egyik tagja sem egyenlő például a határértékkel, de *nem úgy* „nem egyenlő", ahogyan egyik tag sem egyenlő egy tetszőleges egész számmal, mondjuk 7-tel. Az utóbbi „nem egyenlő" absztrakt, üres tagadás, az előbbi pedig konkrét, hatásos, definiáló erejű tagadás. *„Omnis determinatio est negatio"* – idézi Tóth Imre a mondás tulajdonképpeni megfejtőjeként Spinozát.

A megfejtett mondásból azután hirtelen új fény esik a XVII. századi gondolkozás történetére. A spinozai „more geometrico" etika lényege ugyanis éppen a tökéletes embert, *az* Ideált definiáló *tagadás.* Tagadás, hiszen az ideális ember egyetlen tulajdonsága sem azonos a reális emberével, az ideális ember tulajdonképpen „antiember", vagy a határértéket definiáló tagadáshoz hasonlítva az etikait: „határember". Megfordítva, a határérték fogalmára épülő geometriát is nevezhetjük „more ethico" szerkesztettnek, hisz ugyanaz a fajta gondolkozás, az alkotó tagadás a lényege mind a kettőnek.

Valóban, az antiember nem úgy nem ember, mint például a kentaur vagy a hattyú. A szó köznapi értelmében tulajdonképpen nem különbözik az emberektől, hisz az Ember ideája mégsem sorolható persze a tulajdonképpeni emberek osztályába. Nevezhetjük „improprius elem”-nek, annak a mintájára, ahogyan az egyenes végtelen távoli pontját „improprius pontnak” nevezik a geometriában. Az „improprius elem” mintegy magába sűríti a végtelen sok tulajdonképpeni elemet, így ha egy halmaz improprius elemeket tartalmaz, akkor (improprius) elemként tartalmazza önmagát. „Az improprius elem által a makrokozmosz mikrokozmoszként jelenik meg tulajdon belsejében.”

„Egy halmaz önmagát elemként természetesen csak *fogalomként* tartalmazhatja, fogalmi kép formájában kétszerezve és megkettőzve: az önmagát-tartalmazás csak a saját lét fölismeréseként lehetséges, a tudat, a tiszta reflexivitás állapotaként. A makrokozmosz csak a tudat által tartalmazhatja önmagát, az univerzum megkettőzése csak a *tárgy* és a *kép*, a test és a fogalom egyidejűségében lehetséges.”

A Russell-féle paradoxon szellemes új Interpretálása alapján azután Tóth Imre levezeti, hogyan válik az önmagát-tartalmazás, illetve *nem*-tartalmazás fogalma végtelen számosság esetén szükségképpen paradoxonná, s az önmagát-tartalmazás segítségével analizálva (*matematikai* modell alapján) a fogalmi megismerés folyamatát, megmutatja, hogy „maga a tudat is logikai paradoxon”. A *fogalmi térben* – épp a legfontosabb esetekben – *nem* érvényes az egymásnak ellentmondó állítások kizárását követelő logikai törvény. Az eldönthetetlenség létezése nélkül matematikai alkotás egyáltalában nem is lenne lehetséges – jutunk el az antik „meta-mesétől” a modern „metamatematika” lényegéhez. „A *szellem fenomenológiájában* – a szellemet saját lényege tudatára ébresztő kozmikus folyamatban – Akhilleusz khelonomahiája döntő szerepet játszik: e mese által tudatosítja a szellem azt a tényt, hogy végtelen halmazt nem lehet entitásként, tényleges összességként elképzelni paradoxon nélkül, mely a nem-létezés létezéssé való metamorfózisaként érvényesül.” A paradoxon kiküszöbölése csak a tudat maga-megtiltása árán lehetséges. „Az Akhilleusz-apóriában a szellem tisztán tudja az ellentmondást, melyre hasadt: nem utasíthatja el a találkozási pont létezését, mégis el kell utasítania, hisz tudván tudja, hogy létezése csak az aktuális végtelen által biztosítható. Az *Ahile* a boldogtalan tudat eszméjének a mítosza a teremtésről, a versenyfutó-Akhilleusz e dráma tragikus hőse.

Zénón, a tényleges végtelent kiküszöbölni kívánó kísérleteket összegező paradoxonaiban – a Dihotómiában, az Akhilleuszban és a Nyílban – halálos ítéletet mondott a végtelenre; de ez az ítélet ma valóságos születési bizonyítványként hat. Zénón azt mondotta: az aktuális végtelen nem létezhet, azonban éppen ettől a pillanattól kezdve *volt*, megjelent a tudatban. A jelenléte a saját elutasításával kezdődött: »ne legyen« – mondotta Zénón és nyomban *ott* volt.”

A szellem a végtelen elítélésével magamagát ítélte el. Alig törhető feszültség keletkezett így, melytől csak Eudoxosz szabadította meg a matematikát, az arányelméletével. A paradoxon ettől kezdve polgárjogot nyert a gondolkozásban, s az „alkotáslogikája” egyre bonyolultabb és merészebb negációkon keresztül gazdag fogalmi világok teremtésére kényszerítette a szellemet. Az *Ahile* matematika- és filozófiatörténeti példák özönével mutatja be, hogyan; de ezen a nehéz úton az ismertetés már dadogva sem követheti (az eddigiekkel is nyilván a matematikusok megvetését ingerli maga ellen „pongyolasága”, és a szerkesztők aggályait „érthetetlensége” miatt). A fejtegetés csíráiból azonban, elemi alakban, meglelhető egy kevés Tóth Imre *Matematika és gondolkozás* című cikkében, mely a Valóság 1963. évi 6. számában jelent meg. Az alkotás, a fogalomteremtés, a megismerés elválaszthatatlan az ellentmondástól, a paradoxontól – tanította már az a cikk is. Az „alkotás logikája” egészen más utakon halad, mint az ismert formális logika. Az új utat már az akkori cikk is vázolta, de az *Ahile* tárta föl csak matematikai szimbólumokkal s absztrakt fogalmakkal leírható kanyarjait és buktatóit.

Világossá válnak az *Ahile* fényében az akkori cikk tán enigmatikusnak látszó utalásai is; most értjük meg például, mit jelentett az a mondat, hogy „a Természet tükörben szemléli önmagát. Ez a varázstükör – az Ember.” Az *Ahile* ugyanis a természeti szimmetriák megismerésének remek példája alapján kifejti, hogy „a valóság csak olyan hártyára fényképezhető le, melyen nem a valóság, hanem a *negatívja* jelenik meg: egy autonóm kép, amely a külső, természeti valóságban semmivel sem kongruens. A lét megismerése nem *utánzás*, hanem *maga-megismerés*, a tiszta reflexivitás állapota a szó kétértelműségében, tehát a *tükrözés* aktusa a szó optikai értelmében, melyben a gondolkozás nemcsak a létet ismeri meg, hanem annak egy transzcendens tükörbéli spekulatív *(speculum)* visszatükröződését azaz a – nem létező és hamis – *negatívját*. A létező univerzum egyedüli igaz *visszatükrözése* a *tagadása*; tett, melyre csak a gondolkozás képes, tett, mely az öntudat állapotában jellemzi ugyanazon létezést. A megismerés csak annyiban tekinthető *tükrözésnek*, amennyiben a negatív, a végtelen, a fikció, a hamis, a tárgytalan képzelet, a magában-és-magáért való gondolat megismerése.”

Az alkotás logikájában tehát az „Igaz” és a „hamis” nem „logikai érték” többé, „a *hazugság* az ész vitális szekréciója: az elme élete”. A gondolkozás világában az igaza hamishoz nem az egymást kizáró ellentét, hanem az egymást feltételező kiegészítés alakjában tartozik; a szellem kémiája szimmetrikusan szintetizál. „A természet útja egyértelmű és aszimmetrikus. A megismerés útja duális és szimmetrikus, mert itt van *mesterséges* út is, mely a természetben nincsen.” A noetikus univerzum objektumai tökéletesen szimmetrikusak, s így az ellentétes állítások egyidejűsége, a paradoxonok a gondolkozásból kiküszöbölhetetlenek. A formális logika persze nem fogadhatja el az egyidejű ellentmondásokat. De a formális logika csupán egyik aspektusát reprezentálja a gondolkozásnak: az érvelő, a *racionalizáló* aspektusát.

Éppen ezt a racionalizáló gondolkozást, a formális logikát mechanizálja a számítógép, amely így egyáltalában nem „mesterséges agyvelő", csupán „mesterséges érvelő". „A számítógép a szellem nem humán részének elidegenítése egy külső objektumba", s éppen úgy nem haladhatja meg vagy teheti fölöslegessé a gondolkozást, mint ahogyan a fényképezés sem tette fölöslegessé a festészetet. Igaz, hogy a gép pontos, nem hibázik, konzekvens, nem csaphatta be. De nem ismeri az ellentmondást és nem is teremt. „A számítógép paradoxonmentes. Ámde az ember lényege szerint paradox lény. A gép az érvelés törvényei által reákényszerített szükségszerűségnek megfelelően működik. Ám a szellem szembeszáll a szükségszerűséggel és az érvelés törvényeivel. A gép kényszerautomatizmus. Ám a szellem autonóm és szabad. A gép logisztikus. A szellem spekulatív. A gép számol és érvel. A szellem saját tükrében szemléli önmagát, *speculumban*, mely spekulatív lényege, maga-magáról vallott tudata. A gép steril. Ám a szellem termékeny, mert tagadni mer, mert csak a gondolkozás képes aktuális végtelent elgondolni, *csak* az ember tud teremteni."

Költői képként olvashatnánk ezeket a sorokat. Ne felejtsük el azonban, hogy mögöttük áll az *Ahile* egész imponáló matematikai, történeti és filozófiai apparátusa: a módszere. Éppen ez, a könyv nagy aktualitása, ez a módszer, ahogyan minden megállapítását matematikai szigorúsággal s ahol csak lehet, matematikai szimbolizmussal is igazolja. Ez a könyv megteremtette végre a...

De talán jobb, ha szerényen most is tartózkodunk a meghatározástól, s csak annyit írunk, hogy a „Matematikai Khelonomahiát". Mindenesetre ezáltal egészen új megvilágításba kerül nemcsak a dialektika, hanem a tradicionális logika kereteiből réges-régen kinőtt s mégis benne sínylődni kénytelen matematikai alapkutatás is: a paradoxonok eddigi kínos kerülése helyett immár nyugodtan rájuk bízhatja magát, amit egyébként öntudatlanul s nagy lelkiismeret-furdalásokkal ez idáig is minden döntő lépésnél megtett. Új fényt vetít az *Ahile* a matematikai fogalomalkotás történetére és lényegére is, erről azonban jelen recenzió hallgat, mert valamit úgyis megsejthet a lényegből az ember Tóth Imre említett *Valóság*-cikkét elolvasva, s többhöz kötetek kellenének.

Mégis legalább meg kell említenem, milyen mesterien használja és tárgyalja az euklideszi, kontra-euklideszi, nem-euklideszi geometriákat, s állítja vélük szembe Bolyai abszolút geometriáját: a szemünk láttára bontja ki a nehéz matematikai fogalmakat az alkotás logikájának mintáiként, s ugyanakkor a tagadás szelíd erejével segít emberközelbe hozni a matematikai rendszerek embertelenül szép távoli absztrakcióit. Kivételesen fontos – és szép – rész, amelyik az abszolút geometria modellalkotási lehetőségeit s értelmét tárgyalja. Bolyai János világteremtő fölfedezése az *Ahile*-ben nem didaktikai hasonlat, hanem szerkezeti azonosság alapján kerül korunk legfontosabb matematikai fölfedezése, a *nem* cantori (már a név is árulkodó!) halmazelmélet mellé. Kár, hogy az utóbbi – hagyományos matematikai logikai formában elviselhetetlenül nehéz – módszerét nem próbálta meg az *Ahile* „letagadni”.

S kár – de ez most már igazán –, hogy nem jelent meg magyarul, s románul is oly kicsi a példányszáma. Újabban újra elég sokat írunk a középkelet-európai élet és gondolkozás dolgairól, s íme Benkő Samu fundamentális és jelentőségéhez képest alig-alig ismert Bolyai-könyve után újból egy könyv, melyet a közép-európai gondolkozás tájain mindenkinek ismerni kellene, és nem lenne szabad elfelejteni. Benkő Samu a felejthetetlen *Bolyai János vallomásai*ban kristálytisztán megmutatta, mint érthető meg a nagy erdélyi matematikus sorsa és tragédiája a korabeli Közép-Kelet-Európa történelméből, s ezáltal mintegy tükröt tartott elé; ha másként is, de jellegzetes közép-kelet-európai alkotás az *Ahile* is: másutt ez a szintézis így, s ilyen érvénnyel aligha születhet meg. A helyi Bolyai-tradíción kívül ugyanis kellett hozzá a hegeli és marxi dialektika érvényes jelenléte, a román matematika francia és kivált Bourbaki közelsége, a klasszikus matematikai analízis és sorelmélet könnyedsége, mely a magyar iskolára volt jellemző, a relatív téridőbeli elkülönülés a mai modern matematikai logika buja formulavilágától... És kellett persze az egészhez Tóth Imre is, azonban róla hallgat a recenzió, hisz ő a differenciálegyenlet-rendszer megoldásában a kezdeti feltétel.

Eleata paradoxonok a szellem fenomenológiájában[101]

Tóth Imre könyve (*„Ahile”. Paradoxele eleate in fenomenológia spiritului.* Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1969) nem úgy használja a matematikát, ahogyan azt a ma divatos filozófiai monográfiáktól megszoktuk. Fontos ezt rögtön indulásként hangsúlyozni, a szabályos, modern, okos könyvek ugyanis úgy indulnak el a matematikától, mint az egyszeri táncos a kályhától, s formabontó elmetáncuknak is körülbelül ennyi a köze hozzá. Az *Ahile* ellenben nem kályhának használja a matematikát, és nem is azért firtatja, hogy megtudja általa, mik a gondolkozás „törvényei”, netán mi az „igaz” és a „hamis”; bár valamiképpen a gondolkozásról szól ez a könyv és az „igaz”-ról, helyesebben tán az „igaz” létezésének a gondolkozásban kibomló paradoxonáról, azaz ez a könyv ... Azonban jobb, ha fölhagyunk a meghatározás meddő kísérletével, s elfogadjuk a maga választotta műfaji definíciót: khelonomahia – teknőcküzdelem.

A khelonomahia a klasszikus példa – Akhilleusz és a teknős versenye – részletes analízisével és rekonstruálásával indul. Az olvasó, ha legalább konyít valamit a matematikához, meglepődve veszi észre, mi mindent rejt ez a rendszerint könnyen, s (Arisztotelész nyomán) még ma is a mozgás elleni paradoxonként elintézhetőnek vélt kis mese. Tóth Imre páratlanul ért hozzá, hogyan kell ismert és könnyen elintézhetőnek vélt dolgok gazdag és rejtett összefüggéseit kibogozni, s így a gyors lábú Akhilleusz és a cammogó teknőc egyszerű meséjéből a szemünk láttára bomlik ki a gondolkozás odüsszeiájának legfontosabb korai kalandja: az *értelem* és a *tapasztalás* küzdelme. Mert erről szól ez a kis „meta-mese”.

Tóth Imre mindenekelőtt a verseny feltételeit fejti meg. Paradoxon ugyanis csak akkor keletkezik, ha meghatározott feltételek teljesülnek. Ezek a feltételek mai matematikával viszonylag könnyen megfogalmazhatók, hisz lényegében azt követelik, hogy az egymás utáni időpontokban Akhilleusz és a teknősbéka egyre közelebb kerüljön egymáshoz, azaz az egymás utáni távolságkülönbségekből álló sorozat egyre inkább közeledjen a zérushoz. Azonnal nyilvánvaló, hogy Akhilleusz és a teknőc *matematikai* találkozása, koncidenciája *nem* olyasmi, mint a sorozat tagjai, hisz a távolságkülönbségek, bármily kicsinyek is, szükségképpen nagyobbak zérusnál: az A pont bármely előre megadott értéknél közelebb juthat a B ponthoz, el azonban nem érheti. Ez az elérhetetlenség azonban – hisz a *feltételei*

[101] Forrás: Vekerdi László: Eleata paradoxonok a szellem fenomenológiájában. In: Vekerdi László: Befejezetlen jelen. Bp., 1971. Magvető. pp. 477–485. (Elvek és utak)

pontosan megfogalmazhatók – tekinthető valami *új*, *más* fogalom meghatározásának is. Ennek az új, így definiált fogalomnak a neve a matematikában *határérték*. Ezt hozzávéve a végtelen sorozathoz, azt is mondhatjuk, hogy itt az A pont „utoléri” a B-t. A tagadás tehát új fogalmat teremtett, ezáltal azonban még nem szűnt meg a paradoxon, hisz az „utolérhetetlenség” definiálta épp az „utolérhetőséget”, mely e nélkül a definíció nélkül, csak úgy magában, természetesen soha nem is létezett.

A „létezés” tehát – s ez Tóth Imre elemzésében a lényeg – elválaszthatatlanul összefügg az „alkotással”; a sorozat határértéke „teljesen új fogalmi entitásként jelenik meg a gondolkozás univerzumában. Nem kívülről jön, de még sincs az addig ismert fogalmak között: *abszolút új* noetikus objektumként jelentkezik az észlelés ama tisztán noetikus univerzumában, ahol a szellemben folyó titokzatos metamorfózis következtében megjelenik, kezdetben ahhoz hasonló vegetatív öntudatlansággal, ahogyan a test lélegzik. Ez a metamorfózis: a *nem létező átalakulása létezővé*. És ez a metamorfózis, ez az állandó ontológiai halmazállapotváltozás a nem létezésből a létezés állapotába, ez éppen a szellem életének a tulajdon specifikus létezési módja.”

Ez a szellemi létrehívás persze nem korlátozódik a matematikára, a gondolkozás általános tulajdonsága, a matematikában csupán legtisztábban tanulmányozható az „alkotás logikája”, mely lényegében abból áll, hogy a gondolkozás új fogalmakat teremt a már ismert fogalmak részleges vagy teljes tagadása által. Ez az alkotó tagadás – s ez is kitűnően látható a matematika példáján – nem azonos a formális logikai negációval, nem az igen–nem durva kettős szkémája szerint halad. Az összetartó végtelen sorozat egyik tagja sem egyenlő például a határértékkel, de *nem úgy* „nem egyenlő”, ahogyan egyik tag sem egyenlő egy tetszőleges egész számmal, mondjuk 7-tel. Az utóbbi „nem egyenlő” absztrakt, üres tagadás, az előbbi pedig konkrét, hatásos, definiáló erejű tagadás. *„Omnis determinatio est negatio”* – idézi Tóth Imre, a mondás tulajdonképpeni megfejtőjeként, Spinozát.

A megfejtett mondásból azután hirtelen új fény esik a XVII. századi gondolkozás történetére. A spinozai „more geometrico” etika lényege ugyanis éppen a tökéletes embert, *az* Ideált definiáló *tagadás*. Tagadás, hiszen az ideális ember egyetlen tulajdonsága sem azonos a reális emberével, az ideális ember tulajdonképpen „antiember”, vagy a határértéket definiáló tagadáshoz hasonlítva az etikait: „határember”. Megfordítva, a határérték fogalmára épülő geometriát is nevezhetjük „more ethico” szerkesztettnek, hisz ugyanaz a fajta gondolkozás, az alkotó tagadás a lényege mind a kettőnek. Valóban, az antiember nem úgy nem ember, mint például a kentaur vagy a hattyú. A szó hétköznapi értelmében tulajdonképpen nem különbözik az emberektől, hisz Az Ember ideája, mégsem sorolható persze a tulajdonképpeni emberek osztályába. Nevezhetjük „improprius elem”-nek, annak a mintájára, ahogyan az egyenes végtelen távoli pontját „improprius pontnak” nevezik a geometriában. Az „improprius elem” mintegy magába sűríti a végtelen sok tulajdonképpeni elemet, így ha egy halmaz improprius elemeket tartalmaz, akkor (improprius) elemként tartalmazza önmagát. „Az improprius elem által a makrokozmosz mikrokozmoszként jelenik meg tulajdon belsejében.”

„Egy halmaz önmagát elemként természetesen csak *fogalomként* tartalmazhatja, fogalmi kép formájában kétszerezve és megkettőzve: az önmagát-tartalmazás csak a saját lét fölismeréseként lehetséges, a tudat, a tiszta reflexivitás állapotaként. A makrokozmosz csak a tudat által tartalmazhatja önmagát, az univerzum megkettőzése csak a *tárgy* és a *kép*, a test és a fogalom egyidejűségében lehetséges.”

A Russell-féle paradoxon szellemes, új interpretálása alapján azután Tóth Imre levezeti, hogyan válik az önmagát-tartalmazás illetve *nem*-tartalmazás fogalma végtelen számosság esetén szükségképpen paradoxonná, s az önmagát-tartalmazás segítségével analizálva (*matematikai* modell alapján), a fogalmi megismerés folyamatát megmutatja, hogy „maga a tudat is logikai paradoxon”. A *fogalmi térben* – épp a legfontosabb esetekben – *nem* érvényes az egymásnak ellentmondó állítások kizárását követelő logikai törvény. Az eldönthetetlenség létezése nélkül matematikai alkotás egyáltalában nem is lenne lehetséges – jutunk el az antik „meta-mesétől” a modern matematika lényegéhez.

„A *szellem fenomenológiájában* – a szellemet saját lényege tudatára ébresztő kozmikus folyamatban – Akhilleusz khelonomahiája döntő szerepet játszik: e mese által tudatosítja a szellem azt a tényt, hogy végtelen halmazt nem lehet entitásként, tényleges összességként elképzelni paradoxon nélkül, mely a nem létezés létezéssé való metamorfozisaként érvényesül.” A paradoxon kiküszöbölése csak a tudat maga-megtiltása árán lehetséges. „Az Akhilleusz-apóriában a szellem tisztán tudja az ellentmondást, melyre hasadt: nem utasíthatja el a találkozási pont létezését, mégis el kell utasítania, hisz tudván tudja, hogy létezése csak az aktuális végtelen által biztosítható. Az Akhilleusz a boldogtalan tudat eszméjének a mítosza a teremtésről, a versenyfutó-Akhilleusz *e* dráma tragikus hőse. Zénón, a tényleges végtelent kiküszöbölni kívánó kísérleteket összegező paradoxonaiban – a Dihotómiában, az Akhilleuszban és a Nyílban – halálos ítéletet mondott a végtelenre; de ez az ítélet ma valóságos születési bizonyítványként hat. Zénón azt mondotta: az aktuális végtelen nem létezhet, azonban éppen ettől a pillanattól kezdve *volt*, megjelent a tudatban. A jelenléte a saját elutasításával kezdődött: »ne legyen« – mondotta Zénón –, és nyomban *ott* volt.”

A szellem a végtelen elítélésével magamagát ítélte el. Alig tűrhető feszültség keletkezett így, melytől csak Eudoxesz szabadította meg a matematikát, híres arányelméletével. A paradoxon ettől kezdve polgárjogot nyert a gondolkozásban, s az „alkotás logikája” egyre bonyolultabb és merészebb negációkon keresztül gazdag fogalmi világok teremtésére kényszerítette a szellemet. Az *Ahile* matematika- és filozófiatörténeti példák özönével mutatja be, hogyan; de ezen a nehéz úton az ismertetés már dadogva sem követheti (az eddigiekkel is nyilván a matematikusok megvetését ingerli maga ellen „pongyolasága”, és a szerkesztők aggályait „érthetetlensége” miatt). A fejtegetés csíráiból azonban, elemi alakban, meglelhető egy kevés Tóth Imre „Matematika és gondolkozás” című cikkében, mely a *Valóság* 1963. évi 6. számában jelent meg. Az alkotás, a fogalomteremtés, a megismerés elválaszthatatlan az ellentmondástól, a paradoxontól – tanította már az a cikk is. Az „alkotás logikája egészen más utakon halad, mint az ismert formális logika”. Az új utat már az akkori cikk is vázolta, de az *Ahile* tárta föl csak matematikai szimbólumokkal s absztrakt fogalmakkal leírható kanyarjait és buktatóit.

Világossá válnak az *Ahile* fényében az akkori cikk tán enigmatikusnak látszó utalásai is; most értjük meg például, mit jelentett az a mondat, hogy „a Természet tükörben szemléli önmagát. Ez a varázstükör – az Ember.” Az *Ahile* ugyanis a természeti szimmetriák megismerésének remek példája alapján kifejti, hogy „a valóság csak olyan hártyára fényképezhető le, melyen nem a valóság, hanem a *negatívja* jelenik meg: egy autonóm kép, amely a külső, természeti valóságban semmivel sem kongruens. A lét megismerése nem *utánzás*, hanem *magamegismerés*, a tiszta reflexivitás állapota a szó kétértelműségében, tehát a *tükrözés* aktusa a szó optikai értelmében, melyben a gondolkozás nemcsak a létet ismeri meg, hanem annak egy transzcendens tükörbeli spekulatív (*speculum=tükör*) visszatükröződését is, azaz a – nem létező és hamis – *negatívját*. A létező univerzum egyedüli igaz *visszatükrözése* a *tagadása*; tett, melyre csak a gondolkozás képes, tett, mely az öntudat állapotában jellemzi ugyanazogismerzést. A ésnyiban tekinthető tükrözésnek, ame·ᓭ □ □*ája.* Göd □≣nnyiben a negatív, a végtelen, a fikció, a hamis, a tárgyatlan képzelet, a magában- és magáért-való gondolat megismerése.”

Az alkotás logikájában tehát az „igaz” és a „hamis” nem „logikai érték” többé, „a *hazugság* az ész vitális szekréciója, az elme élete”. A gondolkozás világában az igaz a hamishoz nem az egymást kizáró ellentét, hanem az egymást feltételező kiegészítés alakjában tartozik; a szellem kémiája szimmetrikusan szintetizál. „A természet útja egyértelmű és aszimmetrikus. A megismerés útja duális és szimmetrikus, mert itt van *mesterséges* út is, mely a természetben nincsen.” A noetikus univerzum objektumai tökéletesen szimmetrikusak, s így az ellentétes állítások egyidejűsége, a paradoxonok a gondolkozásból kiküszöbölhetetlenek. A formális logika persze nem fogadhatja el az egyidejű ellentmondásokat. De a formális logika csupán egyik aspektusát reprezentálja a gondolkozásnak: az érvelő, a *racionalizáló* aspektusát. Éppen ezt a racionalizáló gondolkozást, a formális logikát mechanizálja a számítógép, amely így egyáltalában nem „mesterséges agyvelő”, csupán „mesterséges érvelő”. A számítógép a szellem nem humán részének elidegenítése egy külső objektumba”, s éppen úgy nem haladhatja meg vagy teheti fölöslegessé a gondolkozást, mint ahogyan a fényképezés sem tette fölöslegessé a festészetet. Igaz, hogy a gép pontos, nem hibázik, konzekvens, nem csapható be. De nem ismeri az ellentmondást, és nem is teremt. „A számítógép paradoxonmentes. Ámde az ember lényege szerint paradox lény. A gép az érvelés törvényei által rákényszerített szükségszerűségnek megfelelően működik. Ám a szellem szembeszáll a szükségszerűséggel és az érvelés törvényeivel. A gép kényszerautomatizmus. De a szellem autonóm és szabad. A gép logisztikus. A szellem spekulatív. A gép számol és érvel. A szellem saját tükrében szemléli önmagát, *speculumban*, mely spekulatív lényege, magamagáról vallott tudata. A gép steril. Ám a szellem termékeny, mert tagadni mer, mert *csak* a gondolkozás képes aktuális végtelent elgondolni, csak az ember tud teremteni.”

Költői képként olvashatnánk ezeket a sorokat, ne felejtsük el azonban, hogy mögöttük áll az *Ahile* egész imponáló matematikai, történeti és filozófiai apparátusa: a módszere. Éppen ez a könyv nagy aktualitása, ez a módszer, ahogyan minden megállapítását matematikai szigorúsággal, s ahol csak lehet, matematikai szimbolizmussal is igazolja. Ez a könyv megteremtette végre a ... De tán jobb, ha szerényen most is tartózkodunk a meghatározástól, s csak annyit írunk, hogy – a „Matematikai Khelonomahiát”. Mindenesetre ezáltal egészen új megvilágításba kerül nemcsak a dialektika, hanem a tradicionális logika kereteiből régesrégen kinőtt s mégis benne sínylődni kénytelen matematikai alapkutatás is; a paradoxonok eddigi kínos kerülése helyett immár nyugodtan rájuk bízhatja magát, amit egyébként öntudatlanul s nagy lelkiismeret-furdalásokkal ez ideig is minden döntő lépésnél megtett. Új fényt vetít az *Ahile* a matematikai fogalomalkotás történetére és lényegére is, erről azonban jelen recenzió hallgat, mert valamit úgyis megsejthet a lényegből az ember Tóth Imre említett *Valóság*-cikkét elolvasva, s többhöz kötetek kellenének. Mégis legalább meg kell említeni, milyen mesterien használja és tárgyalja az euklidészi, kontra-euklidészi, nem-euklidészi geometriákat, s állítja velük szembe Bolyai abszolút geometriáját: a szemünk láttára bontja ki a nehéz matematikai fogalmakat az alkotás logikájának mintáiként, s ugyanakkor a tagadás szelíd erejével segít emberközelbe hozni a matematikai rendszerek embertelenül szép távoli absztrakcióit. Kivételesen fontos – és szép – rész, amelyik az abszolút geometria modellalkotási lehetőségeit s értelmét tárgyalja: Bolyai János világteremtő fölfedezése az *Ahile*-ben nem didaktikai hasonlat, hanem szerkezeti azonosság alapján kerül korunk legfontosabb matematikai fölfedezése, a *nem*-cantori (már a név is árulkodó!) halmazelmélet mellé. Kár, hogy az utóbbi – hagyományos matematikai logikai formában irtózatosan nehéz – módszerét nem próbálta meg az *Ahile* „letagadni”.

S kár – de ez most már igazán –, hogy nem jelent meg magyarul, s románul is kicsi példányszámban. Újabban újra elég sokat írunk a közép-kelet-európai élet és gondolkozás dolgairól, s íme Benkő Samu fundamentális és jelentőségéhez képest alig-alig ismert Bolyai-könyve után újból egy könyv, melyet a közép-európai gondolkozás tájain mindenkinek ismerni kellene, és nem lenne szabad elfelejteni. Benkő Samu felejthetetlen könyvében, a *Bolyai János vallomásai*-ban kristálytisztán megmutatta, mint érthető meg a nagy erdélyi matematikus sorsa és tragédiája a korabeli Közép-Kelet-Európa történelméből, s ezáltal mintegy tükröt tartott elé. Másként, de jellegzetesen közép-európai alkotás az *Ahile* is: másutt ez a szintézis így s ilyen érvénnyel aligha születhet vala meg. A helyi Bolyai-tradíción kívül ugyanis kellett hozzá a hégeli és marxi dialektika érvényes jelenléte, a román matematika előkelő franciasága és kivált Bourbaki-közelsége, a klasszikus matematikai analízis és sorelmélet mázsás súlyokkal labdázó könnyedsége, mely a magyar iskolát jellemezte; kellett a relatív téri-időbeli elkülönülés a mai modern matematikai logika buja formulavilágától...

És kellett persze az egészhez Tóth Imre is, azonban róla hallgat a recenzió, hisz ő a differenciálegyenlet-rendszer megoldásában a kezdeti feltétel.

Tóth Imre: A nem-euklideszi geometria a szellem fenomenológiájában[102]

Ellentétben a görög geometriával, melynek filozófiai vonatkozásairól könyvtárnyi tanulmány szól, a nem euklideszi geometria filozófiai-ismeretelméleti összefüggéseit még érinteni is alig érinti a napjainkban szuperexponenciálisan szaporodó tudományelméleti és tudománytörténeti irodalom. S ezt a föltűnő különbséget nem az okozza, hogy a görög geometria vizsgálatához – legalábbis a kutatók többségének (téves) véleménye szerint – kevesebb matematikai szaktudás elegendő. A különbségnek szemléletbéli oka van: azt hiszik, hogy az euklideszi geometriával ellentétben a nem-euklideszi geometria a matematika fejlődésének a belügye, mely eredetét s hatásait tekintve semmi közvetlen vonatkozásban nincs a szellemi fejlődés általános tendenciáival. Tóth Imre évtizedes nem-euklideszi vizsgálatainak egyik nagy érdeme éppen ennek a megülepedett tévedésnek a megcáfolása.

Könyve ezeknek a vizsgálatoknak az eredményeit foglalja össze. A vizsgálatoknak – pusztán a könnyebb áttekinthetőség kedvéért – megkülönböztethetjük egy tudománytörténeti és egy megismerés-történeti aspektusát. A tudománytörténeti kérdés kulcsa Tóth Imrének az a szűkebb szakkörökön túl is méltán híressé vált fölfedezése, miszerint az Arisztotelész korabeli görög matematika már jól ismerte az euklideszi csomót: az (abszolút) geometria két-, illetve háromfelé ágazását a párhuzamossági posztulátumnál. Annyira jól ismerte, hogy Arisztotelész egy akkoriban új, elvont etikai fogalom (a döntés szabadságának) megértetésére éppen ezt a matematikai analógiát használja: ahogyan a geométerek szabadon dönthetnek, hogy egymás felé egyáltalában nem hajló egyeneseket fogadjanak-é el párhuzamosak gyanánt („a derékszög hipotézise") vagy egymáshoz hajló, de egymást nem metsző egyeneseket („a hegyesszög hipotézise"), illetve egyáltalában meg se engedjék azt a lehetőséget, hogy két egyenes ne metsze egymást („a tompaszög hipotézise"), ugyanúgy dönthet az ember a jó és a rossz között; de ha már döntött, az egyik etikai értékkel kitüntetett rendszerről ugyanúgy nem térhet át a másikkal megjelöltre, mint ahogyan a geométer sem térhet át az „igaz" logikai értékkel kitüntetett párhuzamossági posztulátumából következő rendszerről a másikra. De eredetileg szabadon választhat, hogy a derékszög hipotézisét vagy a hegyesszög hipotézisét, vagy a tompaszögét tekinti-é igaznak. Fölfedezték volna tehát az Arisztotelész korabeli görög geométerek a nem-euklideszi geometriát? Egyáltalában nem, tanítja Tóth Imre. Amit ők

[102] Forrás: Vekerdi László: Tóth Imre: A nem-euklideszi geometria a szellem fenomenológiájában. [Tóth Imre: Die nicht-euklidische Geometrie in der Phänomenologie des Geistes. Wissenschaftstheoretische Betrachtungen zur Entwicklungsgeschichte der Mathematik, Horst Heiderhoff Verlag, Majna-Frankfurt 1972. 91. oldal.] = Magyar Filozófiai Szemle 18 (1974) No. 6. pp. 871–873.

fölismertek, az egy egészen másfajta geometria lehetősége volt, nem a nem-euklideszi geometriáé. Igaz ugyan, hogy ez a geometria a megtévesztésig hasonlít a nem-euklideszihez, tételei – amint a XVIII. században s a XIX. század elején egy részüket csakugyan ki is fejtették – szó szerint megegyeznek a nem-euklideszi geometria tételeivel, de ég s föld a különbség a két geometria között episztemológiai státus tekintetében. Mert nem elég egy matematikai fogalmat megalkotni, nem elég egy tételt hibátlanul levezetni ahhoz, hogy megismerjük: ehhez ellentmondásmentesen el kell helyezni a gondolkozás univerzumában. Amíg ez meg nem történik, fogalom s tétel kitagadottként, fikcióként, lehetetlen lehetőségként ődöng a gondolkozás univerzumában; egy antivilág szerencsétlen követeként, mely – még ha e világban törvényes logikai eszközökkel tán nem is cáfolható meg – eleve a „hamis" logikai bélyegét hordozza magán. A Bolyai, Gauss, Lobacsevszkij fölfedezése előtti nem-euklideszi tételek egy eleve hamisként tételezett geometriai világ szerencsétlen és „kétségbe" esett képviselői voltak csupán, a megismerés chimérái, egy nem létező, lehetetlen „anti-euklideszi" geometria részei. De miként válhattak azzá, amikor Arisztotelész még a derékszög hipotézisével egyenlő lehetőségként ismerte föl a hegyesszögét és a tompaszögét? Csak az ő filozófusi nagyságát mutatja-é ez a felismerés? A nagy modállogikusét, aki mintegy antik Hintikkaként a lehetséges világok logikai képeként használja az euklideszi és anti-euklideszi „modellhalmazokat"? Tóth Imrét finom történész érzéke megóvja – Arisztotelész iránti minden csodálata ellenére is – az efféle (napjainkban divatos) „historiográfiai renormalizálástól". Ő inkább kidolgozza és részletesen elemzi azt a megismerés-történeti szituációt, melyben a geometriai szellemnek éppen és csakis az euklideszi geometria „unicitásának" a megteremtésével sikerült megóvni önállóságát, ezáltal sikerült kifejezni a matematika önmagára-eszmélését, Poincaré szavaival „megszabadulását a külvilág zsarnokságától". Tóth Imre hat pontban összefoglalva mutatja be a Kant korabeli matematika „kényes" episztemológiai helyzetét egy elsősorban empirikus megismerési normák szerint tájékozódó világban: itt a matematika spekulatív önállóságáért azzal kellett fizessen, hogy vállalta a valóságot hűen visszaverő tükör szerepét, s hogyan lehetne az egyedül létező valóságot görbe tükörrel *is* (nem-euklideszi geometria) helyesen tükröztetni? „Ezen a szellemi alapon a »gesunde Menschenverstand« legalább félretolhatta mint »metafizikai fontoskodásokat« azokat a komplikált elméleteket, amik a geometria minden külső tapasztalattól való abszolút függetlenségét állították, ha megcáfolni nem is tudta őket. A kínokat, amiket a *tiszta ész önkritikájával* szerzett magának, csitíthatta egy *common sense philosophy* vagy egy *philosophie du bon sens* gyógyírjával. De az igazi okok ettől még érintetlenül érvényben maradtak." S azonnal fölszínre is kerültek, mihelyst – a XIX. század elején – meglazult a megismerés szigorúan vagylagos, alternatív logikája. Tóth Imre a matematika kanti episztemológiai univerzumban elfoglalt helyzetével pontról pontra szembesíti azt az új helyzetet, ahová a (matematikai) gondolkozás a nem-euklideszi geometria megszületése következtében emelkedett. „A Saccheri-féle »vagy E vagy *nem-E* igaz« *alternatíva* helyett különös *konjunkció* keletkezett így: »*E* is és *nem-E* is igaz«. És ezzel a kanti kérdés: *hogyan lehetséges tiszta matematika? a hogyan lehetséges nem-euklideszi geometria?* kérdésre konkretizálódott. A lét és nemlét parmenidészi alternatívájának eddig rejtett drámája a matematikában is a nyílt krízis alakját öltötte, amennyiben a matematikában az ellentétek alternatívája és konjunkciója közt kell dönteni.” A megismerés eddigi, tiszteletreméltó „parmenidészi útjától” elválik egy másik, „homályos és sötét út, ahol a nemlét – parmenidészi tilalom ellenére – *kimondatik, elismertetik* és a lét s igazság állapotára emeltetik. A nem-euklideszi út egyúttal nem-parmenidészi is”.

Tóth Imre ezáltal tisztázta a nem-euklideszi geometria és a kanti (parmenidészi) ismeretelmélet gyakran emlegetett, ám igazában soha eddig még csak meg sem vizsgált viszonyát; s ezzel a filozófiatörténet – kivált napjaink valóságos Kant-reneszánszát tekintve – nem keveset nyert. De tán még ennél is fontosabb a kis könyv tudományfilozófiai aspektusa. Érdemes ebben az összefüggésben figyelmeztetni rá, milyen fontosságot tulajdonít a (lényegében ugyanígy, de ellenkező érték-előjellel értelmezett) „parmenidészi paradigmának” P. K. Feyerabend a klasszikus newtoni fizika keletkezésében s (kantiánussá) fejlődésében, annál is inkább, mert Tóth Imre könyvének másik, nehezebben ismertethető aspektusát is egy igen szerencsésen választott fizikai analógia segítségével közelíthetjük meg (viszonylag) legkönnyebben. A megismerés nem-parmenidészi útjának logikai struktúráját ugyanis Tóth Imre a speciális relativitás elméletével értelmezi, illetve modellezi. „Az inerciarendszereknek az axiomatikus fogalomrendszerek felelnek meg. Az egymástól lineárisan független koordinátatengelyeknek az egymástól logikailag független axiómák felelnek meg. A nyugalom fogalmának az igaz fogalma felel meg, a mozgás (a választott inerciarendszerben egyenes vonalú egyenletes mozgás) fogalmának a hamis logikai fogalma.” S ahogyan a mozgás fogalmának csak az inerciarendszer önmagára vonatkoztatásaként van értelme, úgy az igaz logikai érték is csak egy fogalomrendszer önmagára vonatkoztatásaként értelmes fogalom. „Mindazon tételek igazak, melyeket logikai levezetések lánca fűz deduktíven, mereven ehhez a rendszerhez, ezek a tételek szervesen össze vannak kötve a rendszerrel, és az igazság fogalma csupán ezt az összefüggést fejezi ki. Nincs kitüntetett vonatkoztatási rendszer, nincs abszolút nyugalom, nincs abszolút igazság. Mindegyik rendszerben leírható az egész univerzum ... Egy inerciális vonatkoztatási rendszer belsejében azonban mechanikai kísérletekkel nem dönthető el, hogy a rendszer saját koordinátái vagy egy más rendszeréi vannak-é a nyugalom, illetve a mozgás állapotában. Egy deduktív vonatkoztatási rendszer belsejében bizonyítás alapján nem dönthető el, hogy vajon az alapjául szolgáló axiómák az igazak vagy hamisak-é, vagy pedig egy másik rendszer ezekkel ellentétes axiómái. Ez azonban csak annyit jelent, hogy a mindenkori rendszert szabadon választottuk a világ leírására szolgáló vonatkoztatási rendszerként."

Az euklideszi geometriát is? Természetesen, de ez csak a nem-euklideszi geometria fölfedezése (helyesebben a nem-parmenidészi út fölfedezése) után derült ki, s egyúttal az euklideszi geometria (a megismerés euklideszi útjának) fölszabadulását is jelentette az „unicitás" dogmája alól. A két ellentétes geometriai rendszer egyidejű létezése ugyanis csak a formális logika ontológiai interpretációjával – a parmenidészi úttal – összeegyeztethetetlen; a nem-euklideszi geometria megszületésével valójában *trichotomia* keletkezett: „az euklideszihől kiválik a nem-euklideszi geometria, ám ugyanakkor egy Harmadik is keletkezik, ami nem geometria és amibe mind a kettő (de nem komplementer részekként) beágyazható. Külön-külön mind a két rendszer ellentmondásmentes; az ellentét, mely szembeállítja őket, nekik mindig külső; ennek a Harmadiknak azonban, a Harmadiknak, ami az önmagát szemlélő és öntudatra eszmélő értelemmel azonos, az ellentét belső ellentmondás marad. Az értelem mint öntudat a formális logika szempontjából megmagyarázhatatlan paradoxon, maga a paradoxon." A nem-euklideszi geometria megteremtésével saját fejlődésének folyamatára eszmélő matematikai szellem azonban túllépvén a formális logika ontológiai interpretációján, saját szabadságát teremtette meg. Elérte azt a „második kozmikus sebességet", mely végleg megszabadította a „föld vonzásköréből". A jelenleg recenzeált könyv azt mutatja meg, hogy a matematikának eme második nagy önmagára-eszmélése ugyanúgy a szellem fenomenológiájának a produktuma, mint az első, klasszikus görög eszmélet.

A bizonyítás nagy részét Tóth Imre a hatalmas apparaturába sűríti; némelyik jegyzete egész kis önálló esszé, sőt kondenzált monográfia. így azután a főszöveg – hála az *Ahile-ből* ismert s már ott megcsodált tóthimrés találékonyságnak – eleitől végig érdekes olvasmány és a könnyen érthetőség (filozófiai irodalmunkból sajnálatosan hiányzó) látszatát kelti. Ez azonban senkit meg ne tévesszen: a kis könyv mázsás gondolatokat görget és súlyos gondokkal viaskodik. A „lehetetlen" realizációs struktúráját keresve az értelem önmagára-eszmélésének folyamatában Tóth Imre fenomenológiai útja végén a modern tudományfilozófiák centrális episztemológiai fölismeréséhez érkezik: a logika törvényei *nem* egyszersmind a gondolkozás törvényei is. „Ha ezt fölismertük, azzal fölismertük azt is, hogy a logika igazságai nem automatikusan adottak, hanem tevékeny emberi munkát igényelnek. És ennek a munkának a szabályait nem lehet teljesen lerögzíteni, úgyhogy eredménye rendesen előre meg nem mondható”.

A történeti hűség kedvéért megjegyzendő, hogy a legutóbbi idézet nem Tóth Imrétől származik. Jaakko Hintikka fejezi be ezekkel a szavakkal „Logic, language-games and information” című könyvének „Kant vindicated” című fejezetét. A megegyezésben azonban nincs semmi különös, hiszen – újból Tóth Imrét idézve – a gondolkozás „reáeszmélése önnön fejlődésére: szabadságának realizálásával egyenértékű”.

Tóth Imre munkái mutatták meg először, miért egyedülállóan óriási a nem-euklideszi geometria jelentősége a gondolkozás világában. Ahogyan Benkő Samu Bolyai János személyét s életét a kor s a hon történetébe, úgy illesztette be Bolyai „semmiből új más világ”-át Tóth Imre az egyetemes emberi gondolkozáséba.

Az „egy” és a „sok”[103]

„Egy az, ami szerint minden dolgot egynek mondunk”, tanították a görög gondolkodók, s így került be a definíció, ebben a titokzatos formában, a görög matematika híres összefoglalásába, Euklidész *Elemei*be. Nem is tudtak vele mit kezdeni matematikatörténészek, klasszika-filológusok és ókortörténészek; nem vallották persze be a kudarcukat, hanem könyvtárnyi okos és meredek tanulmányt írtak össze „hármóniáról”, „egészben-látásról”, „Ganzheit”-ról, „Gestalt”-ról, az alkotóelemeket egységbe foglaló struktúrákról s más efféle huncutságokról. S aztán, ahogy az már történni szokott, az ő vaskos könyveikből csordogáló bölcsességekből merítettek a művészettörténészek és az esztéták, az irodalmárok és a filozófusok, és rendre fölfedezték a sokféleséget egységbe kényszerítő rendet, az aranymetszést, a dodekafóniát, a hármóniát a görög művészetben. És eközben elfelejtették, ha ugyan tudtak róla valaha, Euklidész definícióját. Megértették az összefüggéseket. Megnyugodtak és megnyugtattak minket, szegény laikusokat és fotográfusokat.

Nem is képzelte senki Szabó Árpádig, mit is jelent az, hogy a görög matematika egyforma, oszthatatlan és végtelen sokszor egymás után rakható egységekként képzelte el az egyet.

Szabó Árpád lényeglátó szeme és nyugtalan elméje vette csak észre, hogy különös problémát rejt, és már akkor is réges-régi gondolatsort fejez be az euklidészi definíció. A definíció titkát megfejtő dolgozatában[104] Szabó Árpád egy hosszú Platón-idézettel demonstrálja a meghatározás fontosságát és régiségét. „Hiszen tudod – olvassuk Platón *Állam* című dialógusában –, hogy a matematikusok kinevetik azt, aki megpróbálná felosztani az egyet, és semmiképpen sem járulnának hozzá kísérletéhez; mert ha te részekre akarnád bontani az egységet, ők ehelyett inkább megsokszoroznák, mert mindenképpen el akarnák kerülni azt, hogy az egy valaha is „nem-egy”-nek, hanem sok részből állónak tűnjék fel. Ha aztán valaki megkérdezné tőlük: miféle számokról beszéltek ti, különös emberek? Hát hol van olyan egység, amilyeneknek ti definiáljátok: egyik a másikkal teljesen egyenlő, semmi különbség sincs közöttük és egyik sem bontható részekre? – Ugyan mit felelnének erre a kérdésre. Nemde azt, hogy olyan számokról beszélnek, amelyeket csak elgondolni lehet, és amelyek másként mint gondolati úton nem hozzáférhetőek.”

---

[103] Forrás: Vekerdi László: Az „egy” és a „sok”. In: Tudás és tudomány. Bp., 1994. Typotex. pp. 85–92. – Korábban megjelent: Fotóművészet 15 (1972) No. 1. pp. 16–21.

[104] Szabó Árpád: A görög matematika definíciós-axiomatikus alapjai. = Matematikai Lapok 10 (1959) No. 1–2. pp. 72–121.

Platón korában már réges-régen, évezredek óta számoltak az emberek valódi törtekkel és nagyon jól tudták azt a görög matematikusok, hogy a gyakorlati számításokban az *egy* igenis részekre bontható. És ők mégis mindenképpen el akarták kerülni – mutat rá Szabó Árpád a Platón-idézetet elemezve –, hogy az egy valaha is „nem-egy”-nek, azaz soknak látszódhassék. Ám ehhez olyan gondolati rendszert kellett teremteniük, amelyikben az „egy” oszthatatlan. Hiszen ha osztható, akkor már rögtön „sok” is lenne, „nem-egy”, önmaga ellentéte. Így azután az egy ellentéte, a „sok”, csupán oszthatatlan egységek megsokszorozásával keletkezhet. Kétszer egy az kettő, háromszor egy az három és így tovább. A törtek pedig az így keletkezett egész számok arányaival állíthatók elő. Ki is alakított a görög matematika egy nehéz és szellemes elméletet, csupán egész számok arányaiból. Az egyet persze ki kellett hagyni az így meghatározott számok közül, „mert a szám mint egységekből összetett halmaz alkotórészeire, egységekre bontható, az *egy* maga viszont már oszthatatlan”. Okozott is elég gondot ez a megkülönböztetés a görög matematikusoknak – Szabó Árpád remek példákkal mutatja meg, miféléket –, de a belőle származó haszon bőségesen fölért a gondokkal. Az „egy” és a „sok” ellentéte ugyanis – és ez Szabó Árpád nagy fölismerése – csupán egyik esete egy sokkal általánosabb gondolkozási és szemléleti formának, egy sokféleképpen és sok mindenre alkalmazható módszernek, melyet a görögök találtak ki, s amely ugyanúgy átalakította az emberiség történetét, mint a nyelv, az eszközök, a földművelés, a művészet, a fémművesség, a számolás és az ábécé. Az új módszer gondolati rendszerek fölépítésére és vizsgálatára való eljárás volt, egyfajta mesteri próba, amivel tapasztalat nélkül, tisztán gondolatokkal ellenőrizhették a feltevéseket és a spekulációkat, s az így hitelesített fogalmakból és tételekből rakhattak aztán merész gondolat-várakat.

A módszer elve igen egyszerű: semmi sem lehet önmaga s ugyanakkor önmaga ellentéte is. Az oszthatatlan egy nem lehet ugyanakkor és ugyanúgy „nem-egy” is. Nem lehet „sok”. A sokat az egy megsokszorozásával kell és lehet ellentmondásmentesen meghatározni, az egy elvi kizárása árán az így keletkező számok – ellentétmentes – rendszeréből. A módszer éppen így, az ellentmondás-mentesség követelménye szerint megvizsgált fogalmakból épít fel rendszereket. Szabó Árpád évtizedes, türelmes kutatásai éppen azt tárták föl, hogyan teremtette meg ez a módszer egyik legfrappánsabb és legfontosabb alkalmazásaként a matematikát; s megmutatta, hogyan fűzi ezer szál a megszülető s néhány évszázad alatt hatalmasan szétsugárzó tudományt az új módszer kidolgozóihoz és első következetes képviselőihez, az eleata filozófusokhoz.

Következetesen alkalmazva az ellentmondás-mentesség követelményét az új számfogalomra, az eleata filozófusok (Parmenidész, Zénón) a végtelen paradoxonjaiba ütköztek. Éppen ezekkel a paradoxonokkal érzékeltette – s később definiálta – a matematika a geometriai pontot és a folyamatosságot.

Az eleata módszer azonban nemcsak vizsgál, teremt is. Az „egy”-ből következő „nem-egy” *új* fogalom: az „egy” tagadása előtt nem létezett a gondolatok világában. Ám ez a tagadás egyáltalában nem természetes és magától érthető: a „sok” sokáig jól megfért az „egy”-gyel az emberek gondolkozásában anélkül, hogy „nem-egy”-gyé kellett volna válnia. Az „egy” és az „oszthatóság” – az egész egyiptomi számolástechnika tanúsítja – évezredekig nem került egymással ellentétbe az emberek gondolatvilágában. A régi királyságtól a birodalom bukásáig – s azon túl, néhol majdnem napjainkig – ugyanazzal a primitív, egymás utáni kétfelé osztásokkal dolgoztak. S nem ok nélkül, mert az egyszerű módszer a gyakorlatban jól bevált. De nem lépett évezredekig egyetlen lépést sem, nemhogy a matematika, még a számolástechnika sem. Fejlődés csak akkor kezdődhetett, amikor az eleata gondolkozók a gyakorlati sikeresség helyett tisztán gondolati és ellentmondásmentes követelményeket kívántak az eljárás indoklásául. És akkor egyszeriben kiderült, hogy az egymás utáni kétfelé osztogatás nagyon is kétes eljárás. Ugyanis, ha olyan könnyelműen bánunk véle, mint az egyiptomi írnokok, akkor könnyen afféle képtelen következtetésekre juthatunk, hogy a gyorslábú Akhilleusz sohasem érheti utol a cammogó teknősbékát. Mert ha a kétfelé osztást vég nélkül folytatjuk – s az oszthatatlan egységekből megsokszorozással keletkező számok szerint haladva miért is kellene megállanunk valahol? –, akkor Akhilleusz minden előre megadott távolságnál közelebb kerülne a teknőchöz, de el nem érheti soha. Hiszen az a *pont*, amelyben épp nyakon csípi, mégannyira sem tartozhat az őket egymástól elválasztó és minden határon túl csökkenő *távolságok* sorozatához, mint ahogyan az „egy” az egység megsokszorozásával előállított egész számok halmazához. A pont, amelyben Akhilleusz a teknőcöt nyakon csípi, sehogyan sem illik a csökkenő távolságokból megszerkesztett utolérési folyamat távolságaiba, illetve szükségképpen „kihull” az üldözött és az üldöző közötti minden előre megadottnál kisebbre csökkenthető, ám szükségképpen mégiscsak véges kiterjedésű távolságkülönbségek sorozatából. Úgy is mondhatjuk, hogy a pont a folyton csökkenő távolságkülönbségekből szerkesztett „utolérési modell” tagadása. A paradoxon felismerése és pontos megszerkesztése tehát fontos új fogalmat teremtett, a minden előre megadott, bármily kicsiny távolságkülönbségnél is kisebb távolságkülönbségekből is kihulló pontét, azaz a későbbi határértékét, mely az egész matematika egyik alapja napjainkig.

A pontokból egyenesek, síkok és alakzatok keletkeztek, az alakzatok egybevágóságából és a folytonosságból kiindulva pedig fölépült az Euklideszi tér klasszikus geometriája.

A paradoxonok elfogadása és megszerkesztése általi teremtés funkcióját és szerkezetét Tóth Imre bukaresti professzor tárta fel *Ahile* című könyvében;[105] az ő vizsgálatai mintegy kiegészítik Szabó Árpádéit, s így ma már nagyjából megérthetjük, hogyan is kezdődhetett az ellenőrizhető és részleteiben igazolható elképzelt rendszerek megteremtésének és vizsgálatának a nagy kalandja, mely aztán alig kétezer év alatt erősebben átalakította a világot, mint megelőző évtízezredek. Minket a jelen szempontból most csak az érdekel, hogy ebben a nagy kalandban kezdettől elsőrendű szerep jutott az egy és a sok fogalmának, az oszthatatlan egységekből felépülő számok végtelenségének és ez által a végtelen sok által – gondolatban – megszerkeszthető vég nélküli oszthatóságnak. A kettős végtelennek, mely elragadtatással töltötte el Cusanust és iszonyattal Pascalt.

A matematikai rendszerek kidolgozása a görög gondolkozás hervadásával – voltaképpen már Arisztotelésznél – megakadt, s csak a reneszánsz korában folytatódott. Az „egy” és a „sok” dialektikája azonban közben is, és rengeteg nem-matematikai formában is hatott. A késő-skolasztika például valósággal a „végtelen paradoxonaira” hangolt verbális gondolat-rendszer volt, a késő-bizánci neoplatonizmussal és neopüthagoreizmussal beoltott reneszánsz-gondolkozás pedig a késő-skolasztika tagadása és folytatásaképpen visszatérni vélt az antik „arányok”-hoz. Vélt, mert valójában a reneszánsz művész-gondolkodók (mert akkor még ilyenek is akadtak, nemcsak gondolkozó-művészek) ott folytatták, ahol a görög gondolkozás Zénón korában megakadt. „Erwin Panofsky – írja a korról Giorgo de Santillana – a klasszikus művészet terét ’aggregativ’-nak nevezte. Aligha lehetne találóbban leírni Arisztotelész terét, mely semmi egyéb, mint tartályok rendezett halmaza. A reneszánsz terét ezzel ellentétben Panofsky ’homogén’-nek nevezi. A mi nyelvünkön metrikus continuumnak neveznénk.”[106]

Ezt a teret ábrázolták képeiken a reneszánsz festő-geométerek; mindegyik kép a tér, a makrokozmosz egyedi ábrázolása, teljes és zárt egész: mikrokozmosz. Így azután még képekkel zsúfolt falakon is mindegyik kép önmagában egy-egy külön világ, egymás mellett is elszigetelten a többitől és önnön terébe zártan. A fotográfia, mely a reneszánsz-művészek kedvenc perspektíva-vizsgáló műszeréből, a camera obscurából fejlődött ki, kezdetben ezt a felfogást örökölte. Minden kép egy kis önálló „metrikus kontinuum” volt, a nagy metrikus kontinuum, a világ egy önálló piciny metszete, önmagában értelmes kicsiny egész. Nem kívánt, legföljebb megtűrt maga mellett más képeket. A múlt századi fotográfiákból remek albumokat lehetett szerkeszteni, képregényeket soha.

---

105 Tóth, Imre: Ahile. Paradoxele eleate în fenomenologia spiritului. Bucureşti, 1969. Editura Ştiinţifică. 556 p., 10 t.

106 Santillana, Giorgio de: Art in the Scientific Renaissance. In: Reflexions on Man and Ideas. Cambridge, 1968. MIT Press. pp. 137–170.

A metrikus kontinuum végeredményben semmi egyéb, mint az Akhilleusz-paradoxon által definiált pontokból az euklidészi – vagy a nem-euklidészi – axiómák segítségével fölépíthető tér. És ez a tér, a metrikus kontinuum volt az alapja korunkig mindenféle matematikai megértésnek és művészi kifejezésnek. A művészek a metrikus tér matematikai követelményei szerint kódolták az alkotásokat és a nézők csak az e szerint kódolt műveket tudták megérteni, dekódolni. A másféleképpen kódolt alkotások megértésének a képtelensége persze nem korlátozódott a művészetekre, a századforduló idején például sok tudós inkább nem hitt a szemének s nem fogadta el az atomok létezését, csakhogy ne kelljen a folytonosság mélyen rögződött szkémáját föladnia.

Azután hirtelen minden megváltozott a tudományban, s lassan, néha alig észrevehetően a művészetek világában is. Valahogy eltűnt a dologból a folytonosság. A képekből pedig először eltűnt a perspektíva, odalett a képtér önszervező ereje, eltűnt a képből a tér, odalett a kép egészsége, önmagáért értelmezése. A nézőnek, ha akarja, ha nem, magának kell megkeresnie a kép megértéséhez a kódot. A megértést megkönnyítő metrikus tér többnyire kihullott a művekből.

A művészet nagy változása sokféleképpen leírható és magyarázható. Az alábbiakban azonban meg sem kísérlünk semmiféle leírást vagy magyarázatot. Csupán arra emlékeztetünk, hogy a metrikus tér egyáltalában nem az egyetlen lehetőség térbeli relációk kifejezésére és képrelációk teremtésére.

A XIX. század eleje táján egy ifjú francia matematikus, Évariste Galois (1811–1832) az egyenletek együtthatói és gyökei közötti összefüggéseket vizsgálva fölfedezte, hogy mennyire fontosak és milyen jól használhatók erre a célra elemek olyan együttesei, melyekben az elemekre értelmezett művelet sohasem vezet ki az adott elemek köréből. Elemek efféle együttesére egyszerű példa az óra 12 száma, ha „összeadás”-ként a kismutató járását tekintjük. Akkor például 10 + 4 = 2, azaz nem jutottunk ki a „csoportéból, ahogy az elemek efféle halmazait nevezik. Galois csoportja persze nem ilyen egyszerű volt és módszere olyan nehéz, hogy még a legjobb matematikusok is csak évtizedek múlva értették meg igazán. S csak a XX. század második, harmadik évtizedében fejlődött a Galois módszeréből és eszméiből kibontakozó elmélet olyan mélységig és általánosságig, hogy egy következő lépésben azután már az egész matematikai – s azon túl az egész modern – gondolkodást átalakította. Az átalakulás következtében egyelőre különféle struktúrák összehasonlítása, vizsgálata, egymásba és egymásra való leképzése lett a matematika fő feladata. A struktúrákat a legegyszerűbb esetben adott elemek halmaza és az elemek között értelmezett egy vagy két művelet határozta meg.

És ezáltal, anélkül hogy külön törődött volna vele valaki, lassan újrafogalmazódott az „egy” és a „sok” viszonya. Először is megszűnt az a kivételesen fontos szerep, ami addig a végtelen soknak jutott. A véges geometriai haladvány például meglehetősen szánalmas figura a végtelen geometriai sor mellett, és úgyszólván egyedüli értelme a végtelen sor előkészítése, de a véges számú elemből álló struktúrák önmagukért érdekesek, s vizsgálatuk és összehasonlításuk meglepő törvényekre és izgalmas felfedezésekre vezet a végtelen közbejötte nélkül is, sokféle és különleges leképzést, átalakítást, transzformációt tár fel, s szinte végtelen lehetőség nyílik jelentés nélküli elemek jelentésekkel teljes struktúrákká való szervezésére.

Ezek a struktúrák azonban lényegesen különböznek a metrikus teret ábrázoló képek egymás iránt közömbös mikrokozmoszaitól; a való világ más, azelőtt alig vagy egyáltalán nem méltatott tulajdonságai kerülnek bennük előtérbe; úgymint műveletek, az elemek relációi, a struktúrák leképezései: vonzások és vonatkozások. A vonzások és vonatkozások eme világában „a kép a párhuzamost definiáló pontot a geométer végtelenjéből áthelyezi az azonosságok, illetve megosztott tulajdonságok számtalan metszéspontjából szőtt térbe; oda, ahol mint a takács a vetülékfonalon értelmes mintákat vontató kis hajójával, a művész szükségképp az értelmezésnek ellenálló konkrét különbségek láncfonalai között dolgozik; vagyis a mi konkrét világunkba, ahol a felismerés tere (a minta tere) a valóságos térrel (az ellenállással, a konkrét ismeretlennel) a fotografált kép szövetében egy.”[107]

A struktúrában az elemek jelentéshez jutottak anélkül, hogy ehhez ki kellett volna lépni vagy nézni az illető struktúra kereteiből. A struktúrát teljesen meghatározta az elemek száma és a műveleti szabály; önmagukban jelentés nélküli elemek a műveleti szabálytól, egy előírástól kapták a jelentésüket. Ugyanezt aligha állíthatjuk a régi matematikáról. Az „egy” például érdektelen, értelmetlen a „nem-egy”, a „sok” nélkül; az önmaga ellentéte nélkül tulajdonképpen semmit sem jelent. És a minden előre megadottnál kisebbé tehető távolságok jelentése is csak a mindnyájuktól különböző pont fényében tűnik ki. A klasszikus gondolkozásban, akár a klasszikus piktúrában, a dolgok jelentését vagy az ellentét clair-obscur-je, vagy a vanishing point végtelen-centrikussága határozta meg. A modern gondolkozás modellje ellenben a rádió lehetne vagy a tévé, amely egy előírt programmal szervezi „értelmes” – azaz egy közérthető kód szerint dekódolható – szöveggé vagy képpé az önmagukban jelentés nélküli jelek sorozatát.

De egy efféle dolgok, jelek, képek érzékeny vonzásaiból és váltakozásaiból, transzformációiból és viszonyulásaiból szerveződő rendszer csak akkor rugalmas, nyitott és

[107] Fotóművészet 13 (1970) No. 4. pp. 28–29.

alkalmazkodásképes, egyszóval csak akkor életes, ha változatok és különbségek végeláthatatlan gazdagsága szembesítődhet benne egymással és a világgal. A genetikus kód a mutációk elképesztő változatossága nélkül halott automatizmus lenne, s a méhek tánc-„beszéde” sok évmilliós merev, alkalmazkodásképtelen egyformaságával az igazi, az egyetlen, az emberi beszéd döbbenetes ellenpéldája. Nem az-e a film nagy varázsa is, hogy a sokféleséget szövi folytonos és szakadásos traszformációkkal hajlékony, a néző alkalmazkodási képességét ingerlő és kielégítő világgá? Világszínház a film, Theatrum Mundi, mert végül is egy génjeinkbe írt, meg egy anyanyelvünkkel megtanult jelentésformáló mechanizmusra apellál. Egy mechanizmusra, amely nem működhet, amely eleve elképzelhetetlen a sokféleség nélkül. A „sok” nélkül, amely nem az egy tagadása, nem „nem-egy”, nem egyforma, oszthatatlan egységek halmaza, mert a „sok”, a változatosság eme világában nincsen semmi, „ami szerint minden dolgot egynek mondunk”.

„Az analógia, ha igazi, mindig mindenfelé átlós. Egyetlen kör külön szerveződik: felismerése pillanatában a kép az imaginárius pontot, a különböző dolgokban a közöset, a közép élményét – bármi periférikusat ábrázol is – a tapasztalás körén belül realizálja.”[108]

Az „egység” csak ahhoz a helyzethez, szinthez és környezethez képest definiálható, amelyben előfordul, s csak az illető helyzetben, szinten és környezetben betöltött szerepe, funkciója szempontjából nevezhető „egység”-nek; a 21-betűs aminosav-ábécéből összeállított fehérjék az életfolyamatok egymásutánjában, a szavak a beszéd folyamatában,[109] a dolgok audiovizuális képei a filmben:[110] egymástól különböző „egységei” egy-egy „üzenetnek”, melyet éppen és csak sokféleségük átlóssága fejez ki.

108 Uo.

109 Jacob, François – Jakobson, Roman – Lévi-Strauss, Claude – L’Héritier, Philippe: Vivre et parler. = Les Lettres Françaises, 1968. No. 1221. (febr. 14.), No. 1222. (febr. 21.)

110 Horányi Özséb: Jelek a filmben. = MRT Módszertan 2 (1971) No. 13.

Odüsszeia a görög matematika tengerén[111]

Vázlat Szabó Árpád matematikatörténeti felfedezéseiről

A görög tudomány történeti, filológiai, értelmezési kérdései tizennyolcadik-tizenkilencedik századi kialakulásától fogva erősen foglalkoztatták a tudománytörténet-írást. A tizenkilencedik század utolsó harmadától, illetve végétől kezdve kiváltképpen nagy és fokozódó érdeklődést ébresztettek és vitákat váltottak ki a görög matematika kezdeteinek problémái; az eredet iránti szokásos érzékenységen túl a források szűkössége és bizonytalansága miatt is. Ebbe a hosszú fejlődésbe és heves vitákba kapcsolódnak be, régebbi s újabb nagy elődök nyomán, Szabó Árpád kutatásai.

Már kisgimnazista korában élénken érdeklődött a nyelvek iránt. 1931 és 1935 között a Pázmány Péter Tudományegyetem Bölcsészeti Karán görög-latin szakon tanult, Eötvös-kollégistaként. Itt alapozta meg kivételes nyelvi-nyelvészeti tudását. Elsősorban a jelentéstan és a nyelvtörténeti módszertan úttörő kutatója, Gombocz Zoltán hatott rá, aki az egyetem nyelvészprofesszoraként egyben az Eötvös-kollégiumban is tanított. 1935-től Szabó Árpád ösztöndíjasként a Frankfurti Egyetemet látogatta, itt habilitált 1939-ben.

A Frankfurti Egyetemen, ameddig és ahogyan lehetett, a náci időkben is őrizték a német klasszika-filológia és ókortörténet nagy hagyományait olyan professzorok, mint Franz Altheim, Walter F. Otto (akit 1934–35-ben Königsbergbe száműztek), Kurt Riezler (akit mint „fajidegent” 1934 tavaszán egy SS-Abteilung a katedráról hurcolt el, ami ellen egyetlen hallgató, Kövendi Dénes mert tiltakozni[112]), és Karl Reinhardt, aki meghatározóan hatott Szabó Árpádra, új utakat nyitó Parmenidész- és Platón-kutatásaival, széleskörűen tájékozódó nyílt filológiai módszerével, történelem iránti fogékonyságával; de túl ezeken tán egész szemléletével, emberségével és stílusával.[113] Ámbár Szabó Árpád tudományterjesztő-irodalmi

---

[111] Forrás: Vekerdi László: Odüsszeia a görög matematika tengerén. Vázlat Szabó Árpád matematikatörténeti felfedezéseiről. = Természet Világa 133 (2002) No. 4. pp. 164–167.; No. 5. pp. 221–223.

[112] Karl Reinhardt. Vermächtnis der Antike. Gesammelte Essays zur Philosophie und Geschichtsschreibung. Hrsg v. Carl Becker. Vandenhoeck u. Ruprecht, Göttingen 1960, p. 395. Kövendi Dénes Szabó Árpád mellett a görög tudomány történetének legjelentősebb honi kutatója volt. Kurt Riezler melletti bátor kiállásával „hagyományt” folytatott: „Valamikor a 20-as években ti. – írja válogatott tanulmányaihoz írt előszavában fia – a ref. tanáregyesület közgyűlésén Ravasz László püspök szép köszöntőt mondott Horthy Miklósra, aki fehér lován stb..., és a hallgatóság ünnepélyesen felállt. Apámnak eszébe jutott a fehérterror meg az őt ért személyes macerák, elfutotta agyát a vér, és – nem állt fel. Ezért volt reménytelen” stb... Tudós tanárok – tanár tudósok. Kövendi Dénes. A kísérő tanulmányt írta, a szöveget válogatta: (ifj.) Kövendi Dénes. Orsz. Pedagógiai Könyvtár és Múzeum, Budapest, 2001. p. 18.

[113] Walter Otto és Karl Reinhardt frankfurti hatásáról és különbségükről lásd: Uvo Hoelscher: Gedankreden auf Karl Reinhardt. Vittorio Klostermann. Frankfurt A. M., 1959. pp. 20–21.

munkásságától és magával ragadó előadásaitól Walter Ottó lelkesültsége és „létmegragadottsága” sem volt idegen.

Az Eötvös-kollégiumból és a frankfurti klasszika-filológusoktól hozott szellemben kezdte el előadásait 1940-ben (meglepően fiatal) professzorként Szabó Árpád a debreceni Tisza István Tudományegyetemen, ahol aztán 1948-ig tanított. A két évszám önmagában sejteti az ifjú klasszika-filológia professzor itteni gondjainak, feladatainak, lehetőségeinek a dimenzióit. Született pedagógus volt: vonzotta és kereste a tehetséges tanítványokat. Így került 1943-ban Platón-szemináriumára az akkori illegális kommunista párt aktivistájaként is tevékenykedő Lakatos Imre. A tanítással és tanulással járó viták és beszélgetések során kötöttek életre szóló szakmai és emberi barátságot.[114]

Mesteréhez, Reinhardthoz hasonlóan Szabó sem titkolta náci ellenességét. Az 1942-ben megjelent *Perikles korá*-ból, amely az ország szellemi épségét és függetlenségét féltő Klasszikus Műveltség Barátai Egyesületének megbízásából íródott, ki is kellett hagynia néhány túlságosan félreérthetetlen mondatot. „Az történt ugyanis – írja a könyv 1977-es átdolgozott és az eredetire visszaállított formájában –, hogy bár én az Akhaimenidák perzsa birodalmáról beszéltem, de az olvasó önkéntelen a Harmadik Birodalomra gondolt. Amikor meg arról írtam, hogyan tiporták el az athéniek a kis semleges Mélosz szigetét, akadt, akinek eszébe jutott: Mi történt Dániával, Norvégiával, Hollandiával meg Belgiummal 1940 tavaszán.”[115]

1948-ban megjelent ismeretterjesztő-tudományos könyve, a *Sokrates és Athén*, munkásságának ezt az ókortörténeti vonalát folytatja, s bár a szerző később erre a művére, marxista vonatkozásai miatt, fenntartással tekintett, akadnak bőven ebben is az akkori mába „átolvasható” mondatok. „A szofisztika – áll például a 72. lapon – haladó szellemű mozgalom volt ugyan, de nem sokat ér az a »haladás «, amelyet a gyakorlat, a realitás nem igazol.” És akár napjainknak is szólhat Szókratész törvénytiszteletének az elemzése: „Az embernek önkéntelenül is Platón egyik idézett levele jut az eszébe: »*Ne tűrjétek, hogy Szicílián vagy bármely más városon emberek uralkodjanak! A törvény legyen az úr – ez az én tanácsom*.«”[116]

A kis könyv figyelemre méltó tisztán szakmai szempontból is: a *Social Construction of Science* irányzatait mai nagy divatjukat évtizedekkel megelőző és a maiaknál sokkal világosabban kifejtett felismerések találhatók benne a tételes gondolkozás társadalmi konstruáltságáról. 1940-ben megjelent tanulmánya, Az olympiai Hórák[117] pedig egy kultusz-

[114] Jancis Long: Lakatos in Hungary. = Philosophy of the Social Sciences 28 (1998) p. 252.
[115] Periklész kora. Történeti és politikai áttekintés. Bp., 1977. Magvető. pp. 199–200. (Gyorsuló idő)
[116] Szabó Árpád: Sokrates és Athén. Bp., 1948. Szikra. p. 87.
[117] Az olympiai Hórák. = Egyetemes Philologiai Közlöny 64 (1940) pp. 65–73.

és mítosztörténeti elemzés keretében azt a terminus- és fogalomtörténeti módszert vetíti előre, melynek alkalmazásával majd a görög matematika kibontakozásáról vázol merőben új képet. De másik nagy témakörének, a görög csillagászati világkép kibontakozását vizsgáló kutatásoknak a csírái is felismerhetők ebben a Hórák táncáról szóló szép kis tanulmányban, amint különben évtizedek múltán maga a szerző utal rá.[118]

1948-tól a budapesti Eötvös Loránd Tudományegyetemen klasszika-filológiát és ókori történelmet tanított. Munkásságában itt még inkább előtérbe kerülnek reinhardti inspirációk, amint például az MTA I. Osztályának „ismeretterjesztő sorozatában" 1954-ben megjelent Homérosz-könyvéből látható. Kivált az Odüsszeia elemzésében és két eposz nézetkülönbségének az értelmezésében érhető tetten frankfurti mesterének a hatása. Ahogyan például világossá válik „a lépés a hősi-emberfelettitől a problematikus-emberihez",[119] ami az Odüsszeiát alig egy nemzedéken belül az istenekre hivatkozó kollektív hősi rablókalandok köréből átvezeti az „okosság, leleményesség, ravaszság és furfang"[120] világába anélkül, hogy nagyon eltávolodva az Iliász heroikusan emberfeletti szemléletétől. S túl a Homérosz-könyvén, mintha Szabó egész most kibontakozó új kutatási irányára (vagy Lakatos szavaival szólva: kutatóprogramjára) érvényes lenne a frankfurti mester filológusi (vagy inkább tán odüsszeuszi?) önmérséklete: „Lényegében – emeli ki Reinhardt – az volt a szándékom, hogy egy adott körön belül, légvárak építése nélkül, járható útra tereljem a kezdetekre vonatkozóan felvetett kérdést."[121]

Szabó a maga „járható útjára" Parmenidész filozófiájának – Reinhardt kronológiai-filológiai felismeréseit követő – újraértelmezésével lépett, az ötvenes évek elején. Az *Acta Antiqua* első évfolyamában megjelent sorozatindító tanulmánya[122] a dolgok belső ellentmondásosságát feltáró parmenidészi logika hatását és fejlődését követve vázolja a dialektika történetét Hérakleitosz, a szofisztika, az atomizmus és mindenekelőtt Platón filozófiájában. Nyomatékosan kiemeli, hogy csak ezzel a fejlődéssel párhuzamban érthető meg a formális logika kialakulása, hiszen az eleaiak nem csupán egyes fogalmak belső ellentmondásosságát ismerték fel, hanem ugyanakkor előírták „az »ellentmondásmentesség« követelményét. Ezzel a követelménnyel kezdődik a logika története."

---

118 Zeitbestimmung mit Schattenbeobachtung. = Acta Classica Univ. Scient. Debrecen. 27 (1991) pp. 31–41.
119 Karl Reinhardt. Von Werken und Formen. Vorträge und Aufsätze. Verlag Helmut Küpper. Godesberg, 1948. p. 36.
120 Szabó Árpád: Homéros. Bp., 1954. Akadémiai. p. 126.
121 Reinhardt. Von Werken... p. 162.
122 Beiträge zur Geschichte der griechischen Dialektik. = Acta Antiqua Academiae Scientiarium Hungaricae 1 (1951–1952) pp. 377–410.

Az eleata-sorozat második tanulmánya azután Parmenidész „hármas útját” kapcsolja az arisztotelészi logika három alap-princípiumához,[123] a harmadik pedig, tágítva a látókört, megérteti, hogy miként ágazik el az ellentmondás-mentesség követelményénél a dialektika racionális fejlődése a misztikustól.[124]

A racionális elágazást követi, a matematikatörténet-írás néhány régibb és számtalan új eredményére hivatkozva, a negyedik közlemény;[125] bemutatva, hogyan küzdött ki magának a korai pythagoreus matematika nyilvánvalóan eleata-hatásra egy ellentmondás-mentességre alapuló specifikus „(gondolkozás) területi autonómiát”, elindulva a hosszú úton, amelyen járva a matematika „deduktív tudománnyá” vált. A kiinduló tételt, hogy a bizonyítani kívánt állítás ellenkezőjének a cáfolásával dolgozó „transzfinit bizonyítás” – az általánosan elfogadott nézettel ellentétben – egyáltalában nem „elszigetelt” a korai görög matematikában, egy széles körben olvasott svájci szaklapban is közölte.[126] Ezzel döntő fordulathoz érkeztünk Szabó Árpád munkásságában.

Ekkorra a nagy professzor, az ELTE méltán legnépszerűbb előadóinak egyike (bár túlságosan nagy konkurenciával sajnos ekkor már aligha kellett versengenie) politikai nézeteiben és társadalomszemléletében messzire távolodott a felszabadulást közvetlenül követő évek lelkesedésétől és reményeitől. Ahogyan a harmincas évek végén – negyvenes évek elején, most is egyre élesebben fordult szembe a diktatórikus rendszerrel. Barátja, Lakatos Imre 1953-ban szabadult a több mint három éves kistarcsai és recski internálásból, s Árpáddal felújították régebbi filozófiai vitáikat, beszélgetéseiket.[127] Lakatost Rényi Alfréd, az Akadémia Matematikai Kutatóintézetének igazgatója, helyezte el az intézetben. Az antik matematika története és értelmezése iránt Európa- és Amerika-szerte épp ez idő tájt erősen megnőtt érdeklődést a Rényi–Lakatos–Szabó triász kíváncsian követte. Az Eleatica-sorozat ötödik, záró közleményében[128] Szabó Árpád részletes és szakmatematikusnak dicséretére váló irodalmi áttekintés keretében vázolt fel merőben új képet a görög matematika kezdeteiről, a parmenidészi dialektika fejlődéstörténetét feltáró addigi vizsgálatai alapján. Részletesen kifejti, hogyan és miért alkalmazták a pythagoreusok az értelemre hivatkozó eleata lét-kritériumot szemléletet elvető tisztán gondolati bizonyítások kidolgozására, s lehettek így ők

[123] Zur Geschichte der Dialektik des Denkens. = Acta Antiqua... 2 (1954) pp. 17–62.

[124] Zum Verständnis der Eleaten. = Acta Antiqua... 2 (1954) pp. 243–289.

[125] Eleatica. = Acta Antiqua... 3 (1955) pp. 67–103.

[126] Szabó, Árpád: Ein Lehrsatz der pythagoreischen Arithmetik. = Elemente der Mathematik 11 (1956) pp. 101–105.

[127] Jancis Long, i. m. pp. 288–289.

[128] Wie ist die Mathematik zu einer deduktiven Wissenschaft geworden? = Acta Antiqua... 4 (1956) pp. 109–152. Lakatos „matematikai fordulatáról” lásd Kántor Sándorné utószavát a „Bizonyítások és cáfolatok” második magyar kiadásához (Bp., 1998. Typotex). Lakatos nézeteire döntő befolyást gyakorolt a Matematikai Kutatóintézetben eltöltött idő!

– és csak ők – a bizonyításokkal dolgozó matematika megteremtői. „A gondolkozás ellentmondásmentessége tehát tulajdonképpen az eleata *Erkenntnis-Programm* következtében vált a matematikai igazság egyetlen kritériumává.”

1957 júniusában Szabó Árpádot, aki még akkor is következetesen kiállt az október végén elfogadott követelések, köztük a szovjet csapatok kivonása mellett, megfosztották katedrájától. Rényi Alfréd hívta meg a Matematikai Kutatóintézetbe, s kérte fel matematikatörténeti kutatásainak a folytatására. Addigi vizsgálatait a *Matematikai Lapok* 1957-es évfolyamában foglalta össze „Hogyan lett a matematika deduktív tudománnyá?” címmel, két részben, a téma kiterjedt irodalmának a hátterében.[129] „A bizonyítás elsődleges logikai formája – összegez a második rész vége felé – a cáfolat; megcáfoljuk a tételünkkel ellenkező tételt azáltal, hogy kimutatjuk benne az ellentmondást. Ez volt Parmenidész és az eleaták módszere; nem bizonyítottak, hanem cáfolták a tételeikkel ellenkező nézeteket, kimutatván, hogy ezek ellentmondanak önmaguknak (...) A matematika a görögség előtti korban csak tapasztalati, praktikus ismeretek gyűjteménye volt. Azáltal, hogy az első pythagoreusok a 6. század végén vagy legkésőbb az 5. elején alkalmazták ezekre a gyakorlati ismeretekre az eleaták logikus módszerét, meglepő változást készítettek elő. A matematika azzá lett, amit ma ezen a néven értünk: deduktív tudománnyá. Ugyanakkor azonban az eleaták spekulatív logikája is egy olyan területen nyert alkalmazást, amely lényegének legjobban megfelelt. Ettől kezdve nemcsak a logika segítette elő a deduktív tudomány további fejlődését, hanem a matematika is visszahatott a logika fejlődésére.”

Filozófia-matematika-logika egymást kölcsönösen megtermékenyítő fejlődéséről vázolt tézisét Szabó Árpád – Reinhardt jó tanítványaként – aprólékos és kifinomult terminustörténeti értelmezéssel világítja át és finomítja. Levezeti, hogyan és miért változik „A matematikai »bizonyítás« görög terminus technikusa”[130] az eredeti, közvetlen „megmutatásra” utaló szemléletes jelentésből – ahogyan még Platón is használja a *Menón*ban – azzá a közvetett gondolati bizonyítássá, ahogyan a korai pythagoreusok alkalmazták nem szemléletes, csak elgondolható számokra vonatkozó tételeikben, például a végtelen sok prímszám létezését bizonyítóban. A tisztán gondolati bizonyításokban kiteljesülő aritmetika és a szemléletesség valamilyen formáját feladni nem tudó és nem is akaró geometria között így keletkezett – már Platón által észrevett – „feszültség” többlépcsős „feloldását” bonyolult és kifinomult terminus és fogalomtörténeti elemzésekkel követve rekonstruálja azután 1959-ben megjelent

---

129 Matematikai Lapok 8 (1957) pp. 1–36, 232–241.

130 Szabó, Árpád: ΔΕΙΚΝΥΜΙ, als matematischer Terminus für „Beweisen”. = Maia 10 (1958) pp. 106–131. Szabó Árpád. A matematikai „bizonyítás” görög terminus technikusa. = Antik Tanulmányok 5 (1958) pp. 25–43.

tanulmányában Szabó Árpád, hogy miként alakulhattak ki „A görög matematika definíciós-axiomatikus alapjai”.[131] 1960-ban pedig a görög matematika kezdeteiről és fejlődéséről szóló vizsgálatait és felfedezéseit egy német nyelven megjelent tanulmányban egyesítette és szintetizálta, fogalom- és terminustörténeti rendben tárva fel és mutatva be „Az euklideszi axiómarendszer kezdeteit”.[132] A már indulásakor igen tekintélyes *Archive for History of Exact Sciences* első évfolyamának első számában megjelent hosszú, alapos, nehéz, nyelvi és matematikai kompetenciát egyesítő (és olvasójától megkívánó) tanulmány egy csapásra a szakma nemzetközi élvonalába emelte a szerzőt. Megnyitotta az utat az újjászületett és – Joseph E. Hoffmann körül – lendületesen felívelő német és európai matematikatörténet-írás vezető egyéniségeihez. Szabó állandó és (remek német stílusa és ragyogó előadókészsége miatt is) közkedvelt vendége lett a tekintélyes oberwolfachi Matematikatörténeti Konferenciáknak.

Az Anfänge-cikk „továbbérlelt és bővített változata” magyar nyelven az *Osztályközlemények*ben jelent meg, két részletben, „A matematika alapjainak euklidészi terminusai” címmel.[133] „Az itt összefoglalt kutatások értelmében – összegez mintegy előrevetítve jövő vizsgálatait – a rendszeres és deduktív matematika, történetének legelső szakaszában, nem volt egyéb, mint a filozófiának, közelebbről az eleai dialektikának egyik ága. A görög matematika tulajdonképpen a *geometria* elméleti megalapozásával szakadt ki a filozófiából és lett tőle függetlenné.”

A függetlenné válás a számfogalom mélyreható változásával járt együtt, és merőben új mennyiségfogalom megteremtésére vezetett. Szabó Árpád terminustörténeti és fogalomértelmezési „mélyfúrásokkal” sorra feltárja, hogyan alakítja ki a geometria megalapozására irányuló törekvésekkel „függetlenné” vált matematika magának a „logosz szerinti egyenlőség” fogalmát, amiből aztán a köznyelvben „analógia”, a matematikában pedig Eudoxosz kezében a „mennyiségekre” alkalmazott precíz és kifogástalan arányelmélet lesz,[134] hogyan teremti meg a geometria tetszőleges téglalapok négyzetté alakíthatóságának felfedezésével a lineárisan nem, de négyzetesen összemérhető vonalszakasz-mennyiség fogalmát,[135] hogyan nyitják meg a pythagoreusok a mérőlappal ellátott monochordon, a *kanonon* végzett kísérleteik teoretikus értelmezésével a matematikát újból az empíria felé.[136] A

[131] A görög matematika definíciós-axiomatikus alapjai. = Matematikai Lapok. 10 (1959) pp. 72–121.
[132] Anfänge des euklidischen Axiomensystems. = Archive for History of Exact Sciences 1 (1960) pp. 37–106.
[133] A matematika alapjainak euklidészi terminusai, I–II. = A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei 10 (1960) pp. 441–468., 11 (1961) pp. 1–46.
[134] ANALOGIA. = Acta Antiqua... 10 (1962) pp. 237–245.
[135] Der matematische Begriff δύναμις, und das sog. „Geometrische Mittel”. = Maia 15 (1963) pp. 219–256.
[136] Der Ursprung des „Euklidischen Verfahrens” und die Harmonienlehre der Pythagoreer. = Math. Annalen. Vol. 150. (1963) pp. 203–217.

terminustörténeti elemzéseket újból egy nagy *Archive*-cikk foglalja egybe,[137] amelyben – terminológiája tükrében – a görög matematika kibontakozása a módszeréhez elfogadott eleata-kihívásra definitorikus-axiomatikus megalapozással válaszoló, ám a tapasztalat felé nyitott vállalkozásként mutatkozik. Akárcsak Karl Popper épp az idő tájt uralkodóvá váló falzifikációs-definitorikus tudományfilozófájában maga a tudomány.

Ez a „rímelés" is hozzájárulhatott tán az eredményeket rendszerező, összekötő, kibővítő, tágas matematikatörténeti és szakirodalmi keretben bemutató könyve, az *Anfänge der griechischen Mathematik*[138] nagy nemzetközi sikeréhez. A lényeg azonban a gondolatok eredetisége és frissessége volt, az elemzések kifinomultsága és megbízhatósága, a kronológiai és eszmetörténeti elrendezés világossága, ahogyan a könyv az eleata „Erkenntnis-Programm" elfogadása után a program rombolóan radikális következményeitől konstruktív-operatív korlátozásokkal védekező geometriát elvezeti csúcsteljesítményét, a kúpszeletek elméletét lehetővé tevő „területillesztés" eddigieknél megbízhatóbb új történeti értelmezésének (megint mennyire reinhardti vonás!) a küszöbére.[139]

A könyv megnyitotta az utat szerzőjének meghívások és akadémiai-intézményi tagságok hosszú sorához. A Magyar irodalmi lexikon vagy az Akadémiai gyászjelentés felsorolásából[140] láthatóan kevés itthon maradt magyar tudós dicsekedhet hasonlóval, kivált a humaniórák területén. A sikerhez hathatósan hozzájárult régi barátjának, Lakatos Imrének a segítsége, aki a hatvanas évek közepére, második felére a Londoni Egyetem professzoraként, fontos tanulmányok szerzőjeként és egy tekintélyes brit tudományfilozófiai-tudománytörténeti folyóirat, valamint egy nagy visszhangot verő tanulmánygyűjtemény szerkesztőjeként a tudományfilozófiával szövetkezett tudománytörténet-írás fő (és több mint szakmai) tekintélyei – Popper, Kuhn, Feyerabend – mellé emelkedett.[141]

---

137 Die Frühgriechische Proportionenlehre im Spiegel ihrer Terminologie. = Archive for History of Exact Sciences 2 (1965) pp. 197–270.

138 Anfänge der griechischen Mathematik. Akad. Kiadó, Budapest, Oldenbourg Verlag. München–Wien, 1969.

139 Ein Lob auf die altpythagoreische Geometrie (Epinomis 990 D 1–6.) = Hermes. Vol. 98. (1970) pp. 405–421. „Die Muse der Pythagoreer" (1) zur Frühgeschichte der Geometrie. = Historia Mathematica 1 (1974) pp. 291–316.

140 A Görög Tudományos Akadémia, az Interdisciplinary Academy (Finnország), az Accademia del Mediterraneo (Roma), az Accademia Lucchese di Scienze (Lucca), a Hadmard Academy (Pakisztán), a Center for Advanced Studies (Stanford, Kalifornia), a Wissenschaftkolleg (Berlin), az Instituto per la Storia de Magna Grecia (Taranto), az Instituto Siciliano per la Storia Antica (Palermo) tagja, a Goethe Egyetem (Frankfurt am Main) díszdoktora..." Fontosabb lenne azonban ismerni külföldi előadásainak a helyszínét és idejét; ez azonban már a Szabó Árpád-filológia feladata lesz.

141 Criticism and the Growth of Knowledge. Ed. By Imre Lakatos and Alan Musgrave. Cambridge, 1970. Cambridge U. P.; Paul Feyerabend: Imre Lakatos. = The British Journal for the Philosophy of Science. Vol. 26. 1975, p. 1–18.; I. Lakatos (Obituary) Nature. Vol. 250. 12 July 1974, p. 171.

Meghívására Szabó Árpád 1968-ban előadást tartott Londonban a tudományos fogalomalkotás természetéről. Lakatos – mint Paul Feyerabenddel váltott leveleiből kitűnik[142] – nem titkolta, hogy sokat tanult Szabótól; ő pedig az 1973-as első Tudománytörténeti és Tudományfilozófiai Konferencián hozzászólásában az analízis-szintézis kérdésköréhez nyomatékkal hivatkozik Lakatos 1963–64-ben megjelent *Bizonyítások és cáfolatok*jára, matematikafilozófiai alapvetésére.[143] Barátja halála után az *Anfänge* 1978-as angol nyelvű kiadását[144] Lakatos Imre (1922–1974) emlékének ajánlotta. A matematikatörténet-filozófia fogalmának megteremtése és a szakma megalapozása – Rényi Alfréd szakmai és emberi segítségével – két magyar tudós érdeme. Valószínűleg egyikük se tudott róla, hogy az első hasonló feladatot a művészettörténet-filozófia kigondolásával Fülep Lajos vetette fel.

*

Az *Anfänge* célja és – Lakatos értelmében vett – Research Programm-ja a görög matematikai fejlődés új képének a lehető legteljesebb felvázolása volt; a könyv *Appendix*e szerint elsősorban a másodfokú problémák Euklidész előtti geometriai megoldásának illetőleg az apollónioszi-arkhimédészi kúpszelet-elméletnek az irányában. „Sajnos – olvasható az 1994-ben megjelent és az egész matematikatörténeti életművét összegező-újrarendező könyve előszavában – túlságosan merész lenne azt állítani, hogy ez a remény megvalósult."[145] De a hetvenes években az addig elsősorban teoretikus területekre vonatkozó vizsgálatok mellé váratlanul csatlakoztak a remény megvalósulását segítő felfedezések a korai görög alkalmazott matematika területéről.

„Kiindult ez a munkám – írja Szabó Árpád az *Antik csillagászati világkép*ről szóló könyve előszavában – *Vitruvius*nak abból a szövegéből, amely hírt ad arról, hogy a Kr. e. utolsó évszázadban városról városra gondosan számon tartották a napóra mutatójának, az ún. *gnómónnak* és napéjegyenlőségi déli árnyékának az arányát. Vitruvius csak azt jegyzi meg ezzel az aránnyal kapcsolatban, hogy ennek az ismerete elengedhetetlen annak a számára, aki

---

142 For and against method. Imre Lakatos – Paul Feyerabend. Including Lakatos' Lectures on Scientific Method and the Lakatos–Feyerabend Correspondence. Ed. and with an introduction by Matteo Motterlini. Chicago, 1999. Univ. Of Chicago Press, p. 230, note 122.

143 Szabó, Árpád: Analysis und Syntesis. (Pappus II. p. 634. ff., Hultsch) Auszug eines Beitrages (secondary paper) zum Referat von *Prof. J. Hintikka* an der First International Conference on the History and Philosophy of Science. Jyväsylä-Finnland, 28 Juni – 6 Juli 1973. = Acta Classica Univ. Scient. Debrecen. Vol. 10–11. (1974–1975) pp. 155–164.

144 The Beginnings of Greek Mathematics. Akadémiai Kiadó, Budapest/Reidel Publisching Company, Dordrecht 1978, p. 5. To the memory of my friend Imre Lakatos (1922–1974)

145 Die Entfaltung der griechischen Mathematik. Bibliographisches Institut u. F. A. Brockhaus AG, Manheim 1994, p. 7.

az említett helyeken napórát akar készíteni. A latin szöveg modern kiadója azonban hozzáfűzi ehhez mindjárt azt is, hogy ilyen arányszámokból számították ki az ókoriak a megnevezett helyek *földrajzi szélességét*."[146] Ugyanez kiszámítható a leghosszabb nap nappal-éjszaka arányából is, valamint ez az arány a gnómónnak és napéjegyenlőségi déli árnyékának az arányából. Ezeket a számításokat már a Kr. e. második században Hipparkhosz jól ismertként említi, s mivel a számításokhoz trigonometria szükséges, már a Hipparkhosz előtti görög matematikusoknak érteniük kellett a trigonometriai számításokhoz és szögtáblázatok készítéséhez. De hogyan járhattak el, mikor még jóval később is a kör könnyen elvégezhető jellegzetes osztásaival mérték általában a szögeket?

A szög- és ívproblémákra a görög geometriában Erkka Maula Eudoxos-kutatásai hívták fel Szabó Árpád figyelmét; Maulával azután a finnországi Oulu Egyetemen 1977-ben hosszabb kutatási program keretében vizsgálták a kérdést. Az eredményekről a következő esztendőkben Szabó Árpád jó néhány közleményben számolt be, s 1982-ben az Athéni Akadémia kiadásában a „földrajzi szélesség"-re utaló *Enklima* címmel megjelent könyvükben foglalta össze az eredményeket.[147] A könyv fényt derít a korai görög húrtáblázatok számítási módszereire, és rámutat Euklidész jó néhány tételének – köztük a „területillesztés" szempontjából alapvető II. 6-nak – összefüggésére a gnómónszámításokkal, illetőleg a húrtáblázatokkal. De túl ezeken az alkalmazott matematikai kérdéseken, új és meglepő fényt vetnek az *Enklima* fejezetei az egész görög geocentrikus világkép kibontakozására, ahogyan – a napéjegyenlőségi és a két napfordulói déli gnómónárnyék-gnómón arányokból adódó (horizonttól számított) irányokat felvetítve az éggömbre – megszerkesztették a Nap éves égi útját tükröző „égi geográfia" geometriai modelljét (a geocentrikus világképet megtestesítő és szimbolizáló későbbi armilláriumok ősét). Egy adott helyen felállított gnómónnak a meridiánra vetülő árnyéka pedig napéjegyenlőségi-napfordulói beosztásaival „látható képe az egymással nem egyenlő négy évszaknak. Ez »a Hórák tánca«", utal Szabó Árpád 1991-ben ifjúkori dolgozatára.[148]

A gnómóngeometria tehát Világmodell és Kalendárium egyszerre; a gnómón – a csúcspontjában elképzelt Földdel – a maga egyszerű ám furfangos geometriájában teljes „Gnómón- világkép", a geocentrikus görög világkép matematikai reprezentációja és szimbóluma. Az a hatalmas obeliszk, amit Augustus szállíttatott át Egyiptomból és állíttatott fel Rómában, óriási gnómón-kalendárium és világkép egyszerre: szakrális kalendárium.

---

146 Szabó Árpád: Antik csillagászati világkép. Bp., 1998. Typotex. p. 7.

147 Szabó, Á. – Maula, E.: ENKLIMA – ΕΓΚΛΙΜΑ. Untersuchungen zur Frühgeschichte der griechischen Astronomie, Geographie und der Sehnentafeln. Academy of Athens. Athen, 1982.

148 Lásd 6. jegyzet.

Az 1999-es esztendő tudománytörténeti sikerkönyvében J. L. Heilbron a középkori és reneszánsz katedrálisok padlóján olykor még ma is látható osztott meridiánvonalról állapította meg ugyanezt; a gnómón csúcsának a szerepét itt egy alkalmasan elhelyezett ablak töltötte be.[149]

„A bolygómozgások magyarázatától eltekintve – hangsúlyozza Szabó Árpád – a téves geocentrikus világkép számos tekintetben mégis jelentős, hasznos, sőt, legalábbis átmenetileg, szükséges is volt. Lehetővé tette a tudomány néhány fontos fogalmának a megalkotását, fogalmakét, melyeket alig változott értelemben használunk ma is."[150] Használta ezeket a fogalmakat az egész antik művelődés és irodalom; Szabó beszédes példák tömegével illusztrálja. Úgyhogy a geocentrikus világképről szóló szép könyve valósággal a gnómón-világkép kultúrtörténete, Simonyi professzor értelmében használva a szót.

A párhuzam tán a tekintetben is releváns, ahogyan Szabó Árpád kivételes tehetségével a mindenkori magyar kultúrhivatalosság gazdálkodott. Az Akadémia Szentágothai János elnöksége idején és erélyes közbenjárására az 1979. évi 139. közgyűlésén levelező tagjai sorába választotta. Székfoglaló előadását 1980. február 21-én *A leghosszabb nap* címmel a gnómón-világképről tartotta,[151] de a nagy professzor 1956 után többé már soha nem jutott magyar egyetemi katedrához. A rendszerváltás után egy ideig előadott a pécsi Janus Pannonius Tudományegyetemen, de az egyetem – őt személy szerint is érintő – belső zavarai kedvét szegték. Előadói és tanítói energiáit az egyre szaporodó külföldi meghívások és egy – nemcsak mifelénk – példátlan filozófiai-pedagógiai periodika, a Ferge Gábor, Csejtei Dezső, Endreffy Zoltán szerkesztésében elindult EXISTENTIA tervezése és támogatása kötötte le. Támogatta az új folyóiratot a régebbi tanulmányait új szempontok szerint átrendező, kibővítő és nem utolsó sorban közérthetősítő értekezésekkel, egyebek közt Euklidészről és az eleaták filozófiájáról, Parmenidesről, Platón életéről és Phaidónjáról (amit teljes egészében lefordított és bilinguis kiadásban, pompásan reprodukált vázaképekkel kísérten közölt), az eleai Zénónról, továbbá *„Sophia" és „philosophiá"-ról*. De támogatása nem korlátozódott a szellemiekre: a nyilvánvalóan anyagi gondokkal küszködő, külsejében is kivételesen szép (tehát drága) periodika életben tartása érdekében 1993-ban létrehozta a *Societas Philosophia Classicá*t, és a III. kötettől vállalta az EXISTENTIA főszerkesztői posztját. Emlékezett talán még régről, a *Perikles kora* idejéből *A Klasszikus Műveltség Barátai Egyesületére*? Mindenesetre „Sophia" és „philosophia" Thalésztől Marcus Aureliusig hullámzó

149 J. L. Heilbron: The Sun in the Church. Cathedrals as Solar Observatories. Harvard Univ. Press, Cambridge Mass. 1999.

150 Szabó, Árpád: Das geozentrische Weltbild. Astronomie, Geographie und Mathematik der Grichen. Deutscher Taschenbuch Verlag. München 1992, p. 7.

151 A leghosszabb nap. (Tudománytörténeti előadás). = MTA II. Oszt. Közl. 29 (1980) pp. 217–233.

változásainak áttekintése végén az idézet akár programnak is tekinthető: „Szeresd munkakörödet, amelybe beletanultál, és leld benne örömödet. Ami még hátra van az életből, azt úgy éld le, hogy minden dolgodat szívvel-lélekkel az istenekre bízod, az emberek közül pedig senkinek se légy se zsarnoka, se szolgája.”[152]

Az EXISTENTIA-ban közölt tanulmányai filozófiai-filozófiatörténeti (filozófiatörténet-filozófiai) háttér gyanánt tekinthetők a kilencvenes évek főművéhez, az 1994-ben megjelent *Entfaltung der Griechschen Matematik*hoz. Az Előszó, utalva a szöveges források szegénységére, kiemeli a szakkifejezések jelentőségét: „a legfontosabb és legkifizetődőbb forrása a tudománytörténetnek, amit minduntalan felhasználunk, maga a matematikai terminológia.”[153] És a terminológia mellett a szétszórt, nemegyszer szépirodalmi alkotásokban rejtőzködő nyelvi adatok. S mégis milyen hanyagul bánnak mindkettővel történészek és filológusok! Mennyi félreértéstől hemzseg a tudománytörténet-írás! Így aztán a szakirodalom alapos kritikai értékelése maga is fontos forrás lehet, Szabó Árpád ifjúkorától bőven élt vele, az *Entfaltung*ban pedig meghatározta saját munkásságának a helyét vagy inkább „enklimá”-ját a szakirodalom „szellemi geográfiájában”.

A könyv sokkal több a matematikai *Anfänge* és a csillagászati *Das geocentrische Weltbild* szintézisénél: feltárja, helyesebben „racionálisan rekonstruálja” a görög matematikai tudás fejlődését Euklidészig és Ptolemaioszig, addig, ahonnét már töretlenül folytatható lesz a késő középkori reneszánsz asztronómiában és a koraújkori matematikában. A főszöveghez csatolt három függelék pedig kiemel három, a régebbi és a mai tudománytörténet-írásban lényegében megoldottnak vélt neuralgikus témakört (Theaitetos „matematikája”, az Euklidész előtti arányelmélet, az *Elemek* „geometrikus algebrája”), melyek az *Entfaltung* megvilágításában merőben másként látszanak, de mivel nem tartoznak szigorúan a könyv főirányába (amit „Az asztronómia hozadéka”, „A zeneelmélet és az arányok”, „A matematikai irracionalitás” és „A geometria euklidészi rendszere” főcímek jelölnek ki), függelékbe kerülnek, oldalágként vagy pedig további kutatásokra váró irányok gyanánt. Az *Anfänge* egykori Appendixe pedig bekerült „A matematikai irracionalitás” főcím alá, végleg a tudománytörténeti legendák körébe sorolva a Theodórosz elméletét „tökéletesítő” Theaitetoszról és a négyzetátló összemérhetetlenségének a felfedezése által kiváltott „botrányról” szóló tudós fejtegetéseket.

„Az előző fejezetekben tárgyalt területgeometria (Flächengeometrie) – kezdődik „A matematikai irracionalitás kronológiája” című fejezet – olyan problémákat oldott meg, melyek

[152] EXISTENTIA 1 (1991) p. 177.

[153] Die Entfaltung der griechischen Mathematik. B. I. Wissenschaftverlag. Mannheim-Liepzig-Wien-Zürich, 1994. p. 13.

elsősorban az arányelméletben és az inkommenzurabilitás felfedezésével kapcsolatban merültek fel. A harmadik és a negyedik arányost a területparabolával szerkesztették, a középarányos különféle formáit az elliptikus és hiperbolikus területillesztéssel.”[154] A *dynasthiai* és a *dynamis* terminusok jelentésének megfejtésével nyert tudománytörténeti eredmények ismertetése után pedig így összegez: „Az inkommenzurabilitás tanának az a fejlődési foka, amely az *Elemek* X. könyvében megjelenik, mindenesetre későbbi, mint maga a *dynamis* fogalom és az itt tárgyalt területgeometria – eltekintve természetesen a területgeometria Apollóniosz általi még későbbi alkalmazásától.”[155] Önkéntelenül újból Karl Reinhardt jut az ember eszébe: „Wer nur begeistert sein, wer aus den Quellen trinken will, der greife nicht zu diesem Buch, in dem um alles immer nur herumgeredet, alles Unmittelbare umgebrochen, immer vor Türen gefürt wird, in die man nicht eintritt. Mit dem Unterschied von anderen Büchern höchstens, dass darum gewusst wird.”[156]

A matematika filozófiájáról 1965-ben Londonban rendezett kongresszuson „Popper – írja egy 2001-ből származó tanulmány – hozzászólt Szabó téziséhez, miszerint Euklidész axiomatikus módszere az eleata filozófusok dialektikájából származott. Popper (eredetileg 1952-es) sejtése nem volt összeegyeztethetetlen Szabóéval, de a hangsúlyt elsősorban arra a *problémára* helyezte, amit az *Elemek* megold. Ez a probléma az inkommenzurabilitás felfedezése volt, amiből kiderült, hogy a pythagoreusok kísérlete a világ megértésére természetes egész számok aritmetikája alapján soha nem sikerülhet. Euklidész könyve megoldotta, geometriával helyettesítve az aritmetikát a kozmológia alapja gyanánt. Így az *Elemek* alapjában kozmológiai értekezés volt a végső geometriai »Elemekről«, melyekre a világ felbontható.”[157]

Az *Elemek* – derült ki Szabó Árpád sok évtizedes türelmes, tüzetes vizsgálataiból – valamiképpen csakugyan „kozmológiai” könyv, ha nem is úgy, mint 1965-ben Sir Karl sejtette. Kozmológiai könyv közvetlenebb, alkalmazott (vagy amolyan kvázi-lakatosi „quasiempirical”) értelemben: a gnómón-világképhez (és a szögtáblázatokhoz) szükséges geometria kidolgozásával. Ami pedig a „problémát” illeti, az a *dynamis* terminus technicus jelentésének megfejtésével szinte „magától” feloldódott a területgeometria szép logikus fejlődésében, ahogyan azt a pythagoreusok – eleaták-sugallta – „Múzsája” megkövetelte.

[154] Uo. p. 290.
[155] Uo. p. 296.
[156] Reinhardt. Von Werken... (lásd 8. jegyz.) p. 8. Szabó Árpád két előző mondattal együtt idézi a Vermächtnis der Antike-ről írt recenziójában. = Deutsche Literaturzeitung 82 (1961) pp. 219–220.
[157] Eduard Glas: The „Popperian Programme” and Mathematics. Part II: From Quasi-Empiricism to Mathematical Researche Programme. = Stud. Hist. Phil. Sci. 32 (2001) pp. 355–376.

Az *Anfänge,* a *Das geocentrische Weltbild*, az *Entfaltung* a század néhány megkerülhetetlen tudománytörténeti-tudományfilozófiai művéhez tartozik, s a szakma legelsői közt jelölik ki Szabó Árpád helyét. De a professzor arcképéhez szervesen hozzátartoznak irodalomtörténeti, nyelvészeti, ókortörténeti munkái; a magyar irodalom legnagyobbjaihoz méltó nyelven megírt ismeretterjesztő, felvilágosító, ifjúsági könyvei; világos nyelvi és szakmai megfogalmazásukkal tündöklő tankönyvei. Programként, de akár hitvallásként is felfogható, amit az általa létrehozni segített és lelkesen patronált Magyar Tudománytörténeti Intézet szerkesztésében megjelent felsőoktatási segédkönyvének, remekbe sikerült *A görög matematiká*nak előszavában írt: „Ne feledjük: a tudomány egy-egy eredményének történeti vizsgálata teljesebbé teheti a megértést a szakma határain túl is.”[158] Tekinthető akár szellemi örökség gyanánt; jó lenne hinni, hogy a szakma határain túl is.

Szabó Árpád 2001. szeptember 13-án, életének 88. évében hunyt el, hirtelen és váratlanul. Mintha néki is a thébai Teiresziász lelke jósolta volna meg, mint kedves Odüsszeuszának: „...A tengerről jő majd a halálod /gyöngéden közelít hozzád, és könnyű öregség/ végén sújt csak rád...”

[158] Szabó Árpád. A görög matematika. Sajtó alá rend.: Gazda István. Bp., 1997. Magyar Tudománytörténeti Intézet – Tájak-Korok-Múzeumok Egyesület. p. 7. (Magyar Tudománytörténeti Szemle Könyvtára 4.)

Az újkori matematikai történetéből

Vekerdi László korábban már digitalizált tanulmányaiból

Lásd a Függelékben!

Matematikatörténeti kalandozások

Blaise Pascal az újabb tudománytörténeti kutatások tükrében[1]

Már gyermekkorában bebizonyította *Euklidész* néhány tételét, anélkül hogy valaha is olvasta volna. Tizenegy éves korában értekezést írt a hang keletkezéséről. Alig húsz éves, amikor megkonstruálja a számológépét, amely már a modern összeadó- és számológépek elvei alapján működik. Huszonnégy éves korában úgy ismétli meg *Torricelli* kísérletét, hogy abból a barométer születik meg, huszonhat-huszonnyolc éves korában megteremti az aero- és hidrosztatikát. Alig harminc éves, mikor megteremti a valószínűségszámítást, s a róla elnevezett aritmetikai háromszög segítségével lerakja a sorelmélet alapjait és általánosítja a magasabb fokú parabolák integrálását. Ekkor írja a francia próza és a dialektikus gondolkozás történelmében új korszakot nyitó „Vidéki levelek"-et. A harmincas évei derekán lerakja a többszörös integrálás, a görbe mentén történő integrálás és a transcendens görbék integrálásának alapjait, s a „karakterisztikus háromszög" bevezetésével megteszi a döntő lépést a leibnizi differenciálszámítás kialakítása felé. Élete utolsó éveiben a „Gondolatok"-on dolgozik, ama töredékes formájában is az európai irodalom és filozófia egyik kiemelkedő műve. Még jut ideje arra is, hogy megteremtse az első jövedelmező nagyvárosi közúti közlekedési eszközt, az omnibuszt.

Mindez rövid harminckilenc év alatt, aminek nagy részét betegágyban tölti, olyan súlyosan betegen, hogy még *Descartes* is a betegszobában kénytelen meglátogatni 1647 szeptemberében. Ám, nem elég a természet által reá mért baj: aszkézissel, önsanyargatással, böjttel addig rontja magát, hogy valóságos csontváz lesz. Az újkori tudomány és racionalizmus egyik legnagyobb alakja, a felvilágosodás előhírnöke és az antik, szigorú kereszténység szentje egy személyben. Egy személyben, de nem egyszerre: bűnös világi periódusok váltakoznak életében nagy, szenzációs megtéréseket követő időszakokkal. Ez a köztudatban róla élő kép, a „legenda". Csak nagy vonásokban és kissé karikírozva, mert *Pascal* rövid, gazdag, ellentmondásokkal terhes élete természetesen a legkülönfélébb értelmezésekre adott alkalmat. Az interpretátorok többé-kevésbé mind *Gilberte Pascal*nak,

[1] Forrás: Vekerdi László: Blaise Pascal az újabb tudománytörténeti kutatások tükrében. = Természettudományi Közlöny 95 (1964) No. 9. pp. 424–427.

Blaise nénjének hatása alatt állottak. Éppen ezért, ha *Pascal*ról valamit tudni kívánunk, mindenekelőtt tisztázni kell *Gilberte* interpretációjának irányulását. *Gilberte Pascal, Florin. Périer* clermonti tanácsos neje a „Gondolatok” első, ún. Port-Royal kiadásához írta meg öccse életrajzát, 1670-ben. A híres apácakolostor, Port-Royal a janzenista mozgalom[2] kiindulóhelye és fő fészke különös szerepet játszott ezekben az években Franciaország történelmében.

A Pascalról szóló első biografikus művek társadalmi háttere

A XVII. századi Franciaországban a kialakuló tőkés rétegek szerepe sokkal kisebb volt, mint az egykorú Hollandiában és Angliában. *Sully* és később *Colbert* reformjai sem a tőkés fejlődés angol és holland útja felé mutattak, hanem inkább egy centralizált, állami ellenőrzés alatt álló gazdasági rendszer felé. *Richelieu* politikája a hivatalnok nemességre építő, szilárd, centralizált, adminisztratív eszközökkel kézben tartott állam felé irányult. *XIV. Lajos* öregkori politikája egyre inkább a tradicionális arisztokráciának kedvezett. A XVII. század negyvenes éveitől kezdve a janzenisták által képviselt hivatalnok nemesség és a vallásgyakorlatban engedékeny, de reakciós egyházi irányzatú jezsuiták által képviselt tradicionális arisztokrácia között folyt a harc a vezető szerep megszerzéséért. A XVII. század végére végleg eldőlt a harc a tradicionális arisztokrácia javára, de 1670-ben, amikor a „Gondolatok” első kiadása megjelent, a janzenista pártnak még igen komoly esélyei voltak. A „Gondolatok” 1670-es kiadásának és a hozzá írt életrajznak feladata a janzenisták pozícióinak erősítése volt. Mivel erre a korra már a matematika és fizika igen fontos, nagy becsben álló tudományokká váltak, *Mme Périer* jelentős helyet ad az életrajzban öccse ilyen irányú tevékenységének. De igyekszik úgy feltüntetni, hogy *Pascal* tudományos működésének zömét fiatal, sőt csaknem gyerekkorában végezte, s megtérése után már nem gondolt ilyen világi hívságokra. (A janzenisták nem vetették el a tudományt, amennyiben az a gyakorlati élet és a pedagógia céljait szolgálta, de az öncélú tudományt mint világi hívságot veszélyesnek tartották a keresztény életre nézve.) *Mme Périer* nem győzi eléggé magasztalni a fiatal Pascal tudományos érdemeit. „A tizenhat éves korában írt Értekezés a kúpszeletekről – írja *Mme Périer* – olyan nagy szellemi képességeket árul el, hogy azt mondják, Arkhimédész óta nem

---

2 Jansen németalföldi katolikus teológus tanítását nyomán kialakult, nevét róla nyerő vallási mozgalom. A katolikus egyház egyes tanításai ellen lépett fel ez a jezsuitákkal szembeforduló mozgalom. Kálvin tanításaiból átvette a szabadakarat tagadását, s elfogadta az eleve elrendelés tanát. Fellépése az abszolutista feudális rend ellen is irányult. Fő fészke a franciaországi Port-Royal cisztercita zárda volt. A pápa 1718-ban kiközösítette a janzenizmus híveit: ekkor menekülnek Hollandiába, ahol egyes közösségeik máig is fennmaradtak.

láttak ilyent.” De a nagy, 1654-es megtérése után – *Mme Périer* szerint – *Pascal,* amennyiben egészségi állapota engedte, már csak a keresztény hit védelmét szolgáló művén, a „Gondolatok”-on dolgozott, s emellett legfeljebb gyakorlati, pedagógiai vagy jótékony célú munkák foglalkoztatták. (Az omnibuszt is állítólag azért találta fel, hogy jövedelmével a szegényeken segítsen.)

Pascal legnagyobb jelentőségű tudományos művét azonban évekkel az 1654-es nagy megtérés után írta: 1658-ban, négy évvel halála előtt, s méghozzá a „világi hiúság” minden kritériumát kielégítő formák között; versenyt hirdet meg egy általa éppen megtalált, nehéz matematikai probléma megoldására. A verseny feltételeit eleve úgy rendezi meg, hogy a nyertes senki más ne lehessen, csak ő. A verseny eredményét összegező jelentésben nemcsak a legértékesebb megoldási kísérleteket beküldő matematikusokat intézi el metsző gúnnyal, hanem teljesen hamis színben állítja be a kérdéssel megelőzően foglalkozó matematikusok munkáit is. Kétségtelen, hogy ezek, az évekkel a nagy megtérés után írt értekezések jelentik *Pascal* tudományos munkásságának csúcsát. Ha nem is teremtette meg bennük – amint a tudománytörténet a legutóbbi időkig hitte – az integrálszámítást, mégis ezek a művek, az antik és a korabeli infinitezimális módszerek zseniális összekapcsolásával a legfontosabb lépést jelentik az infinitezimális számítás XVIII. századi formájának megalapozása felé. Sőt, mint azt az egyik legélesebb szemű matematika-történész, *Jean Itard* észrevette, egyes részleteikben már a *Cauchy–Rieman*-féle integrálfogalmat sejtetik.

Ezekkel az értekezésekkel *Mme Périer*-nek is foglalkoznia kellett *Pascal* életrajzában, mert már 1659-ben nyomtatásban is megjelentek és egyszeriben világhírt hoztak szerzőjüknek. De *Pascal* utolsó tudományos művei, *Mme Périer* szerint, az űrre vonatkozó kísérletei és az azokat követő értekezései voltak, ami pedig az 1658-as versenyprobléma – a cikloisszegmentum területének és súlypontjának meghatározása – kapcsán született értekezéseket illeti, „az nem mond ellent ennek az állításnak – írja *Mme Périer –,* mert anélkül találta meg, hogy gondolkozott volna rajta”. Egy fogfájásos éjszakán, álmatlanul gyötrődve törte a fejét – gyógyszerként – a kérdés megoldásán, s miután megtalálta, ő maga nem, is gondolt a publikálására. Barátai unszolásának engedve egyezett csak bele.

Mme Périer ezeket a felfedezéseket távolról sem üdvözli olyan lelkesen mint a fiatalkori, még a nagy megtérés előtti periódusból származókat. A janzenista felfogás szerint Pascalnak megtérése után már nem lett volna szabad pedagógiai vagy valamilyen más gyakorlati cél nélkül, önmaga kedvéért foglalkozni tudományával. Ezért *Mme Périer* öccse fiatalkori műveinek jelentőségét eltúlozza, a későbbiekét pedig igyekszik csökkenteni, azokat esetlegeseknek tüntetve fel.

Ezt a képet, amit a nővér – a janzenista érdekek védelmében – rajzolt öccséről, a legutóbbi időkig átvette a történetírás is. Eredeti, kora tudományos színvonalát messze meghaladó, összes kortársánál ötletgazdagabb géniusznak tartották, akit azonban vallási és irodalmi tevékenysége egyre jobban eltávolított a tudománytól. Rendkívül gondos, pontos kísérletezőnek képzelték, a pozitivista kísérletező módszer egyik megalapozójának.

Az újabb tudománytörténeti kutatások eredményei

Matematika

Amilyen mértékben a történészek – eredeti forrástanulmányok alapján – fokozatosan megismerték a XVII. század első felének gondolatvilágát, olyan mértékben kezdett halványulni *Pascal* ötleteinek és elméleteinek eredetisége. A gondolatok történetének krónikásai két véglet között ingadoznak: egyrészt, mintegy képletszerűen, néhány egyénbe sűrítik a kor bonyolult és sokrétű eszmevilágát, másrészt azt az egységet, melyet egy-egy nagy ember a kor gondolataiból összeállított, építőköveikre bontják föl, s így könnyűszerrel kimutathatják, hogy azok a gondolatok másoknál is megtalálhatók. *Pascal* esetében az első tendenciát a *Mme Périer* által írt életrajzhoz csatlakozó, régebbi Pascal-irodalom képviseli, a másodikat az 1954-ben *Pascal*ról tartott Royaumont-konferencia anyagából ismerhetjük meg. A royaumonti apátságban tartott konferenciák a *Paul Desjardins* által rendezett híres pontigny-i dekádok szervezettebb utódai, s egy-egy téma legkiválóbb és legkülönbözőbb világnézetű francia szakértői hozzák össze. A Pascal-konferencián a második világháború utáni kor egyik leghíresebb tudománytörténésze, *Alexandre Koyré* ismertette *Pascal* tudományos működését.

Először is felszámolja a csodagyerek-legendát. *Pascal* tizenhat éves korában írt rövid vázlata a kúpszeletekről, de valószínűleg később ugyanerről a tárgyról írott, s ma már elveszett értekezése is, a nagy lyoni építész-geométer, *Desargues* munkáihoz képest semmi újat nem tartalmaz. Csupán világosabban mondja el bennük mestere, *Desargues* mély és nehezen érthető gondolatait. *Koyré* jól ért a matematikához, s tudja, hogy *Pascal* messze legjelentősebb matematikai alkotását az 1658-as ciklois-verseny során keletkezett művei jelentik Ezeket analizálja részletesen. Kimutatja, hogy a *Mme Périer* által keltett legendával ellentétben mennyire komoly, céltudatos és hosszú munka eredményei ezek az értekezések. A módszer, amit *Pascal* a probléma megoldására használ, már legalább az ötvenes évek eleje óta érik benne – az aritmetikai háromszöggel kapcsolatban felmerült infinitezimális megfontolásai óta. Maga a verseny is, ahogy azt *Pascal* megtervezi és lebonyolítja, egy ügyesen megszervezett propagandakampány, nagy és szenvedélyes prioritási vita: semmiképpen sem egy fogfájásos éjszaka gyötrelmének enyhítésére kigondolt, s Isten nagyobb dicsőségére kiadott, jámbor keresztény tevékenység. Az egész verseny arra szolgál, hogy *Pascal,* valamint mestere és barátja, *Roberval* prioritásigényeit biztosítsa más matematikusokkal szemben, akik hasonló módszerekkel dolgoztak. Fiatalkori műveiben *Pascal Desargues* hatása alatt állott, ezekben az 1658-as értekezésekben pedig – *Koyré* szerint – teljesen a *Roberval* befolyása érvényesül. A módszer, amire *Pascal* annyira büszke, semmi egyéb, mint az ún. indivisibilia-módszer *Roberval* általi módosítása.

Ez a módszer a XVII. század első felének jellegzetes infinitezimális módszere, s annyira bonyolult, s a mai matematikán felnőtt szemnek annyira szokatlan, hogy a matematikatörténészek sokáig teljesen félreértették. Azt hitték, hogy valami pongyola és megengedhetetlen módon „végtelen kicsi" elemek megszámlálhatóan végtelen sokszori összegezéséről van benne szó. *Koyré* mutatta ki először – az indivisibilia-módszer egyik megalapozójának, *Bonaventura Cavalieri*nek műveit analizálva –, hogy ez a felfogás mennyire nem állja meg a helyét. Az indivisibilia-módszer nem oszthatatlan, végtelen kicsi elemeket összegez, hanem oszthatatlan elemek halmazaként felfogott véges geometriai alakzatok térfogatait hasonlítja össze elemeik kölcsönösen egyértelmű, egymásra való leképezésének segítségével. Ebben az interpretációban *Cavalieri* módszere annyira szellemessé és modernné válik, hogy a *Roberval* és *Pascal* által végzett módosítást könnyű lényegtelennek, sőt a módszert „félreértésnek" minősíti. *Roberval* ugyanis megbontja *Cavalieri* elméletének logikai zártságát: az összehasonlítandó alakzatok elemeit nem csupán arra használja fel, hegy segítségükkel kölcsönösen egyértelmű leképezést létesítsen két halmaz között, hanem valóban összegezi azokat. *Cavalieri*, ha egy alakzat, pl. egy *abc*-süveg területét akarta kiszámítani, az alakzat elemeit – az 1,2;3,4; stb. egyeneseket – arra használta fel, hogy segítségükkel kölcsönösen egyértelmű leképezést létesítsen a keresett területű figura és egy ismert területű geometriai idom, pl. egy félkör között. Ez a módszer matematikailag helyes és szigorú. *Roberval* azonban összegezi az elemeket, s hogy ezt megtehesse, az egyenesek helyett „végtelenül vékony" téglalapokat vesz fel. Ez az eljárás a határátmenet vagy valamilyen azt helyettesítő művelet megadása nélkül megalapozatlan és félrevezető. A határátmenet fogalmát csak a XIX. század elején tisztázza a matematika, s így *Roberval*, aki enélkül próbál bevezetni egy csak ennek segítségével elvégezhető műveletet, valóban súlyosan vét a precizitás és szigorúság követelménye ellen. S ha elfogadjuk *Koyré* véleményét, hogy *Pascal* mindenben mestere, *Roberval* nyomdokain haladt, s csupán az ő eszméit tette át világosabb nyelvre, mint fiatal korában a *Desargues*-éit*,* akkor ez az ítélet rá is áll.

Koyré interpretációja *Pascal* művének egyik nagyon lényeges, s addig csaknem teljesen elhanyagolt vonására hívta fel a figyelmet: kimutatta, milyen nagy hatással voltak az annyira eredetinek tartott géniuszra kortársai.

Pascal azonban önálló gondolkodó is. Annyira vagy majdnem annyira gondolkodó, mint a gondolkodás szimbólumává vált kortársa, Descartes. S talán többet tanult *Descartes*-tól, az ellenféltől, mint *Roberval*tól a mesterétől. S éppen erre nem figyelt fel *Koyré* professzor éles szeme. *Pascal* ugyanis megtalálja azt a határátmenetet helyettesítő módszert – az antik kimeríthetetlenségi módszerben –, amelynek segítségével *Roberval* pontatlan elmélete pontossá tehető. Ez a módszer annyira pontos és „modern", hogy egyik kitűnő ismertetője, *B. L. van der Waerden* azonosnak tekinti a mi határátmenet-műveletünkkel.

A kimeríthetetlenségé módszerben valamilyen szabály szerint szerkesztett idomsorozat szerkesztési szabályáról kell kimutatni azt, hagy az vég nélkül folytatható, annak ellenére, hogy az így szerkesztett idomok mind egy adott idom területén belül (vagy kívül) maradnak. *Pascal* kezében a szerkesztés egy minden határon túl finomítható területbeosztássá alakul, amelynek elemeit a *Cavalieri*-féle indivisiblia-elmélet szabályai szerint kölcsönösen egyértelmű vonatkozásba hozza egy ismert területű idom elemeivel.

Itt sem teljesen önálló: ezt a módszert már alkalmazta valaki – a cikloisszegmentum területének kiszámítására – s éppen *Roberval* pontatlan módszerének kritikájaként: *Descartes,* 1638-ban. De *Descartes* visszariadt a módszer általánosításától. *Pascal* azáltal, hogy világosan kidolgozza alapjait és általánosítja, megnyitja az utat a XVII. század végének legnagyobb jelentőségű matematikai felfedezése, az algebrai egyenletekkel le nem írható ún. transzcendens görbék tárgyalását lehetővé tevő infinitezimális számítás felé. S ez sokkal több, mint amennyit *Koyré* interpretációja megengedett számára.

Fizika

A fizikus *Pascal*t *Koyré* professzor az abszolút űrre és a levegő nyomására vonatkozó kísérletein keresztül mutatja be. Ezeket az 1646–48-ban végzett kísérleteket már *Mme Périer* igen nagyra tartotta, s nyomában a tudománytörténet mint a gondos, mindenre kiterjedő, modern kísérleti módszer megszületését tartotta számon. Ezek a kísérletek két, többé-kevésbé összefüggő csoportra oszthatók. Az elsőbe azok tartoznak, amelyeket 1646 őszén, 1647 tavaszán végzett Rouen-ban az abszolút űr létrehozhatóságának bizonyítására. A másodikba a Puy de Dôme-i kísérlet, s az azt követő értekezések tartoznak. Ezt a kísérletet *Pascal* 1647 novemberében megadott részletes utasításai alapján sógora, *Florin Périer* hajtotta végre a Clermont melletti másfélezer méter magas Puy de Dôme-on: a hegy különböző magasságaiban a legnagyobb gonddal elvégezve a Torricelli-féle kísérletet, mérve a higanyoszlop magasságát a különböző magasságokban. Ez a kísérlet volt hivatva bizonyítani, hogy a higanyoszlopot a külső levegő nyomása tartja egyensúlyban.

Az első csoportba tartozó rouen-i kísérletek mind a Torricelli-féle kísérlet megismétlései vagy különféle változatai. A Puy de Dôme-i kísérlet ötlete merőben új, de valószínűleg nem *Pascal*tól származik.

Koyré kimutatta, hogy a rouen-i kísérleteket, amelyeket a tudománytörténet addig a pontos és lelkiismeretes experimentális munka iskolapéldáinak tartott, *Pascal* soha sem végezhette úgy el, ahogy leírta. Egy részük ugyanis a leírás alapján egyszerűen elvégezhetetlen. Még súlyosabb hiba, hogy a „pontos" leírás elhallgat szembeötlő, s az értelmezés szempontjából nehézségeket okozó fontos jelenségeket. *Pascal* nem a mai értelemben vett kísérletező: a rouen-i kísérletek bizonyos értelemben véve „rétorikus kísérletek", a hallgatóságra akar velük hatni, segítségükkel ellenfeleit akarja legyőzni. A kísérleteket összefoglaló értekezésben, s az ezt követő vitairatokban is ez a tendencia érvényesül, s itt is többnyire csak mások ügyetlenebb érveit öltözteti át hatásosabb és szebb köntösbe. „A pascali szó mágiája – foglalja össze fejtegetéseit *Koyré* – veszélyes dolog, aminek nehéz, de annál inkább szükséges mindenképpen ellenállani." A Puy de Dôme-i kísérletből kinőtt értekezése, amely a levegő nyomásáról és a folyadék egyensúlyáról szól, s amelyben a levegőt a légnyomás jelenségeinek tárgyalása szempontjából azonosítja a folyadékokkal, megint mások munkáját egységesíti és szervezi. Hiszen már *Descartes* is úgy tekintette a levegőt, mint valami könnyű folyadékot.

A fizikus *Pascal* mégis sokkal többet tett ennél. Ha valóban csak mások ötleteinek ügyes megvalósítója és kortársai eszméinek világos és szép szavú interpretátora lett volna, sohasem vált volna oly legendás hírűvé. Azt hisszük, *Pascal* ezen a területen is túlment a *Koyré* által adott interpretáció keretein.

Galilei egyik tanítványa, *Baliani* már 1630-ban sejtett valamiféle összefüggést az űr előállíthatósága és a külső levegő súlya között: a külső levegő súlyát vette azon erő mértékének, ami szükséges az űr kísérleti megvalósításához. Ehhez a véleményhez *Galilei* is csatlakozott, s nyomukban az itáliai tudósok munkáját élénk figyelemmel kísérő francia matematikusok mind igen nagy jelentőséget tulajdonítottak az űr kérdésének. Különösen

*Gassendi*t, az antik atomizmus újraélesztőjét izgatta a probléma, mert az ő atomisztikus világmagyarázatához elengedhetetlenül szükséges volt az atomok közötti űr létezése. Nem véletlen, hogy 8 ismételte meg elsőként a Puy de Dôme-i kísérletet. Az űr kérdése döntő jelentőségű volt az arisztotelianizmus elleni küzdelemben is. *Pascal* is az arisztoteliánus professzorok elleni támadásai során mélyedt el a probléma kísérleti és elvi kérdéseiben. S messze a szakfizika keretein túl, elterjedt az űrkérdés a kor filozófiai és szépirodalmában is, akárcsak ma a relativitás elmélete. Az űrre vonatkozó kísérletek, s azoknak valamilyen képzelt vagy mérhető mennyiség változásával való magyarázatai – legyen ez az „űrtől való irtózás" különböző foka, a levegőoszlop változó nyomása vagy az atomok közötti különböző erejű kohézió – annyira beleillenek a XVII. század közepének fizikai gondolkodásába, hogy inkább az lenne a különös, ha nem merülnének fel egyszerre egymástól többé-kevésbé függetlenül erre vonatkozó kísérletek és magyarázatok. A XVII. század közepén a természet jelenségeinek változó, matematikai vagy matematizálható mennyiségek segítségével történő leírása általános törekvés. *Pascal* eredetisége abban áll, hogy *Galilei* és *Newton* között mindenkinél jobban ért a változó mennyiségek kísérleti adatokkal összefüggésbe hozható megválasztásához. *Descartes* mindig kész fizikájában új, a tapasztalattal semmi kapcsolatban nem álló mechanisztikus elvek és modellek bevezetésére. *Gassendi* és követői teljesen közömbösek az elvek egységével és zártságával szemben, számukra csak az empirikus adatok a döntőek, elvek és feltevések egyetlen rendszerbe való összehozásával nem törődnek.

*Pascal*nál a fizika kísérletek segítségével kiválasztott axiómák és belőlük levezethető propozíciók rendszere lesz. A kísérletek – végső soron érzékszervi adatok – azért játszanak lényeges szerepet, mert ezek ellenőrzése nélkül bármiféle fantazmagóriát, ötletet, víziót felvethetnének elvként. A kísérletek döntenek a feltevések kiválasztásában: ha egy feltevésből olyasmi következik, ami ellentmond akár egyetlen tapasztalati ténynek is, akkor ezt a feltevést el kell vetni. A természet leírására bevezetett változó mennyiségek nem lehetnek akármilyenek: be kell illeszkedniük egy ellentmondásmentesen és a lehető legtakarékosabban megválasztott feltevésrendszer keretei közé.

Amikor a Puy de Dôme-kísérletben, s a belőle kinövő, folyadék és légnemű testek egyensúlyáról szóló értekezésében a jelenségek változó mennyiségekkel történő leírásának szempontjából azonosan kezeli a levegőt és a folyadékokat, és az egész jelenségterületet egy egyszerű, zárt és ellentmondásmentes feltevésrendszer keretei között tárgyalja, egyik legnagyobb lépést teszi az elméleti fizika megteremtése felé. S ez sokkal jelentősebb, mint az a kérdés, hogy kitől vette az ötletet kísérleteihez. A fizika *Pascal* elegáns és esztétikai követelményeket is kielégítő megfogalmazásában más lesz, mint előtte volt. A kísérlet válik az axiómarendszer alapjává, de a kísérletek segítségével megszerkesztett axiómarendszer túlnő az egyes kísérleteken: alkalmassá válik arra, hogy új, s még meg sem figyelt tapasztalati tényekre következtessünk belőle.

A fizika *Pascal*nál a „természet nagy könyvének” szövegmagyarázata és apologetikája lesz. Ahhoz hasonlóan, ahogy a „Gondolatok” az emberé. Talán nem véletlen, hogy az ember „axiomatikája”, amit a „Gondolatok”-ban vázolt, töredékek szinte rendezhetetlen halmaza maradt. Minden kor megkísérel újrarendezni a maga számára belőlük egy *Pascal*t: az első, Port-Royal kiadás egy orthodox janzenistát, a XIX. századvég egy pozitivistát, a XX. század közepe egy egzisztencialistát. S ha egy modern regényben *Pascal* egy töredékével találkozunk jelmondatként, az annyit jelent, hogy valaki újra átértelmezte *Pascal*t, növelte a „legendát”. A modern történetírás viszont feltárja és leleplezi a legendák eredetét.

Az átlag uralma és rémuralma...[3]

A Gauss-görbe története

A Természettudományi Közlöny 1967. évi 2. számában sok olvasó érdeklődését felkeltő cikksorozat indult „Játék és matematika” címmel. Az első közlemény a valószínűségszámítás néhány alapfogalmát és alaptörvényét ismertette, s többek között rendkívül világosan és tömören megmagyarázta az olvasónak az „ún. Gauss-görbe” mivoltát s szerepét a valószínűségszámítás megalapozásában.

A figyelmes olvasó bizonyosan észrevette, hogy Rényi professzor cikkében következetesen mindig az „úgynevezett Gauss-görbéről” beszél, s nem ok nélkül. Az ún. Gauss-görbe felfedezéséhez ugyanis nem sok köze van a nagy Gauss-nak, s a görbe valószínűség-számításban játszott szerepének a tisztázásához pedig még sok más tudós munkája is kellett Gaussén kívül. A történetből, márcsak az ún. Gauss-görbe nagy gyakorlati fontossága miatt is, érdemes elmesélni néhány töredéket.

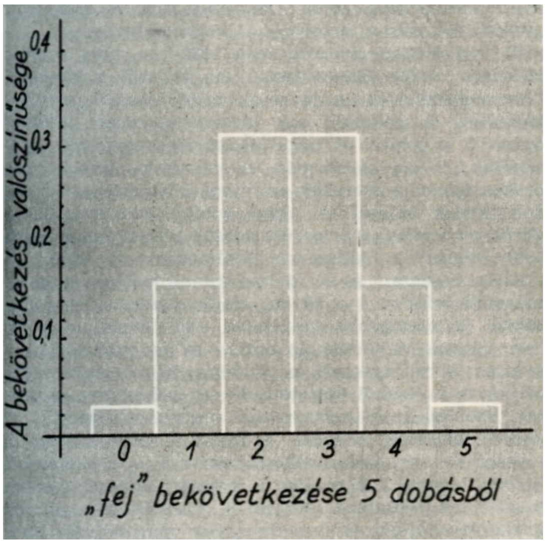
Newton még nem volt világhírű, s Sir Isaac sem volt, amikor a naplójáról híres politikus-világfi, Samuel Pepys a segítségét kérte a következő feladathoz: Három játékos kockázik. Az első játékos hatdobásonként legalább egyszer hatost akar dobni, a második tizenkét dobásból legalább kétszer, a harmadik tizennyolc dobásból legalább háromszor akar hatost dobni. Mik az esélyeik?

Newton sokára s meglehetősen körülményesen, az összes lehetőségek részletes felsorakoztatásával találta meg a választ. Csak néhány év múlva vette észre a nagy bázeli matematikus, Jacob Bernoulli (1654–1705), hogy az efféle kérdésekben (ti. amikor egy *esemény* legalább 1, 2, 3, általában *n*-szeri bekövetkezésének az *esélyét* kell megkeresni *n* egymástól független dobás, azaz *n* egymástól független *kísérlet* esetében) úgy segíthet magán az ember, hogy egy kéttagú (latin szóval: *binomiális*) kifejezés *n*-edik hatványát írja le az *n*-nél alacsonyabb hatványok szerint kifejtett formában. Az így felírt alak együtthatói adják meg az esemény 1, 2, ..., *n*-szeri bekövetkezésének *valószínűségét*.

Képletek és részletek helyett az egyszerű ábrázolással megelégedve, tekintsük a „fej vagy írás” játék öt egymás utáni dobását. Minden dobásnál egyformán valószínű, hogy kapunk-e fejet vagy sem, s így mindkét valószínűség 1/2-del jelölhető. Annak az eseménynek

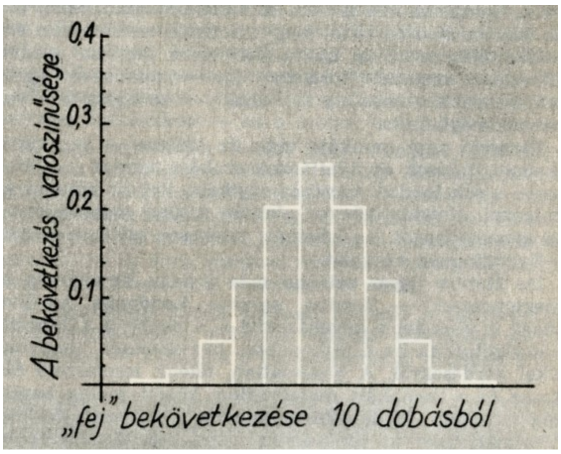
[3] Forrás: Vekerdi László: Az átlag uralma és rémuralma... A Gauss-görbe története. = Természet Világa 99 (1968) No. 6. pp. 267–270.

a valószínűségét, hogy az öt dobásból legalább 0, 1, 2, ..., 5-ször következik be fej, Bernoulli képlete szerint úgy kapjuk meg, hogy felírjuk a $(0{,}5+0{,}5)^5$ binomiális kifejezés kifejtett alakját. Az eredményt az 1. ábra mutatja, ahol a vízszintes tengelyen a fej 0, 1, 2, ..., 5-szöri „bekövetkezését" tüntettük fel, a függőleges tengely pedig azt mutatja meg, mi annak a valószínűsége, hogy 5 dobásból 0, 1, 2, ..., 5-ször következik be fej.



1. ábra. A $(0{,}5+0{,}5)^5$ binomiális valószínűségeloszlás ábrázolása

Ez az ábra tehát a valószínűség „eloszlását" ábrázolja a fej 0, 1, 2, ..., 5-szöri „bekövetkezésére" (5 dobásból); éppen ezért valószínűségeloszlásnak vagy röviden eloszlásnak nevezik. S tekintve, hogy kéttagú (binomiális) kifejezés szabta meg az eloszlás alakját, *binomiális eloszlás*ról beszélünk. A 2. ábra 10 dobás esetében mutatja a binomiális eloszlást.



2. ábra. A $(0{,}5+0{,}5)^{10}$ binomiális valószínűségeloszlás ábrázolása

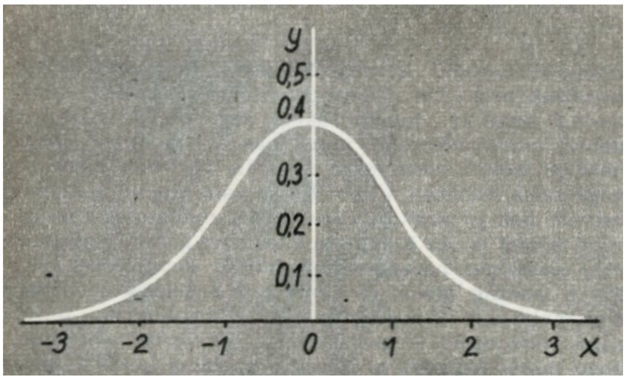
[Ezt a $(0,5+0,5)^{10}$ kéttagú kifejezés kifejtett alakjából rajzoltuk meg.] Ha a kéttagú kifejezés hatványkitevője nem 5 vagy 10, hanem sokkal nagyobb, a kiszámítás nehéz; annál nehezebb, minél nagyobb a kitevő. Abraham de Moivre vette észre s közölte 1733-ban, hogy elég nagy szám esetében a nehézkessé váló binomiális képlet helyett igen jó megközelítésként használható egy egyszerűbb képlet is. Az ő képlete által leírt görbét lerajzolva, szép szabályos harang alakú formát kapunk (3. ábra). Ezt a harang alakú de Moivre-féle görbét nevezik a matematikusok Gauss-görbének. Abraham de Moivre nagy felfedezése – mai nyelven kifejezve – az volt, hogy minél nagyobb a dobások n száma, annál jobban megközelíti a Bernoulli által definiált binomiális eloszlás a Gauss-görbe által leírt eloszlást.

Abraham de Moivre (1667–1754), miután 1688. április 27-én kiszabadult a St. Martin-i börtönből, ahová a protestánsok szabad vallásgyakorlását engedélyező Nantes-i Ediktum visszavonása (1685. okt. 18.) után zárták, azonnal Angliába menekült és soha többé nem tért vissza Franciaországba.

Angliában magántanítóskodásból tengette életét. Egyszer egyik előkelő tanítványánál kezébe került Newton már akkoriban híres nagy műve, a *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. Ez a könyv ma nagy csillagászati és fizikai felfedezései miatt híres, a maga korában azonban a korabeli matematika hatalmas és színvonalas kompendiuma is volt. A matematikatanításból élő de Moivre ijedten látta, hogy jóformán semmit sem ért belőle. Megvásárolta hát a könyvet s lapokra szedve állandóan magával hordozta; így – miközben egyik tanítványától a másikig szaladgált – az egész könyvet betéve megtanulta.

Fárasztó napi munkája után de Moivre – az akkori londoni tudósok és dilettánsok szokása szerint – többnyire a sok londoni kávéház egyikébe tért be pihenni és dolgozni. Newton könyve alapján kitűnő matematikussá képezte magát, s a kávéházi játékosok szívesen kérték s fizették meg tanácsát.

De Moivre ügyes válaszai még a nagy Newtonnak is megtetszettek – Newton ugyanis Londonba kerülve maga is el-eljárt a kávéházakba –, s meghívta a franciát, beszélgetnének az ő otthonában, kényelmesen, matematikai kérdésekről. A bizalmatlan, félénk természetű Sir Isaac és a menekült matematikus között meleg barátság szövődött, és de Moivre annyira megnyerte Newton bizalmát, hogy az rendszerint hozzá utasította a nehéz matematikai problémákkal jelentkezőket: „Kérdezzék meg Mr. de Moivre-t, ő jobban ért ehhez még nálam is” – szokta mondogatni. Legalábbis így meséli ezt a valószínűségszámítás korai történetének jeles krónikása, de Moivre prioritási jogának késői védelmezője, F. N. David.



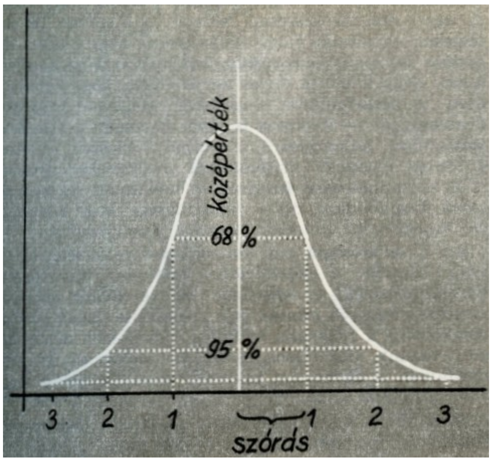
3. ábra. „Gauss-görbe”

Hanem azért nem ok nélkül nevezték el a görbét Gaussról. A matematikusok fejedelme mutatta meg ugyanis, hogy a csillagászati helymeghatározások „véletlen hibái”-nak az eloszlása elég sok mérés esetében éppen ez által a görbe által jellemezhető. Ez a felismerés fordulópont volt a matematika történetében: a valószínűségszámítás kinőtt a szerencsejátékoknál tapasztalható modellek köréből, s a valóság megismerésének egyik fontos – egyre fontosabb – eszköze lett.

Az a tény, hogy a véletlen hibák eloszlása elég sok mérés esetében a Gauss-görbével jellemezhető, *tapasztalati* tény, nem lehet matematikailag bizonyítani, nem lehet mélyebb elvből levezetni. Nem matematikai szükségszerűség, hogy a mérési hibák eloszlását Gauss-görbe írja le. De *ha* a véletlen hibák eloszlását Gauss-görbe írja le – márpedig a tapasztalat ezt mutatja –, *akkor* egy igen egyszerű matematikai módszer, a „legkisebb négyzetek elve” használható az „összes mért adattól legkevésbé eltérő érték” kiszámítására, és ezen érték „valóditól” való eltérésének a megbecsülésére.

F. von Hagen mutatta meg 1837-ben, hogy a hibák eloszlása akkor Gauss-típusú, ha teljesül a következő három feltétel: 1. a mérések középértékétől számított eltérések (a „hibák”) sok kicsiny eltérésből tevődnek össze; 2. a pozitív és negatív eltérések egyformán valószínűek; 3. az egyformán jó mérések legvalószínűbb értéke éppen a mérések számtani középértéke. *Ha* ezek a feltételek teljesülnek, akkor a hibák eloszlását Gauss-görbe adja meg, s a mérési adatok elemzésére a „legkisebb négyzetek módszere” alkalmazható (4. ábra).

A csillagászati és a földméréstani mérések a 18. sz. második felében s a 19. sz. elején ugrásszerűen pontosabbá és precízebbé váltak az addigiaknál. A 18. sz.-ban gyorsan fejlődött az optika és az optikai műszergyártás; a csillagászati és geodéziai helymeghatározások céljára sok részből összetett, finom műszereket készítettek. Ezekkel az új műszerekkel végzett méréseknél 1. az egyedi mérések eltérése a mérések középértékétől a műszer sok kis finom alkatrészének kicsiny eltéréseiből tevődött össze; 2. a pozitív és a negatív irányú eltérések a mérések számtani közepétől körülbelül egyformán gyakoriak voltak; és 3. a méréseket nem terhelte durva egyoldali hiba.



4. ábra. Normális eloszlás esetében a középértéktől jobbra-balra számított egyszeres „szóráson" belül található az adatok kb. 68%-a, kétszeres szóráson belül kb. 95%-a. Így a „szórással" lehet kifejezni a középérték megbízhatóságát

A matematikai modell tehát kitűnően megfelelt a valóságos helyzetnek, s így a modellre épülő matematikai eljárás kiválóan használható, klasszikus módszer lett a mérések elemzésére és értékelésére. S amint az történni szokott, az egyik területen oly jól bevált módszert megpróbálták alkalmazni más, eredeti alkalmazási körétől idegen területen is.

Adolphe Quetelet (1796–1874) eredetileg csillagász volt és geodéta; 1820-tól a belga királyi csillagvizsgáló intézetet igazgatta és földméréstant adott elő a Királyi Katonai Akadémián. A Gauss-görbe történetében sorsdöntő könyve, az *Essai de Physique Sociale* (1835) a társadalmi berendezkedések állandóságát – ne felejtsük el, Quetelet a Szent Szövetség korában írt – igyekezett bizonyítani a statisztikus átlagok (vélt) állandósága alapján. Az átlagok értelmezésére a Gauss-féle hibagörbét a csillagászati és geodéziai mérések világából áthelyezte az emberek és a társadalmi jelenségek világába. Azt tanította, hogy az emberek mérhető tulajdonságainak (pl. testmagasságának) a mérések számtani középértékétől, *átlagától* való eltérése a „természet véletlen hibája", a nagyon sok mérésből számított átlag pedig nem egyéb, mint maga az „ideális norma", a „normális érték". Így az ő átírásában a Gauss-féle hibagörbéből Gauss-féle *normálgörbe* lett, s a görbe által jellemzett eloszlásból *normális elosztás*.

Quetelet elméletét a méréseket és mennyiségi jellemzéseket kedvelő 19. századi emberek nagy rokonszenvvel fogadták. Hiába tiltakozott a század legnagyobb élettantudósa, Claude Bernard „az átlag rémuralma” ellen a biológiában, hiába gúnyolta ki Quetelet módszerét a valószínűségszámítás legjobb 19. századi mestere, Joseph Bertrand; a kor Quetelet elképzeléseinek és módszereinek kedvezett. Általános érvényűnek tekintették a mérési hibák kiegyenlítésére kidolgozott matematikai módszert, s így a Gauss-féle „normálgörbe” és az átlag a statisztikai számítások révén mindenhová behatolt, oda is, ahol alkalmazásának semmi értelme sem volt. Ezt a fonák helyzetet Bertrand jellemezte legtalálóbban 1888-ban megjelent valószínűségszámítási könyvében: „Az átlagember testébe a belga tudós *átlaglelket* helyez. Az *átlagerkölcs* is kiszámítható, 20 000 jellemet kell csak összegezni. Az átlagembernek nincs szenvedélye s nincs bűne, nem bolond és nem bölcs, nem tudatlan és nem tudós és általában szundikál, mivelhogy ez az *átlag* az ébrenlét és az alvás között; nem mond igent és nemet, és általában minden tekintetben közepes. Miután 38 esztendeig úgy élt általában, mint az egészséges katona, az átlagember meghal, nem a kor miatt, hanem valamilyen *átlagbetegségben*, amit a statisztika fedezett fel számára.”

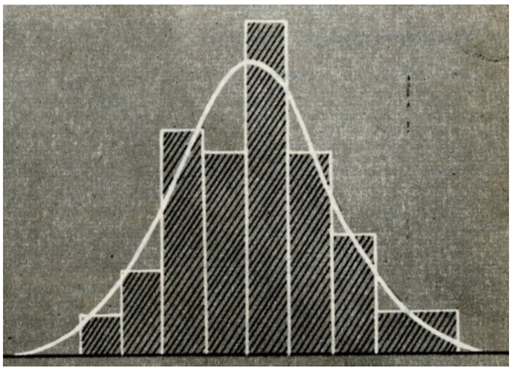
A 19. sz. végén azonban senki nem hallgatott Bertrandra, s Quetelet átlaga és a Gauss-féle „normálgörbe” valóságos diadalmenetben vonult be mindenhová, például Sir Francis Galton „nagyszerű” munkássága révén az örökléstanba, évtizedekig késleltetve Mendel felfedezésének a megismerését. A matematika alkalmazása, ha az alkalmazás feltételei nem kellően tisztázottak, könnyen többet árthat, mint amennyit használ.

Éppen az alkalmazás feltételeinek gondos kiválogatása miatt hatottak Quetelet statisztikai ötletei annyira termékenyítően a gázok kinetikus elméletében. A mozgó gázrészecskék „társadalmára” ugyanis alkalmazható Quetelet statisztikája és átlaga: itt van értelme a „gázrészecskék átlagos mozgási energiájának” – ami nem egyéb, mint a gáz hőmérséklete –, és van értelme a mozgási energia Gauss-féle normálgörbe szerinti eloszlásának, mivel éppen ennek a segítségével lehet megmagyarázni a gáz tulajdonságait a rugalmas golyócskáknak elképzelt gázmolekulák ütközéseiből.

Ez volt James Clerk Maxwell (1831–1879) egyik nagy felfedezése, s ebből a felfedezésből fejlődött ki rohamosan a statisztikus mechanika elmélete. Erősen hatott – ha sokszor közvetve is – a statisztikus mechanika alapjául szolgáló matematikai modell az egész matematikai statisztika és valószínűségszámítás fejlődésére.

A hatás nem is annyira a módszerek, mint inkább a statisztikai szemlélet alapos átalakítása miatt volt fontos. Quetelet naivul értelmezett átlagát felváltotta a *minta* fogalma; észrevették, hogy az összes vizsgálandó egyénből álló alapsokaságot, a *populációt* nem az egyedek „átlagával”, hanem a populációból találomra kiragadott egyedek halmazával – ez a *minta* – kell jellemezni.

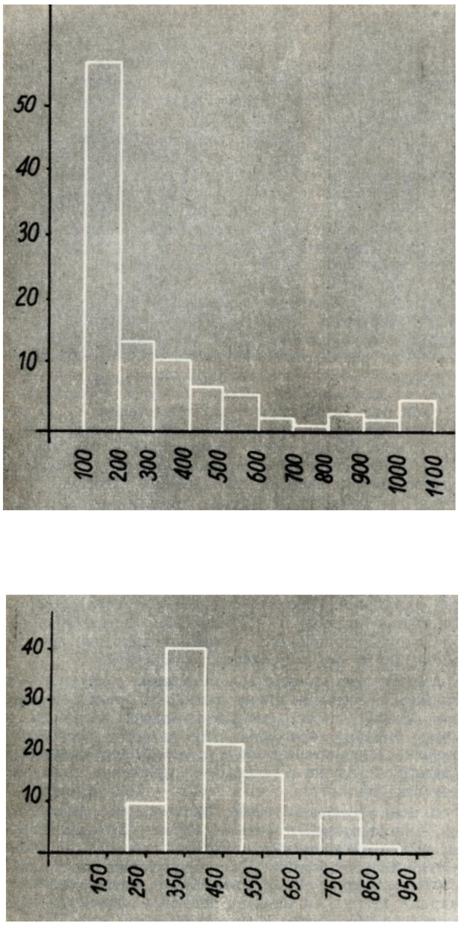
A csak képzeletben létező, fiktív átlaggal ellentétben a minta ténylegesen létezik; elemei tényleges számadatokkal jellemezhetők, megfelelő beosztás és skála szerint csoportosíthatók. Ilyen csoportosítás szerint feltüntetve az egyes elemek gyakoriságát, szemléletes ábrát kapunk. Ez az ábra, ahogyan nevezik a *hisztogram*, adja meg a kérdéses minta *eloszlását* (5. ábra).



5. ábra. Normális eloszlással megközelíthető minta hisztogramja és normális eloszlásgörbéje

A hisztogram alakja gyakran hasonlít a Gauss-görbe által meghatározott normális eloszlás alakjához; ebben az esetben – akárcsak a Gauss-görbével jellemző hibaeloszlás esetében – használhatjuk a minta jellemzésére az egyes értékek számtani közepét és a szórást. Természetesen egyáltalán nem szükségszerű, hogy a minta eloszlása normális eloszláshoz hasonlítson, s az is lehetséges, hogy a minta olyan kevés elemű, hogy jószerivel nem is beszélhetünk eloszlásról. Mégis – megfelelő óvatossággal – ilyenkor is lehet használni a populáció statisztikai jellemzésére a normális eloszlás esetében érvényes egyszerű matematikai módszereket, ilyenkor is a normálgörbére kiszámított táblázatok segítségével lehet megmondani, mi a valószínűsége, hogy a populáció középértéke az adott határok között található.

Ezt a lehetőséget egy roppant nevezetes tétel biztosítja. Eszerint *a populációból találomra vett minták középértékeinek az eloszlása megközelítőleg normális eloszlás*: azaz a mintaátlagok eloszlása annál jobban megközelíti a normális eloszlást, minél több mintaátlagot veszünk számításba. S ez mindenképpen így van, bármilyen is egyébként az egyes minták eloszlása vagy akár magának a populációnak az eloszlása (6. ábra).



6. ábra. A felső hisztogram által megadott populációból vett 100 minta középértékének a megoszlását mutatja az alsó hisztogram. Figyeljük meg, mennyire jobban megközelíti a normális eloszlást

Ez a tétel az alapja az egész klasszikus matematikai statisztika módszertanának; ez az alapja a különféle statisztikai próbáknak, az úgynevezett „szignifikáns különbség" számításának, a statisztikus összefüggések vizsgálatának. S ezáltal a Gauss-görbe, helyesebben a normális eloszlás sokáig egyik alapvető eszköze volt a természet és a társadalom statisztikai vizsgálatának.

A második világháború óta rohamosan fejlődő valószínűségszámítás hatására kifejlődő újabb s hatásosabb módszerek mindinkább kiszorítják a gyakorlatból a klasszikus matematikai statisztikát, a normális eloszlás és a mintaátlagokra vonatkozó tétel jelentősége azonban nem csökken. Sőt, éppen a modern valószínűségszámítási kutatások tükrében látszik az igazi nagy jelentősége a normális eloszlás fogalmára épülő „centrális határeloszlás-tételeknek", amelyek szerint: sok egymástól független valószínűségeloszlás összessége igen általános feltételek mellett normális eloszláshoz közelít.

Ennek a mély értelmű és fontos tételnek a megértése természetesen csak testes *valószínűségszámítási tankönyvekből* remélhető; itt csupán de Moivre tételére szeretnénk vele kapcsolatban figyelmeztetni, amely szerint, láttuk, a normális eloszlás a binomiális eloszlás határesetének tekinthető.

A Gauss-görbe története így a centrális határeloszlás-tétel egyik különleges esetétől, a de Moivre-tételtől a modern valószínűségszámítás nehéz, absztrakt elméletéig tart, s a megismerés és szemlélet sokféle változásán át mutatja a matematikai fogalom gazdagodó, de alapjában változatlan lényegét.

Egy nagy matematikus neveltetése – Norbert Wiener[4]

„Minden gyerek, érzelmi biztonsága kedvéért, szilárdan hisz a körülötte levő világ rendjében; ezért nem forradalmár a gyerek, inkább ultra-konzervatív. Akarja hinni, hogy szülei, akiktől helyzete függ a környező világban, jók és bölcsek. Amikor azután felfedezi, hogy nem azok, kénytelen szembenézni a magánnyal, s meg kell formálnia véleményét a világról, amiben nem egészen bízik többé."

Norbert Wiener

Köztudomású, hogy a matematikai nevelést korán kell kezdeni, a matematikusok korán érnek, a legjobb teljesítményük, akár a futballistáké, csak fiatal korukban remélhető. Éppen ezért az ő nevelésük is olyan szigorú, sportszerű tréninggel és versenyekkel van egybekötve, mint a labdarúgóké. Hasonlítanak az utóbbiakhoz nagyfokú egyoldalúságukban is: igazán nagy matematikus ritkán ért saját szakmájának egy speciális részterületén kívül egyébhez, a kitűnő kapus többnyire igen gyenge csatár vagy centerhalf, és megfordítva. Labdarúgó és profimatematikus, egyaránt egy végsőkig differenciált kultúra kényes termékei, speciális és igen komoly neveltetési igényekkel.

Norbert Wiener (1894–1964), korunk egyik legnagyobb és leghatásosabb matematikusa talán éppen azért volt elejétől végig haragban vagy legalábbis barátságtalan viszonyban kora legtöbb vezető matematikusával, mert neveltetése is, egyénisége is eltért a matematikusok többségére érvényes fenti szkémától. *„Ex-prodigy"* („Az egykori csodagyerek") című híres könyvében maga meséli el gyerekkorának s neveltetésének érdekes történetét.

Apja, Leo Wiener az Orosz Birodalomban született, Varsóban járt iskolába, s rövid berlini tanulás után kivándorolt Amerikába. Kalandos tervekkel és fillér nélkül érkezett, s saját erejéből, irtózatos munkával és hihetetlen küzdelemmel jutott Amerika legelőkelőbb egyetemén, a Massachusetts állambeli Harvard egyetemen előbb egyszerű, majd professzori álláshoz. A szláv filológia professzora volt, anélkül, hogy neki magának valamiféle egyetemi végzettsége lett volna. Annál inkább volt azonban tehetsége: valóságos nyelv-csoda volt, nemcsak a közismert nyelvek legnagyobb részét tudta kifogástalanul, ismerte például a kelta

[4] Forrás: Vekerdi László: Egy nagy matematikus neveltetése. = Család és Iskola 17 (1966) No. 9. pp. 28–30.

nyelvet is, és tehetsége meg hallatlan szorgalma előtt nem volt akadály.

Ezzel a lendülettel kezdte korán tehetségesnek látszó fiát – és a fiú két nővérét, Constancét és Berthát is – nevelni. Norbert Wiener a beszéddel egyidőben tanult meg olvasni, s mikor buzgó apja észrevette, hogy fiát a természettudományos könyvek képei érdeklik, egy vegyészhallgatót rendelt a járóka mellé, aki egy kis kémiai laboratóriumot rendezett be a gyerekszobában. „Természetesen... – írja Wiener – leginkább a szagosabb kísérletek érdekeltek...”

Voltak az apa pedagógusi buzgalmának veszedelmesebb megnyilvánulásai is, főleg a matematika és a nyelvek oktatásában. Különösen a matematikai példákban elkövetett hibákat büntette szigorúan, ezek a matematika-órák valódi kínokkal terhesek lehettek, még öreg korában is borzadva emlékszik rájuk az egykori tanítvány: „A leckéim gyakran végződtek – írja – családi jelenetben. Apám dühöngött, én sírtam, anyám igyekezett megvédeni, sikertelenül...”

Tízéves koráig teljesen az Atya nevelte fiát, s a tehetséges és kivételes emlékezőképességgel megáldott gyerek addigra olyan sok mindent megtanult, hogy értelmetlenség lett volna a korának megfelelő iskolai osztályba íratni. Szellemi érettsége szerint a 14–15 éves kamaszok közé került, ugyanakkor azonban testi fejlettsége és érzelemvilága szerint még teljesen gyerek volt. Ez az ellentét, amelyik azután egész ifjúkoráig kínozta, már előbb, még a családi nevelés idején kezdődött. „1901 karácsonya – írja – gyötrelmes volt. Hétéves voltam. Akkor tudtam meg, hogy a Jézuska csak a felnőttek kitalálása. Akkor már nem is éppen könnyű természettudományos könyveket olvastam, s szüleim úgy gondolták, hogy aki ilyesmire képes, ahhoz már nem illenek szentimentális fikciók. Nem figyeltek rá, hogy milyen töredékes a gyerek világképe. A gyerek nem merészkedik messze otthonától, neki pár háztömbbel odébb már az ismeretlen kezdődik, ahol minden lehetséges. Ez az elképzelt világ olyan erősen él benne, hogy sokszor még akkor is a képzelethez ragaszkodik, amikor a tapasztalat világosan megmutatta neki az elképzelt világ hamis voltát ...”

A gyerek, a serdülő, az ifjú és a felnőtt más és egymástól annyira különböző világát se apja, se tanárai nem vették észre, hiszen a század elején még csak írók figyeltek, öntudatlanul, az efféle különbségekre. A hivatalos pedagógia a „csodagyerekségről” értekezett és a módszeres oktatásról. Nem is sejtették, hogy a maga módján minden gyerek „csoda”, mert lehetőséggel teljes (s nemegyszer a módszeres oktatás teszi minden lehetőségétől megfosztott felnőtté). Az idősebb Wiener is teljesen saját kitűnő módszerének tulajdonította fia eredményeit. „Meg vagyok győződve – írta az idősebb Wiener – hogy a nevelésnek köszönhetők a sikerek. Értelmetlenség lenne azt hinni. mint némelyek, hogy Norbert, Constance vagy Bertha kivételes képességű gyerekek. Szó sincs róla. Ha többet tudnak, mint a korukbéli gyerekek, az csak azért van, mert más nevelést kaptak."

Ez az intenzív és túl módszeres családi nevelés kimondhatatlanul sújtotta az érzékeny és ideges fiúgyereket: minden perce tervszerűen be volt osztva, a szünidők is előre megszabott pedagógiai rend szerint teltek el. Ugyanez a szabályos, tervszerű, szigorú szakmai elvek szerint berendezett oktatás idomította a gyereket a középiskolában s az egyetemen is. Az ifjú évekkel előbb kijárta iskoláit, mint a többi diák, 19 éves korára megszerezte a Harvardon a doktori diplomát. A szokásos eminens tanuló volt, szorgalmas, jólvizsgázó, tisztelettudó. Semmi különösebben nem érdekelte és rettenetesen drukkolt a vizsgák előtt. Az Atya előbb biológusnak szánta, de rövidlátása és ügyetlensége miatt alkalmatlan volt a kísérleti munkára. Így apja átíratta a filozófia-szakra, s ha valamiért, hát ezért igazán hálás lehetett szigorú nevelőjének. Az egyetem elvégzése után ugyanis, mint ifjú filozófus ösztöndíjat kapott az angliai Cambridge-be. hogy Bertrand Russellnél tanuljon.

Cambridge-ben egészen más világba került, mint amit addig ismert. „A Cambridge-i környezet – írja – sokkal jobban tetszett, mint amivel a Harvardon találkoztam. Cambridge az értelemnek volt szentelve. Az a szellemi dolgok iránti közöny, amelyik elengedhetetlenül szükséges volt a tekintélyes harvardi tudósnak, Cambridge-ben inkább csak tettetés volt, érdekes játék, mindenkinek keményen kellett dolgozni magában, s közben kifelé valami felsőbbrendű közönyt tettetni. Azután meg amennyire gyűlöltek a Harvardon minden eredetit és egyénit, éppen annyira becsülték Cambridge-ben az excentrikust, a különlegest; úgyhogy még akiben semmi ilyesmi nem volt, az is kénytelen volt a látszat kedvéért mutatni..."

Russel a matematika filozófiájáról adott elő, s az akkor még nagyon új relativitáselmélet fontosságára figyelmeztette hallgatóit. Tőle tanulta meg Wiener, hogy Einsteinnek a relativitáselméleten kívül még másik nagy matematikai felfedezését is érdemes tanulmányozni; később, amikor matematikus lett, éppen e tanulmány alapján dolgozta ki egyik legfontosabb elméletét (az időben változó valószínűségi jelenségek elméletét), mely a II. világháború óta egész matematikai-technikai civilizációnk egyik alappillére lett. Wiener hálásan említi, milyen fontos ez elméleti rendszer létrejötte szempontjából a „Bolond Kalapos" – ahogyan Russelt Cambridge-ben, az *Alice csodaországban* híres hőséről elnevezve becézték – figyelmeztetése.

Norbert Wiener *neveltetése* tulajdonképpen Cambridge-ben kezdődött. Itt heverte ki Atyja, s az amerikai professzorok *oktató* ügybuzgalmának kártevéseit. A természetével összehangzó környezet mérhetetlenül hasznosabb nevelő volt, mint a tantárgyak tételes magolása. Cambridge-ben nemcsak az egyetemen tanítottak még fontosabb volt talán a Russel-féle teaestélyek – a Trinity-i „bolond teadélutánok”, ahogyan nevezték – szerepe. Itt közvetlenül, egyszerűen csevegtek a matematikáról, a fizikáról az irodalomról, jelentős és jelentéktelen apróságokról.

Russel tanácsolta Wienernek, hogy ha matematika filozófiájával akar foglalkozni, akkor elsősorban tanulja meg a matematikát, s a matematikusok akkori Mekkájába, Göttingenbe küldötte az ifjút. Az I. világháború kitörése Wienert – hasznos tanulmányok és ismeretségek után – elébb Cambridge-be, majd nemsokára Amerikába kényszeríti vissza. A Harvardon kísérelt meg fizetetlen próbaelőadásokat tartani matematikai logikai témáról, de nem alkalmazták. Hirdetőiroda útján egy elhanyagolt vidéki egyetemen vállalt matematikaoktatást, ez irtózatos szenvedés volt, s az első kínálkozó alkalommal otthagyta. Egy ideig az amerikai Enciklopédiánál dolgozott, azután újságíróskodott, a háború végén a tüzérségi táblázatok számítására szervezett csoporthoz került.

Közben telt az idő, *s az ő nevéhez nemcsak komolyabb matematikai eredmény nem fűződött, még a matematikai tudás megismerésében sem haladt semmit.* Csak mikor 1919-ben átolvasott néhány modern, kitűnő analízis-tankönyvet (főleg a francia iskola nagy mestereinek a remekeit), kezdette „először valóban megérteni a modern matematikát,” írja évek múlva. Apja egyik professzortársa nemsokára besegítette a Massachusetts-i műszaki főiskolára, a matematika tanszékre. Ez az azóta világhírűvé vált nagy intézet akkor még jelentéktelen mérnökképző-iskola volt, de a vezetői érezték, s tanárai ki tudták használni a fiatal intézet lehetőségeit. A nagy európai egyetemek tiszta tudományos világa és a műszaki főiskolák prakticizmusa között szükség volt valami olyan intézményre, ahol az elméleti tudományok, mindenekelőtt a matematika meg a fizika, az eddiginél sokkal erélyesebben és nagyobb mértékben irányítják a tisztán gyakorlati célú technika fejlődését. A technika olyan pontra érkezett, kiváltképpen az elektrotechnika, ahol csak a legalaposabb tudományos képzettséggel lehetett továbblépni.

Ez volt Norbert Wiener tehetségének az elképzelhető legjobb környezet. Most – huszonöt éves kora után – lett igazi „csodagyerek”, pár év alatt a legnagyszerűbb matematikai felfedezésekkel hökkentve meg a matematikai világot. Matematikai alkotásai olyan mély elvi felismeréseket rejtettek és olyan nehezek voltak, hogy egykori Cambridge-i mestereinek egyike, G. H. Hardy, a tiszta, alkalmazhatatlan matematika apostola szerint csak leplezés célját szolgálták bennük a mérnöki-technikai szakkifejezések. Ez a tiszta matematikáért lelkesedő Hardy részéről az elképzelhető legnagyobb dicséret volt; Wiener matematikája mégis elsősorban a technika fejlődése szempontjából volt fontos. Ez a matematika segített létrehozni az új, nagyon nehéz matematikai-elméleti alappal dolgozó modern technikát, aminek részben éppen Wiener működése következtében, a Massachusetts-i műszaki főiskola lett egyik legfontosabb centruma. S Wiener nevéhez fűződik az új tudományos-technikai civilizáció egységes alapjait kereső diszciplínának, a kibernetikának a megteremtése is. Mindez azonban már sokkal későbbi történet, amit Wiener egy másik, talán még a most ismertetettnél is érdekesebb könyvében írt meg.

A. N. Kolmogorov[5]

Andrej Nikolajevics Kolmogorov nevét sokan ismerik, a matematikusok világán túl is. Ismerik a fizikusok és a mérnökök, elsősorban az örvénylő áramlások elméletével kapcsolatban. Ismerik a nyelvészek, akik a napjainkban rohamosan fejlődő matematikai nyelvészet egyik irányát köszönhetik neki. Ismerik a biológusok, az agyfiziológusok mint a lelki működések matematikai-logikai és gépi modellálásának egyik nagy úttörőjét. Ismeri a nagyközönség is, a *Nagy Szovjet Enciklopédiá*ban megjelent cikkeiből s a napilapokban a matematikaoktatás és a matematikai kutatás problémáiról írott összefoglalóiból.

A matematikusok leginkább a valószínűség-számítás elvi, axiomatikus megalapozása miatt tisztelik. Ez a megállapítás nem szakembereknek aligha érzékelteti Kolmogorov tettének fontosságát; szerencsére Rényi Alfréd nemrégiben megjelent kis népszerűsítő könyvéből bárki könnyen megértheti Kolmogorov helyét és jelentőségét a valószínűség-számítás fejlődésében.

„A matematika elvi kérdéseinek tisztázása – írja Rényi professzor *Levelek a valószínűségről* című könyvében – hatalmas lendületet adott a matematika felhasználásának a természettudományokban és társadalomtudományokban egyaránt. Ebből a nagyszabású átalakulásból és az ennek nyomán meginduló fejlődésből a valószínűség-számítás meglepően sokáig, egészen a XX. század elejéig kimaradt. Bár a XIX. században Gauss, Laplace, Poisson, Csebisev, Markov, Bertrand, Poincaré és sokan mások számos eredménnyel gyarapították a valószínűség-számítást, és ugyanakkor a valószínűség-számítás gyakorlati alkalmazásai nagy jelentőségre tettek szert a természettudományokban, a társadalomtudományokban és a gazdasági életben, a valószínűség-számítás matematikai elméletének elvi alapjai terén lényeges előrehaladás nem történt.

Ez az elmaradás ahhoz vezetett, hogy a XX. század elején a matematikusok zöme a valószínűség-számítást nem is fogadta el a matematika szerves részének, egyenrangú ágának, hanem a matematika és a fizika, ill. a filozófia között közbenső helyet elfoglaló és meglehetősen kétes értékű tudománynak tekintette. Hilbert már 1900-ban felismerte a lemaradás káros voltát, és ezért a matematika legaktuálisabb megoldatlan feladatainak általa összeállított híres listájába felvette a valószínűség-számítás axiomatikus megalapozásának problémáját." Több kiváló matematikus próbálta különféle módon, elsősorban a

[5] Forrás: Vekerdi László: A. N. Kolmogorov. In: Kalandozás a tudományok történetében. Művelődéstörténeti tanulmányok. Bp., 1969. Magvető. pp. 283–293. A tanulmány korábban megjelent: Vekerdi László: Matematikus portré nem matematikusok számára. = Valóság 10 (1967) No. 9. pp. 42–47.

halmazelmélet, mértékelmélet és a függvénysorok elméletének a segítségével megoldani a problémát. Értek is el részeredményeket – Kolmogorov kiváltképpen M. Fréchet eredményeit hangsúlyozza –, de »a modern matematika szellemében való szabatos, axiomatikus megalapozás« Kolmogorovnak sikerült először, 1933-ban.

„A valószínűség-számítás Kolmogorov-féle axiomatikus elméletében – folytatja Rényi professzor – a véletlen eseményeket halmazok reprezentálják, és a valószínűség egyszerűen e halmazokon értelmezett normál mérték. Kolmogorov elméletében a várható érték, mint (absztrakt) Lebesgue-féle integrál van értelmezve. Azáltal, hogy Kolmogorov a valószínűség-számítást a halmazelmélet, ill. a mértékelmélet alapjaira helyezte, egy csapásra nemcsak a valószínűség-számítás logikailag kielégítő megalapozását adta meg, hanem azt bekapcsolta a modern matematika vérkeringésébe, és lehetővé tette a matematika fejlett, modern ágainak a felhasználását a valószínűség-számításban. Kolmogorov elmélete, egyszerűsége és említett előnyei folytán rövidesen általánosan elfogadottá vált, és az elmúlt 30 évben a valószínűség-számítási kutatások szilárd alapjául szolgált. Az alapok tisztázása ugrásszerű fejlődést tett lehetővé mind a valószínűség matematikai elméletében, mind pedig az elmélet alkalmazásai terén.”

Mindkét irányban jelentős haladást képviselt tanítványával, B. V. Gnedenkóval közösen írt *Független valószínűségi változók összegének határeloszlásai* című könyve. A problémavilág, amit ez a nem szakembernek félelmesen hangzó cím takar, az egész valószínűség-számítás legősibb, központi fontosságú tétele, az ún. „nagy számok törvénye” körül nőtt fel, elsősorban orosz matematikusok, P. L. Csebisev, A. A. Markov, A. M. Ljapunov és A. Ja. Hincsin munkája nyomán. A nagy számok törvényével rokon, ún. „határértéktételek” óriási fontosságát hangsúlyozza Kolmogorov a könyv előszavában: „ezek nélkül a határértéktételek nélkül – írja – ezen tudományág legalapvetőbb fogalmának, a valószínűség fogalmának reális tartalma sem érthető meg. Valóban, a valószínűség-számítás egész ismeretelméleti értéke azon alapszik, hogy a tömeges véletlen jelenségek együttes hatásuk által szigorú, nem valószínűségi törvényszerűségeket hoznak létre; maga a matematikai *valószínűség* fogalma meddő volna, ha nem realizálódnék valamely eredmény bekövetkezésének *gyakorisága* alakjában, egyforma feltételek tömeges megismétlődése alkalmával (ez a realizálódás mindig csak közelítő, és sohasem abszolút biztos, azonban az ismétlések számának növelésével elvileg korlátlanul pontossá és tetszőleges mértékben biztossá tehető).”

Az axiomatikus megalapozás által teremtett forradalmi új világban elfért tehát a klasszikus, régi „gyakorisági” értelmezés is. Ami a régi alapokból értékes volt, s a tapasztalat kifejezése, erőltetés nélkül beépült itt az új elmélet gazdagabb egészébe.

Oroszországban a valószínűség-számításnak, s ami talán még fontosabb, a matematika többi nagy ágának is régi hagyománya volt. Kolmogorov munkája szervesen csatlakozott ehhez a nagy tradícióhoz. „Engem az a szerencse ért – írta később, 1962-ben, a tudományos iskolák szerepét tárgyaló cikkében –, hogy tudományos munkámat a D. F. Jegorov és N. N. Luzin által 1910 táján megalapított moszkvai halmazelméleti és függvénytani iskola indította el. Az iskolát foglalkoztató problematika máig sincs kimerítve (N. K. Bari, D. E. Menysov és tanítványaik), de már a húszas években új irányba tájékozódott N. N. Luzin tanítványainak egy része. Sok mindent megtartottak, amit Luzintól tanultak, de az új problémák s az új munkamódszerek új iskolába tömörítették őket. A. Ja. Hincsin fiatalabb munkatársaként (mindketten Luzin tanítványai vagyunk) nekem sikerült vele együtt a valószínűség-számítás területén eléggé szabatosan körvonalazott új irányt kidolgoznom. Sok mindenben Csebisev és Markov klasszikus tradícióihoz csatlakoztunk, amelyeket a szovjet időkben Sz. N. Bernstejn képviselt ragyogóan. De a Luzin-iskolában tanultak, meg a fizikai és a technikai fejlődésből következő problémák bevonása miatt törekvéseink jellege eredeti, az addigitól eltérő lett. A húszas évek közepétől kezdve magunk s tanítványaink a valószínűség-számítás valamennyi új területe iránt érdeklődni kezdtünk.”

Az egyik új terület az ún. „valószínűségi folyamatok” elmélete volt. Később B. V. Gnedenko Kolmogorov hatalmas oeuvre-jéből a valószínűségi folyamatok megalapozását nevezte legfontosabbnak, s Kolmogorov egyik tanítványa, Arató Mátyás szerint „a sztochasztikus folyamatok elméletében és különösen azok alkalmazásai terén elért eredményei mindig eseményszámba mennek valószínűség-számítási körökben”.

Egyes izolált esetekben már régebben is sikerült időben lezajló, egymástól függő véletlen események tárgyalása, így pl. a Brown-féle mozgás vagy a diffúzió egyszerűbb eseteiben. Ezek a megoldások azonban, amelyek többnyire fizikusoktól származtak, nem alapultak megbízható matematikai elvekre, és az egyedi tárgyalásmód miatt nem lehetett felismerni közös alaptulajdonságaikat. Kolmogorov fedezte fel A. A. Markov egy korábbi eredményét folytatva, hogy ez az egész kérdéskomplexum igen nagy mértékben általánosítható és egységesíthető a matematikai analízis szabatos alkalmazásával.

Markov az orosz nyelv betűstatisztikájának a vizsgálata alapján észrevette, hogy az egyes betűk előfordulásának a valószínűsége függ attól, hogy milyen betű, ill. betűk előzik meg a vizsgáltat. Így pl. megállapította, hogy az egyes magánhangzók különböző valószínűséggel fordulnak elő különböző mássalhangzók után. Az ilyen sorozatokat „Markov-láncoknak” nevezik. Ezeknek óriási volt a jelentősége, mert itt bukkant föl először a valószínűség-számításban az egymásra ható véletlenek sorozatának, a valószínűségi *folyamatnak* a fogalma. Képzeljünk el a különbség érzékeltetése kedvéért két szélsőséges példát: a fej-vagy-írás játékot és a természetes kiválogatódás folyamatát. Az első tárgyalásához teljesen elegendő a klasszikus valószínűség-számítás, a fajfejlődés folyamatának valószínűség-számítási megközelítése viszont a *változás* statisztikájának a kidolgozását követeli meg. Ez a különbség a statika és a dinamika közötti különbséghez hasonlítható, s amint a dinamika fejlődésében döntő szerepe volt a megfelelő matematikai módszer, a differenciálszámítás megteremtésének, ahhoz hasonlóan a változás statisztikájának, vagy ahogyan ismertebb nevén nevezik, a „sztochasztikus folyamatok" elméletének a kidolgozásában is a megfelelő matematikai módszer megtalálása volt a döntő. Ezt a módszert fedezte fel a matematikai analízis klasszikus orosz mestereinek az eredményeit használva Kolmogorov és Hincsin, és építette ki velük együtt a moszkvai valószínűség-számítási iskola többi matematikusa.

Tőlük függetlenül és velük egy időben talált matematikai módszert a sztochasztikus folyamatok tárgyalására a nagy amerikai matematikus, Norbert Wiener is.[6] Az ő úttörő munkájuknak köszönhető elsősorban, hogy a sztochasztikus folyamatok elmélete s alkalmazása a negyvenes évektől kezdve rohamosan fejlődik, s ma már a valószínűség-számítás legfontosabb része lett. A moszkvai iskola ebben a rohamos fejlődésben is megtartotta kiváltságos helyzetét: E. B. Dünkin, Ju. V. Prohorov, A. M. Obuhov és még sok más Kolmogorov–Hincsin tanítvány neve vált ezen a téren világhíressé.

A sztochasztikus folyamatok matematikájában szerzett jártasság s a második világháború katonai feladatai Kolmogorovot is, akárcsak Norbert Wienert, a matematika negyvenes évek végén megszülető új ágához, az információelmélethez vezette. Részben a moszkvai halmazelméleti és valós függvénytani iskola, részben L. Sz. Pontrjagin régebbi topológiai eredményeiből kiindulva információelméleti fogalmak és analógiák alkalmazásával dolgozták ki az ötvenes években Kolmogorov és tanítványai az ún. „ε-entrópia" elméletét. Az ε-entrópia nagyon nehéz, axiomatikusan meghatározott fogalom, amelynek egyik interpretációja információmennyiség is lehet: az a tetszőleges ε pontossággal megadható információmennyiség, amelyet a folytonos jelekkel dolgozó hírforrás által kibocsátott, kettős számrendszerben kódolt hír tartalmaz. De ez csak egyik lehetséges interpretáció, az ε-entrópia sokkal absztraktabb és általánosabb fogalom (metrikus terekbe beágyazható

[6] Lásd: Heims, Steve J.: John von Neumann and Norbert Wiener. From mathematics to the technologies of life and death. Cambridge – London, 1980. MIT Press. XVIII, 547 p. – Magyarul: Norbert Wiener: Matematikus vagyok. Ford.: Nagy Imre. Bp., 1968. Gondolat. 324 p.; Norbert Wiener: Válogatott tanulmányok. Vál. és bev. Tanulmány: Tarján Rezső. Ford.: Tarján Rezsőné. Bp., 1974. Gondolat. 378 p., 1 t. *(– a szerk. kieg.)*

függvényhalmazok közelítések szempontjából fontos jellemzője), s a modern matematika távoli, egymástól látszólag teljesen idegen területei között létesít meglepő kapcsolatokat.

Az ε-entrópiára vonatkozó vizsgálatok a megközelítés, a konstruktív függvénytan, a matematikai algoritmusok szerepének a hangsúlyozásával már a következő fejezetet készítették talán elő Kolmogorov matematikájában. Az ötvenes évek vége óta az automaták elmélete és a matematikai logika foglalkoztatja, s ezekhez kapcsolódva a kibernetika, a matematikai nyelvészet, az alkotás idegrendszeri mechanizmusának a vizsgálata. Ezen az új s ma még tisztázatlan területen különösen értékes Kolmogorov erős kritikai érzéke, s már ez megkülönbözteti iskoláját a többi hasonló célú kutatócsoporttól.

Az ember magasabb rendű idegműködéséből – mondotta egyik előadásában – a kibernetika ez idáig csak a legegyszerűbb típusú feltételes reflexek és a formális logikai gondolkozás mechanizmusát tanulta meg. De a jelenkori ember tudatában a formális logikai gondolkozás nem centrális helyzetű, inkább afféle kisegítő berendezés, amelyet a szükségnek megfelelően alkalmaz. Másrészt az egyszerű feltételes reflexek nem nagyon segítik az ember magasabb rendű érzelmi életének vagy például a tudós alkotó intuíciójának a megértését. Az az igazság, hogy a kibernetika még el sem kezdte elemezni a fejlett emberi tudatnak a tudatalatti szférával kölcsönhatásban álló működését. Meghökkentő, miféle primitív példákat kínálnak a kibernetikai munkák a művészi alkotás gépi modellezésére, pedig a nem kibernetikai irodalomban a művészi alkotás formális analízise már régen magas szintet ért el. Ha az ember lelki életének valódi bonyolultságát a kibernetika alapján akarjuk megérteni, akkor a kibernetikusok humán érdeklődését kell először a mai primitív szintről kimozdítani.

Ő maga és tanítványai azt is megmutatták, hogyan vélik elérhetőnek ezt a célt. J. M. Jaglom, R. L. Dobrusin és A. M. Jaglom 1960-ban megjelent alapvető cikkükben az információelmélet nyelvészeti alkalmazását tárgyalták, Kolmogorov 1962-ben Majakovszkij költészetének ritmikáját. A kombinációs lehetőségek *nagy számának* a fontosságára figyelmeztetnek: az alkotás és általában a magasabb rendű idegműködés bonyolult, nehezen érthető folyamatában elsősorban a „nagy számok dialektikája” igazíthat útba. Nem szabad megelégedni egyszerűsített, mechanikus modellekkel, „az emberek érintkezései és kapcsolatai – írja egyik *Izvesztija*-cikkében – sokkal kifinomultabbak és változatosabbak. A festőművész tanítványa befejezetlen műve elé áll, kezébe veszi az ecsetet, meghúzza a szükséges vonásokat, és így szól: »Ez *így* jó«, anélkül hogy meg tudná magyarázni, miért kell így és nem másképp csinálni”.

Nehéz az emberi alkotás és magasrendű idegműködés mechanizmusának komoly, objektív tanulmányozása, de éppen ez a „materialista humanizmus megerősítésének egyik fontos láncszeme. A tudomány fejlődése gyakran megdöntötte az emberek megszokott elképzeléseit, kezdve a személyi halhatatlanság vigasztaló hitével. A hiányos tudás és hiányos megértés stádiumában a tudomány efféle hiteket leromboló következtetéseit a tudomány ellen fordítják, az irracionalizmus és idealizmus védelmében. Gyakran állították például, hogy Darwin elmélete vagy a magasabb idegműködés objektív pavlovi tanulmányozása lealacsonyítja az ember morális és esztétikai ideálok alkotására irányuló törekvését. Hasonlóképpen napjainkban a vitalizmus és irracionalizmus védelmére kovácsolnak érvet abból az idegenkedésből, amelyet az emberekben a »lélektelen« automatához való hasonlítás kelt. A magasabb rendű idegműködés teljes megértése szükségképpen megsemmisíti majd ennek a félelemnek a forrását, és a *nagy számok dialektikájából* fakadó eredmények keltette csodálatot ülteti a helyére".

*

Kolmogorov nem matematikusként kezdette tanulmányait, történelem szakra iratkozott be a Moszkvai Egyetemen 1920-ban, s első szemináriumi dolgozatát a XVI. századi novgorodi földbirtokviszonyokról írta, egykorú kancelláriai dokumentumok alapján. De már 1921-ben Luzinnál hallgatott függvénytant, A. K. Vlaszovnál projektív geometriát, V. V. Sztepanov függvénysor-elméleti szemináriumaira járt, s a topologikus terek elméletének nagymesterénél, P. Sz. Uriszonnál tanult. Utóbbi egyik óráján hibát vett észre a nehéz levezetésben, ami – 19 éves diákról lévén szó – igen meglepte a professzort. A széles skálájú matematikai érdeklődés és a kiváló kritikai érzék – amely későbbi munkájában is mindig megtalálható –, úgy látszik, már elsőéves korában megnyilvánult.

Első nagy eredményét a trigonometrikus függvénysorok, az ún. „Fourier-sorok" elméletében érte el, 1922-ben. Kevés fejezete van a matematikának, amelyiknek olyan sok eredményt s még inkább inspirációt köszönhet, mint ez az akkor már százéves diszciplína. Még a XIX. század elején, fizikai problémával kapcsolatban írta le Joseph Fourier, hogyan lehet tetszőleges folytonos függvényeket egyszerű folytonos függvények, az általános iskolából jól ismert sinus és cosinus függvények végtelen sorával kifejezni. Roppant fontos felfedezés volt, mert a függvények ilyen módon történő kifejezésével remélték a matematikusok megközelíteni a *függvény* egész matematikában centrális, de alapjaiban nem nagyon értett fogalmát. Hiába tudtak ugyanis kitűnően dolgozni a függvényekkel, nemigen tudták megmondani, mi is az a függvény. Nem csoda hát, hogy a XIX. század legnagyobb matematikusai, Dirichlet, Riemann, Georg Cantor s annyi más nagy matematikus foglalkozott a Fourier-sorok elméletével. Az elmélet sikerei példaként hatottak: a legáltalánosabb függvények tulajdonságait is végtelen függvénysorokra igyekeztek visszavezetni, absztrakt, általános módon. A XIX. század mérnök-matematikusai „szabályozták" a függvényeket, egyszerű tagokból álló végtelen sorok gátjai közé terelték, s felfedezték, hogy a gátakat tetszés szerint folytatni lehet az egész síkon. Az így megszelídített függvényeket azután egyszerűen helyettesítették a gátakkal: ezek a végtelen függvénysorok *definiálták* a függvényt.

A századforduló kritikusabbá és bizonytalanabbá váló légkörében azonban egyre több példát szerkesztettek a gátak közül kitörő függvényekre, s méghozzá a legtöbb példában a renitens függvények nem is voltak nagyon veszedelmesek; többnyire nagyon egyszerűek voltak, semmi „okuk" sem volt a gátak áttörésére. Francia matematikusok, R. Baire, É. Borel, H. Lebesgue küzdöttek meg először ezzel az új veszedelemmel.

Baire megfordította a problémát. Eddig azt keresték a matematikusok, hogyan lehet folytonos függvényeket végtelen sok egyszerűbb folytonos függvénnyel, egyszerűbb folytonos függvények végtelen sorával kifejezni. Baire azt kérdezte, milyen függvényeket lehet így kifejezni, milyennek kell lenni a függvénynek ahhoz, hogy egyszerűbb függvények végtelen sorával legyen megadható. Az addigi matematikusokat a végtelen sorokkal történő kifejezhetőség *módja* érdekelte, Baire az így kifejezhető függvények összességét, *osztályát* kezdette el vizsgálni. Az előbbi hasonlatunk nyelvén: az addigi matematikusok mindig a gátak (a végtelen sorok) építésére figyeltek, Baire meg magát a folyót kezdte el tanulmányozni.

Tóth Imre munkáiból tudjuk, milyen termékeny lehet a matematikában a dolgok efféle megfordítása. Divat is volt már Arisztotelész óta. Most is ez történt, s először is azt kellett kitalálni, hogyan lehet mérni a szabadjára engedett függvényt. A végtelen sorok gátjai közé szorításnak egyik értelme ugyanis éppen az volt, hogy mérni lehetett általa a függvényt: a gátak mentén könnyű volt kimérni az általuk bezárt területet. Most azonban a gátakat nem lehetett ilyen célra alkalmazni, új fajta mértéket kellett kidolgozni. Ezt az új mértéket É. Borel fedezte fel, s H. Lebesgue mutatta meg, hogyan lehet a megfelelően definiált új mértékkel a régi matematikából jól ismert integrál fogalmát az új függvényfogalom világába átmenteni. Ezzel azután alapjaiban készen is volt az új függvények elméletének, az ún. „valós függvénytannak" a felépítéséhez szükséges matematikai kelléktár.

Páratlan pezsgés indult meg ezután a matematikában. Az új függvényfogalom eleve elrendelt harmóniában volt a századforduló legnagyobb matematikai élményével, a halmazelmélettel, s így természetes módon illeszkedett a matematika elvi megalapozását szolgáló törekvésekhez. A francia matematikusok elegáns, klasszikus formulákhoz ragaszkodó, nehezen érthető gondolatait Felix Hausdorff fordította le közérthető (mármint a matematikusoknak közérthető) nyelvre nagy hatású *Halmazelmélet*ében (1914). A „fordítás” szó inkább újrateremtésként értendő, még ott is, ahol elődeit követi. Ugyanis Hausdorff könyvében jelent meg először az új függvényfogalom megalapozására maradéktalanul alkalmas formában a ponthalmazok elmélete. Ez a könyv tárta fel világosan és közérthetően a függvény *halmazelméleti* lényegét. Addig a függvény – a név is ezt jelölte – változó mennyiségek egymástól való függését fejezte ki, többnyire erősen „zárkózott” formában, úgyhogy ha a matematikus egyes értékekre volt kíváncsi, kénytelen volt az illető függvény végtelen sorához folyamodni. A kérdés Baire általi megfordítása nyomán azonban kiderült, hogy a függvény ponthalmazok viszonyítása, ponthalmazok leképezése egymásra. A függvények vizsgálatánál tehát a ponthalmazok szerkezetéből kell kiindulni. A függvények elmélete a halmazelmélet része lett.

Ennek az új, halmazelméleti és valós függvénytani gondolkozásmóddal telített matematikának egyik fontos középpontjába cseppent Kolmogorov Luzin iskolájában, s ezt az új szellemet tükrözte már első matematikai eredménye is, amit a Fourier-sorok elméletében ért el. Ez a halmazelméleti és valós függvénytani gondolkozásmód volt a modern matematika „vérkeringése”, ahová Kolmogorov a valószínűség-számítást beoltotta, halmazoknak tekintve a véletlen eseményeket és a valószínűséget egyszerűen e halmazokon értelmezett mértéknek. Ezáltal sikerült megteremtenie a moszkvai valószínűség-számítási iskola új formanyelvét és problematikáját.

> „Jelenleg – írta Kolmogorov a hatvanas évek elején – úgy látszik, helyesebb már független iskoláról beszélni, Ukrajnában B. V. Gnedenko, Moszkvában E. B. Dünkin körül. Ami a harmincas években mindnyájunkat egyesítő eszméket, munkamódszereket illeti (sőt, még a definíciók és jelölések rendszerét is), ugyanúgy megtalálom azokat a leningrádi, taskenti, vilnuszi vagy külföldi (amerikai, svéd vagy magyar) tudósok könyveiben és cikkeiben, mint a valószínűség-számítással foglalkozó moszkvai szakemberek munkáiban.”

A moszkvai valószínűség-számítási iskola szelleme beleolvadt az egész világ matematikai életébe, s a fejlődés legfontosabb mozgatója lett a valószínűség-számítás területén. A valószínűség-számítás és sokféle elméleti és gyakorlati alkalmazása pedig – jól tudjuk – az egész mai civilizáció napról napra fontosabbá váló pillére.

Neumann János[7]

Matematika és természettudomány soha nem hatott még olyan erősen a világ fejlődésére, mint napjainkban. Köztudott, hogy ebben a folyamatban milyen kiemelkedő szerep jutott magyar vagy magyar származású tudósoknak. Olyan nagy, hogy jóformán még a szereplők számba-szerbevételével sem birkózott meg a tudománytörténet-írás, az okok és a körülmények feltárásáról nem is beszélve. Mindez azonban türelmes részlettanulmányok föladata; mi itt megelégszünk egyetlen magyar géniusz, Neumann János életútjának futólagos bemutatásával. Őt azonban föltétlenül említenünk kell, hiszen aligha akad századunkban még egy tudós, akinek eredményei olyan nagy mértékben alakították, illetve alakítják mindennapi életünket, mint az övéi.

Neumann János matematikai bölcsője, a fasori Evangélikus Főgimnázium, az akkori világ legjobb természettudományos nevelőintézetei közé tartozott. Diákjai közül később sok szerzett világhírt, nem egy Nobel-díjat is. Itt tanul többek között Wigner Jenő, Kármán Tódor és Teller Ede; Wigner Jenő, amikor s ahányszor csak alkalma nyílik rá, mindig ki is fejezi háláját egykori iskolája és egykori matematikatanára, Rátz László iránt.

Rátz László egyike volt ama néhány nagy tanárnak, akik a századfordulón és a 20. század első évtizedében magas színvonalú középiskolai matematikaoktatást teremtettek hazánkban. Ügyesen válogatott, okos példáival korán kifejlesztette tanítványaiban a problémameglátás és a problémamegoldás készségét, nem egyben valóságos szenvedélyét; aktív matematikai gondolkozásra szoktatta őket, az arra alkalmasokat pedig alkotásra serkentette. Az iskola munkáját a *Középiskolai Mathematikai Lapok* – ezt is Rátz László szerkesztette másfél évtizedig – izgalmas versenypéldái és az évenkénti matematikai versenyek egészítették ki, s bővítették a tehetségek országos méretű felismerésére alkalmas rendszerré. Ezt a rendszert, s kivált a versenyeket Neumann János diákkorában – Rátz László mellett – elsősorban egy nagyszerű matematikapedagógus, Kürschák József műegyetemi professzor munkássága éltette. Kürschák professzor figyelmébe s gondjaiba ajánlotta Rátz tanár úr az ifjú

Neumannt is, és a lángeszű diákot Kürschák maga s egy egyetemi magántanár, Fekete Mihály tanította. Fekete Mihály a modern analízis egyik megteremtőjének, Fejér Lipótnak a tanítványa volt; maga is jeles ember, később a jeruzsálemi egyetem világhíres professzora. Így aztán mire Neumann János 1921-ben leérettségizett, már kész matematikusként ismerték.

[7] Forrás: Vekerdi László: Neumann János. In: Ezer év. Arcképek a magyar történelemből. Bp., 1985. pp. 477–480.

A matematikusi pálya akkoriban még nem számítódott ama jó lehetőségekkel kecsegtető foglalkozásnak, amivé napjainkra, éppen Neumann János nagy fölfedezése, a számítógép alkalmazása következtében vált. Így háta zseniális ifjút apja, a gazdag pesti bankár, beíratta a kor leghíresebb műszaki egyetemére, a zürichi Politechnikai Főiskolára, a kémia szakra. Az ifjúnak azonban a vegyészmérnöki diploma megszerzése közben bőven jutott ideje s ereje matematikára. Zürich akkoriban a modern matematika és elméleti fizika fontos centruma volt; ott tanított Hermann Weil, a kor legszéleslátókörűbb matematikusainak egyike, s Pólya György, az analízis és a problémamegoldás nagymestere. Zürichben dolgozott Wolfgang Pauli, a modern kvantummechanika nagy megteremtőjének egyike, s egy ideig Einstein és Schrödinger is.

A fiatal Neumann gondolkozására és matematikai problémalátására elsősorban Weyl hatott erősen, aki korán észre is vette az ifjú matematikus rokon géniuszát, egyszer, hosszabb külföldi útja idejére még az egyetemi előadásait is fiatal tanítványára bízta.

Zürichi tanulmányaival egy időben Neumann János a budapesti egyetemen is meg-megjelent; első dolgozata (1922), amelyet Fekete Mihállyal írt, a híres Fejér-tétel gondolatvilágához csatlakozott. Egy másik dolgozata Kürschák algebrai eredményeit folytatta. Az egész modern matematika és fizika szempontjából alapvetően azok a munkái, amelyekben két nagy szegedi matematikus, Riesz Frigyes és Haar Alfréd zseniális megoldásaiból kiindulva új utakat nyitott az ún. Hilbert-terek elméletében. Az új elméletben később azután fölfedezte a kvantummechanika testére illő s lényegét kifejező matematikai formalizmust.

Első világhíres munkája, „Az általános halmazelmélet axiomatikus fölépítése” volta témája 1926-os budapesti disszertációjának. A halmazelméleti szemlélet és fogalomvilág akkoriban már a matematikusok közkincsévé vált, hiányzott azonban az elmélet megnyugtató axiomatikus megalapozása, s a kor legnagyobb matematikusai – köztük olyan tekintélyek, mint David Hilbert és Hermann Weyl – vitatkoztak eme fontos, tán az egész matematika létét, de legalábbis jó közérzetét fenyegető problémáról. Igen erős volt tehát a „mezőny”, s kiemelkedő kellett legyen a fiatal matematikus megoldása (melyet első alakjában 1925-ben közölt egyik nagy matematikai világlap) ahhoz, hogy föltűnést keltsen.

> „Emlékszem – írja Neumann-életrajzában S. Ulam –, hogy amikor Lwówba jött 1927-ben a matematikus-kongresszusra, már híres volt a matematika alapjaira s a halmazelméletre vonatkozó munkássága. Úgy emlegették előttünk, hallgatók előtt, mint az ifjúkori geniális munka példáját.”

A világhíres ifjú matematikus 1927-ben a berlini, 1929-ben a hamburgi egyetem magántanára lett.

> „A quantenheoria-szemináriumot H. Kallmann, F. London, Szilárd és én tartjuk – számolt be 1929. május 9-én Berlinből Ortvay Rudolfnak, a budapesti egyetem derék fizikaprofesszorának írt levelében –, a thémai: Heinsenberg Resonanz-dolgozata, a Darstellungs-theorie alkalmazásainak ismertetése, a Compton-effektus, a Dirac–Jordan–Klein-féle »második quantizálás«, a Dirac-féle fényelmélet.”

A magántanárság tehát munkának – s elismerésnek is – nagyon szép volt, de semmi reális reményre sem jogosított, lévén a magántanárok száma sokszorosa a várható professzori katedrákénak. Neumann János szerencsére józanul fölmérte a helyzetet, s 1930-ban vendégprofesszorként, a következő évben pedig állandóra elfogadta a princetoni egyetem meghívását, majd 1933-ban a princetoni *Institute for Aadvanced Study* állásajánlatát.

Ritkán sikerült egy helyen annyi nagy matematikust és fizikust tömöríteni, minta harmincas-negyvenes években Princetonban. Nemcsak az amerikai tudósok színe-java gyűlt itt össze, itt találtak munkalehetőséget igen gyakran az Európából kiszorult, elüldözött nagy fizikusok és matematikusok is.

> „Weil végeredményben mégis idejön – írja Neumann János 1933. október 18-án Ortvaynak –, már október végén itt lesz. Einstein tegnap óta itt van, és mindannyian remegve várjuk, hogy milyen szenzációra van kilátás. Eddig még jól ment, mert sikerült a quarantainenél leszállítani a hajóról, és direkt behozni Princetonba, úgyhogy egy New York polgármestere által vezetett deputáció a piernél hiába várt–továbbá sikerült lebeszélni arról, hogy az első estén egy New York-i népgyűlésen beszéljen. Remélhetőleg – fűzi hozzá a tréfás baráti beszámolóhoz – így is fog folytatódni, de ki tudja? ... Mathematikában 2 új európai van itt: Gödel (logikus, Bécsből, ő bizonyította be a »mathematika ellentmondásmentességének bebizonyíthatatlanságát« három év előtt) és Bocher. Emmy Nöther alighanem a közelemben lesz a télen.”

Ebben a hihetetlenül élénk s csodálatosan nyitott szellemi légkörben, mely a szűkebb szakmán kívül a társtudományok és az alkalmazásuk vonzását s azon túl a világot gyötrő nagy kérdések gondját is közvetítette, Neumann János sokoldalú géniusza és nemes embersége magához illő otthonra lelt és gazdagon kivirágzott. A kvantummechanika matematikai – és eszmei – alapjaira vonatkozó vizsgálatait egy máig nélkülözhetetlen, remek könyvben foglalta össze

(1923), s folytatta a modern algebra és az általános halmazelmélet matematikai „keresztezéséből" kinőtt vizsgálatait a végtelen sok dimenziós Hilbert-terek elméletében, „majdnem olyan könnyen elérhetővé téve ezáltal – írja S. Ulam – a Hilbert-teret a matematikusok számára, minta közönséges véges euklidészi tér."

Mindezekből egy is elég lett volna a világhírhez. De Neumann matematikai géniusza előtt nem voltak határok. Úttörő eredményekre jutott a matematika számos más területén is, és a harmincas évek végétől egyre erőteljesebben kezdett érdeklődni a közgazdaságtan matematikai kérdései iránt. Ezekre az időkre így emlékezik barátja, Jacob Bronowski:

> „A háború alatt egy ideig mindketten Angliában dolgoztunk, s Johnny egy londoni taxiban beszélt nekem először a játékelméletről. Szeretett taxiban matematikai témákról beszélni. Én mint lelkes sakkozó azonnal a sakkhoz hasonló játékok elméletére gondoltam. »Nem, dehogy!« – tiltakozott ő. »Nem erről van szó. A sakk egyáltalában nem játék. A sakk a számítás jól meghatározott formája. Lehet, hogy az ember nem tudja kidolgozni a választást, de elméletben mindig kell legyen megoldás, egyetlen helyes megoldás minden helyzetben. A valódi játékok azonban nem ilyenek. A valóságos élet nem ilyen. A valóságos életet tévedések, csalódások és taktikázások bonyolítják. Próbálom kitalálni, hogy mit fog tenni a másik. És éppen erről van szó az igazi játékban.« És csakugyan éppen erről szól a könyve. Különösnek tűnhet egy tudományos könyvben ilyen fejezetcímet találni, hogy »Póker és blöff«, s még különösebb, hogy az egész könyv méltóságteljes matematikai képletekkel van tele. A matematika azonban nem méltóságteljes nagyképű tevékenység, kivált nem az olyan lángelmék kezében, mint Neumann János, aki rendkívüli gyorsasággal hatolt a dolgok mélyére. Ezek a méltóságteljesnek tűnő egyenletek tehát valójában csupán egy tiszta intellektuális dallam mélyen fekvő hangszerelései."

Alig akad valami a mai tudományban, ami többféleképpen és hasznosabban lenne alkalmazható, mint ezek a tiszta és mély intellektuális dallamok. Neumann János játékelmélete közgazdaságtantól szociológiáig, hadászati és stratégiai megfontolásoktól biológiáig számtalan területen hallatlan pezsgést indított el, egész nagy új tudományokat teremtett. És mindezeken túl átformálta egész gondolkozásunkat: áttekinthető modelljeivel bonyolult kapcsolatrendszerek jobb megértéséhez segített. Egy nyugodtabb jövőből visszatekintve könnyen kiderülhet majd, hogy különféle konfliktusok reálisabb mérlegelését téve lehetővé, megvédett tán még kegyetlen katasztrófáktól is.

Van azonban a matematikának egy területe, amivel kapcsolatban mindenkinek nyomban eszébe jut Neumann János neve: a számítástechnika. A múló századdal egyre világosabban látszik, hogy a számításnak azok a jól meghatározott formái, amiket a fenti idézetben Neumann János a sakkhoz hasonlított, lassanként átalakítják a technológiákat, a termelést, az egész gazdaságot. A gép, amelyet Neumann János az efféle problémamegoldó számításokra kidolgozott, nem alaptalanul vált még a laikusok körében is közismertté, s nem ok nélkül keveredett körülötte valóságos mitológia. Technikai és tudományos felfedezések, a miniatürizálás valóságos csodái kellettek még persze ahhoz, hogy a számítógép azzá a kezes és úgyszólván mindenre befogható jószággá váljék, aminek ma ismerjük, de az alapelvek, a lehetőségek mind benne rejlettek már Neumann János negyvenes és ötvenes években felépített monstrumaiban, amiket az atommagfizika és a reaktortechnika irdatlan számolási feladatainak az elvégzésére megkonstruált.

De nemcsak az egész technikát, tudományt, szervezést, informatikát, közlekedést és gazdaságot alakítja át a digitális számítógép egyre újabb és meglepőbb szabályozás- és vezérléstechnikai eljárások eszközeként, hanem formálja napjaink úgyszólván egész szellemi életét, termékeny gondolati és kulturális analógiák forrásaként. Egy egész új filozófia és világszemlélet alapja a számítógép, ígéretes és izgalmas logikai, ismeretelméleti, pszichológiai kutatások kiindulása és eszköze. A nyelvekhez vagy akár a genetikai kódhoz hasonlóan a számítógép is jelentés-nélküli jeleket állít össze (kódol) jelentés-teljes elemekké, s ezeket meghatározott szabályok szerint szervezi alkalmas előírásokkal (programokkal) jelentéshordozó struktúrákká. Neumann János élete utolsó évtizedében éppen ezeknek az új lehetőségeknek a tudatában s kedvéért merült el olyan mélyen az automaták általános elméletében, s ezért vizsgálta tüzetesen a digitális számítógépek és az emberi agy logikai strukturájának hasonlóságait és működésük alapvető különbözőségeit. Erről szól utolsó könyve, *A számológép és az agy,* amit már halálos betegen írt. Csaknem évtizeddel halála után, 1966-ban jelent meg híres könyve az önmagukat reprodukálni képes automaták elméletéről, amelyben az erősen összetett bonyolult rendszerek viselkedésének alapvető matematikai tulajdonságait fogalmazta meg. Számos területen hatottak ösztönzően ezek a gondolatai is, a mesterséges értelem kutatásától az önszervező rendszerek biológiai elméletéig, s a könyv a maga egészében tán még ma is megelőzi korát.

> „Csupán rendkívüli szellem lehet képes rá – írta halálakor barátja, Wigner Jenő –, hogy a tudományt oly rendkívüli mértékben gazdagítsa, mint Neumann tette. Logikájának precizitása talán szellemének legdöntőbb jellegzetessége volt. Az embernek az volt a

benyomása, hogy egy tökéletes szerkezettel áll szemben, melynek fogaskerekeit úgy munkálták meg, hogy azok ezredhüvelyk pontossággal illeszkedjenek egymásba... Matematikát többet tanultam tőle, mint bárki mástól, az alkotó matematikai gondolkozásról pedig sokszorta többet, mint amennyire őnélküle egy életen át folytatott tanulmányok megtaníthattak volna."

Wigner Jenőhöz hasonlóan Neumann is haza-hazalátogatott, figyelemmel kísérte a honi tudományos életet. A derék Ortvay Rudolffal 1939 végéig levelezett; ezek az apró és nagy jelentőségű dolgokról egyaránt szóló levelek szép dokumentumai emberségének, segítőkészségének, humorérzékének, rendkívüli tisztánlátásának tudományos és politikai téren egyaránt.

„Nem hiszen – írja 1938. március 17-én egy nehéz szakmai témákban bővelkedő levél végén –, hogy a katasztrófa el lesz kerülhető. A fegyverkezés intenzívebb, mint 1914 előtt volt. Arra (az egyébként is kissé erőltetett, és minden történelmi tapasztalatnak ellentmondó) nézetre, hogy a (mai) diktatúrák természetüknél fogva békésebbek, mint az (akkori) monarchiák, a közelmúlt eseményei in concreto rácáfoltak. Tehát, minthogy a »valódi« mechanizmust úgysem ismerjük, nézetem szerint a legridegebb empirizmus indokolt. Ami 1914-ben megesett, az most a fortiori meg fog esni. Nem azt kell bizonyítani, hogy miért lesz így, hanem azt, hogy miért ne lenne így: És erre az utóbbira semmilyen elégséges okot nem látok."

A háború alatt ő is a nagy küzdelem szolgálatába állította fényes képességeit, új hazája védelmében. az új technológiák lehetőségei és az általuk előidézett gondok a háború után sem hagyták nyugodni; 1954-ben az Egyesült Államok elnöke az Atomenergia Bizottság tagjául delegálta. Ilyen minőségében írta 1955-ben felelősségteljes cikkét a technikai fejlődés kiváltotta félelmekről és válságról, *Túlélhetjük-e a technikát* címmel.

„A nukleáris hadviselés jelenlegi borzalmas lehetőségei – írja – még borzalmasabbaknak adhatnak helyet. Ne áltassuk magunkat: ha egyszer ezek a lehetőségek megvalósulnak, ki fogják aknázni őket … Az egyetlen szilárd tény, hogy a nehézségek a hasznos és építő, de ugyanakkor veszedelmes fejlődésnek tulajdoníthatók. Alkalmazkodni tudunk-e a szükséges gyorsasággal? A legtöbb reménnyel az a válasz biztat, hogy az emberi nem már kiállt hasonló próbákat, és úgy látszik, veleszületett képessége van arra, hogy változó mennyiségű baj után mégis felülkerekedjék. Előre kész receptet kérni nem lenne ésszerű. Csak a szükséges emberi tulajdonságokat határozhatjuk meg: türelem, rugalmasság, intelligencia.”

Magyar matematikai iskolákról

A matematika Magyarországon való meghonosodásának és fejlődésének főbb irányai[1]

Az első magyar szerző által írt matematikai munka 1499-ben jelent meg. Hollandiában, talán Deventerben írta bizonyos György mester. A könyv címének – *Arithmeticae summa tripartita* (Az aritmetika három részből álló foglalata) – megfelelően, három részben tárgyalja anyagát. Az első rész a hindu-arab számjegyekkel való számolás kilenc fajtáját – a számolást, összeadást, kivonást, kétszerezést, felezést, sokszorozást, osztást, haladványokat és a gyökvonást ismerteti. A második rész a vízszintes vonalazású abakuszon való „számvetést" mutatja be, a harmadik rész tizenöt feladatot hoz a hármasszabályra, az arányos osztásra, a pénzek átszámítására, az elsőfokú egyenletekkel megoldható feladatokra és a köbtartalom-számításra.

Az ilyen jellegű számolókönyveket a 15. század második felében fellendülő és új szervezési formákat kereső kereskedelem tette szükségessé, de mivel szerzőik – mint György mester is – sokszor egyházi férfiak voltak, a tárgyalási mód és feladatok többnyire az egyetemek skolasztikus stílusához igazodtak.

György mester Nyugaton írta könyvecskéjét, de a számolás tudománya ez idő tájt már Magyarországon sem volt teljesen ismeretlen. A kor egyik nagy matematikusát, Georg Peuerbachot (1423–1461) V. László 1454-ben asztrológusának hívta meg, s Peuerbach Budán írta Vitéz János esztergomi érseknek ajánlott csillagászati munkáját. Peurbach tanítványa, Regiomontanus (1436–1476) pedig 1467-ben Vitéz János hívására az érsek által 1465-ben alapított, rövid életű pozsonyi egyetemre jön, ahol két évig tanított. Nem lehetetlen, hogy György mester is tőle tanult mielőtt Nyugatra ment.

A hindu-arab számokkal való számolás csak a 15. század elején kezdett terjedni Magyarországon, és már a 15. század végén újból háttérbe szorítja az abakusz-számolás új

[1] Forrás: Vekerdi László: Kiegészítés. A matematika Magyarországon való meghonosodásának és fejlődésének főbb irányai. In: Edward Kofler: Fejezetek a matematika történetéből. Ford.: Andorka Rudolf. Bp., 1965. Gondolat. pp. 248–273.

módja, ami az addigi függőleges vonalazású abakusz helyett vízszintes vonalrendszeren dolgozik. György mester is nagy elismeréssel adózik az abakuszon történő számvetésnek, mint ami „éppen úgy, mint a számjegyekkel való számolás, szinte egyedülálló, hallatlanul rövid és a számolásnak legjátékosabb módja”.[2]

Ugyanilyen nagy fontosságot tulajdonít az abakuszon való számolásnak az első magyar nyelvű matematikai mű, az 1577-ben nyomtatott ún. *Debreceni Aritmetika* is. Teljes címe: *Aritmetica, azaz a szamvetesnek tvdomania, mell' az tvdos Gemma Frisivsnac szamvetesbeol Maggar nyelure (ez tudománban gyönörködöknec hasznokra, es hamaráb valo ertelmekre io moddal) forditattot. Debrecenbe, Rodolphus Hoffhalter niomtatta, Anno D: 1577.*

Valójában nem fordítás, Gemma Frisius (1508–1555) híres, először 1536 körül, Antwerpenben megjelent Aritmetikájához nincs több köze, mint a kor többi aritmetikájához, amelyek meglehetősen egyöntetűek, és mind Frisius *Aritmetiká*jából és egymásból merítenek.

Nem véletlen, hogy az első magyar nyelvű számtankönyv Debrecenben jelent meg. Debrecen a 16. században rohamosan növekedett. Egész falvak, sőt kisebb mezővárosok vándoroltak be az adófizetés ellenében a töröktől autonómiát élvező, ún. khász-városba. Ezenkívül az erdélyi és magyarországi törvények megengedték a jobbágyok Debrecenbe költözését, illetőleg eltiltották, hogy a földesúr szökött jobbágyát Debrecenből visszakövetelje. A török hódoltság, a Habsburg birodalom és Erdély határán elhelyezkedő városban élénk kereskedő-iparos élet alakul ki, a debreceni iparosok céhszabályai mintául szolgálnak a többi hódoltsági városoknak, a termékeik messze a helyi piacon túlra eljutnak.

Ez az élénk kereskedő és iparos élet tette szükségessé az 1577-es magyar nyelvű aritmetika megjelenését, ugyanúgy mint évszázadokkal azelőtt a pisai Leonardo könyvének a kiadását a fejlett olasz kereskedelem. Ez tükröződik a könyv feladataiban is: „Mass fél sing posztot veszöc ötuen pénzen, vallyon negyed fél singöt hogy vehetöc?…”

A többi példák is mind a kereskedő mindennapos gyakorlatával, pénzváltással, adás-vevéssel állnak kapcsolatban. A különféle szabályok közül csak azokkal foglalkozik részletesen, amelyeknek az akkori debreceni kereskedelmi életben gyakorlati haszna volt. Így igen bőven tárgyalja az oly sok esetben alkalmazható hármasszabályt, de a külföldi aritmetikákban annyira fontos *regula societatis*t (társulási szabályt) pár feladattal elintézi, mivel: „Maggar országban ennec a regulanac igön nagy haszna nintsen, mert a Magyaroce igön kemény nyakuac és egyaránt az fizetést (restelik)”.[3]

---

2 Hárs János: Hogyan számolt Magyarországi György mester 1499-ben? Bp., 1936. Franklin. 30, [2] p. *(– a szerk- kieg.)*

3 Hárs János: A Debreceni Aritmetika. A legrégibb magyar matematikai munka teljes szövege, magyarázata, kritikája. Sárospatak, 1938. p. 130.

Ugyanez a gyakorlatiasság szabja meg a kis könyv törtekkel való bánásmódját is: csak olyan törteket használ, amik gyakran fordulnak elő a kereskedői életben, ti. azokat, amelyek nevezői 2 hatványai 32-ig és a 3, 5, 7, 9 és 11. A *Debreceni Aritmetika* hű tükre a 16. századi Debrecen lüktető, szerteágazó, de Nyugathoz képest messze elmaradt technikával dolgozó kereskedelmi életének. A könyv hasznos és közkedvelt voltát mutatja, hogy 1582-ben változatlanul kiadták másodszor, és 1591-ben lényegesen bővítve harmadszor is.

Debrecen gazdagsága a 17. században még tovább nőtt. A város iskolája – miután a török elfoglalta Nagyváradot (1660) – magába olvasztotta az akkor a Debrecennél még lényegesen jelentősebb nagyváradi iskolát. Ennek vezetője, Martonfalvi György (1653–1681) átszervezte és komoly szintre emelte az oktatást. Az addig egy, illetve időnként két, gyakran változó tanítóval működő iskolából három állandó professzoros kollégiumot alakít. Kitűnő tanártársai voltak, az Utrechtben és Leydenben tanult Szilágyi-Tönkő Márton (1642–1700), aki fizikát és Lisznyai Kováts Pál (1630–1693), aki számtant, történelmet és földrajzot tanított. A kollégium számos környező városban tartott fenn alsóbb tagozatú iskolát, ún. particulát, melyeknek tanítói szoros kapcsolatban állottak az anyaintézettel.

Egy ilyen particulának, a gyöngyösinek a vezetője volt Menyői Tolvaj Ferenc, aki 1674-ben adta ki Debrecenben nagy közkedveltségnek örvendő aritmetikáját. Már régebben is összeállított egy kis könyvecskét a számolás szabályaiból, írja a bevezetőben, ami

> „valahol Skolai emberséges tudós iffiak eleiben akadott, mindenütt igen nagy kedvességgel látták olvasták, és akinek hol modgya volt benne, pennával is excipiálta. Megtérvén utambul, érkeztem amaz sok szép vitusokkal fénylő ékeskedő Debrecem Skolában, jun. 29. An. 1675. Az holott jo-akaroimmal, Barátim Uraimmal szemben lévén, egynéhányan őkegyelmek igen kértek jóvallották-is, hogy a gyengéknek kedvekért ez munkátskát tennők közönségessé *praelum* alá botsátván. Mert, a mi itt ez kis Könyvetskében taníttatik, elégségesnek itélem lenni, akibül az tanuló iffiak jövendőben az ők kereskedésekben, vagy Majorságbéli gondviselésekben rendessen számot adhatnak, vagy másoktól számot vehetnek."[4]

[4] Az Aritmetikának: Avagy az Számlálásnak öt Specieseinek rövid Magyar Regulákban foglaltatott mestersége. Taliter disponente Franc Tolvaj Menyői (Lőcse, 1727) (A 3). old. – Néhány más, kisebb matematikai publikációról szól Waczulik Margit „A táguló világ magyarországi hírmondói. XV–XVII. század" (Bp., 1984) c. munkájában, köztük Király Istvánnak Franekerben 1695-ben megjelent disszertációjáról is, amelynek címe magyar fordításban így hangzik: Filozófiai disszertáció a matematika tanulmányozásának hasznosságáról. *(– a szerk. kieg.)*

Tolvaj Ferenc aritmetikája valóban gyenge munka, csak az egész számokkal való számolást tárgyalja, a törtekre még abban a kezdetleges formában sem tér ki, mint a *Debreceni Aritmetika*. Mindenben áll róla Maróthi György megállapítása, aki szerint „ollyan, hogy a X., vagy XI. Seculumban sem kellett volna alább valót írni. Sőt azt is könnyű volna megmutatni, hogy a szegény Tolvaj maga sem igen értette az Aritmeticát."

Maróthi György (1715–1744) 1743-ban megjelent aritmetikájának a bevezetőjében írja ezeket a szavakat Tolvaj könyvéről. Maróthi aritmetikája kétségkívül csúcsát jelenti a 19. századig magyar nyelven megjelent matematikai könyveknek. Teljes címe: *Aritmetica, vagy számvetésnek mestersége, Mellyet írtt és Közönséges Haszonra, főképen a' Magyar országon elő-fordulható Dolgokra alkalmaztatván kiadott Maróthi György* (Debrecen, 1743) is mutatja, hogy a könyv, akárcsak elődei, gyakorlati szükségleteket elégít ki, de sokkal alaposabb azoknál. Nem szorítkozik a szabályok egyszerű alkalmazására, hanem pontosan ismerteti és értelmezi azokat. Ezen túlmenően pontos meghatározását adja a bennük szereplő mennyiségeknek is. Sokkal világosabb fogalmat ad pl. a negatív számokról sok korabeli külföldi könyvnél. Bőven és érthetően foglalkozik a törtekkel, de a tizedes törteket éppen csak megemlíti, mert akkor ezeknek még nem volt nagy gyakorlati hasznuk, hiszen a tízes rendszer sem a pénzeknél, sem a mértékeknél nem volt használatban.

Nagyon fontos felhívni a figyelmet Maróthi felvilágosult nevelési elveire. Hosszú évekig külföldön, a bázeli, utrechti, zürichi, groningeni egyetemeken tanult. 1738-ban hazatérve, a Kollégium négy professzori állása közül a természettudomány, mennyiségtan, történelem és latin irodalom tanítására szervezett tanszéket foglalta el. A 18. század első felében a Kollégium mindenképpen nehéz helyzetben volt. A protestáns oktatást elnyomni igyekező kormányzat még abban is akadályozta az egyébként is elszegényedő várost, hogy az eddigi módon, közvetlenül támogassa iskoláját. Maróthi hazaérkezésekor igen alacsony szinten állott a Kollégiumban az oktatás.

Maróthi pár év alatt lényegesen emeli a kollégiumi oktatás színvonalát. Ebben a munkájában legnagyobb segítsége Domokos Márton (kb. 1700–1764), Debrecen nagyműveltségű, Halléban tanult főbírója. Maróthi és Domokos az akkor Európa-szerte diadalra jutó komplex új áramlatot, a felvilágosodást hozzák Debrecenbe. Ők itt első jelentős követei a svájci és holland városokban divatos, Locke-ra és a holland kísérleti fizikusokra támaszkodó empirizmusnak és a Christian Wolffra (1679–1754) hivatkozó, a felvilágosodás mintaállamából, Poroszországból terjedő leibnizi racionalizmusnak. Nagyon jellemző ebből a szempontból Maróthi könyvtára, melyben megtalálhatók: Newton, Galilei, Jacob Bernoulli, Nicolaus Cusanus, L'Hospital, Pieter van Musschenbroek, s'Gravesande és Christian Wolff műve.

Ez a szellem hatja át Hatvani István (1718–1786) 1757-ben megjelent művét, az *Introductio ad principia philosophiae solidioris*t is. Ebben a könyvben Hatvani a rábízott fiatal lelkeket akarja beoltani az egyre jobban terjedő „naturalizmus", „szkepticizmus" és „atheizmus" ellen. Az „igazság" keresésének elvi alapjai izgatják, de a felvilágosodásra jellemző racionális, hasznossági szempontokat nem téveszti szem elől. Így az „igazság" keresésének elvi alapjai izgatják, de a felvilágosodásra jellemző racionális, hasznossági szempontokat nem téveszti szem elől. Így az „igazság" egyik megismerési formájaként bevezetett valószínűség-számítást – Hatvani Bázelben a valószínűség-számítás egyik megalapítójának, Daniel Bernoullinak (1700–1782) volt a tanítványa – Debrecen gyermekhalandósági statisztikájának az összeállítására és kiértékelésére használja. Megállapítja, hogy a nyugatihoz képest igen magas debreceni gyermekhalandóság 3/4–4/5 részben a csecsemőkori sorvadás rovására írható, s okát a szülések nem kielégítő levezetésében ismeri fel.

Hatvani élete vége felé kezd kiveszni a Kollégiumból a régi Debrecen kereskedelme és a felvilágosodás által inspirált gyakorlatias, természettudományok és matematika felé tájékozódó szellem. A Kollégium egyházi vezetői éles ellentétbe kerülnek a felvilágosodás haladó, hasznossági elveit valló városi vezetőséggel. Bár a század végén késhegyig kiélesedő harcban látszatra az utóbbi győz, a Kollégium autonómiájára hivatkozva azonban egyre inkább bezárkózik a maga latin nyelvű, teológiai-filozófiai jellegű, a természettudományoktól és matematikától egyre jobban elzárkózó maradi nevelési rendszerébe. A továbbiakban csak a latin nyelvvel belsőleg összeszövődött botanika virágzik a természettudományok közül a főiskolán. Nagyon jellemző, hogy a 19. század közepe táján Kerekes Ferenc, a matematikát is előadó professzor hasonló spekulációkkal próbálja tisztázni az infinitezimális számítás alapkérdéseit, mint amilyenekkel már a 14. századi párizsi és oxfordi egyetemek skolasztikusai küzdöttek.

A matematikai-természettudományos oktatás ekkorra a nagyszombati, ill. az ennek utódját képező budai, majd pesti egyetemen talál valamiféle otthonra. A nagyszombati egyetemet Pázmány Péter (1570–1637) alapította 1635-ben. Mint a debreceni Kollégium, kezdeti éveiben ez is csaknem kizárólag a hitélet erősítésére szolgált. A matematikának jóformán semmi szerep sem jutott abban a tantervben, ami az egyetemen tanító jezsuita rend nevelési elveit Európa-szerte megszabta. Az egyetem tanárait, mint a jezsuita intézetekben tanító tanárokat általában, gyakran helyezték át, s ezek váltakozva tanítottak Bécs, Nagyszombat, Grác, Kolozsvár, Kassa stb. jezsuita egyetemein, ill. középiskoláiban. Így az anyag, amit előadásaikban és könyveikben nyújtanak, nem a helyi, gyakorlati szükségletekhez alkalmazkodik, mint a debreceni Kollégiumban, hanem kisebb-nagyobb késésekkel a nemzetközi irányokhoz csatlakozik.

Az első, aki rendszeresen adott elő matematikát a nagyszombati egyetemen, Berzevitzi Henrik (1652–1713) volt. 1682-ben vagy 1687-ben egy aritmetikát is kiadott, de ez nem maradt fenn. 1694-ben és 1737-ben egy-egy szigorúan külföldi példák után készült latin nyelvű trigonometria jelenik meg a nagyszombati egyetemi jezsuitától, 1738-ban pedig az első algebra Magyarországon. Az utóbbi szerzője, Lipsicz Mihály (1703–1765) a kolozsvári, kassai, nagyszombati jezsuita intézetekben tanított.

Könyve, az *Algebra sive analysis speciosa…* (Kassa, 1738) világos előadásban ismerteti az algebrai műveleteket, az egyenletek megoldását másodfokúig, foglalkozik a számtani és mértani haladványokkal. A könyv a kor egyszerűbb nyugati algebra tankönyveinek anyagát adja. Az is mutatja, mennyire kevéssé ismert ez idő tájt nálunk az algebra, hogy a felhozott példákat a betűkön kívül mindig valamilyen konkrét pénz- vagy mértékegységekben kifejezett számokkal is illusztrálja. Az egyes műveletek tárgyalása után mindegyikből „axiómákat és általános elveket” von le, amik azonban nem egyebek a tárgyalt eljárás pontokba szedett szabályainál.

Lipsicz könyvével azért foglalkoztunk kissé bővebben, mert alaptípusát jelenti az utána elég nagy számban megjelenő, egyre jobbá váló, jezsuiták által írt algebrának. 1753-ban újból megjelent egy Kassán, rá két évre egy másik Kolozsvárott. Az utóbbit, aminek a címe *Elementa arithmeticae numericae et literalis seu algebrae* (Kolozsvár, 1755), Hell Miksa (1720–1792) írta kolozsvári akadémiai tanár korában. Hell Miksa nemsokára világhírre tett szert, mint a bécsi csillagvizsgáló igazgatója, s vezetője volt a Vénusznak a Nap előtti átvonulását vizsgáló expedíciónak 1769-ben Vardő szigetén. Könyve a másodfokú egyenletek tárgyalásáig jut el, ismerteti a számtani és mértani arányokat a számtani haladványt és a hármasszabályt. Kevés példát ad, inkább az elvi kidolgozásra, a pontos definíciókra fekteti a hangsúlyt.

Igen nagy haladást jelent ezekhez az elemi algebrakönyvekhez képest Kerekgedei Makó Pál (1724–1793) algebrája, amelyik a Bécsben 1770-ben megjelent *De artihmeticis et geometricis aequtionum resolutionibus libri duo* (Az aritmetikai és geometriai egyenletek megoldásáról szóló két könyv) című művének első könyve. Ismerteti az egyenletek megoldását egészen a negyedfokúig, az utóbbi megoldásnál Euler módszerét adja. Részletesen tárgyalja Descartes jelszabályát, a gyökök különféle tulajdonságait, a többszörös gyökök elméletét. Makó könyve nyomán készült – sok helyen szó szerint átvételekkel – Martinovics Ignác (1755–1796) algebrakönyve, a *Theoria generalis aeqvationum omnium* *gradum novis illustrata formulis ac iuxta principia sublimioris calculi finitorum…* (Buda, 1780). (Magasabb fokú egyenletek általános elmélete új formulákkal magyarázva és a felsőbb véges számítások ezzel összefüggő elvei…) és Horváth János (1732–1799) nagyszombati, majd budai matematika-fizika professzor *Elementa matheseos…* (Nagyszombat, 1772) c. könyvének algebrai része is.

Ezek az algebrák, különösen Makó és Martinovics könyve mutatják, hogy a Lipsicz algebrája óta eltelt fél évszázad alatt a magyar matematikai műveltség – természetesen csak csúcsaiban – ezen a nagyon fontos területen, amelyik Newton *Arithmetica universalis*ával kezdődően az újkori matematika egyik legjelentősebb ágává vált, a 18. század végére felzárkózott Európához. Kerekgedei Makó Pál az első európai értelemben vett magyar matematikus. Ő már főfoglalkozásként űzi a matematikát, tankönyvei és kézikönyvei európai színvonalon állanak. A nagyszombati, majd a bécsi és budai egyetemeken tanított, s nagy szerepe volt a bécsi matematikai élet 18. század végi fellendítésében.

A bécsi egyetemen, akárcsak a mintáját követő nagyszombatin, a 18. század közepén siralmas helyzetben volt a matematika és a természettudományok oktatása. A jezsuita rend tanítói működését még mindig a már réges-régen elavult, 1599-es *Ratio Studiorum* szabta meg, amelyik mér eleve is ellenséges volt a matematikai oktatással szemben. Mária Terézia udvari orvosa és fő oktatásügyi tanácsosa, a Hollandiából Bécsbe hívott Gerard van Swieten (1700–1772) szívós munkával – 1745 és 1753 között – megreformálta a bécsi egyetemet. Amikor azonban az új tantervet a nagyszombati egyetemre is rá akarta kényszeríteni, a jezsuita rend makacs, évtizedekig tartó ellenállásába ütközött. S mikor a rend 1773-ban bekövetkezett feloszlatása után a nagyszombati egyetem is rákényszerül a felvilágosodás szellemének megfelelő, gyakorlati, természettudományos és matematikai tárgyak intenzívebb oktatására, az ezek tanítására kijelölt tanárok egyetlen használható munkát sem találnak az egyetem könyvtárában előadásaikhoz. Még Newton és Euler alapvető művei is hiányoztak. A felsőbb matézis tanára, Mitterpacher József pl. így ír 1775 végén tett jelentésében: „Matematikai taneszközöknek annyira híjával vagyok, hogy az egész múlt esztendőn keresztül körző és vonalzó nélkül kellett előadásaimat megtartanom.”[5]

A bécsi egyetem színvonala ekkor már jóval magasabb volt. Éppen Makó Pál tankönyvei és kézikönyvei mutatják ezt legszebben. Differenciál- és integrálszámítást tárgyaló kétkötetes kézikönyve, a *Calculi differentialis et integralis institutio…* (Bécs, 1768) minden tekintetben a kor színvonalán álló, világos, jól érthető és az alkalmazásokat részletességgel

[5] Idézi Fináczy Ernő: A magyarországi közoktatás története Mária Terézia korában. 2. köt. Bp., 1902. MTA. p. 125.

tárgyaló mű. S ha az infinitezimális számítás megalapozásában a legcsekélyebb kritika nélkül bánik a különböző rendű „végtelen kicsiny” mennyiségekkel, ez az eljárás mindenben megfelel a kor elsősorban alkalmazásokra beállított, a módszer alapelveivel nem sokat törődő irányzatának. Így jártak el a kor legnagyobb matematikusai is, Makó csak őket követi, mégpedig lépést tartva a kor legújabb irodalmával.

A jezsuita rend feloszlatása (1773) után Makó tevékeny részt vett a Habsburg-birodalom oktatásügyét a felvilágosodás szellemében szabályozó *Ratio Educationis* (1777) előkészítésében. És mikor a nagyszombati egyetem 1777-ben Budára költözik, Mária Terézia rábízta a bölcsészeti kar igazgatását.

Az egyetemnek Budára, majd II. József alatt Pestre való költözésével új fázis kezdődött a magyar matematikai élet történetében. Ettől kezdve három tanszék látja el rendszeresen a matematika oktatását. Azt gondolhatnánk, hogy a 18. század alatt átvett alapokon végre Magyarországon is megindulhat az önálló matematikai kutatás. Nem ez történt. Sőt lassan még az oktatás szintje is messze az alá süllyed, amit Makó és Martinovics könyvei a maguk korában fémjeleztek. A századforduló két híres matematikaprofesszorának, a felsőbb matézis tanszékét betöltő Pasquich Jánosnak (1753–1829) és Dugonics Andrásnak (1740–1818), az elemi matézis professzorának a munkásságát összehasonlítva, érthetjük talán meg legjobban, mi történt a 18. és 19. század fordulóján, ami miatt a magyar matematikai élet még közel egy évszázadig nem tudott rendszeressé és önállóvá válni.

Pasquich munkája szorosan kapcsolódik a nagyszombati jezsuita matematikusok nemzetközi és elméleti jellegű munkáihoz. Differenciál- és integrálszámítást tárgyaló műve, az *Elementa analyseos et geometriae sublimioris ex evidentissimis notionibus principiisque deducta* (Leipzig, 1799) a Makó Páléhoz fogható, s a legjobb nyugati művek alapján készült kompiláció. Pasquich könyvén már látszik, hogy az infinitezimális számítás időközben egyre inkább az alapok kritikája felé fordul. Bár még ő is ugyanolyan gondatlanul bánik a különböző „végtelen kicsiny mennyiségekkel”, mint Makó és a legtöbb kortárs-matematikus Európa-szerte, mégis az egzakt görög kimeríthetetlenségi módszerhez visszanyúlva megkísérli biztosabb alapokra helyezni az infinitezimális számítást. De ennél a Nyugaton már a 17. század közepén felmerült ötletnél nem jut tovább. Könyvének német változata is megjelent: *Unterricht in der Differential- und Integralrechnung nebst Anwendung auf die gebräuchlichsten krummen Linien* (Leipzig, 1791), ami gyakorlatibb jellegű, és kihagyja a „határelmélettel” való próbálkozást. Pasquich európai hírű matematikus és csillagász volt, akinek a működését pl. Abraham Gotthelf Kästner (1719–1800), Göttingen maga korában híres matematika professzora is ismerte és nagyra becsülte.

Egészen más Dugonics András munkássága, ő piarista szerzetes volt, s könyve a jezsuiták elméleti-nemzetközi jellegű munkáival ellentétben a piarista rend prakticista-nemzeti szemléletű nevelési elveit tükrözi. Már a rend alapítója, kalazanci Szent József különös gondjaiba ajánlotta a rend tagjainak a matematika tanulmányozását. Newton és Wolf tanai hamar elterjednek közöttük, tankönyveikben gyakran hivatkoznak rájuk. Magyarországon a 18. század közepétől kezdve a jezsuiták iránti rokonszenv csökkenésével párhuzamosan nő a felvilágosodás elveit képviselő piaristák befolyása. 1766-ban már 22 intézetük van az országban. Még inkább fokozta népszerűségüket, hogy a 18. század folyamán, szemben a jezsuiták internacionalizmusával, a piarista rend teljesen nemzeti-magyar jelleget ölt.

Ez a szellem hatja át Dugonics könyveit is. *A tudákosságnak első könyve, mellyben foglaltatik a bető-vetés (algebra)* (Pest, 1784) az első magyar nyelvű algebra tankönyv, *A tudákosságnak második könyve, mellyben foglaltatik a föld-mérés (geometria)* (Pest, 1784) az első magyar nyelvű geometria tankönyv. 1789-ben másodszor is kiadták a *Tudákosság*ot, bővítve egy-egy könyvvel, melyek a trigonometriát, ill. a kúpszeleteket tárgyalják.

A *Tudákosság* semmiképpen sem tükrözi a matematika korabeli állását. Különösen az algebrai részben szembetűnő ez a lemaradás, pl. Makó vagy Martinovics algebrájával összehasonlítva. Dugonics nagyon sok feladatot hoz és old meg, de ezeket nem válogatja meg pl. Maróthi gyakorlati és pedagógiai érzékével. Talán tréfának tűnik, de az éppen akkor egyre inkább „jogász-nemzetté” váló korabeli Magyarországra nincs minden jellemző erő nélkül, ha idézzük egyik feladatát:

> „Három ifjakat (*x, y, z*) fogtak meg tolvajok gyanánt: I-szer: Az elsőnek tolvajságát a második két-annyival öszve-adván, tett 90-aranyat. II-szor: Az elsőjétől el-vévén a harmadiknak három-annyiát, a maradék egyenlő 60 arannyal. III-szor: A másodikéhoz adván a harmadikét, tett 10-aranyat. A legnagyobb tolvajt fel-akasztták; Az utána valót meg-botozták, egy közülök szárazon el-mehetett. Kerestetik kit felejtettek-fent a fán? kit botoztak meg? ki ment el szárazon?”[6]

Dugonics könyvének Makó Pál, Martinovics és Pasquich műveivel való összehasonlítása mutatja legszebben, milyen óriási űr tátongott a latin nyelven írt, nemzetközi olvasótáborhoz forduló művek és a magyarul, itthoniak számára szánt könyvek színvonala között. Az előbbiek, ha Budán vagy Pesten éltek is, voltaképpen Bécsben voltak otthon. Az ország

[6] Dugonics András: A tudákosságnak első könyve, mellyben foglaltatik a bető-vetés (algebra). Pest, 1784. pp. 171–172.

egészen vékony, valóban művelt rétege teljesen az osztrák-német civilizáció normái szerint élt és tájékozódott. Az egész Monarchiában Bécs volt az egyetlen hely, ahol komoly szellemi élet volt. „Erőre kap – írja a 18–19. század fordulójáról Fináczy – a német–magyar gondolkozás, mely csekély megszakításokkal a 19. század harmadik évtizedéig uralkodott. E nemzedék neve magyar, hivatalos nyelve latin, köntöse és családi élete, házi nyelve, olvasmánya, észjárása német.”[7]

Ezzel az igen vékony értelmiségi és kereskedő réteggel szemben állottak a köznemesség tömegei. A 18. század vége, a 19. század eleje a magyar köznemesség számbeli és életszínvonalbeli emelkedésének a periódusa. II. József összeírásában kb. 330 ezer nemes szerepel, 1839-ben már 680 ezer. Nyugaton ebben a korban mindenütt gyarapodik a polgárság és átveszi a vezetést, nálunk a nemesség a növekvő osztály. A polgárságnak megfelelő iparos, kereskedő, mérnök, pénzember foglalkozások nem alakulnak ki. A városi ipar kifejlődését akadályozzák a vármegyei rendszabályok és a céhek továbbélése, városaink nagy mezővárosok maradnak. Amikor Magyarországon a városok összlakossága mindössze 400 ezer fő, akkor Bécsnek egymagában 333 ezer lakosa van. Magyarországon a vezetést mindenütt a középnemesség hangadó vármegyei vezetői vették át. Ennek a rétegnek a kiképzését a második, 1806-os *Ratio Educationis* szabályozta. Ebből kimaradtak a Mária Terézia-féle rendelet felvilágosodásra jellemző természettudományi-matematikai tárgyai, a hangsúly a latin nyelven és a nemzeti öntudat nevelésén volt. A rendi nacionalizmus a nemzeti dicsőség tévképzetébe ringatva magát egyre jobban elszigetelte Magyarországot Nyugat-Európa rohamléptekben haladó tudományos-technikai műveltségétől, s önelégült kulturálatlanságában azt is lerombolja, amit a nyugati tájékozódású kompilátorok felépítenek.

Ebben az idegen, köznemesi légkörben a pesti egyetem voltaképpen semmi egyéb, mint a bécsi egyetem keletre helyezett fiókintézete. Gyorsan követi mindenben a bécsi egyetem változásait és szabályait. Átveszi a bécsi egyetem 1824-ben kiadott tervét is, amelyik az egyre jobban tért hódító reakció és neoklasszicizmus légkörében a lehető legnagyobb mértékben kikapcsolja az oktatásból a matematikai és természettudományos tárgyakat. A pesti egyetemen az oktatás szintje még elavultabb lesz, mint a nagyszombatin volt a jezsuiták korában. Petzval Ottó (1809–1883) tölti be a felső mennyiségtan tanszékét, Nyugat most bekövetkező nagy matematikai fellendüléséhez képest sokkal nagyobb elmaradást jelentett, mint Kerekgedei Makó Pál a maga korához képest. A Magyar Tudós Társaság (a Magyar Tudományos Akadémia elődje) matematikus tagjait elsősorban a magyar matematikai műnyelv megteremtése érdekli, Dugonics programjának a folytatásaként. 1834-ben valóban kiadtak

7 Fináczy Ernő id. műve 1. köt. p. 343.

egy *Mathematikai Műszótár*t, ami tartalmaz néhány azóta általánossá vált elnevezést. De a nyelvalkotás nem pótolhatta a művekét, s a helyzetre nagyon jellemzőek Kemény Zsigmond 1853-ban leírt sorai: „…a ki kenyértudományra szánja magát, és szorgalma által remél kényelmet, vagyonosságot, s független létezést, józan ésszel nem csünghet azon csal-álmon, miként vágyait, idegen irodalom segélye nélkül, csak meg is közelíthetné. Kétségtelen: hogy alig van a tudományoknak olyan ága, amely nálunk európai színvonalon állana, s minden haladásaiban, minden foglalásaiban s kifejlődésének minden ösvényein, a magyar irodalom által kísértetnék. Arról pedig szó sincs, hogy indítványozók, úttörők lennének valahol, és volna tudomány, mely új korszakát nekünk köszönhetné.”[8] Pedig akkor már harminc év óta volt olyan tudomány, amelyik új korszakát nekünk is köszönhette.

Erdélyben nem alakult ki még annyira zavartalan és többé-kevésbé folyamatos oktatási tradíció sem, mint Nagyszombaton vagy Debrecenben. Török dúlás, elkeseredett felekezeti harcok, Habsburg elnyomás szakította meg minduntalan az erdélyi iskolák működését, s ilyen körülmények között azok sokkal nagyobb mértékben szorultak fejedelmi-főúri támogatásra, mint a nagyszombati egyetem vagy a debreceni kollégium. Jól ismert Apáczai Csere János (1625–1659) tragédiája, akit presbiteriánus és kartéziánus elvei miatt űzött el a gyulafehérvári főiskoláról II. Rákóczi György. Csakhamar az egész főiskola menekülni kényszerül a tatárdúlás elől Nagyenyedre, ahol aztán már csak középiskolai szinten folytatja működését, romos épületébe pedig később a Sárospatakról elűzött Kollégiumot telepíti Apafi Mihály, s az iskola 1716-ig itt működik, amikor Steinville zsoldosai elűzik, s rövid bolyongás után Marosvásárhelyen köt ki.

Ezeknek az erdélyi kollégiumoknak a nevelési rendszeréről nem sok jót lehet mondani. A nagyenyedi elavult pedagógiájáról Bolyai Farkas feljegyzései kellő képet adnak, később marosvásárhelyi küzdelmei pedig leleplezik Erdély, másik „kulturális centrumát”. Az erdélyi főurak fiai nem is itt szerezték műveltségüket: egy-egy szegény diáktársuk kíséretében, aki félig szolga, félig barátként ment velük, bejárták Nyugat nagy egyetemeit. Így jutott el például Teleki Sámuel gróf kísérőjeként Zabolai Kováts József (1732–1795), a nagyenyedi kollégium későbbi tanára, urával Utrecht, Leyden, Párizs egyetemeire, ahol is a Bernoulliaktól, Clairaut-tól, Lalande-tól sajátítja el az új matematikai-fizikai tudomány alapjait. A későbbi koronaőr, Teleki József gróf pedig Daniel Bernoulli magántanítványa volt Bázelban, s párizsi tartózkodása alatt bejáratos volt Clairaut házába. Ennek a két Telekinek a fiait nevelte Sipos Pál (1759–1816), aki a Telekiek könyvtárában kedveli, s tanulja meg a matematikát. Ő az első

8 Kemény Zsigmond: „Élet és irodalom” (1853). In: Kemény Zsigmond: Történelmi és irodalmi tanulmányok. 2. köt. Bp., 1907. Franklin. pp. 287–288.

magyar matematikus, aki önálló felfedezéssel gazdagította tudományát. Sipos egy transzcendens görbe segítségével 1796-ban igen jó közelítő módszert adott az ellipszis ívhosszának a meghatározására. Értekezését a Berlini Akadémia adta ki, német nyelven, de a dolgozat inkább a francia geométerek ötletes szerkesztéseinek a hatását mutatja, akiket Sipos a Telekieknél tanulmányozott.

Kemény Simon báró Simon fiának a nevelőjeként került ki a fiatal Bolyai Farkas (1775–1856) Göttingenbe, 1796 őszén. Itt ismerkedett meg a csillagászat professzorának, Karl Felix Seyffernek (1776–1822) a házában Gauss-szal, akivel életre szóló barátságot vél kötni.

Göttingenből hazatérve anyagi gondok és a megfelelő baráti-szakmai környezet teljes hiánya teszik egyre nehezebbé életét. A Gauss-szal váltott levelezés ritkul, évtizedekre, majd végleg megszakad. Az erdélyi magányban zárt professzor óhatatlanul kimarad a nyugati és az orosz egyetemeken egyre pezsgőbbé váló matematikai életből. A sokoldalúan, de felületesen művelt arisztokrata társaságban való forgása – s talán saját hajlama is – polihisztorságra kényszeríti, s matematikai géniuszát ragyogó, de soha teljesen ki nem dolgozott ötletek sorába szórta szét.

Filozófus-érdeklődése a matematika alapjainak nagy kérdései felé vonzotta. Mindenütt, még a középiskolai tankönyvnek szánt *Az arithmetika elejé*ben (Marosvásárhely, 1830) is ezekről a problémákról ír, úgyhogy a könyv tankönyv helyett önálló, a folytonos mennyiségek elméletét és az analízis egzakt megalapozását célzó művé válik.

Definícióját adja pl. a határértéknek, vagy ahogy ő nevezi, „véghatárnak”, ami 1830-ban kitűnő teljesítmény. Már a Bolyaiak megismertetése és elismertetése érdekében oly sokat tett Paul Stäckel megjegyezte, hogy Bolyai Farkas a határérték pontos megfogalmazásában szinte megelőzte korát.[9]

Arra is Stäckel hívta fel a figyelmet, s már Bedőházi is utalt rá máig sokat forgatott Bolyai-monográfiájában,[10] hogy az a mód, ahogyan a *Tentamen*ben merev alakzatok speciális mozgatása alapján építi fel a geometriát, mindenben megfelel annak az eljárásnak, amit később Helmholtz és Überweg alkalmaznak az euklideszi geometria megalapozását tárgyaló

[9] Bolyai Farkas és Bolyai János geometriai vizsgálatai. Kiad., életrajz, magy. Stäckel Pál. Ford. Rados Ignácz. 1. rész. A két Boylai élete és művei. Bp., 1914. MTA. p. 34. – Érdemes figyelmesen átolvasni Bolyai határérték definícióját „Az aritmetika elejé”-ből: „Ha p bizonyos feltétel alatt származtathatóknak közneve, és $K = p + z$, s egyik p sem $= K$, de z-vel egyféle akármely k-ra nézve, van ollyan p, melynek K-ra való pótléka kisebb k-nál vagy $-k$-nál: akkor K a p véghatárának és pK határra menni mondatik az említett feltétel alatt. Jele lehet p K.” (pp. 29–30.). Mai szavakkal: Ha egy p_1, p_2, p_3,… sorozatban van olyan p_n, hogy egy rögzített K értékre $K - p_n = k$ tetszőlegesen kicsiny k-ra, akkor K a p_n sorozat határértéke. Vagy ahogy Cauchy körülírta: „Ha egy változónak tulajdonított egymás utáni értékek úgy közelítenek meg vég nélkül egy rögzített értéket, hogy tetszőlegesen kicsiny értékkel különböznek tőle, akkor ezt a rögzített értéket a többi határértékének nevezzük.”

[10] Bedőházi János: A két Bolyai. Élet és jellemrajz. Marosvásárhely, 1897. Marosvásárhelyi Ref. Koll. pp. 218–219.

munkáikban. Sőt első pillanatra azt lehetne hinni, hogy Bolyai Farkas Hilbert alapvető nagy gondolatát, a geometria valós számtartomány segítségével történő vizsgálatát is anticipálta. Ugyanis több helyen beszél a geometria és aritmetika rokonságáról, s a kölcsönös segítségről, amit egymásnak nyújthatnak.

Ez azonban csak látszat. Bolyai Farkas szigorúan elkülöníti egymástól a számok és a „mennyiségek" világát, s aritmetikán nem a számok, hanem bizonyos sajátos módon meghatározott „mennyiségek" tudományát érti. Bolyait még németországi tartózkodása alatt mélyen áthatotta Kant kritikai dogmatizmusa, amely az időben és az euklideszi térben szemléletünk változhatatlan formáit látta. Bolyai ennek megfelelően az aritmetikát a szemléletünkben egyenletesen folyó idő, a geometriát a minden bennelevőtől elvonatkoztatott űr tudományának tekinti. Ez a két folytonos mennyiség szerinte a két tudomány végső tárgya, s ez a felfogás lehetővé teszi, hogy „ha szükséges, az aritmetikában levezetett igazságokat alkalmazzuk" a geometriára is, „úgy hogy mind a két testvér fia, melyeknek gyökerei össze vannak nőve, egyik a másiknak segítségét nyújtva, a Tér és Idő örökkévaló házasságának fényes pályái között az ég rengeteg magasságában koronájával összeérjen".[11]

Bolyai Farkas sohasem jut el a 19. századi matematika egyik legnagyobb jelentőségű felfedezéséhez, az analízis aritmetizációjához. Hiába kerül a határérték fogalmának a megteremtésében olyan közel a folytonos mennyiségek aritmetizációjának a gondolatához, a diszkontinuus szám és az idő, illetve tér formájára leképezhető mennyiség között az ő szemében is, mint elődei s a valós szám fogalmának a megteremtéséig utódai szemében is, áthidalhatatlan űr tátong.

Részben éppen ezek a nem kellően tisztázott infinitezimális elképzelései teszik lehetővé, s egyben reménytelenné az euklideszi párhuzamossági axióma „bizonyítására" kigondolt, ún. „göttingai párhuzamosok elméletét", amit 1804 őszén küldött meg Gaussnak.

Ezt az utat, mintegy ifjúkori vázlata bizonyítja, Bolyai János is végigjárta. Kezdetben ő is megkísérelte bizonyítani a párhuzamossági axiómát vagy annak valamelyik egyenértékű megfelelőjét. Ez azonban nem vezetett volna el az új geometriákhoz.

> „Oda az utat – írja Kürschák József egy könnyen érthető, remek kis tanulmányában – Bolyai János csak akkor találta meg, mikor figyelmét a síkról a térre fordította. Itt mindenekelőtt feltűnt, hogy az euklideszi posztulátum nélkül is szerkeszthetünk olyan felületet, mely rendkívül emlékeztet az euklideszi síkra,

[11] Szemelvények a Tentamenből (1832). In: Bolyai Farkas és Bolyai János geometriai vizsgálatai. Kiad., életrajz, magy. Stäckel Pál. Ford. Rados Ignácz. Második rész. Szemelvények a két Bolyai műveiből. Bp., 1914. MTA. p. 114.

> csakhogy rajta az egyenes szerepe más vonalaknak jut. Ez a felület az a határgömb, melybe a gömb akkor megy át, ha a sugara minden határon túl növekedik. Rajta az egyeneseket határkörök pótolják. E felület két pontján keresztül egy és csak egy határkör húzható. Ezen a felületen, úgy mint Euklidesnél a síkon, vannak *hasonló háromszögek*, csakhogy nem egyenesekből, hanem határkörökből vannak alkotva. E felületen a közönséges síktrigonometria minden részletében érvényes, csakhogy egyenes vonalú háromszögek helyett határkörökből alkotott háromszögekre vonatkozik.
>
> Egy másik fontos eredmény az volt, hogy a szférikus trigonometria független az euklideszi posztulátumtól.
>
> A határgömb geometriája és ez a második eredmény többé nem volt bizonytalan tapogatózás a sötétségben. Ezekkel a kháosz már az euklideszi axióma nélkül is metrikus törvényeket követő kozmosszá alakult."[12]

Eddig a felismerésig már sok évvel azelőtt eljutott Gauss is. De Bolyai János nem állott meg itt. Teljes egészében, definitorikus-deduktív módon fel is építette az új, euklideszi párhuzamossági axiómától független geometriát. A párhuzamossági axiómán való spekuláció helyett konstruktív, mondhatnánk empirikus úton igazolta ettől az axiómától független geometriák létezésének a lehetőségét: definiált és felépített két másik geometriát, amelyek éppen olyan ellentmondásmentesek voltak, mint Euklidesé. Egyes bevezető tételek igazolása után ezt írja róluk:

> „A 13. és 14.§ eredményeinek birtokában nevezzük a geometriának azt a rendszerét, mely Euklides XI. axiómája igaz voltának feltevésén épül fel, ∑-nak, az ellenkező feltevésre építtetett pedig S-rendszernek.
>
> Mindazok a tételek, amelyeknél nem említjük kifejezetten, hogy vajon a ∑ vagy az S rendszerben érvényesek, abszolút igazak, vagyis állítjuk, hogy érvényesek, akár ∑, akár *S* teljesül a valóságban."[13]

Már Proklos felhívta rá a figyelmet az *Elemek* első könyvéhez írt kommentárjában, hogy a XI. axióma megfordítottját is fel lehetne használni posztulátumként. Bolyai azonban nem ezt tette. Legelőször is másként definiálja a párhuzamos egyeneseket, mint Euklides az *Elemek* 35.

---

[12] Kürschák József: Megemlékezés Bolyai Jánosról, új világa megteremtésének századik évfordulója alkalmából. = Stella csillagászati egyesület almanachja 1926-ra. Bp., 1925. pp. 101–115.

[13] Bolyai János: Appendix. Kárteszi Ferenc bevezetésével, megjegyzéseivel és kiegészítéseivel. Bp., 1952. Akadémiai. p. 85.

definíciójában (lásd 137. oldal). Felismeri és kiküszöböli az euklideszi definíciónak a geometria ellentmondásmentes felépítése szempontjából felesleges vonását, azt ti., hogy a párhuzamos egyenesek a „végtelenségig” meghosszabbítva sem metszik egymást. A „végtelenségig” feleslegesen került be ide, csak a nem-metszés a fontos a párhuzamosság definiálásához. Húzzunk egy $\vec{A}M$ félegyeneshez egy kívüle fekvő B pontból az $\vec{A}M$ -et C pontban metsző $\vec{B}C$ félegyenest. Ezt a $\vec{B}C$ egyenest forgatva, egyre távolabb metszi az $\vec{A}M$ egyenest, és egyszer csak eljutunk egy olyan helyzethez, amikor először nem metszi. Ezen a helyzeten túlhaladva, még tetszőlegesen sok olyan egyenes húzható, amelyik nem metszi $\vec{A}M$ -et, de ezek már nem számítanak, csak a legelső, amelyik már éppen nem metszi.

> „Világos – írja Bolyai az Appendix első §-ában –, hogy bármely az *AM* egyenesen kívülfekvő *B* pontból kiindul ilyen $\vec{B}N$, de csak egy és hogy
>
> $$BAM \sphericalangle + ABN \sphericalangle \ \leq 2R \text{ (azaz 180°).}$$
>
> Mert ha *BC*-t a *B* körül addig forgatjuk, míg
>
> $$BAM \sphericalangle + ABC \sphericalangle = 2R$$
>
> bekövetkezik, akkor közben valamikor először áll az a helyzet, hogy *BC* nem metszi *AM*-et, s ebben az állásban $\vec{B}N$ párhuzamos $\vec{A}M$ -el.”

Ennek az új párhuzamosság-definíciónak a létjogosultságát az igazolja, hogy belőle kiindulva fel lehet építeni geometriai tételek ellentmondásmentes rendszerét, az *S* rendszert. Azon tételek összessége pedig, amelyek mindenféle párhuzamosság-definíciótól függetlenül állanak, mint pl. az *Appendix* III. fejezetében tárgyalt gömbi trigonometria, adják a XI. axióma igaz vagy nem igaz voltának feltevésétől függetlenül, „abszolúte” igaz tételek geometriáját.

Láttuk már, milyen óriási volt a Bolyai–Lobacsevszkij-féle geometria jelentősége nemcsak a matematika, hanem az egész gondolkozás szempontjából. A matematika ezáltal kiszabadult a kanti filozófia szorítógyűrűjéből, s az a priori, szintetikus ítéletek önmagába zárt, steril tömegéből újra azzá a merész és minden új felé nyitott vállalkozássá vált, ami a 17. század nagy itáliai, francia, angol bölcselőinél volt.

Másutt a Bolyaiak körül virágzó matematikai iskolák alakulhattak volna, nálunk sem az egyetemen, sem a Magyar Tudós Társaságban nem volt a matematika haladására kedvező légkör. Az 1830-as évektől kezdve a felvilágosodás korának matematikai és természettudományos tárgyakat pártoló nevelési irányzatát egyre inkább felváltja az újhumanizmus, amely a klasszikus nyelvekre, a nemzeti irodalom és a történelem tanítására helyezi a hangsúlyt. A magyar irodalom ezekben az években teljesen felzárkózik a nagy nemzetek irodalma mellé, a matematikai műveltség ugyanakkor kétségbeejtően elmarad. Ennek a lemaradásnak az okát a technikai-kereskedelmi fejlődés gyengeségében kell keresni, amit viszont a matematikai-természettudományos oktatás hiányos volta még súlyosbított.

Vállas Antal (1809–1869), az egyetem egyik matematikaprofesszora jellemezte legvilágosabban ezt a helyzetet egy központi műegyetem felállítása érdekében kiadott röpiratában:

> „Hányadiknak közöttünk, ki egy kis pénzzel bír, van egyszersmind a mechanikáról, a chemiáról is egy kis fogalma? hányadiknak a fonás és szövés mesterségéről, mellyek a műiparban olly nagy szerepet játszanak? hányadiknak az üveg-, bőr-, papiroskészítésről, a festésről (Färberei) stb.? S ily általános fogalmak és alapismeretek nélkül, vajjon ki merne gyár felállításához fogni? Ki merne drága mozdonyokkal élni, ha azoknak hatásáról fogalma sincs, s ha ezt, a hatást t.i., a megszerzési s egyéb költségekkel össze nem hasonlíthatja?”[14]

Példaként a Francia Forradalomban a Monge által létrehozott *École Polytechnique*-ot hozza fel, amelyik egyaránt serkentőleg hatott a francia ipar és a francia matematika fejlődésére.

Vállas álma csak a kiegyezés után válik valósággá. Az ekkor létesített műszaki egyetem lesz nemcsak a magyar mérnökképzés, hanem a magyar matematikai életnek is legfontosabb centruma. A műegyetemen meginduló matematikai fejlődésre két nagy matematikus egyénisége nyomja rá a bélyegét: Hunyady Jenőé (1838–1889) és Kőnig Gyuláé (1849–1913).

Hunyady matematikai munkásságának a súlya a determinánsok elméletének a területére esik. Ezeknek a lineáris egyenletrendszereknek a megoldására használt számolási formalizmusoknak a segítségével Hunyady sikeresen old meg vagy egyszerűsít sok nehéz geometriai problémát. Ugyanis mindenütt, ahol az analitikus geometria segítségével a probléma megfelelő egyenletrendszerekbe önthető, a megoldásukban jelentős segítséget nyújtanak a determinánsok. Így Hunyady egyik első művelője lett annak a modern geometriai iránynak, amelyik a geometriát az algebrával kapcsolja össze.

Kőnig Gyula műegyetemi tanári működését (1874–1905) nehéz lenne túlbecsülni. Ő a modern, európai színvonalú matematikai oktatás és kutatás megteremtője Magyarországon. Orvosnak készült, disszertációját idegélettani tárgykörökből nyújtja be Helmholtznál, Heidelbergben. Valódi szellemi bölcsője azonban a berlini egyetem volt, amit Weierstrass és

[14] Vállas Antal: Egy felállítandó magyar központi műegyetemről. Pest, 1841. Hartleben. p. 12.

L. Kronecker előadásai ebben az időben a világ egyik matematikai centrumává tettek. Kőnigre különösen Kronecker volt nagy hatással. Szorosan Kronecker munkásságához kapcsolódik élete egyik fő műve, *Az algebrai mennyiségek általános elméletének alapvonalai* (Bp., 1903). A hatalmas, 600 oldalas könyv az absztrakt algebra és az algebrai számelmélet legjobb korabeli összefoglalása, s ezen túlmenően sok helyen megelőz olyan fogalmakat és megformulázásokat, amelyek csak később, a halmazelméleti módszerek általánossá válásával vonultak be erre a területre.[15]

Másik fontos könyve rendszeres egyetemi előadásaiból nőtt ki, az analízis felépítését tárgyalja (*Analízis. Bevezetés a mathematika rendszerébe.* I. Bp., 1887). Az alapok egzakt megismertetésére helyezi benne a hangsúlyt, s ez a tradíció tanítványain, Kürschák Józsefen és Rados Gusztávon, s az ő tanítványaikon keresztül szinte hagyománnyá lett a műegyetemen, s biztosította a magyar mérnökképzés magas színvonalát.

Kőnig hatása azonban nem korlátozódott a mérnökképzésre, mert a bölcsészkaron, tanárjelölteknek is adott elő. Ezekben az előadásaiban a matematika legkülönbözőbb területeire kalandozott. A számelmélet, az algebra, s az akkoriban születő nagy diszciplínák: a halmazelmélet és Hilbert axiomatikája egyaránt szerepeltek felolvasásain. Az utóbbi kettő magát Kőniget is egyre inkább vonzotta. Az 1904-es heidelbergi matematikus kongresszuson ő maga tapasztalhatta, milyen útvesztőket rejt a halmazelmélet. Egy nagysikerű előadásban bizonyítani vélte, hogy Cantor híres sejtésével ellentétben nem a kontinuum a legkisebb megszámlálhatatlan halmaz. A bizonyítás két tételt használt fel, az egyik annak a véges számok körében triviális tételnek volt az általánosítása végtelen számosságok esetére, hogy ha két számhoz hozzáadunk egy-egy számot, s összeszorozzuk őket, az így keletkező szorzat nagyobb lesz, mint az eredeti két szám összege:

$$(a + 1)\,(b + 1) \;>\; a + b.$$

---

15 Az algebrai számelmélet lényegét érdemes röviden ismertetni, mert kapcsolódik az ebben a könyvben elég részletesen tárgyalt kérdésekhez (lásd: pp. 92–94.). Már Gauss felvetette 1823-ban – a komplex számok vizsgálatakor – azt a kérdést, hogy vajon ugyanúgy érvényes-e a törzstényezőkre való bontás egyértelműségének a tétele ezekre is, mint a természetes számokra? A század közepén mutatta ki Kummer, hogy ez csak akkor érvényes a komplex számokra, ha megfelelő számokat csatolunk a komplex számok összességéhez. Ezeket az így hozzácsatolt számokat Kummer „ideális számoknak" nevezte, mert nem tulajdonított nekik „tényleges" létezést. A komplex számoknak ezt a „valódi" és „ideális" törzsfaktorokra való felbonthatósági elméletét azután Kronecker és Dedekind messzemenően általánosították az ún. algebrai számokra. Egész számú együtthatókkal rendelkező $x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$ algebrai egyenlet gyökeiből egész számú együtthatókkal származtatható számokat algebrai számoknak nevezzük. Ezek bizonyos számtartományt alkotnak, amit Dedekind „számtest"-nek nevezett. Ha az egyenlet utolsó tagjának az együtthatója $a_n = +\,1$, akkor $\dfrac{1}{x}$ is egész szám, ilyenkor x-et egységnek nevezik, s a számtestben foglalt ilyen egész számokat „Integritástartomány"-nak. Kőnig könyve inkább Kronecker szemléletéhez áll közel, de felhasználja – sokszor egyszerűsítve – Dedekind eredményeit is.

A másik tétel egy német matematikus, Bernstein eredménye volt. Az utóbbi tételről csakhamar kiderült, hogy az alkalmazott esetre nem áll. A hibát leleplező barátja, David Hilbert vigasztaló és elismerő levele mutatja, mennyire szívére vette Kőnig ezt a „kudarcot". Mint a kor nagy matematikusai közül annyian, ő is azon fáradozott, hogy rendet teremtsen a halmazelmélet által megzavart matematikai alapproblémák között.

Ehhez úgy látta, az szükséges, hogy magát a logikus gondolkozást helyezzük biztos, ellentmondásmentes alapokra. Erről a kérdésről szól utolsó könyve – amit teljesen nem is tudott befejezni, s fia, Kőnig Dénes adott ki –, a *Neue Grundlagen der Logik, Arithmetik und Mengenlehre* (Leipzig, 1914). A könyvben centrális szerepet játszik az ellentmondásmentességre felépített „gondolkozási tartomány" fogalma. A logika, az aritmetika és a halmazelmélet mind egy-egy ilyen axiomatikusan felépített „gondolkozási tartománnyal" reprezentálhatók, s az így körülírt, Kőnig által „Cantor-féle halmazoknak" nevezett halmazok mentesek a halmazelmélet zavaró paradoxonjaitól.

Kőnig munkásságával a matematika fejlődése Magyarországon is elérte végre a tartós, folyamatos haladás lehetőségét. Ebben a műegyetem mellett jelentős szerep jutott az 1872-ben alapított kolozsvári egyetemnek is. Itt a matematika professzorainak, Réthy Mórnak, Vályi Gyulának és az egy ideig szintén Kolozsváron dolgozó Schlesinger Lajosnak nagy szerepe volt Bolyai János munkásságának az elismertetése körül. Egyébként az új egyetem is követte az ország technikai-gazdasági fellendülését. Réthy egy, a legjobb hajócsavar és szélkerék technikai problémájának a megoldása során felmerült mozgásegyenlet vizsgálatát tűzte ki legtehetségesebb tanítványa, Vályi Gyula (1855–1913) disszertációs témájául. Ez volt az első, magyar egyetemen született matematikai doktori értekezés, ami jelentős önálló eredményeket hozott. Vályi később, mint a kolozsvári egyetem matematikaprofesszora, kitűnően felépített, szellemes előadásairól volt híres, amikben állandóan romló látása ellenére is tökéletesen lépést tartott kora szakirodalmával. Az első világháborút közvetlenül megelőző időkben kitűnő matematikusok működtek hosszabb-rövidebb ideig Kolozsvárott. Vályi mellett sokáig itt tanított Schlesiger Lajos (1864–1934), egy ideig Fejér Lipót, Riesz Frigyes és Haar Alfréd.

A kolozsvári matematikai élet virágzásának az első világháború vetett véget. 1920 után pedig országszerte megszűnt az a matematika fejlődése szempontjából kedvező légkör, ami 1914 előtt uralkodott az országban. A háborúban vesztette életét a felszínmérés elméletében úttörő jelentőségű Geőcze Zoárd (1873–1916) és az egyik legtöbbet ígérő matematikus, Zemplén Győző. Az ország vezetését átvevő szűklátókörű, nemesi-középosztálybeli hivatalnok arisztokrácia nevelési elveiben is a száz évvel azelőtti rendi-nemesi Magyarország neoklasszicista, matematika-természettudomány ellenes ideáihoz kapcsolódott.

Érthető, hogy ilyen körülmények között igen sok kitűnő matematikus – közöttük Riesz Marcell, Kármán Tódor, Szász Ottó, Szekeres György, Dienes Pál, Erdős Pál, Fekete Mihály, Neumann János, Pólya György, Szegő Gábor, Radó Tibor, Szilárd Leó – kényszerült külföldre, vagy nem jött haza külföldre tanulmányai után. Közülük sokat ma a világ legnagyobb matematikusai tartanak számon.

Az itthon-maradtakra igen gyakran a legkülönfélébb anyagi és szellemi nélkülözések vártak, majd amikor a Horthy-fasizmus logikus végkifejlődéseként a nyilas terrorba torkollik, üldöztetés és halál. Bauer Mihály (1874–1945) pl. már régen világhírű matematikus volt, s itthon még mindig csak a Műegyetemre beosztott középiskolai tanárságig vitte. Kőnig Dénest, akinek külföldön kiadott tankönyve máig népszerű, 1944-ben öngyilkosságba kergette a rendszer. Fiatal, sokat ígérő matematikusok egész sorát pusztította el a fasizmus, közöttük olyan tehetségeket, mint Schweitzer Miklós, Grünwald Géza, Lázár Dezső, Csillag Pál.

Hogy ez alatt a nehéz negyedszázad alatt a matematika európai szinten történő művelése nem veszett ki az országból, az leginkább talán Kürschák József (1864–1933), Haar Alfréd (1885–1933), Riesz Frigyes (1880–1956) és Fejér Lipót (1880–1959) munkájának köszönhető.

Kürschák a kor egyik legkitűnőbb matematikai pedagógusa volt. Mint mestere, Kőnig Gyula, ő is az önálló matematikai gondolkozásba való bevezetést tartotta a matematikai oktatás lényegének. Az ő kezdeményezésükre szervezték meg 1894-ben az évenként megrendezendő matematikai versenyeket. A feladatokat és megoldásokat Kürschák részletes jegyzetekkel látta el, amik a sok ötletességet igénylő, de elemi természetű feladatokat bekapcsolták a matematika egészébe. Kürschák az addigi versenyeket 1929-ben 'Matematikai versenytételek' (Szeged, 1929) címen kiadta, s 1963-ban angolra fordítva, Szegő Gábor előszavával, újra kiadták egy, a matematikai oktatás legsikerültebb műveit magába foglaló sorozatban (*Hungarian Problem Book based on the Eötvös Competition. I. 1894–1905 – II. 1906–1928.* New York, 1963). Ez a könyv a magyar matematika egyik legjobb tradícióját, a sokoldalú és változatos feladatok megoldása iránti készséget képviseli.

Ugyanez a szellem éltette a szintén 1894-ben megindított *Középiskolai Matematikai Lapok* gazdag feladatrovatát is, ami egyben a versenyek előkészítőjéül szolgált. Verseny és lapok így egy nagy pedagógiai egységet alkottak, ami biztosította a nehéz idők alatt is a fiatal matematikusok kiválogatását, s az önálló, alkotó matematikai munkára való nevelését. A két világháború között felnőtt matematikusgárdánk legkiválóbbjainak a nevei mind gyakran szerepelnek a feladatok díjnyertes megoldói között.

Amilyen fontos volt a szerepe versenynek és lapoknak a matematikai nevelés szempontjából, ugyanolyan nagy jelentősége volt az első európai nívójú, idegen nyelven kiadott magyar matematikai folyóiratnak, a szegedi *Acta Scientarum Mathematicarum*nak, a magyar matematikai eredmények világgal való megismertetése tekintetében. A szegedi *Actá*t, amelynek első kötete 1922–23-ban jelent meg, Haar Alfréd és Riesz Frigyes hozták létre. Az *Acta* tudományos profilját sokáig az ő érdeklődésük és tudományos aktivitásuk szabta meg.

Riesz Frigyes mesterei a valós függvénytan új szakaszát elindító francia iskola nagyjai: Baire, Borel, Lebesgue voltak. Az ő munkájukhoz csatlakozik sokoldalú életművének talán legfontosabb része. Egy általa, s tőle függetlenül Ernst Fischer által 1907-ben felfedezett fontos tétel segítségével felismerte, hogy bizonyos függvények megfelelő metrikával ellátott összessége és bizonyos végtelen sok koordinátával rendelkező vektorok megfelelő metrikával ellátott összessége között összeadást és skaláris szorzást tartó megfelelkezést lehet létesíteni. Így ezeknek a függvényeknek az összessége geometriai sajátságokkal látható el, úgy tekinthető, mint valamilyen különleges tér, egy ún. „függvénytér". Ennek az összefüggésnek a mintájára különféle, még bonyolultabb függvénytereket vezetett be, s mindezekben a függvényterekben megadta az ún. lineáris műveletek (az összegezésnek és szorzásnak megfelelő tulajdonsággal rendelkező műveletek) legáltalánosabb alakját. Ebben az irányban haladt tovább a lengyel matematikai iskola a két világháború között a lineáris operációk általános elméletének, s az ennek megfelelő ún. Banach-féle terek elméletének a megalkotása felé. A függvényterek elmélete, az ún. funkcionálanalízis ma már óriási, egy ember által áttekinthetetlen szakmává nőtt, s ennek a megteremtésében döntő szerepe volt Riesz Frigyesnek.

A két világháború közötti korszakban a magyar matematikai kutatás másik nagy centruma a budapesti tudományegyetemen alakul ki, Fejér Lipót körül. Fejér a berlini matematikai iskola neveltje volt, főleg H. A. Schwartz gyakorolt rá erős hatást. Schwartz Weierstrass tanítványa és tanszéki utóda volt, az analízis Weierstrass által megalapozott, szogorú, kritikai irányát folytatta tovább. H. A. Schwartz szemináriumában találkozott Fejér azzal a problémával, amely azután egész életére megszabta kutatásának irányát.

Már a 19. század '30-as éveiben bevezetett Dirichlet egy, bizonyos függvények szélső értékeinek a meghatározására szolgáló elvet. Ezt az elvet ő maga és nyomában B. Riemann számos matematikai és matematikai-fizikai feladat megoldásában igen nagy sikerrel alkalmazták. Azonban Weierstrass mindent átható kritikája feltárta, hogy az oly jól használható Dirichlet-elv téves alapokon nyugszik, s így az alkalmazásával nyert eredmények is mind kérdésessé váltak. C. Neumann azután a körre vonatkozó Dirichlet-probléma esetében kimutatta, hogy az elv bizonyos általános feltételek szerint sinus és cosinus függvények hatványainak a végtelen sorába, ún. Fourier-sorba fejthető folytonos függvények esetére szigorúan áll, ehhez csak az szükséges, hogy az illető folytonos függvény Fourier-sora mindenütt összetartó legyen. H. A. Schwartz azonban konstruált olyan mindenütt folytonos függvényt, aminek Fourier-sora bizonyos helyen széttartó, divergens.

Mármost Fejér arra a gondolatra jött rá, hogyha a Fourier-sor összegzésekor egy-egy rögzített tagig vett részletösszeg helyett ezen részletösszegek számtani közepeinek a sorozatára térünk át, akkor ez az egy-egy rögzített tagig vett részletösszegek számtani közepeiből alkotott sorozat ott is összetartó lesz, ahol maga a részletösszegekből alkotott sorozat, tehát a folytonos függvényt előállító Fourier-sor széttató.

Fejér ezen egyszerűnek tűnő, s mégis annyira fontos eredménye 1900-ban jelent meg a Francia Tudományos Akadémia Értesítőjében, s erről szól 1902-es, híres doktori disszertációja is. S ehhez csatlakozik csaknem egész további életműve. A továbbiakban kimutatta, hogy a Fourier-sorok részletösszegeinek számtani közepelésével könnyen lehet, sok szempontból jó tulajdonságú függvényeket konstruálni, s ezzel egyik úttörője lett egy, napjainkban rohamosan fejlődő, fontos matematikai diszciplínának, az ún. konstruktív függvénytannak.

Fejér jelentőségét, éppen úgy, mint Vályi Gyuláét, nem lehet egyedül megjelent dolgozatai alapján lemérni. Fejér is nagyon nagy hatású professzor volt, lelkes előadó, körülötte nőtt ki, s ágazott szerte a matematika különböző területei felé az első összefüggő, folytonos magyar matematikai iskola. Ugyanazt a szerepet tölti be ebben a tekintetben a magyar matematikában, mint Korányi Sándor a magyar orvostudományban.

Fejérnek és Riesznek igen nagy szerepe volt a fasizmus által csaknem teljesen összezúzott magyar matematikai élet feltámasztásában. A negyvenes évek végén valósággal élő szimbólumai voltak a magyar matematikának. Már keveset adtak elő, rövid, féléves kollégiumokat. Fejér a Fourier-sorokról, Riesz az integrálegyenletekről. Fejér elmaradhatatlan körgallérjával, hanyagul öltözve, Riesz elegánsan, csokornyakkendőben. Fejér csapongva vázolt nagy, szellemes s sokszor triviálisan egyszerűnek ható gondolatokat, amiknek a nehézsége csak akkor derült ki, ha az ember otthon, a jegyzetéből próbálta kibogozni a hallottak értelmét, Riesz mértéktartóan, a nehezebb helyeken könyvére hivatkozva rótta táblára kristálytiszta levezetéseit.

1946-ban – elsőként a magyar tudományos folyóiratok közül – újraindul az 1944-ben leállított szegedi *Acta*. 1947-ben a fasiszták által beszüntetett *Középiskolai Matematikai Lapok* kezdi meg újra működését, 1949-ben a nagy múltú *Matematikai és Fizikai Lapok* utódaként a *Matematikai Lapok*, majd az Akadémia idegen nyelvű *Actá*i. 1950-ben egy fiatal szegedi tudós, Szele Tibor (1918–1955) szerkesztésében Debrecenben is új matematikai lap születik a szegedi *Acta* mintájára, a *Publicationes Mathematicae*. A lap – szerkesztője érdeklődési és munkakörének megfelelően – elsősorban a modern algebra tárgykörébe tartozó dolgozatokat közölt, s csakhamar olyan nemzetközi hírnévre tett szert, hogy a szakma legkiválóbb szovjet és nyugati képviselői keresték fel közleményeikkel, s figyelték egyre nagyobb érdeklődéssel a „debreceni algebrai iskola" – ahogy a nagy szovjet matematikus, A. G. Kuros nevezte a Szele körül összegyűlt fiatalok kis csoportját – működését. (…)

LÁSZLÓ VEKERDI

Einige Lehrbücher ungarischer Mathematiker der Aufklärung

Wie überall, wo sie nur Boden fassen konnte, hat die Aufklärung auch in den Ländern des Hauses Habsburg zur üppigen, wenngleich mitunter verspäteten und gehemmten Entwicklung der naturphilosophischen und mathematischen Lehrbuchliteratur geführt. Professor Csaba Csapodi hat schon vor Jahrzehnten in einer bahnbrechender Arbeit (Századok Bd. 79–80, 1945–1946, S. 85–137) über die naturphilosophischen Lehrbücher einiger Professoren der Universität von Tyrnau gezeigt, wie diese „An der Grenze zweier Welten" als wesentliche Wegbreiter der Aufklärung in Ungarn gedient haben. Wohl haften dieser Literatur – im Vergleich zur Entwicklung in den westeuropäischen Ländern – die Merkmale einer Lehr- und Nachahmerperiode an, doch ist es vielleicht nicht ganz ohne Interesse, der Verbreitung des „Lichtes" der Mathematik in diesen Ländern näher nachzugehen. Die „mathematische Muse" ist nämlich auch hier einer der bedeutendsten Faktoren des komplexen Zivilisationsmusters der Aufklärung, das in diesen Ländern die spätere Entwicklung der Wissenschaften noch viel mehr mitbestimmt hatte, als in Westeuropa. In dieser Hinsicht ist die Bedeutung dieser Periode – des sogenannten Josephinismus – wohlbekannt; viel weniger ist jedoch die Rolle der Mathematik – der Mathematik als Lehrgegenstand, Zivilisationsideal und Inspirationsquelle – in dieser Entwicklung betrachtet worden. Die folgende Analyse einiger Stücke aus der reichen Fülle der Lehrbücher bezweckt von diesem mathematischen Hinterland etwas darzustellen.

***

Die in Nationalsprachen verfaßten Rechenbücher haben im 18. Jahrhundert schon eine lange Entwicklungsperiode hinter sich;[1] man kann jedoch eine reiche Nachblüte gerade in der Aufklärungszeit registrieren.[2] Auch die Rechenbücher in ungarischer Sprache hatten bereits im 18. Jh. eine lange Vorgeschichte,[3]

[1] Vgl. J. E. HOFMANN: *Geschichte der Mathematik* Bd. 1. Berlin, 1953 (= Sammlung Göschen Bd. 226), S. 90.

[2] Ebda Bd. 3. Berlin, 1957 (= Sammlung Göschen Bd. 882), S. 45.

[3] Vgl. HÁRS János: *A Debreceni Arithmetika. A legrégibb magyar matematikai munka teljes szövege, magyarázata, kritikája.* Sárospatak, 1938. (Textkritische Ausgabe des ältesten Rechenbuches in ungarischer Sprache von 1557.) – TÓTH Sándor: *Géresi István Aritmetikája.* Studia

* Forrás: Vekerdi, László: Einige Lehrbücher ungarischer Mathematiker der Aufklärung. In: Jubileumi csokor Csapodi Csaba tiszteletére. Tanulmányok. Szerk.: Rozsondai Marianne. Bp., 2002. Argumentum. pp. 351–368.

doch erst jetzt erscheint hier ein Rechenbuch, das in jeder Hinsicht den zeitgenössischen westeuropäischen Rechenbüchern gleichgestellt werden darf. Die *Arithmetica...*[4] von Georg Maróthi (1715–1744), Professor für Geschichte, Eloquenz und Mathematik an der kalvinistischen Hochschule zu Debrecen, ist in der ungarischen Geschitsschreibung mehrmals behandelt worden,[5] und wurde als ein Meisterwerk der Pädagogik vorgestellt. Eine solche Auffassung stimmt jedoch nicht in jeder Hinsicht,[6] das Buch – wie es sich aus dem Inhalt klar herausstellt – wendet sich in erster Linie den Kaufleuten zu, und wie einst z.B. Adam Rieses Rechenbuch, will ihre Geschäftsführung erleichtern und die rationalen, womöglich neuesten Methoden des Handels ihnen leicht zugänglich machen. Die zahlreichen, äußerst geschickt gewählten Beispiele sind diesem Zweck untergeordnet. Diese sind keine einfachen Illustrationen zu den Regeln,[7] in den Beispielen werden viel mehr Vorschriften, Rezepte und sogar selbständige „case studies" [Fallstudien] zum rationalen Handelsverfahren gegeben. Die Regeln selbst werden sehr oft durch praktische Hinweise erläutert. Z.B. im § 104 wird die *Regula Detri* oder *Regula Mercatorum* – nach einer kurzen Erklärung der von ihm gewählten ungarischen Benennung – folgendermaßen eingeführt: „Mann kann diese Regeln etwa in solchen Fällen benützen: So und so viel Pfund (oder Elle oder Stück) kann ich von einer Ware für so viel Geld kaufen; wieviel wird dann von derselben Ware eine gegebene Menge? *Oder*: So und so viel Stück (oder Pfund oder Elle) einer gegebener Ware kostet so viel;

Universitatis Babeş-Bolyai (Cluj), Sect. Math. Phys. Jg. 1962, H. 2, S. 45–61 und Jg. 1963, H. 2, S. 41–79. – SÁRKÖZI Pál: *Nagyszombati régi matematikusok.* A debreceni Tisza István Tudományos Társaság II. (orvos–természettudományi) osztályának munkái Jg. 1926, H. 4, S. 35–56.

[4] *Arithmetica, vagy számvetésnek mestersége, Mellyet írt, és közönséges Haszonra, főképen a'* Magyar Országon *elő-fordulható Dolgokra alkalmaztatni igyekezett Marothi György, D.P.* Debrecen, 1743.

[5] Vgl. z.B. LIGETI Béla: *Maróthi György 200 éves Arithmeticája (1743–1943).* A Cselekvés Iskolája Jg. 1943–44, H. 1–4, S. 11–27. – JAUSZ Béla: *Maróthi György.* Acta Universitatis Debreceniensis Jg. 1956, S. 31–62. – TÓTH Béla: *Maróthi György.* Debrecen, 1994, S. 171–181. – LIGETI Béla: *A magyar matematika története a XVIII. sz. végéig.* Budapest, 1953. – SZÉNÁSSY Barna: *Maróthi György.* Építünk Jg. 1952, H. 2, S. 52–60.

[6] Vor allem nicht in dem Sinne, daß das Buch für Schüler in den Volksschulen ausschließlich bestimmt gewesen sei. In der Mitte des 18. Jahrhunderts war die Situation in Ungarn in dieser Hinsicht gewiß nicht viel besser, als z.B. in England am Anfang des 18. Jahrhunderts. „Wenn Mathematik überhaupt zum Lehrplan gehört hat, dann höchstens das elementare Rechnen." Kaum konnte der Schüler anderes lernen, als „die vier Grundrechenarten, den direkten und umgekehrten Dreisatz, die Gesellschaftsrechnung (regula societatis) mit und ohne Berücksichtigung der Zeit, die Mischungsrechnung (regula alligationis), den falschen Ansatz (regula falsi) und einige andere Regeln dieser Art." C. J. SRIBA: *Studien zur Mathematik des John Wallis (1616–1703).* Wiesbaden, 1966 (=Schriftenreihe Boethius Bd. VI), S. 13.

[7] So läßt es sich verstehen, daß er im Vorwort die Beispiele eines früheren Rechenbuches, die meistens aus der Bibel geschöpft wurden, als unbefriedigend tadelt: „Die Heilige Schrift – schreibt er – soll nicht aus der Arithmetik erlernt werden." *Arithmetica* S. 3.

wie viele Stücke kann ich dann für eine gegebene Summe kaufen? *Oder…*"[8] und so geht es weiter, bis der Kaufmann oder der zukünftige Kaufmann fast von sich selbst zur generalen Regel gelangt, und dann von derselben her weiter in die verschiedenen und manchmal recht komplizierten Anwendungen eingeführt wird.

Das Buch ist aber nicht nur für den Kaufmann, sondern auch für dessen Lehrer und vielleicht noch mehr für den künftigen Volksschullehrer bestimmt. „Diejenigen die Kinder unterrichten – lesen wir im Vorwort – sollten ihre Lehrlinge so früh als möglich zur Arithmetik hinleiten. Ich kann sie aus eigener Erfahrung versichern, daß bereits fünf- oder sechsjährigen Kindern, falls sie einigermaßen Verstand besitzen, das Rechnen sehr gut beigebracht werden kann, wenn man sie bloß nicht schwer gerüstet angreift, sondern sanft, fast als ob es ein Spiel wäre, ihnen das Nötige zureicht. Man kann kaum überschätzen, wie nützlich die Arithmetik, und womöglich, die Geometrie zum Erweitern des kindlichen Wissens sein können; es kann dem Kind in dieser Weise am leichtesten angewöhnt werden, sich in allen Sachen auf sich selber zu stützen, ordentlich, und wie man sagt, genau zu sein, was doch für die Leute bei uns so sehr wichtig wäre."[9]

Die Arithmetik erscheint als Förderer dieser – vorwiegend kaufmännischen – Tugenden; Maróthis *Arithmetica* ist also – und eben das zeichnet sie in der großen Familie der Rechenbücher aus – ein wohl bescheidenes aber wichtiges Instrument in der großen Arbeit der „Erziehung des Menschengeschlechts". In diesem Sinne kann sie eben als eine „pädagogische" Leistung bezeichnet werden. So muß man auch die konsequente und äußerst glückliche Bestrebung des Verfassers betrachten, nämlich die Suche nach ungarischen Wörtern für die fremden Fachausdrücke: seine *Arithmetica* war ein Werkzeug, seine Mitbürger in die Reihen der zivilisierten bürgerlichen Nationen zu erheben.

Mit ihren 20 bis 30 Tausend Einwohnern war Debrecen in der Mitte des 18. Jahrhunderts die größte Stadt Ungarns. Im Mittelpunkt eines regen Agrargebietes war sie von einem Ring ziemlich großer Marktflecken umgeben.[10] Das

[8] Ebda S. 134.

[9] Ebda S. 7.

[10] In den Jahren 1784–87 hatte Debrecen für die Volkszählung von Joseph II. 30 064 Einwohner gemeldet. Dieselbe Volkszählung gibt für einige ihrer Nachbarstädte folgende Werte: Hajdúböszörmény 8492, Hajdúszoboszló 6231, Hajdúnánás 6165, Karcag 7176 Einwohner. Zur selben Zeit hatte Buda 23 919, Pest 20 704, Szeged 20 947, Miskolc 14 089 Einwohner. Vgl. MAKKAI László: *A magyar városfejlődés és városépítés történetének vázlata*. Budapest, 1963. Die Bevölkerungszahl ganz Ungarns war 9 275 832; Vgl. *Magyarország történeti demográfiája* Budapest, 1963, S. 171. – Wien hatte am Ende des 18. Jahrhunderts etwa 220 000 Einwohner, Prag 75 000, Graz und Brünn zwischen 20 und 30 000, Leipzig, Köln, Frankfurt, München, Augsburg, Nürnberg, Stuttgart zwischen 30 und 50 000 Einwohner. In der Schweiz hatte nur Genf mehr als 20 000 Einwohner, Basel, Zürich und Bern waren zwischen 10 und 20 000. Berlin hatte etwa 150 000, Dresden 62 000, Breslau 60, Königsberg 55, Hamburg 85 Tausend Einwohner. Vgl. R. MOLS S. J.: *Introduction à la démographie historique des villes d'Europe du XIV^{e} au XVIII^{e}*

Gebiet bildete nicht nur eine wirtschaftliche, sondern auch eine konfessionelle und ebenso eine sprachliche Einheit: in einem stark intoleranten, katholischen Reich und in einem vielsprachigen Land war hier fast jedermann Protestant, helvetischer Konfession, und die einzige Sprache der Bauern, Handwerker und Ungelehrten war die Ungarische. Das kulturelle Zentrum des Gebietes, Debrecen besaß einen großen Wirkungskreis: Prediger und Lehrer aus ihrem Collegium,[11] bzw. Bücher aus ihrer Druckerei gelangten zu fast allen ungarischen Gemeinden der reformierten Kirche. Die besten Studenten der Hochschule vervollständigten ihre Bildung regelmäßig an den großen Universitäten im protestantischen Ausland. Die entscheidende Bedeutung der Schule und der Druckerei war unter den Bürgern allgemein bekannt, und im 18. Jahrhundert waren schon viele von ihnen welterfahrene, vorzüglich gebildete Köpfe, von den zivilisatorischen und erzieherischen Ideen der Aufklärung durchdrungen[12] – so Stadtrichter Martin Domokos (1700?–1764), Gönner und Freund Maróthis, der noch an seinem Sterbebett die Sache des Collegiums am Herzen hatte, sowie sein Sohn und Nachfolger im Amt, Ludwig Domokos (1728–1803), der einen zähen und langen „Kulturkampf" gegen das uniformierende Unterrichtsprogramm von Kaiserin Maria Theresia und Joseph II. führte.[13]

Sehr bezeichnend für den Geist der Erziehung im Collegium ist die Protestschrift, die Ludwig Domokos und Professor Stephan Hatvani (1718–1786) im Jahre 1785 dem Kaiser überreicht haben. „Die Profanwissenschaften – behaupten sie – gehören zwar auch zum Literarischen der Schulen, aber die Religion kann ihrer nicht entbehren. Sie sind ihre Hülfsmittel, einige näher, andere entfernter. Einige stehen mit der Religion in einer sehr engen Verbindung. Nicht nur die Geschichte, nicht nur die natürliche Theologie, sondern die ganze theoretische und practische Philosophie. Die echte Logic, nicht die Sophisterey ist gewiß ein sehr nötiges und nützliches Instrument auch in der Religion, um das Wahre von dem Falschen unterscheiden zu können. Die natürliche Theologie beruht auf den Gründen, welche in den vorhergehenden Teilen der Meta-

---

siècle Bd. 2. Louvain, 1955, S. 512. Einige niederländische Städte hatten zur selben Zeit die folgenden Bevölkerungszahlen: Amsterdam 221 000, Rotterdam 53 212, den Haag 38 433, Utrecht 32 294, Leyden 30 955, Groningen 23 770, Haarlem 21 227, Dordrecht 18 014, Delft 14 099, Zwolle 12 220, Gouda 11 715; ebda S. 523.

[11] Diese Hochschule spielte seit der Mitte des 16. Jahrhunderts eine wichtige Rolle im ungarischen Geistesleben. Sie war eigentlich, gewissermaßen im mittelalterlichen Sinne des Wortes, ein *Universitas* der Schüler und Professoren. Vgl. NAGY Sándor: *A debreceni Kollégium mint egységes intézmény az egyetem kiválásáig*. Debrecen, 1940.

[12] MOLNÁR Ágnes: *Debreceni arcok a felvilágosodás századából*. Budapest, 1939.

[13] RÉVÉSZ Imre: *Bécs Debrecen ellen. Vázlatok Domokos Lajos (1728–1803) életéből és működéséből*. Budapest, 1966, S. 91–101. Diese grundlegende Arbeit des 1967 verstorbenen Historikers (mit seiner Monographie *Sinai Miklós és kora*. Budapest, 1959) zeigt in vollem Umfang die komplexe Problematik der Aufklärung in Ungarn und läßt es verstehen, wie diese allgemeineuropäische Richtung, anderswo so ein mächtiger Katalisator der bürgerlichen Entwicklung, hier nicht selten gerade hemmend auf dieselbe einwirkte.

physik gelegt wurden. Ja nicht nur die natürliche Theologie, sondern auch die philosophische Moral, das Naturrecht, die Politik (als ein Teil der Philosophie, von dem Wesen der Gesellschaft) stehen nicht nur in Verbindung mit der Religion, sondern ihre Hauptlehren und Wahrheiten, welche die Glückseligkeit des Menschen näher betreffen, machen einen Bestandteil der Religion aus. Denn die christliche Religion besteht nicht aus lauter offenbarten Wahrheiten, sondern auch aus solchen, die auch ohne alle unmittelbaren göttlichen Offenbarungen aus der Natur selbst, in welcher sie ihren Grund haben, durch die gesunde Vernunft erkannt werden müssen und folglich eigentlich zur Philosophie gehören, ob sie gleich einen wesentlichen Teil der Religion ausmachen."[14]

Hier finden wir natürlich den wohlbekannten Zusammenhang zwischen weltlichen- und Religionswissenschaften wieder, *via* „Natural Theology",[15] es ist aber zu beachten, daß hier die Profanwissenschaften wegen des Rechts der erst jüngst gesicherten Religionsfreiheit mit der Theologie in Zusammenhang gebracht werden, um ein von dem uniformierten Erziehungssystem des Reiches grundverschiedenes philosophisches-, wissenschaftliches- und Lebenskonzept retten zu können. Diese eigenartige, aus Debrecen hervorgegangene Richtung der Aufklärung läßt sich sehr gut heute noch in Hatvanis Buch *Introductio ad principia philosophiae solidioris* nachvollziehen. Das Buch ist im Jahre 1757 erschienen, und obwohl es ein ausgesprochenes Handbuch für die reiferen Studenten des Collegiums ist, kann es doch als eine repräsentative Zusammenfassung der Denkweise der gebildeten Bürger der größten ungarischen Stadt des 18. Jahrhunderts gelten. Die ungarische Geschichtschreibung hat das Buch von verschiedenen Seiten her ausführlich erörtert,[16] aber sein höchster Scharm steckt in seiner so verschiedenartige, schwere Gegenstände mit einer unübertrefflichen Leichtigkeit zusammenfassenden, über allen Schwierigkeiten hin-

[14] *Iratok a türelmi rendelet történetéhez.* Kiadta és magyarázó jegyzetekkel ellátta MÁLYUSZ Elemér. Budapest, 1940, S. 403–404.

[15] „On garderait un Dieu – schrieb Paul Hazard – mais si lointain, dilué, et pâle, qu'il ne gênerait plus la cité des hommes par sa présence, qu'il ne la troublerait plus par ses colères, qu'il ne l'offusquerait plus par ses gloires." P. HAZARD: *La pensée européenne au XVIII^{ème} siècle. De Montesquieu à Lessing.* Paris, 1946, S. 152. Allerdings war der Gott in verschiedenen Gebieten Europas verschieden stark „aufbewahrt", und es war noch die Zeit nicht ferne, wenn „Natural theology was the motivational basis of ... science". Vgl. L.T. WHITE, Jr.: *Science, Scientist, and Politics.* In: *Science and Society.* Selected essays ed. by A. VAVOULIS and A. W. COLVER. San Francisco, 1966, S. 69–75.

[16] Vgl. M. ZEMPLÉN Jolán: *A magyarországi fizika története a XVIII. században.* Budapest, 1964. S. 94–102. – JAKUCS István–BARNA Péter: *Hatvani István (1718–1786).* Fizikai Szemle *7* (1957) S. 3–9. – JAKUCS István–M. ZEMPLÉN Jolán: *Debrecen és a magyarországi fizika kezdetei.* Fizikai Szemle *12* (1962) S. 361–368. – SZÉNÁSSY Barna: *Hatvani István és debreceni kortársai.* Természettudományi Közlöny *95* (1964) S. 123–126. – SZÉNÁSSY Barna: *Hatvani István matematikai munkássága.* Alföld *6* (1955) H. 5, S. 76–79. – Für das Leben Hatvanis vgl. LÓSY-SCHMIDT Ede: *Hatvani István élete és művei.* I. rész. *Hatvani István élete és önéletrajza, az ördöngösségéről szárnyrakelt mondák.* Debrecen, 1931.

überschwebenden, eigentümlichen Eleganz, die uns an die Dichtkunst des Heimatgenossen Hatvanis, des etwas später wirkenden Debreciner Dichters Csokonai erinnert.

Diese Ordnung und Eleganz des Buches läßt sich gewissermaßen durch jene bedeutende Rolle erklären, die Hatvani der Mathematik zuweist. Die Mathematik ist für ihn nicht einfach eine der Wissenschaften, die Mathematik ist der Weg zur Wahrheit; genauer gesagt, einer bestimmten Wahrheit. Die Mathematik ist nämlich – um den Titel eines modernen Buches zu gebrauchen – „the man made Universe", der sich mit der Entdeckung von demonstrierbaren Wahrheiten beschäftigt. Eben die Auffindung der demonstrierbaren, „absolut sicheren" Wahrheiten macht den Gegenstand der Mathematik aus. „Dantur etiam certae regulae – schreibt er im § XXXIV – per quas intellectus dirigitur, in veritate latente inuestiganda, eruenda, denique inuenienda. Talis est *Algebra* et omnis *Analytica* Mathematicorum, et veritates ante incognitas in lucem proferunt, sicque fines scientiarum augent. Haec pars Philosophiae, quae regulas illas, intellectum dirigendi in veritate abscondita, explicat: *Ars inueniendi* dicitur. Ars inueniendi, est scientia latentem veritatem explicandi. *Analysis* Mathematica proinde, est methodus ope symbolarum, resoluendi Problemata Mathematica."[17]

Nun aber ist diese ars inveniendi nicht auf die Sachen selbst, sondern auf deren *Relationen* gerichtet. „Mathesis – schreibt er im § LXXIX – non res ipsas, prout illae sunt huius vel illius generis Entia examinat; nec quaerit, quid sit hoc objectum, haec materia, hoc corpus, aut quae eius natura sit? sed solum id examinat, quae nam relatio inter quantitates rerum quae augeri et minui possunt intercedat? §.XXXV. ita vt quantitas nulla possit intelligi, nisi cum alia conferatur, qualem ad se mutuo respectum habeant, § *eodem*. Iam vero vbi vna res cum alia comparate spectatur, vel vbi vna absque altera intelligi nequit, ibi est relatio. §.LXXII. Sed relationes rerum nihil aliud sunt, quam Ideae, et quidem tales, quae immediate percipiuntur in mente. §.LXXIV, LXXV. Consect.2. Vbicunque autem immediate percipiuntur res, ibi summam quae haberi potest cognitio ac certitudo adquiri potest, quae alias dicitur Mathematica. §.LXX. Vbi autem res aliqua, immediata perceptione nititur, illic etiam Idea rem exacte repraesentat. §.LXI, LXVIII. Sed Idea quae hoc modo se habet, dicitur vera. §.LIX. Palam est igitur, prorsus non esse mirum, si in Mathesi certissime possit reperiri verum."[18]

So ist die Mathematik überall, wo nur die quantitativen Relationen der Dinge eine Rolle spielen, für die Erkennung der Wahrheit unentbehrlich. Diese Relationen aber sind nicht, wie in der Mathematik selbst, in Form von ableitbaren Theoremen gegeben: sie müssen erst durch das Experiment erkannt werden. In dieser Hinsicht bringt das Buch eine Fülle von gut gewählten und überraschend frischen Beispielen; so z.B. unter anderem wird die wissenschaftliche Welt der

[17] Stephanus HATVANI: *Introductio ad principia philosophiae solidioris*. Debrecen, 1757, S. 53.
[18] Ebda S. 107.

Mitte des 18. Jahrhunderts so stark beschäftigende Bouguer – La Condamine Expedition[19] ausführlich behandelt. „Iisdem etiam Auctoribus accepi – fügt er in § XI. zur Beschreibung der genannten Expedition hinzu – directionem graui-um corporum, non esse vbique exacte perpendicularem ad horizontem: vti ad radicem maximi et altissimi montis *Chimborazo*, in regno Peruano, prope ad aequatorem. Pendulum enim, idem mons tam a parte boreâ, quam australi, ex situ suo verticali, sub angulo 7. vel octo minutorum secundorum ad se trahebat: vnde liquet corpora in se mutuo grauitare. Quam necesse est, vt etiam pendula, in vallibus ad latera montium posita, propter vim adtractionis, aliquantum de-flectantur, a linea recta ad superficiem telluris perpendiculari: et sic GRAVI-TAS CORPORVM nil aliud sit, quam effectus *adtractionis materiae illius*, quae tellurem nostram componit. Haec quidem, ridicula hypothesis videtur iis, qui praeiudiciis sunt occupati; vel qui principia CARTESII mordicus tueri vo-lunt: sed que indubia est iis, qui Naturam Vniversi, non ex imaginationibus confictis, verum ex Experimentis certissimis cognoscere laborant; talis denique hypothesis est, quae digna est inuentore suo, Magno NEWTONO. Hanc etiam, experimenta versus vtroque polos, a Philosophis et Mathematicis praestantissi-mis MAVPERTVISIO et sociis, CLAIRAVT, CAMVS, le MONNIER, item BOVGVER, CONDAMINE et aliis capta et instituta, in solidum confirmant ac veritatem eius demonstrant. Vide MAVPERTVIS de Figura Telluris. CON-DAMINE *Voyage de la riviere des Amazones*. Confer si vis, *Diverses Refle-xions concernant la Physique generale* Celeberrimi DANIELIS BERNOVLLII in Actis Helvetic. Volum I. pag 33 et seq. item MUSSCENBROEKII institutio-nes Physicas § 285. 288."[20]

Und so geht er weiter, die Prinzipien immer mit interessanten und möglichst neuen Literaturangaben erleuchtend, zu anderen Fragen, die die zeitgenössische englische, französische, schweizerische und niederländische Aufklärung am meisten beschäftigten. Seine Anspielungen beziehen sich stets auf Bücher, die in der Bibliothek des Debreciner Collegiums zu finden waren. Wir wissen aus der grundlegenden Arbeit über Maróthis Bibliothek von J. Ötvös,[21] daß schon der jung verstorbene Debreciner Professor von seiner Studienreise[22] u.a. Bücher

[19] Vgl. z.B. G. MAHEU: *La vie scientifique au milieu du XVIII^e siècle. Introduction à la publi-cation du lettres de Bouguer à Euler.* Revue d'Histoire des Sciences *19* (1966) S. 206–224.

[20] *Introductio* S. 21–22.

[21] ÖTVÖS János: *Maróthi György könyvtára.* A Debreceni Kossuth Lajos Tudományegyetem Könyvtárának Évkönyve *3* (1955) H. 2.

[22] Vgl. *Die Korrespondenz des Basler Professors Jacob Cristoph Beck 1711–1785.* Bearbeitet von Ernst STAEHELIN. Basel, 1968 (=Studien zur Geschichte der Wissenschaften in Basel Bd. XVIII) Briefe Nr. 31, 32, 38, 47, 51, 64, 80, 83, 88, 102, 108, 114, 184, 185 und 193; insbesondere Brief Nr. 72 von Georg Marothy an Beck (Nürnberg, den 11. Oktober 1737): „...in illis litteris ita scripseram, me brevi rediturum domum; sed cum quatriduo post pecuniam denuo ad emendos libros acceperim, mansi in Hollandia usque ad XXI. Sept[embris] diem. Quo omni tempore ego nihil egi, nisi bibliopolia perreptavi, ut mihi ista particula vitae nulla fuerit iucundior. Nosti βιβ-

von L'Hospital, Mussenbroeck, 's-Gravesande, Ozanam, Jean Prestet, Newton und Jacob Bernoulli nach Hause gebracht hat, und die Bibliothek des Collegiums wurde auch durch seine Nachfolger mit einer systematischen Folgerichtigkeit mit Werken der englisch–französisch–niederländischen Gelehrten und Philosophen bereichert.

Die große Bedeutung, die Hatvani der Wahrscheinlichkeitsrechnung und dem *Political Arithmetic* zuschrieb, knüpft sich an diese westeuropäische Tendenz an[23] und ist in diesem Sinne zu verstehen. Der Begründer und Leiter der Budapester Wahrscheinlichkeitsrechnungschule, Professor A. Rényi hat als erster darauf hingewiesen,[24] daß Hatvani in dieser auf den Begriff des *zufälligen Ereignisses* gegründeten Einführung eine konsequente und den statistischen Anwendungen äußerst günstige Formulierung der damaligen Wahrscheinlichkeitsrechnung gegeben hat. Die statistischen Anwendungen, die Hatvani selbst macht, wurden in einer ausführlichen Monographie[25] eingehend behandelt, so erübrigt sich für uns eine weitere Besprechung der Frage; es soll aber betont werden, daß für Hatvani diese Anwendungen – zwar unzweifelhaft auch an sich wichtig genug – als Beispiele für eine spezielle Klasse der menschlichen Erkenntnis dienten, wo nämlich *die Kriterien der Wahrheit* „because of man's inadequate perception of real things and because of his meager measuring instruments"[26] mit einer kleineren oder größeren, aber immer zu bestimmenden Wahrscheinlichkeit gegeben sind. Auch dies ist ein Teil der *theologia naturalis*, und damit ein Teil des Kampfes der *reason* gegen *Authority*. „The task of reason is to disclose the truth, and the fullness of the truth is embodied in religion. Religion is an original and ineradicable characteristic of human life. Consequently, it is related to the essential structure of our nature and discloses its true character to the scrutiny of reason"[27] schreibt Gerald R. Cragg über die *Natural Theology* in England im 18. Jahrhundert, es könnte aber, fast mit denselben Worten, auch von Hatvani geschrieben worden sein.

Die Aufklärung im Habsburgischen Reich wurde von Forschern wie Fritz Valjavec,[28] Ferdinand Maass S.J.[29] und Eduard Winter[30] von verschiedenen

---

λιομανίαν meam; nosti, quam fuerim etiam apud vos fortunatus, ut vos dicebatis, in indagandis et investigandis libris. Idem puta factum in Hollandia..."

[23] B. RANKIN: *The history of probability and the changing concept of the individual.* Journal of the History of Ideas *27* (1966) S. 483–504.

[24] RÉNYI Alfréd: *Valószínűségszámítás.* Budapest, 1954, S. 689.

[25] R. HORVÁTH: *Le professeur Étienne Hatvani (1718–1786) et les origines de la statistique hongroise.* Budapest, 1963, (Ungarisch, mit russischer und französischer Zusammenfassung.)

[26] B. RANKIN:[23]

[27] G. R. CRAGG: *Reason and authority in the eighteenth century.* Cambridge, 1964, S. 48.

[28] F. VALJAVEC: *Der Josephinismus. Zur geistigen Entwicklung Österreichs im 18. und 19. Jahrhundert.* Brünn–München–Wien, 1944. Diese zwar knappe, aber an interressanten Gesichtspunkten reiche Zusammenfassung ist in der Hinsicht der Ungarn betreffenden Literaturangaben noch immer sehr nützlich.

Gesichtspunkten ausgehend, mit Berücksichtigung des sogenannten *Josephinismus* geschildert. Valjavec und Winter verstehen unter Josephinismus eine Art *Reformkatholizismus* mit mehr oder weniger *Jansenistischen* und *pietistischen* Zügen, Maass dagegen eine neue Form des österreichischen *Staatskirchentums*, d.h. den zuletzt in eine Krise stürzenden Sieg des Kaisertums über das Papsttum. Jedoch breitet ein jeder von ihnen die Grenzen der Betrachtungen so weit aus, daß diese ganze Denkrichtung außer dem Namen, mit Joseph II. ziemlich wenig zu tun hat; bei Winter wird sie mit einer bunt entfalteten Periodisierung von der *Frühaufklärung*[31] bis zum *Spätjosephinismus* vom Anfang des 18. Jahrhunderts bis in die Mitte des 19. ausgedehnt. Diese Auffassung ist unzweifelhaft sehr interessant und kann für die Geschichte der Wissenschaften von großer Bedeutung sein, man muß sich aber stets folgendes vor den Augen halten: „die Aufklärung wird von Persönlichkeiten getragen, deren Grundansichten aus der Vereinigung zahlreicher geistiger Strömungen hervorgegangen sind"[32]. Einige dieser Persönlichkeiten, wie z.B. Maróthi, Hatvani, die beiden Domokos und ihre Zeitgenossen in Debrecen können nicht einheitlich zu den Ideen des Josephinismus dazugezählt werden; sie apellieren, gegen und über Wien, bewußt und unbewußt, auf die zeitgenössischen westeuropäischen Denker.

***

Eine andere, für die Aufklärung im Habsburgerreich besonders charakteristische Strömung wurde von Persönlichkeiten des Jesuitenordens getragen. Der große Orden brachte hier im 18. Jahrhundert eine Reihe von hervorragenden Naturforschern hervor, und weit entfernt davon, die Entwicklung hindern zu wollen. Er war – im Gegenteil – einer der wichtigsten Faktoren der Entfaltung

---

[29] Von unserem Standpunkt aus kommen die ersten zwei Bände des MAASS'schen *Josephinismus* (5 Bde, Wien 1951–1961) in Betracht: *Ursprung und Wesen des Josephinismus 1760–1769,* Wien, 1951 und *Entfaltung und Krise des Josephinismus 1770–1790.* Wien, 1953. Diese äußerst reichhaltige Publikation von relevanten Quellen ist von Maass mit je einer langen einleitenden Studie begleitet, wo einige fragliche Züge der Säkularisation der kirchlichen Recht- und Denkformen sehr klar geschildert werden.

[30] E. WINTER: *Der Josephinismus. Die Geschichte des österreichischen Reformkatholizismus 1740–1848.* Berlin, 1962. Das wohlbekannte Buch von Winter – das in der Erstausgabe von 1943 unter dem Titel *Der Josephinismus und seine Geschichte. Beiträge zur Geistesgeschichte Österreichs 1740–1848* erschien – behandelt die fortschrittlichen und der Entwicklung der Naturwissenschaften günstigen Züge dieses Reformkatholizismus, jedoch ausschließlich in seinen italienischen, deutschen und böhmischen Beziehungen. Vgl. die treffende Rezension von Jan SEBESTIK in: Revue d'Histoire des Sciences *17* (1965) S. 414–416.

[31] E. WINTER: *Frühaufklärung. Der Kampf gegen den Konfessionalismus in Mittel- und Osteuropa und die Deutsch–slawische Begegnung.* Berlin, 1966.

[32] J. E. HOFMANN:[2], S. 40.

der exakten Wissenschaften.[33] So hat z.B. der weltberühmte Astronom, Maximilian Hell (1720–1792)[34] nicht nur die moderne beobachtende Astronomie in Wien und an der Universität von Tyrnau [Trnava, Nagyszombat] eingeführt, sondern ist auch ein mächtiger Verbreiter von naturwissenschaftlichen und elementar-mathematischen Ideen im ganzen Reich gewesen. Sein Lehrbuch der Arithmetik und der Algebra,[35] das eine Reihe von Auflagen erlebt hat, war in der Mitte des 18. Jahrhunderts eines der wenigen *Elementar*lehrbücher, die eine ausführliche Einführung in das Rechnen mit Dezimalbrüchen gaben; in dieser Hinsicht kommt es den Kästnerschen, für ihre Zeit beachtlichen[36] *Anfangsgründe*n nahe. Doch werden bei Hell, den neocartesianischen Traditionen seines Ordens gemäß, die Operationen mit den Dezimalbrüchen geometrisch gedeutet: „*Pertica*, vel *pes*, aut *digitus* etc. quadratus (ob figuram) appellatur productum, aut factum quod producitur si *pertica simplex*, vel *pes*, aut *digitus simplex* perseipsum multiplicetur. … Hic ductus lineas rectae in lineam rectam *multiplicatio Geometrica*, Area vero, sive spacium ABCD, *productum Geometricum* appellatur."[37]

Weiter wird es in dieser geometrischen Repräsentation ausführlich behandelt, wie man *pedes, digitus*, etc., d.h. Zehntel, Hundertel, usw. multipliziert und auf die kleinste, im Ergebnis vorkommende Dezimaleinheit reduziert. Das geometrische Bild ist aber kein bloßes Hilfsmittel; es wird auch bei den algebraischen Aufgaben benutzt – wenn man will, kann man hier wirklich von einer „geometrischen Algebra" sprechen – und was vielleicht noch interessanter ist, auch zur Einführung der negativen Zahlen wird ein geometrisches Bild gebraucht: „Imo: si e medio cubiculi, in quo consistis, duos passus versus portam facias, diceris, facere duos passus *positivos*, quia conducunt ad tuum finem, extra cubiculum egregiendi. 2do: Si vero in medio consistens quietus maneas, id est, nec versus portam, nec fenestram versus ullum passum facias, habebis motum *nullum*, id est, quantitatem nullam motus progressivi portam versus. 3tio: Si ex medio non portam versus (per quam te exire necesse est) sed versus fenestram duos passus retro facias, diceris fecisse duos passos *negativos*, …Cl. Jo. Poëtius explicat per motum progressivum hominis in navis a prora ad puppim

[33] Die wichtigsten Träger des von Winter mit vollem Recht betonten böhmischen Josephinismus waren ja auch vor allem die Jesuiten. Vgl. *Frühaufklärung* S. 184; zwar in Prag „an der Universität mußte der Jesuitenorden neue schwere Schläge hinnehmen". (Ebda S. 185.) Die Fortschritte in den Naturwissenschaften waren aber vielleicht nicht wegen – wie es Winter allzu leicht zusammenfassen will – sondern wider diese „Schläge" eingetreten. Vgl. CSAPODI Csaba: *Két világ határán. Fejezet a magyar felvilágosodás történetéből.* Századok *79–80* (1945–1946) S. 85–137.

[34] PINZGER Ferenc S. J.: *Hell Miksa emlékezete.* I. rész: *Hell élete és működése.* Budapest, 1920. II. rész: *Hell levelezése.* Budapest, 1927.

[35] P. M. HÖLL: *Elementa mathematica Naturalis philosophiae ancillantia ad Praefixam in Scholis nostris normam concinnata.* Claudiopoli (Cluj, Kolozsvár, Klausenburg), 1755.

[36] J. E. HOFMANN:[2], S. 44.

[37] P. M. HÖLL:[35], S. 45–46.

progredientis dum interea navis secundo fluvio defertur. Nobis tamen prima declaratio, utpote magis ad captum Tyronum, placet prae caeteris."[38]

Hier gewöhnt sich also schon der Anfänger daran, algebraische Begriffe und Operationen in einer geometrischen Weise auf geometrische Quantitäten anzuwenden. Von diesem Schritt aus, mit seinem positiven und negativen „axis" wird später der Weg zum Koordinatensystem leicht getan, und der Tyro wird später im Lehrgang des Ordens wirklich zur analytischen Geometrie geführt.

Der Weg wurde vom großen Ragusaner Jesuiten, Roger Joseph Boscovich gezeigt, der in seinem *Elementa Matheseos* (Roma 1752) die Anwendung von Gleichungen auf geometrische Probleme, im Sinne der *Arithmetica universalis* Newtons weiter entwickelt hatte.[39] Überhaupt war sein langer Aufenthalt in Wien – später in Milano als Professor – für das theresianische Reich von entscheidender Bedeutung; nicht nur durch seine Werke und durch seinen persönlichen Einfluß, sondern auch, oder gar noch mehr, durch seine Autorität, die im großen Beamter- und Soldatenreich dem Hochschullehrer und dem Wissenschaftler eine neue und höhere gesellschaftliche Stelle zu sichern half. Dieser „Boscovich-Effekt" muß auch dem wohlbekannten van Swietenschen Reformwerk zugerechnet werden,[40] um das Aufblühen der Naturwissenschaften und der Mathematik in Wien und an der mit Wien eng zusammenhängenden Universität zu Tyrnau (Trnava, Nagyszombat) erklären zu können.[41]

[38] Ebda S. 113. – Hell's *Elementa* kann für seine Zeit als ein vorbildliches pädagogisches Werk betrachtet werden; noch heute erscheinen beachtungswert z.B. seine treffenden historischen Bemerkungen, wie etwa die folgenden: „Vieta post antiquiores Algebrae restaurator, et inventor usus est literis majoribus alphabeti, alii cum Anglis secuti Harriotum incognitas quantitates per vocales cognitas per consonantes exprimebant. Literis minusculis usus est Cartesius, cujus praxim hodierni fere omnes sequuntur praeter Anglos quosdam." (S. 115.) Oder: „Notas numerorum Araborum modernorum, dein eorundem Araborum (vel ut alii volunt Indorum) antiquiores in Europam illatas numerorum figuras, quibus Europaei ad saeculum fere XVI. usi fuere, adferam;" (S. 88.)

[39] Vgl. J. F. SCOTT: *Boscovich's Mathematics*. In: *Roger Joseph Boscovich S.J.F.R.S. 1711–1787. Studies of his life and work on the 250th anniversary of his birth*. Ed. by Lancelot Law WHYTE. London, 1961, S. 183–192.

[40] Vgl. auch E. WINTER:[30], S. 185: „Inzwischen hatte der Orden auf dem Gebiete der Naturwissenschaften tüchtige Gelehrte entwickelt, wie vor allem den schon genannten Südslawen Boskovich. Mit ihm stand Stepling schon seit den vierziger Jahren in Verbindung und verfolgte aufmerksam seine naturwissenschaftlichen Forschungen. Der Jesuit J. Diesbach gab 1767 in Prag eine Körperlehre im Geiste von R.J. Boskovich heraus."

[41] Vgl. J. TIBENSKÝ: *Die deutsche Aufklärung im 17. und im 18. Jahrhundert und ihre Bedeutung für die Entwicklung des wissenschaftlichen Denkens in der Slowakei*. In: *E. W. von Tschirnhaus und die Frühaufklärung in Mittel- und Osteuropa*. Hrsg. in Zusammenarbeit mit N.A. Figurowskij, G. Harig, B. B. Kafenganz und A. Klima von E. WINTER. Berlin, 1960, S. 193–204, insbesondere über Trnava: „Die Entfaltung der Naturwissenschaften hatte einen entscheidenden Einfluß auf das Heimischwerden der neuen bürgerlichen Weltanschauung in der Slowakei und auf das philosophische Denken überhaupt. Dieser Einfluß machte sich auch in den Lehrbüchern über Logik, Metaphysik und Physik der an der Universität in Trnava wirkenden Professoren

In der Mitte des 18. Jahrhunderts finden wir um und nach Boscovich in Wien einen ganzen Kreis von gelehrten Jesuiten[42] – zu denen auch Hell, der Hofastronom gehörte – die bestrebt waren – das Vertrauen und die Gnade der Kaiserin genießend – mit van Swieten in Gemeinschaft die naturwissenschaftliche und mathematische Bildung zu modernisieren. Einer dieser Männer war der ungarische Mathematiker, Paul Makó S. J.[43] (1724–1793), seit 1763 Professor der Mathematik, Experimentalphysik und Mechanik an der von der Königin für die Bildung der Söhne ungarischer Adligen im Jahre 1746 gegründeten Hochschule in Wien.

Seinem Amt gemäß schrieb Makó als Professor an diesem „Theresianum" eine Reihe mathematischer und physikalischer Lehrbücher. Makó hatte ein außergewöhnliches Talent, verwickelte Begriffe und Verfahren schlicht und einfach wiederzugeben. Seine Handbücher haben sehr viel dazu beigetragen, die höhere Mathematik und die mathematische Physik in Österreich zu verbreiten.[44] Ganz im Sinne von Boscovich, gründete sich seine Physik auf geo-

---

bemerkbar, vor allem in den Werken der Jesuiten A. Jaslinský, A. Adány, J. Ivanič und Ant. Revický. Die Philosophen in Trnava wiesen mit Nachdruck auf die Zwecklosigkeit der Scholastik hin und brachten der Physik und den Naturwissenschaften überhaupt große Achtung entgegen, da diese wahrlich dem Heil der Menschheit dienten; auch die Philosophie haben sie in ein gefälligeres und nützlicheres Gewand gekleidet." – Vgl. noch SÁRKÖZI Pál: *Nagyszombati régi matematikusok.* Pannonhalma, 1933. – RAPAICS Raymund: *A természettudományok a nagyszombati egyetemen.* Természettudományi Közlöny *67* (1935) S. 257–267. – CSAPODI Csaba: *Newtonianizmus a nagyszombati jezsuita egyetemen.* Regnum *6* (1944–1946) S. 59–68.

[42] Die erschienenen Bände der *Beyträge zu verschiedenen Wissenschaften von einigen Oesterreichischen Gelehrten* herausgegeben von Arbeiten einiger ex-Jesuiten nach der Aufhebung des Ordens, zeugen noch heute für das hohe wissenschaftliche Niveau im Kreise der gelehrten Jesuiten.

[43] Vgl. SÁRKÖZY Pál: *Kerekgedei Makó Pál élete és matematikai működése.* Matematikai és Fizikai Lapok *36* (1929) S. 23–34; das aber im Wesentlichen auf Anton Kreils Denkrede beruht: *Einige Züge aus dem Leben und dem Charakter des nunmehr verewigten Paulus Mako infulirten Abbtes zu St. Margaretha von Bela, Domherrn der Kathedralkirche zu Waizen, Direktor der philosophischen Facultät an der hohen Schule zu Pest etc.* Seinem Andenken geweihet von Anton KREIL, professor der philosophie, Pest 1793. „Aus einem adeligen Geschlechte entsprossen – schrieb Kreil – sah er zum erstenmal das Licht der Welt den 17ten Julius 1724 zu Jász-apatin in Jazigien. Im siebzehnten Jahre trat er in die Gesellschaft Jesu, und bildete sich darin so aus, dass man ihn zum Lehramt der Logik und Metaphysik anfangs nach Tyrnau und nachmals an die Universität von Wien berief. Seine Gründlichkeit und ganz besondere Gabe, Jünglingen sich mitzutheilen, erwarben ihm daselbst die Hochachtung des seligen Baron Van Suiten, der damals den philosophischen Studien in den Erblanden vorstand, in einem vorzüglichen Grade. Von da wurde er in das Theresianum, als ordentlicher Lehrer der Mathematik und als ausserordentlicher der Experimentalphysik und Mechanik übersetzt. Die ersten zwei Wissenschaften trug er im Latein, die letzte aber, was zu bewundern ist, in der deutschen, ihm vormals ganz fremden Sprache vor, die er sich nur durch ein unermüdetes Studium eigen gemacht hatte."

[44] Der ihm befreundete Kreil schreibt darüber in seiner Denkrede: „Er hat zuerst in Wien den Geschmack für die höhere Mathematik verbreitet. Darum suchte er dieses Studium der Jugend auf alle mögliche Weise zu erleichtern und zog daher in seinen Werken die Fasslichkeit der Beweise

metrisch exakt vorstellbare Begriffe, und seine Mathematik war eine Art Einführung zur Boscovich'schen Physik.[45] Man könnte gerade sagen, daß er in seiner *Calculi Differentialis et Integralis Institutio* (Wien 1768) eine zur Boscovich'schen *Theoria* passende Formulierung des Calculus gab.

Die Einleitung beginnt mit einer kurzen Beschreibung des Unendlichen und der „Infinitesimalen von verschiedenem Grad",[46] wo vielleicht nicht ganz unmöglich wäre eine Entwicklung von Leibniz'schen Grundideen zu erblicken und dann im Sinne der „non-standard analysis" von A. Robinson[47] das Verfahren zu rechtfertigen bzw. zu interpretieren versuchen. Jedoch verwendet Makó den Unendlichkeitsgedanken der Scholastiker nicht im Sinne einer Arithmetisierung, sondern – wenn man das so sagen darf – im Sinne einer „Geometrisierung" der Analysis. Er schreibt nämlich im Scholion zu Punkt 2:

„Posse a nobis concipi infinitesimas in aperto est. Cum enim quantitas continua mathematica infinite diuidua sit, concipi sane in ea possunt partes quauis assignabili minores. Dum item quantitates duae inaequales ad aequalitatem perpetuo accedere cogitantur, antequam prorsus aequales fieri intelligantur, earum differentia infinite minuitur, ita ut quauis assignabili minor sit. Sit curua quaepiam continua AMm, cuius ordinatae PM et pm cogitentur ad se continenter accedere, donec punctis M et m congruentibus aequales fiant, ac recta TS euadat tangens; antequam omnio aequales fiant, rectae MQ et Qm minuentur vltra quosuis limites, et punctis M et m congruentibus plane euanescent."[48]

Wir befinden uns hier in einem von den Ideen des Cartesianismus – der durch den Jesuitenorden längst adaptiert wurde – durchdrungenen Newton'schen Gedankenkreis. Tatsächlich bezieht sich Makó explizit auf Newtons Fluxionsrechnung, doch wendet im Einzelnen oft formale Differentialformulierungen in der Beweisführung an.[49]

---

der grösseren Strenge der Neuern vor. Ueberhaupt sagt man es ihm allgemein zum Ruhme nach, dass er bei uns zuerst in die Wissenschaften, deren Lehrer er gewesen ist, den guten Geschmack gebracht habe." Kreil: [43], S. 12.

[45] M. J. ZEMPLÉN:[16], S. 240–253.

[46] *Calculi differentialis et integralis institutio, qvam in tironum vsvm elvcvbratvs est.* Wien, 1768, S. 2.

[47] A. ROBINSON: *Non-Standard Analysis* (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, North-Holland). Amsterdam, 1966.

[48] *Institutio*:[46], S. 1–2.

[49] So z.B. *Institutio*:[46], S. 22: „31. *Probl.* Datum potentiam perfectam differentiare. *Resol.* (hier wird die wohlbekannte Regel gegeben). *Demonst.* Quaelibet eiusmodi potentia data repraesentari potest per ax^m: iam dum x abit in $x + dx$, ax^m abit in $a(x + dx)^m$; atqui $a(x + dx)^m$ est = $= a(x^m + mx^{m-1}dx + [m \cdot m - 1/1 \cdot 2]\, x^{m-2} dx^2 + [m \cdot m - 1 \cdot m - 2/1 \cdot 2 \cdot 3]\, x^{m-3} dx^3$ etc.) (Elem.110.) ergo $d(ax^m) = a(mx^{m-1}dx + [m \cdot m - 1/1 \cdot 2]\, x^{m-2} dx^2 + [m \cdot m - 1 \cdot m - 2/1 \cdot 2 \cdot 3]\, x^{m-3} dx^3$ etc.); atqui in hac serie omnes termini reliqui euanescunt respectu primi (7): ergo $d(ax^m) = amx^{m-1}dx$." (Die Hinweise wie „Elem.110" beziehen sich auf Makós Elementarlehrbücher über Algebra und Geometrie.)

Er arbeitet immer mit sehr sauberen und möglichst leicht verständlichen Beweisführungen. Bisweilen gelangt er zu recht komplizierten Anwendungen, z.B. zur Bestimmung des Benehmens einer Kurve in der Umgebung eines gegebenen Punktes, zum Problem von Evolventen und Evoluten, zur Bestimmung des Krümmungskreises und Krümmungsradius, u.s.w.

Der zweite Teil des Buches behandelt die Integralrechnung. Es werden zwei große Problemkreise unterschieden: Probleme die zur Lösung das – mit heutigem Wort – bestimmte und solche die das unbestimmte Integral verlangen. Beide Begriffe werden möglichst gründlich eingeführt und durch eine Fülle von gut gewählten Beispielen illustriert. Der *Fundamentalsatz* wird klar ausgesprochen, aber der Begriff des bestimmten Integrals wird natürlich gar nicht definiert. Viel befriedigender auch vom heutigen Standpunkt aus ist die Behandlung des unbestimmten Integrals, d.h. des umgekehrten Tangentenproblems. Auch für Makó ist – wie es Ch. J. Scriba für Newton und Leibniz betont hatte[50] – „the geometric point of view… still very strong: integration … is not yet an abstract procedure but a formalized geometric operation." Doch wird das Integrieren einer Fülle von verschiedenen Differentialgleichungen wieder einmal ganz klar durchgeführt und mit reichlichen geometrischen und physikalischen Beispielen beleuchtet. Das Buch schließt mit einer eingehenden Behandlung des Brachistochronen-Problems.

Dieser *differentiellen Kurvengeometrie*, wie wir vielleicht Makós *Institutio* am besten charakterisieren könnten, schickt er 1770 eine *analytische Geometrie* der ebenen Kurven nach. Das erste Buch des *De arithmeticis et geometricis aeqvationvm resolvtionibvs libri dvo* erörtert die Theorie der Gleichungen bis zum vierten Grad, meist nach Euler und Clairaut, aber viel gedrängter und mit viel wenigeren Beispielen, da das eigentliche Ziel des Werkes keine Gleichungslehre, sondern eine Anwendung der Algebra auf die Geometrie ist. Im zweiten, wichtigeren Schritt wird die Lösung von *Gleichungen der Geometrie* behandelt, die immer in einem rechtwinkligen- bzw. in einem Polarkoordinatensystem gegeben oder von den Anfangsbedingungen zu ermitteln sind. Die Schreibweise ist zwar sehr modern, indem sie der heutigen sehr ähnlich ist.[51]

[50] Ch. J. SCRIBA: *The inverse method of tangents: a dialogue between Leibniz and Newton (1675–1677)*. Archive for History of Exact Sciences *2* (1964) S. 113–137.

[51] So z.B. faßt er die Gleichungen der Kegelschnitte in *De arithmeticis et geometricis aeqvationvm resolvtionibvs libri dvo*, Wien, 1770, S. 200 folgendermaßen zusammen:

$y^2 = px$ $x^2 = py$		ad Parab. concau. ad Parab. conuex.
$y^2 = a^2 - x^2$ $y^2 = 2ax - x^2$	abscissas a centro computatis abscissas a vertice computatis	ad circulum

und so folgen weiter die verschiedenen Gleichungen für die anderen Kegelschnitte.

Unter dem modernen Gewand stecken aber klassische Cartesianische und Newtonianische Vorstellungen und Figuren. Der entscheidende Euler'sche Schritt von der Gleichung zur Funktion wird hier nirgends getan, die analytische Geometrie ist für Makó niemals „the graphical representation of functions",[52] obwohl er in seiner *Institutio* mit dem Begriff der differenzierbaren Funktionen schon frei und geschickt gearbeitet hat. Wieder einmal ein Beispiel, wie viel schwerer es war, den Begriff der Funktion im allgemeinen zu fassen, als den Zusammenhang zweier veränderlichen Größen in dem Calculus zu formulieren,[53] und wie es ohne dem zweiten das erste wohl kaum hätte erreicht werden können.[54]

Mit Makós Handbüchern sind wir zu einem Niveau gelangt, das in Österreich lange Zeit hindurch nicht überholt wurde, und worauf in Ungarn bald ein eindeutiger Verfall folgte. In Böhmen, das allerdings die am meisten fortgeschrittene und zivilisierte Provinz des ganzen Habsburgerreiches war, setzte sich am Ende des 18. und Anfang des 19. Jahrhunderts, wie bekannt, eine rege geistige Entwicklung fort, an der auch die Naturwissenschaften und die Mathematik ihren Anteil hatten.[55] Auch in Nordungarn waren die Naturwissenschaften, trotz der Versetzung der Universität von Tyrnau nach Buda im Jahre 1777, in einer verhältnismäßig günstigen Lage, da die Bergwerkakademie in Štavnica (Selmecbánya, Schemnitz) „an der sich Studenten aus ganz Europa zusammenfanden", ein „bedeutender Ausgangspunkt der modernen naturwissenschaftlichen und technischen Erkenntnisse"[56] war. Auch die Schüler des großen preßburger Pietisten, Mathias Bél (1685–1749) halfen mit ihrem Rationalismus im Kreise der Lutheranischen Slowaken und Deutschen einen, den exakten Wissenschaften nicht ungünstigen Boden zu schaffen.[57]

[52] C. B. BOYER: *History of analytic geometry*. New York, 1956, S. 190.

[53] Vgl. HORVÁTH Miklós: *A végtelen kicsinyek problémája a matematikában Leibniznél*. Matematikai Lapok *30* (1978–1982) S. 191–209.

[54] VEKERDI László: *Végtelen sorok és fluxiók*. A MTA Matematikai és Fizikai Osztályának Közleményei *14* (1964) S. 423–441.

[55] Vgl. jedoch L. NOVÝ: *Verbreitung der Newtonschen Ideen in Böhmen*. Actes du IX^e Congres International d'Histoire des Sciences. Paris, 1960, S. 553–557.

[56] J. TIBENSKÝ:[41]

[57] Vgl. K. WINTER:[31], S. 213: „Preßburg blieb auch nach dem Tode Bél (1740) der Mittelpunkt der Frühaufklärung in Ungarn. Die unmittelbare Nähe Wiens ermöglichte es, daß die österreichische Aufklärung in allen ihren Phasen rasch nach Ungarn kam. Der wichtigste Umschlaghafen für diese geistige Bewegung war aber unbedingt Preßburg. Aus Ungarn kam ja ein solcher Sturmvogel radikaler Aufklärung wie der Kapuziner Fessler, und ein katholischer Geistlicher, Martinovich, wurde das Haupt der sogenannten Jakobinerverschwörung, die 1794 blutig unterdrückt wurde. … Als Ende der sechziger Jahre des 18. Jahrhunderts der Sieg der Aufklärung in Nordungarn gewiß war, kam die mit der Aufklärung so eng verbundene Freimaurerei ins Land. In Eperjes, wo sich die Aufklärung zuerst zu regen begonnen hatte, entstand 1769 auch die erste Loge in Nordungarn: Zum Tugendhaften Reisenden. Ihr folgten rasch Gründungen von Logen in Kaschau, in der Zips und in anderen Gegenden Nordungarns. Die Aufklärung hatte sich um 1770 auf dem Gebiete der heutigen Slowakei endgültig durchgesetzt."

In Buda und Pest, wo am Ende des 18. Jahrhunderts eine rege bürgerliche Entwicklung ein neues und rasch emporblühendes wirtschaftliches und gesellschaftliches Zentrum hervorgebracht hat, gestaltete sich die wissenschaftliche Lage viel widerspruchsvoller. Die Eröffnung der Universität im Jahre 1777 in Buda war wohl noch als ein wichtiges Ereignis gefeiert[58] und unter der weisen Leitung von Makó, der zum Direktor der philosophischen Fakultät ernannt wurde, setzte sich wirklich ein hoffnungsvoller Aufbruch der exakten Wissenschaften ein.[59] Die die Aufklärung ablösenden gesellschaftlichen und geistigen Strömungen brachten aber bald eine, der Entwicklung der Mathematik und der Naturwissenschaften mehr oder weniger ungünstige Geistigkeit mit sich[60] und die pädagogische Rationalität des theresianischen und josephinischen Zeitalters war auch durch eine kurzsichtige, sich immer mehr erstarrende Stabilisationspolitik abgewechselt.[61] Die blutige und unnötig grausame Unterdrückung eines stillgeborenen bürgerlichen Revolutionsplanes im Jahre 1795[62] hatte einerseits einen sterilen, intellektuellen Konformismus, andererseits einen stoisch oder romantisch gefärbten „Escapism", zur Folge, und in diesem geistigen Klima konnten die exakten Wissenschaften – trotz weitgehender wirtschaftlicher

[58] Vgl. z.B. PAULER Tivadar: *A budapesti Magyar Kir. Tudomány-egyetem története*. Budapest, 1880, S. 122 und die Beschreibung der großen Feier am 24. und 25. Juni, 1780 ebda S. 129–133.

[59] Im Jahre 1782 hatte Joseph II. einen Institutum geometrico-hydrotechnicum in Pest eröffnet für Bildung von Ingenieuren, im selben Jahre hatte er die Einrichtung einer tierärtztlicher Fakultät verordnet. Am meisten vielleicht lag das Gesundheitswesen an seinem Herzen. Nach seinem Besuch im Jahre 1783 schrieb er darüber: „Das Krankenspital in Ofen ist zwar wegen dessen wenigen Raumes ausserordentlich schlecht, und der Gesundheit der Leute sehr nachtheilig, allein es ist doch noch gegen das von Pesth göttlich, welches an Unordnung und Unsauberkeit aller Gattung alles übertrifft, was man nur sagen kann." (Pauler:[58], S. 189.) Um helfen zu können, wollte er erst die Bildung verbessern; auch hatte er seine wertvolle, von Fontana stammende Sammlung anatomischer Modelle der Universität geschenkt. Mit der Arbeit der Universität war er gar nicht zufrieden. „Was die Universität anbelangt – schrieb er – scheint noch alles sehr unordentlich, und wird eine Hauptänderung um so mehr statt haben müssen, als auf diese Art, und seit zwei Jahren besonders nur immer geschrieben, investigiert und nichts beschlossen noch gewirkt wird." (Ebda.) Wo er nur Talent und Fleiß erfahren hat, stand er überall bei. So hat er den tüchtigen Botaniker und Chemiker, Jakob Joseph Winterl aktiv unterstützt, wer dann die erste Blüteperiode der Botanik in Ungarn vorbereitet hat, Vgl. GOMBOCZ Endre: *A magyar botanika története. A magyar flóta kutatói*. Budapest, 1936.

[60] Bald nach Josephs Tode wurde z.B. eine Untersuchung gegen Kreil wegen „Atheismus" verordnet. Kreil, der ein Kantianer war und ein guter Freund Makós, war natürlich gar kein Atheist und im Jahre 1790 ist er noch von den Anklagen freigesprochen worden. Aber einige Jahre später wurde er doch pensioniert.

[61] Außerst lehrreich in dieser Hinsicht sind die einleitenden Paragraphen von Erna LESKY: *Die Wiener medizinische Schule im 19. Jahrhundert*. Graz–Köln, 1965.

[62] Vgl. BENDA Kálmán: *A magyar jakobinusok. Iratok, levelek, naplók*. Budapest, 1957. – BENDA Kálmán: *A magyar jakobinus mozgalom története*. Budapest, 1957.

und bürgerlicher Entwicklung – kaum ihr Leben führen.[63] Ohne diese Entwicklung schildern zu wollen, versuchen wir wieder ein mathematisches Lehrbuch näher zu betrachten.

Das Buch von I. Martinovics, *Theoria generalis aequationum omnium graduum novis illustrata formulis ac iuxta principia sublimioris calculi finitorum deducta*, ist im Jahre 1780 in Buda erschienen und ist Professor Makó gewidmet, dessen *De arithmeticis et geometricis aequationum resolutionibus libri duo* auch im Vorwort des erstgenannten Werkes als eine der wichtigsten Quellen erwähnt wird. Das stimmt jedoch im besten Falle nur soweit, daß beide Bücher der vorzüglichen *Elemens d'Algebre* von Clairaut[64] etwas zu danken haben. Weiterhin ist Makós Buch ein wohl durchdachtes gründliches Handbuch, ein pädagogisches Meisterwerk. Die *Theoria generalis* kann dagegen nichts als eine mehr oder weniger geschickte Kompilation genannt werden. Zwar kann man im Buch öfters Verweise auf große Namen – Newton, Mac Laurin, Boscovich, Riccati, Wolff und Clairaut – lesen, die eigentlichen Quellen des Buches sind aber meistens nicht bei den genannten Autoren zu finden. Das Werk stützt sich vorwiegend auf eher elementare Lehrbücher, aus denen der Verfasser sein Material – manchmal in fast wortwörtlicher Übereinstimmung – schöpft.[65] Um dem Verfasser gerecht zu werden,[66] müssen wir jedoch sagen, daß in seinem Buch auch manche wertvolle Behauptungen zu finden sind, ja man kann ganz interessante Seiten lesen, z.B. wo der Verfasser nach Newton das Hudde'sche Verfahren – jedoch ohne Beweis – für die Bestimmung der Grenzen der Wurzeln bringt. Es fehlt aber ein durchdachter und konsequenter Plan, die Entlehnungen mischen sich in ein buntes Durcheinander und man hat das Mißgefühl, daß die ganze Produktion auf die Verblüffung des Lesers zugespitzt ist.

Der Verfasser des Buches, der Franziskaner Ignaz Martinovics (1755–1795) ist eine der am meisten umstrittenen Persönlichkeiten der ungarischen Geschichte. Er ist als ein gemeiner Denunziant, als ein utopischer Fantast, als ein

[63] Der große Botaniker, Paul Kitaibel (1757–1817) hatte seine grundlegenden Forschungen unter große Schwierigkeiten fortzuführen und der begabte Mathematiker Paul Sipos (1759–1816) konnte als Erzieher in der Teleki Familie seine mathematische Bildung im Ausland vervollständigen, vgl. WOYCIECHOWSKY JELITAI József: *Sipos Pál élete és matematikai munkássága* (= Közlemények a Debreceni Tisza István Tudományegyetem Matematikai Szemináriumából 6). Budapest, 1932. – Über den Verfasser des ersten gründlichen und modernen Lehrbuches der Physik – Martin Varga (?–1818) wissen wir fast gar nichts; vgl. M. J. ZEMPLÉN:[16], S. 457–481.

[64] A.-C. CLAIRAUT: *Elemens d'Algebre*. Paris, 1746.

[65] So z.B. seine sogenannten „axiomata generalis" sind vielleicht aus Hells *Elementa* entlehnt, oder einige von M. LIPSICZ S. J.: *Algebra sive analysis speciosa per facilem, et jucundum literarum usum, novam computandi rationem exhibens*. Cassoviae, 1739, S. 18. Doch sind solche Regeln in der zeitgenössischen Elementarliteratur überall aufzufinden.

[66] SZÉNÁSSY Barna: *Martinovics Ignác matematikai munkássága*. Matematikai Lapok 7 (1956) S. 277–290. Hier findet man eine fachmäßige und ausgezeichnete, wenn auch vielleicht etwas überschätzende Wertung von der *Theoria*.

Märtyrer der Freiheit, als begabter Philosoph, als fruchtloser Revolutionär, usw. geschildert worden.[67] Nun eines war er sicherlich: ein skruppelloser, nur an sich selbst denkender Karrierist. Eben deshalb ist sein Buch für uns bedeutend: es zeigt, daß ein entschlossener und begabter Karrierist noch am Ende der siebzehnhundertsiebziger Jahre die Mathematik auch in Ungarn als ein Werkzeug betrachten konnte, um zu einem gesellschaftlichen Ansehen zu gelangen. Solche „mathematische Glücksritter"[68] sind auch anderswo wohlbekannt. Bald änderten sich aber in Ungarn die Verhältnisse, und auch Martinovics hielt es für viel lohnender, die mathematische Muse für die politische zu verlassen.

VEKERDI LÁSZLÓ

Matematika-tankönyvek a magyar felvilágosodás korából

Csapodi Csaba *Két világ határán* (Századok *79–80*, 1945–46, pp. 85–137) és *Newtonianizmus a nagyszombati jezsuita egyetemen* (Regnum *6*, 1944–46, pp. 59–68) című két nagy tanulmányában az ottani filozófiatanárok tankönyveinek minuciózus elemzésével tárta fel, hogyan csap át jellegzetes eklektikus szünkretizmusuk kereteiben (a 18. század hatvanas éveiben) ismert, de elutasított állapotából egyre inkább elfogadottá a newtonianizmus, felváltva a skolasztikus *formát* makacsul őrző cartesianizmusukat. Arra is figyelmeztet röviden Csapodi, hogy e tekintetben a jezsuita egyetem évtizedekkel maradt el a protestáns főiskolák mögött. Csapodi Csaba úttörő felismeréseit Zemplén Jolán kamatoztatta fundamentális fizikatörténetében, „cartesiánus" és „newtoniánus" fázisaiban mutatva be a lényegében tankönyvekre és főiskolai disszertációkra korlátozódó régi magyarországi fizikát.

A 18. századi matematikai tankönyvek vizsgálata – már csak a (tematikus inkább, mintsem tantárgyi) kapcsolatok miatt is – hasonló eredményekre vezet, de itt erősebb a gyakorlati alkalmazások szerepe, s jól látható egy határozottabb nyugat-európai tájékozódás; hamarább és erősebben Debrecenben, de észlelhető a jezsuita, illetve ex-jezsuita professzoroknál is, akik közül a legkiemelkedőbb, Makó Pál, a newtoni matematikai módszerek birodalomszerte fontos korai ismertetője és elterjesztője volt közismert és megbecsült kézi- inkább, mintsem tankönyveivel, melyeket még évtizedekkel később is jó szívvel ajánlhatott fiának Bolyai Farkas.

(Jelen tanulmány a hetvenes években íródott, de nem jelenhetett meg. Mégsem érzem elavultnak, mert mai ismereteink tükrében Csapodi Csaba fél évszázaddal ezelőtti felismerései a honi felvilágosodás szerkezetéről és dinamikájáról, melyek ezt az írást inspirálták, még inkább igazoltnak és lényegesnek látszanak.)

[67] Die grundlegenden Quellenausgaben (*A magyar jakobinusok iratai*. 1. *A magyar jakobinus mozgalom iratai*. 2. *A magyar jakobinusok elleni felségsértési és hűtlenségi per iratai 1794–1795*. 3. *Naplók, följegyzések, röpiratok*. Budapest, 1952–1957) und Studien von K. BENDA haben zwar eine gewisse Abschließung der Frage zur Folge, die Martinovics-Frage kann jedoch noch nicht als gelöst gelten. Vgl. vor allem: *Sándor Lipót Főherceg Nádor iratai 1790–1795*. Kiadta, a bevezető tanulmányt és a magyarázatokat írta MÁLYUSZ Elemér. Budapest, 1926, und die Einführung von L. MÁTRAI zu MARTINOVICS Ignác: *Filozófiai írások*. Budapest, 1956.

[68] Vgl. Kurt-Reinhard BIERMANN: *Auf den Spuren des mathematischen Glücksritters Ferdinand von Sommer*. Forschungen und Fortschritte *41* (1967) S. 235–238.

Kálvinista és jezsuita matematikusok[16]

A matematika a felvilágosodás honi tankönyvirodalmában

„Azoknak, a' kik Gyermekeket tanitanak, igen jó vólna Tanítványaikat, mentül idejébben lehet, az Arithmeticára fogni: mert tapasztalásbol mondhatom, hogy arra már öt 's hat esztendős korában alkalmatos a' Gyermek; tsak hogy nem dérrel durral, hanem játék módjára kell apródonként elejibe adni: sőt semmit-sem fog-meg, könnyebben; ha tsak valami elméje van. Nem lehet pedig ki-mondani, melly igen hasznos a' gyermeki elmének élesitésére az Arithmetica, és ha lehet, a' Geometria. Igy szokik leg-jobban a' gyermek arra-is, hogy minden dolgában magára vigyázó, rend' szerető, és, a' mint hivatják, punctualis légyen; mellyre igen nagy szüksége van a' mi embereinknek. De ha egyéb haszna nem lenne-is, meg-leszsz ez, hogy igy inkább nem hijjába járnak a' gyermekek az Oskolába: holott most úgy látjuk, hogy sok ember gyermek korában a' Syntaxis-ig sőt fellyebb is el-ment az Oskolában, a' ki mindazáltal semmit nem tanúlt, a' mivel vagy magának, vagy másnak használhatna: nem úgy, mint más tanúltabb Nemzeteknél: a' kik között még Paraszt embert-is alig találhatnál, a' ki a' maga nyelvén való olvasás és irás mellett, Számvetést-is ne tudna; ha Deákul nem tanúlt-is."[17]

Felejtsük el egy pillanatra a jól ismert idézet szerzőjét, eredetét, évszámát, s irodalomtörténeti ismereteinkre hagyatkozva próbáljuk meg elhelyezni a honi művelődésben. A nyelv gördülékenysége és tisztasága a pedagógiai hivatástudat, sőt lelkesültség, a hivatkozás „más tanultabb Nemzetek"-re, s parasztok műveltségére, mint a nemzeti kultúra fokmérőjére, leginkább valahol „a magyar felvilágosodás jellegzetes eszmeiségét kísérő klasszicizmus"[18] táján jelöli ki az idézett szöveg helyét. A klasszicizmus pedig Bessenyei György följléptétől (1772) kezdődik és Csokonai nagyszabású lírai-epikai életművében bontakozott ki (1793 és 1805 között).

Csakugyan, Bessenyei többször is hasonló értelemben s hasonló szavakkal sürgeti a magyar nyelvű oktatást s tudományos művelődést, és még a kritikai hevület is rokon, ahogyan

---

[16] Forrás: Vekerdi László: Kálvinista és jezsuita matematikusok. A matematika a felvilágosodás honi tankönyvirodalmában. = Természet Világa 140 (2009) No. 4. pp. 162–167. – Néhány éve került elő Vekerdi László kézirathalmaiból ez az eddig még nem közölt írás. A hetvenes évek elején íródott, de értékeit megőrizte. Erről most olvasóink is meggyőződhetnek. *(– Staar Gyula megj.)*

[17] Arithmetica, vagy számvetésnek mestersége, mellyet irt és közönséges haszonra, főképen a' Magyar Országon elő-fordúlható dolgokra alkalmaztatni igyekezett MAROTHI GYÖRGY, D. P. Debretzenben. Nyomtt. Margitai János által. 1743. Esztendőben. 377, 8 p. (Idézetet lásd: p. 7.)

[18] Szauder József: Az Estve és az Álom. Felvilágosodás és klasszicizmus. Bp., 1970. Szépirodalmi. p. 112.

sürgeti. Csak éppen Maróthi professzor Arithmeticája jó emberöltőnyi idővel korábban hirdeti s valósítja meg a „felvilágosult klasszicizmus” fennkölt pedagógiai s nyelvművelői eszményeit, s vállalja reform-buzgalmát.

Maróthi György pedagógusi nagyságát már Jausz Béla[19] és Ligeti Béla[20] is méltatta.

Szénássy Barna pedig nemcsak a külföldi tanulmányút jelentőségére mutatott reá a híres debreceni professzor pedagógiai nézetének fejlődésében,[21] hanem nyomatékosan figyelmeztetett arra is, hogy milyen nagy szerepe volt az Arithmetica sikerében az „ízes magyar nyelvnek”,[22] függetlenül attól a „nyelvújítói” gyakorlattól, amit már Keresztesi Mária elemzett a magyar matematikai műnyelv történetéről szóló értekezésében.[23] Ámde Maróthi teljesebb szellemi portréját, törekvéseinek összetevőit, s nevelői munkásságának eszmei dimenzióit igazában csak azóta ismerjük, amióta Lengyel Imre és Tóth Béla kiadta Jakob Christoph Beck bázeli professzornak írt leveleit.[24]

A klasszikus latinsággal s a műfaj – XVIII. században újraéledt – humanista szabályai szerint írt levelek jelentősége azonban nem korlátozódik Maróthi személyére, s nemcsak azért, mert városa viszontagságairól – például az 1739. évi nagy pestisről – és polgárai mentalitásáról is beszámol távoli barátjának. Azért is, s elsősorban azért, mert a levelekben említett vagy kért könyvek, az érintett vagy többé-kevésbé részletesen megtárgyalt problémák antikvitásismeret és természettudományos műveltség ugyanazon ötvözetére utalnak, ami – szemben a német pietista „Aufklärung”-gal – a XVIII. század húszas-harmincas éveitől kezdve szinte kivétel nélkül jellemzi Nyugat-Európa nagy szellemi mozgalmait. Maróthi Beckhez írt levelei tehát valóságos tudománytörténeti kövületekként segítenek meghatározni mintegy a „korát” annak a „rétegnek”, melyben ő és pályatársai éltek s dolgoztak. Mindenekelőtt a réteg térbeli folytatását találjuk azonnal Bécs és a német világ átugrásával, Nyugat-Európában. Kivált Peter Gay elemezte szépen ezt a nyugat-európai

---

19 Jausz Béla: Maróthi György. Debrecen, 1956. pp. 31–62. (Különlenyomat, a Kossuth Lajos Tudományegyetem 1956. évi Actájából)

20 Ligeti Béla: Maróthi György 200 éves Arithmeticája (1743–1943). Szeged, 1943. 18 p. (Klny. A Cselekvés Iskolája 1943/44. évi 1–4. számából)

21 Szénássy Barna: Maróthi György. = Építünk 3 (1952) No. 2. pp. 52–60.

22 Szénássy Barna: A magyarországi matematika története. Bp., 1970. Akadémiai Kiadó. p. 47.

23 Keresztesi Mária: A magyar matematikai műnyelv története. Debrecen, 1935. Harmathy. 34 p. (Közlemények a Debreceni Tudományegyetem Matematikai Szemináriumából 11.)

24 Lengyel Imre – Tóth Béla: Maróthi György külföldi tanulmányútja. Adatok pályakezdéséhez, könyvtára keletkezéséhez Jakob Christoph Beckkel folytatott levelezéséből. = Könyv és Könyvtár 8 (1970) No. 1. p. 136.; Lengyel Imre – Tóth Béla: Maróthi György nevelési törekvéseinek külföldi gyökerei. Debrecen, 1971. Kossuth Lajos Tudományegyetem Könyvtára. pp. 53–102. (A Debreceni Kossuth Lajos Tudományegyetem Könyvtárának Közleményei 76.) – Vekerdi László kéziratának lezárása után jelent meg Tóth Béla összegző munkája: Tóth Béla: Maróthi György. Debrecen, 1994. DAB. 327 p. (A kötetnek az ajánlását Vekerdi László írta, amelyben megemlíti, hogy Tóth Béla „mindent tud Maróthiról és mindenről tud, amit róla írtak”. A szerző kötetét 1981-ben állította össze, amely végül is csak 1994-ben került ki a sajtó alól – *a szerk. megj*.)

„felvilágosodást",[25] melynek kifejezetten „városi" és „polgári" közegében az antikvitás „modern" és egyáltalában nem „klasszika-filológiai" jellegű kultusza harmonikusan elegyedett az új természetszemlélet józan és kritikus empirizmusával. A nemzeti nyelv itt már századok óta az ismeretszerzés és ismeretközlés természetes eszközeként szerepelt, de – kivált nem angol vagy nem francia nyelvterületen – a kiművelt s modern tartalom közlésére alkalmassá tett latin a tudományos – főleg a természettudományos – műveltség lingua francájaként élt tovább mindenfelé. S mindenfelé nyelvi vagy egyéb természetű konfliktus nélkül. Magyar nyelvű aritmetikák hosszú sora s Maróthi Arithmeticájának kiváló magyar nyelve mutatja, hogy lényegében nálunk is nyitva állott a fejlődésnek ez az útja. S ha később lezárult, s Dugonics és Kazinczy nyomán a nyelvi konfliktusokkal terhes utat választotta, az részben annak is tulajdonítható, hogy a magyar felvilágosodás a „nyugati út" helyett a német „Aufklärung"-ot választotta.

De egyáltalában nem teljesen, s főleg nem korán. Modern klasszicitás és új természetszemlélet Maróthi leveleiből megismert együttese ugyanis sokáig élt még a magyar szellemi „rétegekben", elsősorban persze Debrecenben, ahol Földi Jánosig, Csokonaiig és Fazekas Mihályig követhető. Julow Viktor kitűnő Fazekas-monográfiájában[26] évtizeddel Peter Gay nagy szintézise előtt leírta már „természettudományos gondolkozás" és modern antikvitáskultusz jellegzetes debreceni változatát, s finoman elemezte azokat a társadalmi s szellemi tényezőket, melyek, elsősorban a Kollégium jóvoltából, Debrecen homokjára varázsolták – gyakran bumfordi és plebejus „afféle mackó-balett" formában – a francia „rokokó" művészetét s gondolatvilágát.

Maróthi s Fazekas között egyébként közvetlen kapcsolatot létesít Hatvani István: Maróthi tanítványa s Fazekas professzora. Maróthi Beckhez írt leveleinek kiadásáig a Kollégium két nagy professzora közül Hatvani élete s alakja állott hasonlíthatatlanabbul plasztikusabban előttünk, a róla szóló legendák s tanulmányok ellenére is. A levelek kiadása azonban nemcsak Maróthi alakját s eszmei hátterét világosította meg, más fényt vet Hatvani professzori működésére is Horváth Róbert alapos Hatvani-monográfiájában.[27]

Részletesen elemezte, milyen alapvetően különbözik Hatvani matematikai statisztikai szemlélete a XVIII. század második felében Németország-szerte s egyre inkább nálunk is uralkodó honismereti-leíró államtudományi iránytól. Hatvani külföldi tanulmányútját s forrásait ismertetve azt is megállapította, hogy a debreceni professzor a svájci-holland-

[25] Gay, Peter: The enlightenment. An interpretation. The rise of modern paganism. London, 1966. Weidenfeld and Nicolson. 555, 16, 13. p.

[26] Julow Viktor: Fazekas Mihály. Bp., 1955. Művelt Nép. 222 p., 1 t. (Nagy magyar írók)

[27] Horváth Róbert: Hatvani István professzor (1718–1786) és a magyar statisztikai tudomány kezdetei. Bp., 1963. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó. 323 p.

francia-angol szerzők valószínűségszámítással megalapozott politikai aritmetikai módszerét követte. S még azt is észrevette, hogy Hatvani gazdasági eszméi – ahogyan a XVIII. század közepén írt filozófia-tankönyvéből megismerhetők – sokkal inkább illenek a kor nyugat-európai reformgondolkozásába, semmint a német világában divatos késő feudális államtudományi merkantilizmusba. Sőt, már arra is figyelmeztetett, hogy Hatvani ezen a téren is debreceni tanáraitól, elsősorban Maróthitól nyerhetett korai indíttatást.[28] Maróthi Arithmeticája csakugyan kifejezetten „kereskedelmi számtan"; nemcsak előszavában ismertetett célja, hanem példái s módszere szerint is. A példák egynémelyike valóságos kereskedői „esettanulmány" meglehetősen bonyolult pénzügyi helyzetek megoldására; de a legegyszerűbb példák is valóságosak és életből lesettek, s mi sincs távolabb tőlük, mint a kor legtöbb német aritmetikáját elárasztó wolffiánus aufklérista fontoskodás, mely bonyolult definíciók és álaxiómák hálójával szövi át meg át a legegyszerűbb szabályokat is. Maróthi ellenben mesterséges uniformizálás helyett a gyakorlati eljárások sokféleségét hangsúlyozza. „Mert a' mennyiféle a' pénz, annyiféle lehet a' Praktika."[29]

A praktikus szempontok hangsúlyozása s érvényesítése azonban sohasem elvi, matematikai engedmények árán történik. Szénássy Barna Maróthi-tanulmányban s matematikatörténetében egyaránt kellőképpen figyelmeztetett már reá, hogy az Arithmetica e tekintetben a kor legjobb elemi fokú tankönyveivel egyenértékű. A szerző által is várt kedvező fogadtatása[30] és tartós használata pedig azt mutatja, hogy a debreceni polgároknak elég „eszük és képzeletük" volt a könyv megbecsülésére. A XVIII. században három kiadásban, csaknem 10 ezer példányban fogyott el.

A XVIII. század közepén Debrecen még az ország legnépesebb s legforgalmasabb városa volt. Jelentősége azonban gyorsan csökkent, mert a megélénkülő dunai hajózás, a központi helyzet, a kormányhivatalok s nemsokára a felsőoktatás erőteljes központosítása, a felvilágosult abszolutizmus úgyszólván minden egyes intézkedése, de még a jakobinusok pöre és a későbbi gabonakonjunktúra is Pest és Buda egyre inkább vitathatatlanná váló elsőbbségét erősítette. S a fölnövekvő Pest és Buda szellemi életében is egészen másféle mintákat s reményeket követett, mint az önerejéből felnövekedett, s Nyugattal közvetlen kontaktust kereső és találó Debrecen. A XVIII. század közepén azonban még legföljebb ha sejteni lehetett az erőviszonyok alakulását; Debrecen az önmagukban is tekintélyes hajdúvárosok

[28] Lásd: Horváth Róbert id mű p. 208.

[29] Arithmetica… 3. kiad. Debrecen, 1782. Margitai János. p. 242.

[30] Lengyel Imre – Tóth Béla: Maróthi György nevelési törekvéseinek külföldi gyökerei, p. 93. 19. levél (latinul), 1743. szept. 2.: „Most egy aritmetikát írtam, hazai nyelven; ez rövidesen elhagyja a nyomdát. Majd meglátom, milyen lélekkel fogadják polgártársaim; bizony, hacsak nem nagyon csalódom, tetszenie kellene azoknak, akikben van ízlés és szellem: bizonnyal ezt kíséreltem meg elérni." *(– Schiller Róbert fordítása)*

szellemi s gazdasági centrumában akkor még valóságos kis olasz városállamocskához hasonlóan élt, gazdasági kiváltságai s vallása egymással összeépült s egymást erősítő bástyái megett. Ebben a különös kváziteokratikus ökonómiában a Kollégium szerepe minden tekintetben óriási volt: nemcsak a város „agyvelejét”, hanem szinte „gazdaságpolitikai” centrumát is képviselte; a város két nagy XVIII. századi főbírája, Domokos Márton s Domokos Lajos azért törődött annyit s olyan intenzíven a Kollégium ügyeivel, s elsősorban a Kollégium önálló neveléstörekvései miatt harcolt Bécs olyan elszántan Debrecen ellen, ahogyan Révész Imre Domokos Lajosról szóló szép monográfiájában megmutatta.

Ez a szellemi klíma, mely kölcsönösen egymáshoz kapcsolta s emelte a XVIII. század közepén várost s iskoláját, tükröződik Hatvani professzor *Introductio ad principia philosophiae solidioris*[31] című művében. Az *Introductio* előszavában említett célja szerint a tanulóifjúságot lett volna hivatott megvédeni az ateizmus csábításától, mégpedig az angolszász világban divatos „természetes teológia” segítségével. A természetes teológia emlegetése azonban inkább csak konvenció, valójában semmi köze sincs a könyvnek ehhez a XVIII. században fölélesztett skolasztikus természetfilozófiához, mely a csillagok járásában s a bogarak lábában egyaránt Isten nagyobb dicsőségét s jóságát vélte fölfedezni. Az *Introductio* ellenben önmagáért firtatja a megismerés problémáját, s voltaképpen a divatos későkartéziánus és leibniziánus filozófiák ismeretelméleti apriorizmusát ellenző terjedelmes vitairat. A kor Nyugat-Európa-szerte divatos neobaconiánus-lockeiánus ismeretelméleteitől azonban megkülönbözteti az a nagy szerep, amit Hatvani a matematikának tulajdonít a megismerésben, vagy ahogyan ő nevezi, az „igazság” feltalálásában. A matematikát ugyanis az emberi szellem egyenesen a bizonyíthatóan igaz – vagy bizonyíthatóan hamis – állítások felkeresésére hozta létre. A matematika tárgya a bizonyítható, „abszolút biztos” igazságok megtalálása.

> „Adva vannak ugyanis bizonyos szabályok – írja a XXXIV. §-ban –, melyek által az értelem irányíttatik a rejtett igazságok kutatására, kidolgozására, azaz föltalálására. Ilyen az *algebra* és mindenféle matematikai *analízis*, melyek azelőtt ismeretlen igazságokat hoznak napvilágra, s így kiterjesztik a tudományok határait. A filozófiának azt a részét, mely az értelmet a rejtett igazságokra irányító szabályokat magyarázza: feltalálás művészetének nevezzük. Az ars inveniendi a rejtett igazságokat föltáró tudomány.”

[31] Introductio ad principia philosophiae solidioris. Cui accedit observatio elevationis poli Debrecinensis. In usus auditorum. Debrecini, 1757. Kállai. XV, 304 p., 1 t.

Ez az ars inveniendi azonban nem magukra a dolgokra, hanem az *összefüggéseikre*, a viszonyaikra irányul. És éppen így s itt jut óriási szerephez a matematika. Mert „a matematika – írja a LXXIX. §-ban – nem magukat a dolgokat vizsgálja, se nem azt, hogy a létezők ilyen vagy amolyan neméhez tartoznak-e; azt sem keresi, mi légyen egy tárgy, egy anyag, egy test s mi a természete; a matematika egyedül azt vizsgálja, milyen összefüggés áll fönn növekedni s csökkenni képes dolgok mennyiségei között”. Éppen ezért biztosabb s fundamentálisabb a megismerésben minden más tudománynál, de épp ezért önmagában elégtelen a világ megismerésére. Az anyagot a természet megismeréséhez csak a tapasztalat szolgáltathatja. S Hatvani példák özönével mutatja meg, hogyan. Mai szemmel olvasva talán ezek a példák a könyv legsikerültebb részei. Ügyesen válogatottak, frissek, majdnem mindig a korabeli nyugat-európai „érdeklődési mező” élvonalából származnak.

Erősen foglalkoztatta például az idő tájt az egész művelt világot a Föld alakjának a kérdése. Nagy érdeklődéssel figyelték Bouguer és La Condamine dél-amerikai expedícióját s tudós közleményekben, könyvekben és divatos szalonokban egyaránt ismertették s tárgyalták eredményeit. Részletesen leírja – mégpedig a legjobb forrásokra hivatkozva – Hatvani is; s a példát aztán nemcsak arra használja, hogy érdekesen demonstrálja általa a tömegvonzás tulajdonságait, hanem arra is, sőt elsősorban arra, hogy megingassa általa az a *priori elvekre* építő természetmagyarázatok hitelét. Az az egyszerű kísérlet tehát, hogy a nagy tömegek eltérítik az ingát a függőlegestől, a debreceni filozófus eszmei fegyvertárában a későkartéziánus-leibniziánus racionalizmus elleni harc eszközévé vált, Maupertuis, Clairaut, Musschenbroek és 's-Gravesande modern empirizmusának védelmében.

Maupertuis egyébként is gyakran szerepel a könyvben; lényegesen gyakrabban, mint ahogyan azt század közepi ismertsége s főleg elismertsége indokolná. Hatvani jó szemére s tájékozódásának erős nyugatiságára vall, hogy meglátta a zseniális francia jelentőségét akkor, amikor a német Aufklärung még a példátlanul lapos Wolff dicséretétől zengett.

De az *Introductio* könnyedségével, szellemességével, eleganciájával különben is sokkal inkább hasonlít a francia, angol, olasz *philosophes* gondolatvilágára, semmint az Aufklärung nehézveretű és kegyes okfejtéseire. Az antikvitáskultusz és a modern empirista természetszemlélet ötvözete, az apriorisztikus racionalista filozófiák elleni vitatkozókedv, a mennyiségi módszerek elvi és gyakorlati alkalmazása a megismerésben: megannyi jegy, mely egyértelműen kijelöli az *Introductio* helyét a korabeli nyugat-európai eszmeáramlatok közvetlen szomszédságában. Magyar földön Maróthi s Hatvani gondolatvilágának legközelebbi rokonai Bessenyei, Csokonai, Fazekas Mihály munkásságában találhatók; csak éppen amit az irodalomtörténet-írás a magyar „felvilágosodás” kezdetének vél bennük, az egy hosszú, félévszázados fejlődés vége. Egy hosszú fejlődésé, mely az Aufklärung közvetítése nélkül, közvetlenül a világosság nyugat-európai forrásaiból táplálkozott, s Bécset és Göttingát megkerülve és megelőzve elültette a hajdúsági homokon a nyugati szellemi fejlődés legfrissebb virágait. Persze a francia szellem honi hatásával foglalkozó hatalmas irodalomban hiába keressük Maróthi vagy Hatvani nevét, de Julow Viktor Fazekas-monográfiájában megtaláljuk mindkettőt a maga helyén, a könyv Debrecen „franciaságát” firtató elemző fejezetében. Bessenyei korai elhallgatása, Csokonai tragédiája, Fazekas magányossága a honi, nyugati forrásokból táplálkozó helyi világosodás elakadásával egyidejű jelenség; a természetes fejlődést fölváltotta Dugonics és Kazinczy látszólag erősen különböző, valójában azonban egyazon tőről kihajtó aufklérizmusa.

Nem a debreceni kálvinista felvilágosodás volt különben az egyetlen, amely elakadt a XVIII. század mozgalmas és sokféle ágból összetevődő honi szellemi életében. Hasonló sorsra jutott a „jezsuita felvilágosodás” is. A két szó kapcsolása talán különösen hangzik, főként azért, mert immár évszázadosnál hosszabb történészgyakorlat töltötte meg erősen negatív érzelmi értékekkel az egyik, s pozitívval a másik szót. A tudományok fejlődésében azonban a „jezsuita” szó nem okvetlenül egyenértékű a sötétség bajnokával, s a „felvilágosodás” nem föltétlenül – s főleg nem feltétel nélkül – azonosítható a tudományos gondolkozás haladásával. A jezsuita rend a XVII. század végétől a bollandisták nyomán többfelé fontos szerepet játszott a történetírás módszertani fejlődésében, s a XVIII. század húszas–harmincas éveitől kezdve fokozódó lendülettel igyekezett beépíteni oktatási rendszerébe a természettudományok legújabb eredményeit. Eduard Winter jozefinizmus-monográfiájából[32] is jól ismert, mekkora szerepük volt a jezsuita atyának a cseh felvilágosodásban; s nem csupán a newtoniánizmus egyetemi meghonosításában, hanem az induló cseh tudományos élet megszervezésében is. A magyar jezsuiták, illetve a jezsuiták kezén lévő felsőfokú oktatás is csatlakozott a nyugat-európai természettudomány legfrissebb eredményeihez a XVIII. század közepén; ezt a folyamatot Csapodi Csaba elemezte a nagyszombati egyetem tankönyvei alapján. Gondos analízisében[33] nemcsak azt állapította meg, hogy a nagyszombati egyetem filozófiaoktatásában a század közepén már helyet kapnak a kor legújabb fizikai ismeretei, hanem azt is, „hogy a magyar jezsuiták munkáiban mennyire hiányzanak a legismertebb haladó irányú német jezsuiták is… ugyanakkor, amikor angol, francia, olasz, németalföldi filozófusok neveinek egész tömegével találkozunk. A

[32] Winter, Eduard: Der Josephinismus. Die Geschichte des österreichischen Reformkatholizismus 1740–1848. Berlin, 1962. Rütten und Loening. 380 p.

[33] Csapodi Csaba: Két világ határán. Fejezet a magyar felvilágosodás történetéből. = Századok 79–80 (1945–46) No. 1–6. pp. 85–137.

természettudományokban vezető Anglia fizikai-kémiai-élettani eredményei, nyugat és dél filozófiája és fizikai ismeretei közvetlenül jutnak el a magyar jezsuitákhoz.”

A század közepén tehát sokkal kisebb területen hatott a német „közvetítés”, mint azt a közép- és kelet-európai felvilágosodás honi és német irodalma általában tanítja, akár szellemtörténeti indíttatású, mint Fritz Valjavec,[34] akár marxista, mint Eduard Winter. A jezsuiták közvetlen nyugati s itáliai kapcsolatait is tekintve elmondhatjuk, hogy a honi felsőoktatás nagy része a nyugati eszmeáramlatok hatása alatt állott. S a jelenség a jezsuiták esetében sem korlátozódik a felsőfokú oktatásra.

Mert akárcsak Maróthi *Arithmeticá*ja Debrecenben, a legkiválóbb jezsuita elemi aritmetika és algebra, Hell Miksa *Elementá*ja is[35] erősen különbözik a korabeli hasonló német tankönyvektől. Mindenekelőtt Hell a rend neokartéziánus tradícióinak megfelelően geometriai reprezentációban tárgyalja a műveleteket, még a tizedes törtekkel való számolást is; ami önmagában is jelentős teljesítmény, annál is inkább, mert a tizedes törtek akkoriban elemi tankönyvekben nemigen jelentek meg. De geometriai interpretáció segítségével vezeti be például a negatív számok fogalmát is: a szoba közepén helyezi el a tanulót, s az ajtó felé történő lépéseket pozitívnak, a helyben maradást nullának, az ajtóval ellenkező irányba történő lépéseket negatívnak számítja. Így már kezdetben hozzászoktatja a tanulót, hogy algebrai fogalmakat s műveleteket geometriailag interpretáljon, s nyilvánvaló például, hogy a pozitív és negatív „tengelyű” szobától nem nehéz megtennie az utat a koordináta-rendszerig s az analitikus geometriáig.

S csakugyan, éppen ezt az utat követte a rend tanmenete, amint például a nagy raguzai jezsuita, Ruggero Giuseppe Boscovich Rómában 1752-ben megjelent *Elementa matheseos*ában látható. Ebben a kitűnő könyvben a nagy jezsuita algebrai egyenletek alkalmazását tárgyalja geometriai problémák megoldására, követve s fejlesztve benne azt az utat, amit Newton kezdett *Arithmetica universalis*ában.

Boscovich hatását a honi tudomány fejlődésére erősen fokozta az is, hogy évekig tartózkodott a század közepén Bécsben, éppen akkor, amikor a királynő mélyreható tanügyi reformjait készítették elő tanácsosai Van Swieten vezetésével. Van Swieten, persze mint szabadkőműves, nem nagyon kedvelte a jezsuitákat, annál inkább szerette viszont őket a kegyes királynő, s végül épp matematikai s fizikai téren – amihez az orvos Van Swieten kevéssé értett – nem egyszer a tudós jezsuiták befolyása érvényesült. Boscovich körül ugyanis

---

[34] Valjavec, Fritz: Geschichte der Abendländischen Aufklärung. Wien – München, 1961. Verlag Herold. 378 p.

[35] Elementa mathematica naturali philosophiae ancillantia ad prefixam in scholi nostri normam concinnata a P. Maximiliano Höll. Tomulus I. Complectens elementa arithmeticae numericae, et literalis, seu algebrae. Kolozsvár, 1755. Typ. Acad. S. J. XVI, 304, 4. p., 1 t.

egész kis tudóskör képződött, ahová Hell is tartozott, aki akkor már udvari csillagászként Bécsben működött, s a kis tudóskör azután is együtt maradt, hogy Boscovich Milánóba távozott, ekkor sem szakítva meg azonban kapcsolatát a Habsburg fővárossal. Ennek az első „bécsi kör"-nek a tudományos színvonalát s lelkiismeretességét egyébként szépen mutatják összegyűjtött dolgozataik, amit már a rend föloszlatása után adtak ki *Beyträge zu verschiedenen Wissenschaften von einigen Oesterreichischen Gelehrten* címmel, 1775-ben.

Itt közölt egy érdekes tanulmányt Makó Pál, a Theresianum matematika-fizika professzora az északi fényről; s nem csupán a jelenség „elektromos" eredetét tételezte föl benne, hanem utalt a Nappal való összefüggésére is. Makó Pál 1763-ban, 39 éves korában került professzornak a Theresianumba, miután a rend különféle iskoláiban, köztük a nagyszombati egyetemen tanított, s működött a bécsi egyetemen is. A kiválóan képzett magyar jezsuita ennek ellenére igen gyengén tudott németül; úgyhogy mikor a Theresianumba került, ahol a tárgyak egy részét ezen a nyelven kellett előadnia, nem kis gondot okozott neki a nyelv megtanulása. Ezt az életrajzi apróságot azért érdemes megjegyezni, mert önmagában is világosan mutatja, hogy Makó neveltetésében s tudományos munkájában aligha lehetett szerepe német aufklérista hatásnak. Meglátszik ez természetesen könyveiből is, melyek mind a magyar jezsuiták közvetlen nyugati s itáliai orientációját sugározzák.

Makó termékeny szerző volt; számos logikai, matematikai s fizikai tankönyvet írt, melyek a maguk korában Monarchia-szerte, sőt Európa-szerte közkedveltségnek örvendtek.[36] Logikája, mely 1759-ben jelent meg először, csak latinul nyolc kiadást ért meg, olaszul pedig még 1819-ben is kiadták. Legnagyobb hatású s legfontosabb könyve azonban valószínűleg kitűnő infinitezimális számítása volt, a *Calculi Differentialis et Integralis Institutio* (mely 1768-ban jelent meg Bécsben), s a hozzá csatlakozó – ahogyan ma mondanánk – analitikus geometriája, a *De arithmeticis, et geometricis aequationum resolutionibus libri duo*, mely 1770-ben jött ki, úgyszintén Bécsben.

A XVIII. század második felében differenciál- és integrálszámításról s pláne egyenletekről rengeteg könyv jelent meg. S ebben a nagy nemzetközi mezőnyben Makó két könyve általános elismerést vívott ki, mindenfelé használták s idézték. Az egyenletekről szóló könyvét még a nagy Cantor is megemlíti, néhány dicsérő sor kíséretében. Részletesen és szakszerűen ismerteti persze a könyveket Szénássy magyar matematikatörténete; s kivált az analízis ügyes és sokoldalú alkalmazását emeli ki, a tetszetős mechanikai és fizikai feladatokat.

[36] Makóra vonatkozóan Wirth Lajos közölt újabb kutatási eredményeket három munkájában: Wirth Lajos: Makó Pál élete és életműve. Az ábrákat kész.: Mizsei Béla. Sajtó alá rend.: Magyar Tudománytörténeti Intézet. Jászberény, 1997. Jászberényi Tanítóképző Főiskola. 39 p.; Adatok Makó Pálról, családjáról, életművéről. In: Jászsági Évkönyv. Jászberény, 2009. pp. 98–113.; Teréziánumi vizsgatételek mechanikából, Jászberény, 2010. 32 p. *(– a szerk. megj.)*

Csakugyan, Makó infinitezimális-számítás könyve világos, tisztán meghatározott feltételekből könnyen érthető, elegáns érveléssel halad meglehetősen bonyolult alkalmazásokig; például részletesen tárgyalja a görbe viselkedését egy adott pont környezetében, az evolvens és az evoluta problémáját, a görbületi kör sugarának meghatározását s hasonló klasszikus differenciálgeometriai kérdéseket. A könyv második része az integrálszámítást tárgyalja. Két nagy problémakört különböztet meg: azokat a feladatokat, melyek megoldása – mai szóval – határozott integrál alkalmazását követeli meg, s azokat, amelyekhez határozatlan integrál szükséges. Mindkét fogalmat világosan vezeti be, s kitűnően választott példákkal illusztrálja. Világosan és explicite kimondja – s használja – az alaptételt, de természetesen a határozott integrál fogalmát nem definiálja. Mai szempontból is kielégítő azonban a határozatlan integrál – azaz a fordított érintőprobléma – tárgyalása. Persze Makó esetében is ugyanaz érvényes, amit Ch. J. Scriba Newtonnal és Leibniz-cel kapcsolatban hangsúlyozott: „igen erős még a geometriai szempont: az integrálás… még nem absztrakt eljárás, hanem formalizált geometriai művelet”.[37] De ezzel a formalizált geometriai művelettel a legkülönfélébb differenciálegyenleteket sikerült elegánsan s könnyen integrálnia, s mindig geometriai és fizikai példák tömegével világosítja meg az eljárások értelmét s indokolja bevezetésüket. A könyv a brachistochron-probléma szellemes tárgyalásával zárul, s így a kor egyik izgalmas, s a mechanikai alkalmazások szempontjából tán legfontosabb matematikai módszeréig: a variációszámításig vezeti az olvasót.

Másik könyve tulajdonképpen a síkgörbék analitikus geometriáját tárgyalja. A könyv első része első- és magasabb fokú egyenletek, valamint lineáris egyenletrendszerek általános elméletéről szól, többnyire Euler és Clairaut könyvei alapján. Foglalkozik gyökközelítő eljárásokkal is, s az egyenletpolinom egymás utáni deriválására alapuló alsó-, illetve felsőkorlát-meghatározásokkal. Mindezek – Newton *Arithmetica universalis*a és Euler közkedvelt *Algebra* könyve óta – akkor már a matematikai köztudat elemibb jellegű kellékeihez tartoztak. Éppen ezért Makó – szokásától eltérően – meglehetősen szűken bánik a példákkal. Annál több gyakorlati példával világosítja viszont meg a második, modernebb s eredetibb rész fejtegetéseit. Ez a rész az előbbiek alkalmazását tárgyalja a „geometria egyenletei” esetében. Az egyenleteket vagy derékszögű-, illetve polárkoordináta-rendszerben írja fel, vagy adott kezdeti feltételekből kell meghatározni őket. A tárgyalás a „geometriai hely” fogalmára alapul, s az írásmód is majdnem teljesen a mainak megfelelő. A hasonló külső alatt azonban az alakzatok karteziánus és newtoniánus elképzelése rejlik; az analitikus

[37] Scriba, Ch. J.: The inverse method of tangents: a dialogue between Leibniz and Newton (1675–1677). = Archive for History of Exact Sciences 2 (1964) pp. 113–137.

geometria Makó s kortársai értelmezésében sohasem válik – C. B. Boyer szavaival – „függvények grafikus ábrázolásává”;[38] a könyv nem jut el a függvény fogalmáig, noha az Institutióban Makó már szabadon s ügyesen dolgozott a „differenciálható függvény” fogalmával.[39] Csakhogy a függvény általános fogalmát sokkal nehezebb megalkotni s megérteni, mint a kalkulusban megfogalmazni két változó mennyiség összefüggését; olyannyira nehezebb, hogy az infinitezimális számítás hosszú gyakorlata nélkül a függvény általános fogalma tán meg sem teremtődhetett volna.[40]

Ha nem egyébért, már csak ezért is túlzott az a szigor, ahogyan a matematikatörténet-írás az analízis XVIII. századi megalapozási kísérleteit, köztük a Makóét is, elítéli. S nem is csak a matematikatörténészek: a filozófia- sőt az eszmetörténészek is; például Jürgen Mittelstrass, aki pedig egy vaskos könyvben[41] hosszú idő óta először próbált elfogulatlanul és többé-kevésbé a kornak megfelelő szempontok szerint közeledni az újkori tudományfejlődés bonyolult problematikájához.

Mittelstrass világosan látja, hogy a „kontinuum labirintusában” nemcsak infinitezimális megfontolások aritmetizálása árán lehet közlekedni, hanem például – amint Newton és a fiatal Leibniz tette – a mozgás fogalmi absztrahálásával is. De aztán ő is a matematikatörténészekre hallgat, s a határértéket kéri számon Leibnizen.[42] Kétségkívül, a XVIII. századi

---

38 Boyer, Carl B.: History of analytic geometry. New York, 1956. Scripta mathematica. p. 190. (The Scripta mathematica studies 6–7.)

39 Lásd újabban: Wirth Lajos: Makó Pál élete és életműve. Az ábrákat kész.: Mizsei Béla. Sajtó alá rend.: Magyar Tudománytörténeti Intézet. Jászberény, 1997. Jászberényi Tanítóképző Főiskola. 39 p. *(– a szerk. megj.)*

40 Vekerdi László: Végtelen sorok és fluxiók. Bp., 1964. Akadémiai. pp. 423–441. (A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai és Fizikai Osztályának közleményei 14.) *Online:* http://real-j.mtak.hu/497/ – *Új kiad.:* Vekerdi László: Az újkori matematika és fizika megszületése. Bp., 2010. Magyar Tudománytörténeti Intézet. pp. 190–214. (Magyar Tudománytörténeti Szemle Könyvtára 9.) A mű online változata: http://real.mtak.hu/14463/ *(– a szerk. megj.)*

41 Mittelstrass, Jürgen: Neuzeit und Aufklärung. Studien zur Entstehung der Neuzeitlichen Wissenschaft und Philosophie. Berlin – New York, 1970. W. de Gruyter. 651 p.

42 „Adjuk meg az infinitezimális háromszög Δx és Δy oldalait, mint egy h hosszúságú intervallumot az x tengelyen, illetve mint a függvényértékek különbségét az x és $x+h$ helyen. Ekkor a differenciálhányadost mint a differenciahányados határértékét a következő módon számíthatjuk ki:

$$\frac{df(x)}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Jóllehet a határérték képzésénél mind x, mind y differenciái eltűnnek, a két mennyiségből számított hányadosnak jól definiált határértéke kell, hogy legyen, tudniillik a tangens meredeksége (*sic*!). És ez a látszólagos paradoxon, amelyet Leibniznek fel kellett tárnia, kapcsolatba hozta az ő *dx* és *dy* differenciálokra vonatkozó definícióját az oszthatatlanság, illetve kiterjedésnélküliség fogalmain nyugvó fizikai atomizmussal. Leibniz előszeretettel használta alapjaiban először 1684-ben kiadott differenciálszámításának (calculus differentialis) terminológiáját, ha fizikai összefüggéseiben akarta megmagyarázni, hogy mit kell érteni a »metafizikai pont« vagy »monas« fogalmán (ellentétben az »anyagi ponttal«).
Kétségtelen, még ebben az esetben is sokkal kisebb az ilyen törekvés magyarázó ereje, mint azt Leibniz feltételezte. A differenciál fogalmának a meghatározása így is elégtelen, még ha azok a részletes magyarázatok, amelyeket hozzáfűz, és amelyeket válasznak szán a félreértésekre, világossá is teszik, hogy ebben a kérdésben az ő fogalomalkotása, ahol okosan végtelenül kis távolságokról beszél, felülmúlja kortársaiét.” *(– Schiller Róbert fordítása)*

matematikusoknak fogalmuk sem volt a „delta epszilon” formalizmusról, s „végtelen kicsiny” mennyiségeik semmiképpen sem szoríthatók a standard eljárás határértékeibe. Makó például különböző rendű végtelenek hierarchiáját vezeti be, s a kalkulus megalapozásában két efféle tartomány kapcsolatára, helyesebben a másik végtelenre helyezi a hangsúlyt. Először is azt mutatja meg, hogy végtelen kicsiny mennyiség könnyen elképzelhető, sőt, egyenesen kínálkozik a geometriai szemléletből.

> „Ha ugyanis egy folytonos geometriai mennyiséget vég nélkül kell osztani, ésszerű benne föltételezni bármely előre megadhatónál kisebb részeket. S akkor elképzelhetjük, hogy ha két nem egyenlő mennyiség folytonosan közeledik az egyenlőséghez, különbségük végtelenül csökken, úgyhogy bármely előre megadhatónál kisebb lesz.”

Azaz végtelenül kicsi, infinitezimális, kisebb, mint bármely pozitív szám. S ezekkel az elképzelt infinitezimális mennyiségekkel ugyanúgy számolni lehet, mint a közönséges véges számokkal, ugyanolyan szabályok érvényesek reájuk. Persze egy véges szám mellé állítva az infinitezimális mennyiség éppen úgy eltűnik, mint ahogyan a véges mennyiség eltűnik a végtelen nagy mellett. A végtelenek nagy hierarchiájában minden mennyiséggel csak a saját rendjén belül lehet az algebra szabályai szerint számolni. De ha efféle egyszerű szabályokban megállapodunk, akkor már a változó mennyiségek infinitezimális növekményeivel, a differenciálokkal könnyen dolgozhatunk.

A szerzők véleménye persze meglehetősen eltér ebben a tekintetben – figyelmeztet rá Makó – s mindenekelőtt az Enciklopédia „differentiale” címszavát ajánlja az olvasó figyelmébe. S hogy mindjárt példát is adjon egy kissé különböző felfogásra, idézi Boscovich – d’Alembert limes-felfogása felé hajló – véleményét.

Persze ma, a matematikai logika, az absztrakt algebra és a nem arkhimédészi számrendszerek meredek kerülőin mesterien fölépített nem-standard analízis ismeretében épp olyan anakronizmus lenne ennek az elődjét vélni a XVIII. századi megalapozási kísérletekben, mint a „delta epszilon” formalisztikát kérni számon rajtuk. A nem-standard analízis a XX. század közepének jellegzetes terméke – azért is igyekezett még a kalkulust is az absztrakt algebrára beolvasztani –, nem a XVIII. század közepéé. Másféle matematikai nyelven beszéltek ők másféle matematikai struktúrákról. Az azonban kétségtelen, hogy a nem-standard analízis birtokában újra kell írni az infinitezimális számítás történetét. Mert teljesen igaza van Abraham Robinsonnak, a nem-standard analízis megalkotójának, hogy „egy tárgykör történetét mindig későbbi eredmények fényében írják meg. Több mint fél évszázada a differenciál- és integrálszámítás történeteit abban a hiszemben írták, hogy még ha a végtelen kicsi és végtelen nagy számokat tartalmazó számrendszer ötlete ellentmondásmentes lenne is, akkor sem lenne semmi haszna a matematikai analízis kiépítése szempontjából. Következésképpen módfelett szigorúan ítélték meg Leibniz s követőinek a gondolatait, s elnézték a botlásokat a határérték korai képviselőinek.”[43]

Így ítélte meg a matematikatörténet-írás Makó könyvét is, nemstandard megalapozása miatt, a kelleténél szigorúbban. Az új irányban természetesen megnő a könyv értéke, s Makó a korabeli matematika kompetens, kiváló professzorai közé kerül. A jezsuita felvilágosodás egyik láncszemeként közvetlenül nyugat-európai s itáliai forrásokhoz vezette a honi művelődést. Egy nagy nemzetközi szervezet részeként ő is, akár a debreceni Kollégium diákjai s professzorai, a kálvinista „internacionálé” részeként, helyzeti előnyét hasznosította, s persze tehetségét, és segített hozzáigazítani a honi művelődés el-elkéső óráját a nyugat-európai időhöz. Elsőrendű szerepe volt abban, hogy Bécs a XVIII. század második felében a felvilágosodás egyik centrumává változhatott, egy időre tán a „legfranciább” fővárossá Párizs után. Akárcsak a nagy Boscovich, Hell, a tudós társaik, ő is segített megteremteni azt a légkört, ahol Bessenyei fogékony elméje közvetlenül érintkezhetett a nyugat-európai XVIII. század fényeivel. Makó alakja s munkássága nélkül a magyar felvilágosodás épp annyira megérthetetlen, mint például a testőrírók Kollár Ádám nélkül. S akár Maróthi, Hatvani s a debreceni Kollégium története, Makó, Hell s a jezsuita felvilágosodás is arra figyelmeztet, hogy az irodalomtörténet-írás koordinátái önmagukban elégtelenek a honi művelődés vagy akár a honi irodalom történetének megértéséhez.[44]

---

43 Robinson, Abraham: Non-standard analysis. Amsterdam, 1966. North-Holland. XIII, 293 p. (vonatkozó rész: p. 260.)

44 Ehhez témakörhöz kapcsolódnak még Vekerdi László kötetben megjelent írásai közül az alábbiak: Önkény és értelem: a hazai ismeretterjesztést előkészítő tudományos törekvések és gazdasági tényezők a XVIII. században. = Valóság 19 (1976). No. 4. pp. 62–73.; A természettudomány a Tudós Társaság terveiben. = Századok 108 (1974) No. 4. pp. 807–835. Mindkettő megjelent a „A Tudománynak háza vagyon...”. Reáliák a Régi Akadémia terveiben és működésében c. kötetében (Piliscsaba, 1996). Valamennyit kiegészíti „A matematika Magyarországon való meghonosodásának és fejlődésének főbb irányai” c. tanulmánya, amely egyrészt E. Kofler magyarra lefordított matematikatörténetének függelékében, másrészt „A magyar matematika történetéből. A klasszikus századok magyar számolómesterei a középkortól a 19. század közepéig” c. tanulmánykötetben jelent meg 2000-ben. *(– a szerk. kieg.)*

Hatvani István professzor és a magyar statisztikai tudomány kezdetei[45]

Horváth Róbert könyvéről

A magyar statisztikai tudományok történetének feltárása – jórészt éppen e monográfia[46] szerzőjének a munkássága által – a magyar tudománytörténet-írás egyéb ágaihoz képest az utóbbi időkben komoly fellendülést mutat. Ez a könyv a magyar tudomány egy sokat vitatott, legendák tömegével körülvett alakjának a megértéséhez segít hozzá statisztikai munkásságán keresztül. A könyv voltaképpen jóval többet nyújt annál, amit a címe ígér. Hatvani István statisztikai munkásságát a kor egész valószínűségszámítási-statisztikai műveltségébe ágyazza be, kinyomozza Hatvani összes lehetséges forrásait, részletesen ismerteti ezeket és Hatvani munkájának hozzájuk való viszonyát, végül részletesen tárgyalja mindazokat a közvetlen és közvetett hatásokat, amik Hatvani művéből a kialakuló magyar statisztikai tudományra irányultak.

Az I. fejezetben szerző rövid áttekintést ad a statisztika kezdeteiről és XVIII. századi fejlődéséről. Helyesen emeli ki ennek a tudománynak a tőkés termelési mód és kapitalista társadalom fejlődésével szoros párhuzamban történő kialakulását, s így elsősorban a reneszánsz kori észak-itáliai városok és a holland-angol kereskedelmi fejlődés jelentőségét.

Ettől a tisztán kapitalista fejlődés talaján kialakult *politikai aritmetikai* iránytól világosan elkülöníti szerző a statisztikai tudomány másik gyökerét jelentő *leíró államtudományt*, amely szemben az előzővel, elsősorban a fél-feudalista német államokban keletkezett, és azok hivatalnok-apparátusának fejlődésével perhuzamosan kristályosodott ki. Utóbbi irány a politikai aritmetika forradalmi, a kapitalista társadalom életviszonyainak az objektív vizsgálatára alkalmas módszereivel szemben „bár kapcsolatban volt a reneszánsz és a felvilágosodási áramlat filozófiájával, mégsem volt teljes egészében haladó jellegű, vagyis nem szolgálta teljesen a kapitalizmusgazdasági és társadalmi alapjainak gyarapítását, hanem feudális maradványokkal volt terhes – ami ideológiailag is kifejezésre jutott a középkori skolasztika egyes tanainak az átvételében”.[47]

---

[45] Forrás: Vekerdi László: Horváth Róbert: Hatvani István professzor (1718–1786) és a magyar statisztikai tudomány kezdetei. Közgazdasági és Jogi Kiadó. Bp., 1963. (Ism.) = Magyar Tudomány 71 (Új foly. 9.) (1964) No. 4. pp. 269–271.

[46] Horváth Róbert: Hatvani István professzor (1718–1786) és a magyar statisztikai tudomány kezdetei. Bp., 1963. Közgazdasági és Jogi Kiadó. 323 p., 2 t.

[47] Vö. Horváth Róbert művével pp. 20–21.

Ennek a tükrében válik jelentőssé szerző azon megállapítása, „hogy az a gazdasági és társadalmi fejlődés, amelyen a külföldi, elsősorban németországi és ausztriai leíró irány s a magyar leíró irány egyaránt felépült, lényegesen közelebb esett egymáshoz, mint a politikai aritmetikai tanítások megfelelő külföldi és hazai gazdasági és társadalmi alapjai”.[48]

Azonban, amint az a Hatvani életét és korát ismertető II. fejezetből kitűnik, Debrecen és a debreceni kollégium, amivel Hatvani neveltetése, működése és egész élete összeforrott, bizonyos értelemben kivételt képez a magyarországi társadalmi és kulturális fejlődés egészével szemben. Debrecen paraszti sorból felnőtt kereskedő-iparos polgárságának kálvinista kollégiuma a XVIII. század közepén még elsősorban svájci és holland hatások alatt áll. Hatvani legnagyobb jelentőségű mestere, *Maróthi György* is Svájcban és Hollandiában végezte tanulmányait, maga Hatvani a bázeli egyetemen tanult orvostudományt, teológiát és matematikát, s az utrechti és leydeni egyetemeken töltött hosszabb időt. Bázelben *Bernoulli János* és *Dániel* voltak matematika-professzorai, de szerző szerint igen valószínű, hogy már bázeli tanulmányai előtt, még Debrecenben felhívta Hatvani figyelmét professzora, Maróthi György Bernoulli Jakab alapvető, 1713-ban megjelent Ars coniectandi-jára, ami döntő hatással volt Hatvani statisztikai munkásságára. Ugyancsak Maróthi útján ismerhette meg Hatvani s’Gravesande munkáit is, amik a valószínűségszámítás és a filozófia közötti összefüggésről vallott nézetei szempontjából Bernoulli Jakab műve mellett a legnagyobb hatással voltak rá.[49]

Hatvani ugyanis a valószínűségszámítás Bernoulli Jakab által lerakott alapjain felépített statisztikai módszert – amit Debrecen gyermekhalandósági adatainak az analízise kapcsán mutat be[50] –, mint a megismerés egyik formáját veszi fel filozófiai bevezetésnek szánt könyvébe (címe: *Introductio ad principia philosophiae solidioris*),[51] s pontosan körvonalazza a módszer lehetőségeit és határait.[52]

Mégis, Hatvani ezt a haladó, új elvekre épülő tudományt nemcsak hogy nem nevezi nevén – politikai aritmetikának –, hanem mint a „Medicina” területébe tartozó tant, az emberről szóló filozófiai fejtegetések közé sorolja. Ezen a „formális megoldáson keresztül ezt az új tudományt a racionalista filozófia konvencionális rendszerébe erőszakolta be, és a Praefatio-ban a tudományos szerénységre való hivatkozással tér ki e kérdés világosabb

48 Uo. pp. 27–28.
49 Uo. pp. 113–114.
50 Horváth műve III. fejezete
51 Stephanus Hatvani: Introductio ad principia philosophiae solidioris ... Debrecini, 1757. Georgium Kállai. XV, 303 p., 1 t. *(– a szerk. megj.)*
52 Horváth műve IV. fejezete

exponálása elől.”[53] Szerző ezt az ellentmondást a korabeli szigorú politikai és egyházi cenzúrával véli magyarázhatónak, és ezt a feltevését számos komoly érvvel támasztja alá.[54]

Ez az egyetlen lényeges pont, ahol talán nem érthetünk teljesen egyet szerző interpretációjával. Kétségtelen, hogy a kétféle, a politikai helyzet és a kálvinista ortodoxia által képviselt nyomás Hatvanira is komoly súllyal nehezedett, de Hatvani bonyolult társadalmi-művelődési körülmények komplex eredőjében élt, s a kálvinista ortodoxiához való viszonya távolról sem tekinthető egyértelműen haladónak. Az ortodox teológiához való ragaszkodása élete végén a haladást képviselő főbíró, *Domokos Lajos* és a kollégium professzorai között az oktatási reform körül kirobbant súlyos válságban a visszahúzó, elmaradt nevelési elveket képviselő professzorok mellé állítja Hatvanit. Szerző több helyen is említi ezt a Domokos Lajos és *Sinai Miklós* közt lezajlott küzdelmet, de nem vizsgálja meg részletesebben, mit jelentett Hatvani állásfoglalása filozófiai felfogása szempontjából. Igaz, hogy ez a harc sok évvel az *Introductio…* megjelenése után tört ki és zajlott le, de Hatvani már az *Introductio*-t is „atheizmus”, a „szkepticizmus” és a „naturalizmus” elleni védelemként szándékozott diákjai kezébe adni. „Atheizmus” alatt itt azt a természettudományokkal való megegyezést kereső szelíd teológiát kell érteni, amit pl. *John Toland* képviselt, aki ellen Hatvani név szerint is erélyes támadást intéz[55] Hatvani kálvinista teológus volt, s filozófiai álláspontját elsősorban ez a tény determinálta.

Ebből a szempontból kell megítélni a kartéziánizmussal szembeni állásfoglalását is. Hatvani valóban sok részletet vesz át a kartéziánizmusból, azonban egészében véve mégsem nevezhető kartéziánusnak, mint azt szerző s előtte *Molnár Ágnes* a debreceni felvilágosodásról szóló szép tanulmányában állította. Ellenkezőleg, Hatvani mint „rejtett Platonistákat” leplezi le azokat, akik mint *Descartes*, *Leibniz* és *Malebranche* a „velünk született ideák” álláspontjával valamiképpen összefüggésbe hozhatók[56] Azonban Hatvani nem egyszerűen a *Locke*-i empirizmus nevében utasítja el a velünk született ideák fogalmát, állásfoglalása sokkal árnyaltabb, s anélkül, hogy megnevezné, erősen hajlik *Berkeley* filozófiája felé. Hatvani szerint ugyanis az elme magukat a gondolatokat („ideas”) közvetlenül észleli, minden más közvetett észleléssel szemben. S a matematikának éppen azért szán olyan kiemelkedő szerepet a megismerésben,[57] mert a matematika magukkal a gondolatokkal foglalkozik (Quoties proinde in disciplinis res est cum solis Ideis, quae immediate percipi

[53] Uo. p. 149.
[54] Uo. pp. 151–153.
[55] Vö. Hatvani: Introductio... p. 4.
[56] Vö. Hatvani: Introductio... p. 87.
[57] Vö. Hatvani: Introductio... p. 55.

possunt, ibi haberi potest certitudo simplex, sou Mathematica. *Introductio*…).[58] Éppen ebben áll szerinte a matematikai bizonyosság lényege (Certitudo Simplex seu Mathematiea, illic solum habet locum, ubi res est cum solis Ideis, non autem cum rebus ipsis. *Introductio*…).[59] Nagy túlzással azt lehetne mondani, hogy Hatvani ebben a tekintetben „kantiánus" jóval Kant előtt, s a „szintetikus a priori" ítéleteket sorolja a matematika tárgykörébe.

Ez a szubjektív idealizmus felé hajló álláspontja határozza meg a valószínűségről adott definícióját is: „A valószínűség tehát az ismeretnek olyan mennyisége, amelyben a kétségtelen meggyőződéshez több vagy kevesebb dolog hiányozhatik."[60] Összevetve ezt a definíciót a matematikai bizonyosságról fentebb idézett meghatározásával úgy véljük, hogy Hatvaninál a valószínűség fogalma éppen annyira „szubjektív kategória", mint Bernoullinál. Az az érzésünk, hogy szerző kissé túlértékeli Hatvani állásfoglalásának elméleti tisztaságát és jelentőségét. A határérték fogalmának a tisztázása előtt a valószínűségszámítás – s vele a statisztika elmélete – nem volt biztos alapokra helyezhető, de *Jacob Bernoulli*, *Pierre Rémond de Montmort* és *Abraham de Moivre* éppen a XVII. század végén, a XVIII. század elején nagy fejlődésnek indult sorelmélet segítségével mélyebben hatoltak ennek a diszciplínának a lényegébe, mint utánuk *Laplace*-ig és *Gauss*ig bárki más.

Nagy jelentőségűnek látjuk viszont szerzőnek azt a megállapítását, milyen józan reális érzékkel alkalmazza Hatvani a valószínűségelméletet gyakorlati kérdésekre. Szerző részletesen ismerteti és méltatja Hatvani debreceni gyerekhalandósági táblázatait és a belőlük levont következtetéseit s a halálokok összetett valószínűség segítségével történő mintaszerű analízisét.

A könyv V. fejezete Hatvani politikai aritmetikai munkásságának a hatását tekinti át igen részletesen, elsősorban Hatvani tanítványainak a munkáin keresztül. Ez a fejezet igen gazdag és szerteágazó anyagot sűrít magába, s alapja lehetne egy ilyen tárgyú, külön monográfiának.

Az utolsó – VI. – fejezet még egyszer összefoglalja Hatvani statisztikai munkájának a lényegét és jelentőségét, s részletesen összehasonlítja *Petty* és *Süssmilch* munkáival. A könyv függeléke kitűnő fordításban hozza az *Introductio*… előszavát, tartalomjegyzékét és statisztikával foglakozó harmadik fejezetét, s francia és orosz nyelvű összefoglalás teszi az alapos könyvet külföld felé is hozzáférhetővé.

---

[58] Uo. p. 104.
[59] Uo. p. 109.
[60] Horváth id. műve p. 282.

Magyar természettudományi és matematikai iskolák[61]

Az 1880-as évektől 1945-ig

Az újkori természettudomány többnyire nagy mesterek köré tömörült, többé-kevésbé szervezett műhelyekben alakult ki és nőtt naggyá. Galilei pádovai köre, az Accademia dei Lincei, később a firenzei Accademia del Cimento, Mersenne atya társasága, a francia akadémia, a Royal Society, Leibniz berlini, Péter és Katalin pétervári akadémiája legfontosabbak a nagy műhelyek között, amelyekben az újkori matematika és természettudomány megszületett.

A XVIII. és XIX. század során azután egymás után keletkeztek kisebb jelentőségű intézmények és társaságok, amelyek mind értékesen elősegítették a természettudományok gyors fejlődését.

Magyarország ebben a tekintetben messze elmaradt nemcsak a nagy országok, hanem közvetlen szomszédai mint Csehország, Horvátország és elsősorban Ausztria mögött is. Akadtak kiváló tudósaink, de nem működtek hazai tudósokat összefogó és új eredményeket hozó iskolák. A felsőoktatási intézmények – mint a nagyszombati egyetem, a debreceni főiskola, az erdélyi és dunántúli kollégiumok – még pedagógiai funkcióik ellátására is egyre kevésbé voltak alkalmasak, nemhogy a tudományos kutatás eredményeihez hozzájárulhattak volna.

Mitterpacher József – a felső matézis tanára a nagyszombati egyetemen – 1775 végén készült jelentésében a következőket írja: „Matematikai taneszközeinkben annyira híjával vagyok, hogy az egész múlt esztendőn keresztül körző és vonalzó nélkül kellett előadásaimat megtartanom.” Az egyetem könyvtárából Newton és Euler alapvető művei hiányzanak a XVIII. század végén.

A XVIII. század vége, XIX. század eleje a magyar köznemesség számbeli és életszínvonalbeli emelkedésének a periódusa. II. József összeírásában kb. 330 ezer nemes szerepel, 1839-ben már 680 ezer. Nyugaton mindenütt a polgárság szaporodik és veszi át a vezetést, nálunk ez az osztály, s a megfelelő iparos, kereskedő, mérnök stb. foglalkozások nem alakulnak ki. A városi ipar kifejlődését akadályozza a vármegyei rendszabályok és a

[61] Forrás: Vekerdi László: Magyar természettudományi és matematikai iskolák. = Látóhatár 15 (1965) No. 1. pp. 169–178.

céhek továbbélése. Városaink mezővárosok maradnak. Magyarországon a XIX. század elején alig négyszázezer főnyi a városok összlakossága. Bécsnek önmagában 333 ezer lakosa volt. Másutt mindenütt a nagyvárosok polgársága irányít. Magyarországon a középnemesség hangadó, vármegyék vezetői. Ennek a rétegnek a képzését egy második, 1806-ban kiadott *Ratio Educationis* szabályozta. Ebből kimaradtak az első, Mária Terézia-féle *Ratio Educationis* felvilágosodásra jellemző természettudományos-matematikai tárgyai, ezekkel szemben a tatár nyelvet és a nemzeti öntudat nevelését hangsúlyozza. A rendi nacionalizmus a nemzeti dicsőség álképzetébe ringatta magát, és egyre jobban elszigetelte Magyarországot Nyugat-Európa és más országok rohamléptekben haladó tudományos-technikai fejlődésétől, s önelégült kulturálatlanságában azt is lerombolta, amit a XVIII. századvég felvilágosult jószándékú kompilátorai felépítettek.

Ezen az állapoton a *Magyar Tudós Társaság*, a Magyar Tudományos Akadémia elődje nem sokat segített. A XIX. század közepének szomorú helyzetére igen jellemzőek Kemény Zsigmond 1853-ban írt sorai:

> „…aki kenyértudományra szánja magát, és szorgalma által remél kényelmet, vagyonosságot és független létezést, józan ésszel nem csünghet azon csal-álmon, miként vágyait, idegen irodalom segélye nélkül, csak meg is közelíthetné. Kétségtelen, hogy alig van a tudományoknak oly ága, mely nálunk európai színvonalon állana, s minden haladásaiban, minden foglalásaiban s kifejlődésének minden ösvényein a magyar irodalom által kísértetnék. Arról pedig szó sincs, hogy indítványozók lennének valahol és volna tudomány, mely új korszakát nekünk köszönhetné”.[62]

Kemény Zsigmond szavai talán túl szigorúaknak tűnnek és hivatkozhatnánk vele szemben olyan tudósokra mint a Bolyaiak, Kitaibel Pál, Weszprémi István, Semmelweis Ignác vagy Linzbauer Ferenc Xavér. Ezeknek a nagy embereknek a munkássága sokszor tragikus módon elszigetelt maradt, nem volt előzménye és folytatása, és az ország matematikai-természettudományos művelődésének a szempontjából távolról sem volt olyan jelentőségük, mint amit megérdemeltek volna. Ahhoz, hogy folyamatos természettudományos kultúra jöhessen létre, először meg kellett teremteni a természettudományos műveltség *lehetőségét*. Ezt a hatalmas munkát a XIX. század utolsó harmadának tudósgenerációja végezte el.

[62] Lásd erről részletesebben Vekerdi László önálló kötetében: Vekerdi László: A Tudománynak háza vagyon. Reáliák a régi Akadémia terveiben és működésében. Sajtó alá rend.: Gazda István. Piliscsaba – Bp., 1996. MATI – TKME. 227 p. (Magyar Tudománytörténeti Szemle Könyvtára 1.) (– a szerk. megj.)

A természettudományi és matematikai nevelés megteremtése

A szabadságharc leverése nem tudta megakadályozni a nemzet szépen megindult polgári fejlődését, és a kiegyezés után nagy ipari fellendülés kezdődött. A konszolidáció tőkét vonzott az országba és nagy vállalkozások kora következett. Mintha csak most akarta volna behozni az ország évszázados rendi elmaradottságának a hátrányait: egymás után létesültek a kisebb-nagyobb gyárak, gyors ütemben épült az ország vasúthálózata, lecsapolták a mocsarakat, világvárossá nőtt Budapest, az 1896-os millennium kicserélt, a konjunktúra szédületében forgó országot talált. Legkülönösebb módon keveredtek itt a negyvennyolcaskodás, császárhűség, nemesi gőg, kétes pénzügyi spekulációk, hivatali kötelességtudás és korrupció, önfeláldozó munkaszeretet és léha semmittevés. Ebben a kapitalista fellendülésben alakultak az ország első tudományos iskolái: a Műegyetemen, a pesti és a kolozsvári egyetemen.

A Műegyetem fejlődése elválaszthatatlanul összefügg a magyar gépipar és elektromos ipar kialakulásával. Mechwart András, a Ganz és Társa vezetője a nyolcvanas évek elején Zipernowsky Károlyt (1853–1942) bízta meg az újonnan felállított villamossági gyára vezetésével. Zipernowsky kitűnő munkatársakat talált Déri Miksában és Bláthy Ottóban. Ők hárman, a magyar elektrotechnika nagy triásza, dolgozták ki 1884–85-ben a párvonalas kapcsolású nagyfeszültségű transzformátoros elosztórendszer elvét. Ez tette lehetővé az elektromos energia gazdaságos felhasználását. A transzformátor, a nagy triász közös alkotása meghódította a világot, a Ganz-gyár egyre-másra kapott a világ legkülönbözőbb részéről rendeléseket erőátviteli rendszerek tervezésére.

Bláthy Ottó (1860–1939) tevékenysége az elektrotechnika csaknem minden területére kiterjedt. Már mint kezdő felfedezi az elektromágneses hysteresis és a mágneses indukció közötti összefüggést, hét évvel megelőzte az irodalom idevonatkozó első közleményét. A lebegő dugattyús önműködő hidraulikus turbinaszabályozó gondolata és első gyakorlati alakja is. Bláthy alkotása. A Ganz és Társa a múlt század kilencvenes éveitől kezdve vízi erőműveiben világszerte nagy sikereket ért el a Bláthy-féle turbinaszabályozóval. Ehhez járult a közismert Bláthy-féle váltakozó áramú wattszámláló, az önműködő elektromos feszültségszabályozó, a váltóáramú generátorok párhuzamos kapcsolásának elve, az elektromos generátorokban a növekvő terheléssel fellépő ún. terhelési veszteségre vonatkozó észleletei – amiket még mind a múlt század végén dolgozott ki. Bláthy eredményei megszerezték a magyar elektrotechnika számára a világ elismerését.[63]

[63] Lásd újabban (2013): Antal Ildikó: Bláthy Ottó külföldi szabadalmai. Online: www.kaleidoscopehistory.hu *(– a szerk. megj.)*

Mindennél is nagyobb jelentőségű, hogy Bláthy és Zipernowsky működése kötelező nívót hozott létre itthon. Munkatársaik és tanítványaik – akik között olyan nevek találhatók, mint Kandó Kálmáné, Verebélÿ Lászlóé, Boleman Gézáé biztosították, és a tanítványok tanítványain keresztül máig fenntartották a magyar elektrotechnika magas elméleti és gyakorlati színvonalát.

Bláthy és Zipernowsky mellett a kialakuló magyar ipar és műszaki oktatás legnagyobb alakja Bánki Donát (1859–1922) volt. Bánki már műegyetemi hallgató korában érdeklődött a belsőégésű motorok iránt. Ő is, mint Bláthy, a Ganz és Társa Vasöntő- és Gépgyárban helyezkedett el fiatal mérnökként 1882-ben. A kilencvenes évek elején kapcsolódott be a műegyetemi oktatásba, ahol Csonka Jánossal, a műegyetemi gépműhely vezetőjével gázmotorok szerkesztésével foglalkozott. Bánki elméleti tudása és Csonka nagy gyakorlati tapasztalata a találmányok hosszú sorát eredményezte, közöttük talán a Bánki–Csonka-féle karburátor a legjelentősebb. Ez a találmány tette lehetővé a nagy fűtőértékű folyékony tüzelőanyag motor-üzemanyagként való felhasználását és így alapvető az autóipar kialakulása szempontjából.

A század legvégén, amikor a műegyetem gépszerkezettani, majd hidraulika és hidrogépek tanszékére hívják meg. Bánki Donát érdeklődése a belsőégésű motorok után a turbinák felé fordul s idevonatkozó eredményeivel csakhamar világszerte elismerést vált ki. Egyetemi előadásait páratlan gonddal készítette elő, állandóan beszámolt saját kísérleteiről és ismertette a szakma legújabb eredményeit.

A magasrendű mérnökképzésnek, amit a századforduló műegyeteme nyújtott, a matematikai előképzés biztosította az alapját. Megteremtése Kőnig Gyula (1849–1913) érdeme. Kőnig Gyula műegyetemi tanári működését (1847–1905) nehéz lenne túlértékelni. Ő a modem, európai színvonalú matematikai oktatás és kutatás megteremtője Magyarországon. Orvosnak készült, idegélettani disszertációt nyújtott be Helmholtznál Heidelbergben. Valódi szellemi bölcsője azonban a berlini egyetem volt, amit Weierstrass és Kronecker szemináriumai ebben az időben a világ egyik matematikai centrumává tettek. Kőnigre különösen Kronecker volt nagy hatással. Szorosan Kronecker munkásságához kapcsolódik élete egyik főműve, *Az algebrai mennyiségek általános elméletének alapvonalai* (Bp., 1903). A hatalmas, hatszáz oldalas könyv az algebrai számelmélet legjobb korabeli összefoglalása, és sok helyen bevezet olyan fogalmakat és formulázásokat is, amelyek csak később, a halmazelméleti módszerek általánossá válásával terjedtek el a külföldi szakirodalomban.

Másik fontos könyve rendszeres egyetemi előadásaiból nőtt ki, az analízis felépítését tárgyalja: *Analízis. Bevezetés a matematika rendszerébe. I.* (Bp., 1887). A könyv az alapok egzakt megismertetését hangsúlyozza s ez a tradíció tanítványain, Kürschák Józsefen és Rados Gusztávon s az ő tanítványaikon keresztül sokáig élt a műegyetemen és lehetővé tette a magas színvonalú magyar mérnökképzést.

Kőnig hatása nem korlátozódott a mérnökképzésre, mert a bölcsészkaron tanárjelölteknek is előadott. Ezekben az előadásaiban a matematika legkülönbözőbb területein kalandozott. A számelmélet, az algebra s az akkoriban születő nagy diszciplínák: a halmazelmélet és Hilbert axiomatikája mind szerepeltek felolvasásaiban. Utóbbi kettő magát Kőniget is egyre inkább vonzotta. Az 1904-es heidelbergi matematikus-kongresszuson saját kárán tapasztalhatta, milyen útvesztőket rejt a halmazelmélet. Mint a kor nagy matematikusai közül annyian, ezentúl ő is fáradságot nem kímélve dolgozott, hogy rendet teremtsen a halmazelmélet által megzavart matematikai alapproblémák között.

Úgy látta, arra van szükség elsősorban, hogy magát a logikus gondolkodást helyezzük biztos alapra. Erről a kísérletről szól utolsó, már fia, Kőnig Dénes által sajtó alá rendezett és kiadott poszthumusz könyve, a *Neue Grundlagen der Logik, Arithmetik und Mengenlehre* (Leipzig, 1914). A könyvben centrális szerepet játszik az ellentmondásmentességre felépített gondolkozási tartomány fogalma. A logika, aritmetika és a halmazelmélet mind egy-egy ilyen gondolkozási tartománnyal reprezentálhatók, s az így körülírt és Kőnig által *Cantor-féle halmazoknak* nevezett halmazok mentesek a halmazelmélet zavaró ellentmondásaitól.

Kőnig munkásságával a matematika fejlődése elérte végre Magyarországon is a tartós, folyamatos haladás lehetőségét. A műegyetem mellett jelentős szerepe volt ebben az 1872-ben alapított kolozsvári egyetemnek. Az új egyetem követte az ország technikai-gazdasági fellendülését A matematika professzora, Réthy Mór is, technikai probléma során felmerült mozgásegyenlet vizsgálatát tűzte ki legtehetségesebb tanítványa, Vályi Gyula (1855–1913) disszertációs témájául. Ez volt az első, magyar egyetemen készített, jelentős önálló eredményeket tartalmazó matematikai doktori értekezés. Vályi később, mint a kolozsvári egyetem matematika professzora, kitűnően felépített, szellemes előadásairól volt híres. Állandóan romló látása ellenére is lépést tartott ezekben az előadásokban kora legfrissebb szakirodalmával. Az első világháborút közvetlenül megelőző időkben kitűnő matematikusok működtek hosszabb-rövidebb ideig Vályi mellett Kolozsváron: Fejér Lipót, Riesz Frigyes és Haar Alfréd, akik később világhírt szereztek a magyar matematikának.

Kolozsváron indult és bontakozott ki a magyar tudomány egyik legnemesebb alakjának, Herman Ottónak (1835–1914) a munkássága. Nem volt egyetemi ember, sohasem kapott katedrát, hatása mégis többoldalú és mélyebb volt a magyar biológia fejlődésére, mint bárkié addig vagy azóta. Mint a kolozsvári Erdélyi Múzeum segédőre kezdte meg 1867-ben híressé vált madár-megfigyeléseit a mezőségi tavakon. Vonatkozó munkái sokkal többek egyszerű megfigyeléseknél. Az egész tó életét írja le, fajok egymáshoz és környezetükhöz való viszonyát, a létért vívott harcot, a kiválogatódás fajformáló erejét. Azt a dinamizmust keresi, ami a természet nagy egyensúlyán keresztül lehetővé teszi a fejlődés végtelen láncolatát. Ugyanez a dinamikus szemlélet érvényesül nagy, háromkötetes pók-könyvében is, abban először kísérelte meg a magyarországi pókok biológiai rendszerét megállapítani. Ez a szemlélet tette Herman Ottót a darwinizmus egyik legnagyobb harcosává.

Magyarországon, ahol a katolikus és református klerikalizmus egyaránt annyira erős volt, nem könnyen ismerték el a darwinizmus igazságát. 1878-ban Haynald Lajos kalocsai érsek – egyébként maga is kitűnő botanikus –, élesen kirohant Darwin elmélete ellen és a gyanús új tanokkal szemben a tiszteletre méltó és megbízható régi felfogáshoz való visszatérést követelte. Herman az általa alapított és szerkesztett *Természetrajzi Füzetek*ben erélyesen és bátran utasítja vissza a nagyhatalmú érsek áltudományos érveit. „A tanok tiszteletre méltósága – írja – nem az ősiségben, hanem az igazságban gyökerezik."

Ez az igazság Herman számára nem valamilyen elvont fogalom volt. Az objektív valóság megismerhetőségébe vetett hite jelentette a vallás iránti közömbösséget és a szociális haladás kötelességének a felismerését. Nagy pók-könyvének az írása közben Domoszlón a kendertermelés mellett agitált, Apatinban iparkiállítást szervezett és olvasókört, s ő volt nálunk a tüdőbaj elleni küzdelem egyik legelső és leglelkesebb apostola. Ez az ember iránti nagy érdeklődése fordítja egyre inkább munkásságát a néprajz felé. A két nagy ősfoglalkozás: halászat és pásztorélet természetrajzához végzett gyűjtésének első nagy eredménye, az 1887-ben megjelent *A magyar halászat könyve* ma, a mikroszociológia virágkorában talán még frissebb, mint megjelenése idején volt. Az 1891-ben Budapesten tartott II. Nemzetközi Madártani Kongresszus fényes sikere arra bírta a kormányt, hogy Magyar Ornithológiai Központot állítson fel, amelynek a vezetésével 1894-ben Herman Ottót bízták meg. Újra ifjúsága tematikájához tért vissza, miután bejárta észak madárhegyeit és a biológia csaknem egész területét. Gondos megfigyelései és képszerű leírásai tovább élnek a magyar természetrajzi irodalom legjavában és Homoki-Nagy István világhírű filmjeiben öltenek napjainkban testet. Herman Ottó halálának ötvenedik évfordulóját megünnepeltette a Béke Világtanácsa.

Herman mellett id. Entz Géza (1842–1919) és Apáthy István (1863–1922) töltöttek be kiemelkedő szerepet a századforduló magyar biológiai életében. Mindketten a kolozsvári egyetemen fejtették ki oktatói és kutatói tevékenységük jelentős részét.

A *Kolozsvári Orvos-természettudományi Értesítő* 1876-os évfolyamában jelent meg Entz Géza alapvető felfedezése: egyes levélzöldet tartalmazó véglények velük szimbiózisban élő egysejtű moszatoknak köszönhetik zöld színüket. Entz Géza 1888-ban megjelent műve, a *Tanulmányok a véglények köréből* honosította meg Magyarországon a protisztológiát. Tanítványain, ifj. Entz Gézán és Gelei Józsefen keresztül hatása napjainkig érezhető a magyar protisztológiai és sejttani kutatásokban. Ő fordította le és adta ki 1884-ben Török Auréllal együtt Darwin *Az ember származása* című könyvét. Később szembefordult a túlzó darwinizmussal, a fajok fejlődésében egyre kisebb szerepet tulajdonított a természetes kiválogatódásnak és a lamarckizmussal rokon álláspontra jutott.

Ebben nem állott egyedül. Kora nagy magyar biológusai közül többen foglaltak állást a század elején a Weismann által képviselt hiperdarwinizmus ellen. Annál is inkább, mert Darwin tanát felelőtlen emberek megkísérelték felhasználni a háború igazolására. Ezek ellen írta Lenhossék Mihály 1915-ben *A háború és a létért való küzdelem tétele* című cikkében:

> „Az emberiség nagy fegyveres küzdelmeinek megértésére hiába fordulnak a természethez; az állatvilágból inkább harmónia csendül felénk, szemléletéből inkább a békés megférés gondolata bontakozik ki… A társadalmi fejlődés logikája oda utal, hogy az emberiség elvégre is meg fogja találni annak a módját, hogy más úton egyenlítse ki az embercsoportok közt támadó ellentéteket."

1899-ben Lenhossék Mihályt (1863–1937) bízták meg a budapesti I. sz. Anatómiai Intézet vezetésével. Ezt az intézetet és általában az anatómiai oktatását elődje, Mihalkovich Géza emelte nálunk európai színvonalra. Lenhossék sokkal többet tett ennél: behozta ebbe az ekkor már halott tantárgyba a biológiai szemléletet. Évtizedes külföldi munkássága alatt nemzetközi megbecsülést vívott ki magának és olyan neves barátokat szerzett, mint Ramón y Cajal, a modern ideg-szövettan megalapítója. Lenhossék legértékesebb tudományos munkássága is az idegszövettan területére esik. Az idegsejtek önálló, lezárt funkcionális és morfológiai egységét tanító elméletnek a híve volt, mint kora legtöbb kutatója.

Ebben a tekintetben, nagy magyar kortársa Apáthy István dolgozta ki és képviselte világviszonylatban is a legjobban megalapozott ellenvéleményt, az ún. kontinuitásos elméletet, ami szerint az idegsejtek határain finom fibrillumok hatolnak át, és egyeden megszakítatlan egésszé szövik az állat idegrendszerét. Apáthy elmélete ma már inkább tudománytörténeti érdekesség. Jelentőségét finom és részletesen kidolgozott szövettani módszerei őrzik. Az általa meghonosított magas idegszövettani nívó ugyanis a magyar idegszövettani-iskolák számára később az egész világ jól megérdemelt elismerését hozta.

A századvég és a századforduló a magyar belgyógyászat tudományos megalapozásának az ideje is. Ahogy a magyar matematikai tudomány megszervezése Kőnig Gyula nevéhez fűződik, úgy kapcsolódik a magyar belgyógyászaté Korányi Frigyeséhez (1828–1913). Még mint egészen fiatal orvostanhallgató honvédorvosként vett részt a szabadságharcban, majd Balassa János mellett dolgozott a pesti honvédkórházban. A szabadságharc leverése után szülőföldjén, Szabolcsban folytatott orvosi gyakorlatot, és csak a viszonyok enyhülésével, 1863-ban kerülhetett vissza Pestre. Évekig tartó huzavona után, 1866-ban kapta meg a belgyógyászati tanszéket. A klinika mindössze két kórteremből állott, tizenhat ággyal. Évtizednél hosszabb harcába került Korányinak, míg 1877-ben megkezdték a II. sz. Belgyógyászati Klinika építését. 1886-ban nyílt meg új, nyolcvan ágyas klinikája, a magyar belgyógyászat szülőhelye. Korányi vezette be nálunk a laboratóriumi vizsgálati módszereket és a mikroszkóp alkalmazását. Egyes diagnosztikus megállapításai mint pl. a Korányi-féle háromszög, még ma is élnek.

Ő a tüdővész elleni küzdelem elindítója és megszervezője. Hosszú évek szívós munkájával, sokszor a reakciós kormányzat ellen dolgozva, hozza létre a mai Korányi Szanatóriumot, a tuberkulózis elleni küzdelem első magyar centrumát. 1913-ban halt meg. ugyanabban az évben, mint Kőnig Gyula. Munkaterületük távol esett egymástól, de a két tudós egyéniségét és működését nagyon hasonló vonások jellemzik: törhetetlen munkakedv és célratörő akarat, maximális tudományos és emberi becsületesség, az új eredmények iránti érdeklődés és fogékonyság, kiváló szervező erő. Munkatársaik iránti megbecsülés és felelősségtudat, nemzetük és tudományuk iránti kötelesség hatja át minden tettüket és művüket. Ezek a tulajdonságok tették őket alkalmassá arra, hogy egy-egy olyan nagy iskola megteremtői legyenek, amelyiknek a hagyományai és a hatása máig él a magyar matematikában és orvostudományban.

A kémiában Than Károly (1834–1908) és Winkler Lajos (1863–1939) képviselte az iskolateremtő szellemet. Winkler a szervetlen kémiai analízis nemzetközileg elismert nagymestere volt. Winkler ötletes kísérletező és eszközkészítő volt, sok eljárása és műszere használatos még ma is a kémiai laboratóriumban. Winkler kora óta a kémia hatalmasan fejlődött és szerteágazó lett A mai magyar szervetlen kémiai és analitikai iskolák is részt vettek ebben a folyamatban, mégis közös jellegzetességeik, amik már Winkler munkájára jellemzők voltak, megmaradtak. Azt lehetne mondani, hogy egy kicsit mind a Winkler-iskola folytatásai maradtak.

A századforduló, s talán az egész magyar természettudomány legnagyobb tudósa, Eötvös Loránd (1848–1919) úgyszólván saját szándéka és akarata ellenére, tisztán alkotásai nagyságával alapított iskolát a magyar fizikában.

> „Ezekről az alkotásokról hallgatói az ő szájából soha nem tudtak meg semmit – írja róla Novobátzky Károly professzor –, az első éveseknek szánt kísérleti bevezető előadáson kívül speciális előadások tartására nem vállalkozott. Valószínű, hogy valamilyen belső szerénység akadályozta meg abban, hogy kutatásainak eredményeiről ő maga beszéljen. Pedig ebben rejlik professzori működésének egyetlen negatívuma. Iskolát nem alapított. A magyar kísérleti fizika az ő működésének korában egyet jelentett Eötvös Loránd nevével. Utódai nem lehettek külső emberek, csak az ő közvetlen környezetében kiformálódott munkatársak. Hallgatói csak másodkézből vehették át tudományos eredményeit."

Eötvös fizikai alkotásai – a felületi feszültségre vonatkozó Eötvös-törvény, a mozgó testek nehézségváltozását kifejező Eötvös-effektus és mindenekelőtt a tömegvonzás és a tehetetlenség arányosságára vonatkozó Eötvös-kísérlet nem szakemberek körében is jól ismertek ma már. Az Eötvös-kísérlet az általános relativitás-elmélet egyik legfontosabb experimentális bizonyítéka lett. Eötvös híres vizsgálatait nem Einstein elmélete inspirálta és az ő eredményei sem hatottak közvetlenül az általános relativitás-elmélet kialakulására. De már maga Eötvös felismerte a tehetetlen és a gravitációs tömeg azonosságát kimutató kísérleteinek a jelentőségét, később pedig Einstein csodálatosnak nevezte az Eötvös-kísérletet.

Kitűnően ismerteti Eötvös kísérletének a lényegét egyik legavatottabb interpretátora, Mikola Sándor:

> „A mechanikában a test tehetetlen tömegének egészen általános jelentése van, mert ez határozza meg a test mozgásbeli viselkedését bármilyen eredetű erővel szemben. Ezzel szemben a test gravitációs tömege mind ez ideig speciális jelentésű volt, mert a test viselkedését egy egészen speciális erőtérben, tudniillik a gravitációs erőtérben határozta meg. A két fajta tömeg meghatározása is egészen különböző, a tehetetlen tömeget Newton második mozgástörvénye, a gravitációs tömeget pedig Newton gravitációs törvénye adja. Mármost fizikai-filozófiai szempontból egészen sajátságos és érthetetlen az a tünemény, hogy e kétféleképpen meghatározott tömeg minden testnél ugyanaz. Ezt az érthetetlenséget el lehet tüntetni, ha föltesszük, hogy a tömegvonzás nem speciális erő, amilyen a mágneses vagy az elektromos erő, hanem a testek egészen általános tulajdonsága, olyan, aminő a tehetetlenségnek egyik megnyilvánulása, a középpontfutó erő. Einstein gravitációs elméletének ebben fekszik a lényege.

Érdekes mármost az, hogy Eötvös Loránd már régóta a tömegvonzásnak ezt a többi erőtől elütő szerepét fölfogta és érezte, mert előadásaiban olyan definíciót szokott neki adni, mely lényegét tekintve Einstein elméletével egyezik.” (…)

Matematikai és természettudományi iskolák a két világháború között

Az egyetlen Eötvös-tanítvány, aki körül kiváló fizikai iskola alakulhatott volna, Zemplén Győző (1879–1916) fiatalon hősi halált halt a világháborúban. Fröhlich Izidor, aki Eötvös javaslatára lett az elméleti fizika professzora, nem volt erre alkalmas. Konzervatív egyénisége gyanakvással fogadta az új eszméket. „Fél évszázados professzorságának ideje alatt a fizika eljutott az elektromágneses tér megismerésétől a relativitás elméleten és atomelméleten át a kvantummechanikáig – írja róla Marx György –, de Fröhlich dolgozószobájában megállt az idő.”

Fröhlich 1928-ban vonult nyugalomba, utóda Ortvay Rudolf lett. Ortvay Sommerfeld tanítványa volt, és így benne élt a legmodernebb fizikai kutatások világában, ő teremtette meg nálunk a modern elméleti fizika oktatást. Ennek érdekében szervezte meg a híres Ortvay-kollokviumokat, „amelyeken – írja Marx György – a legjobb magyar és külföldi fizikusok tudományos előadásokon ismertetik a rohamosan kivirágzó modem fizika eredményeit. E kollokviumok révén tartotta fenn a kapcsolatot azokkal a magyar fizikusokkal, akik az egyre jobban befelhősödő politikai égbolt, a természettudós számára munkalehetőséget alig adó gazdasági viszonyok elől külföldre távoztak és ott világhírnevet szereztek. Közülük Lánczos Kornélt, Neumann Jánost, Polányi Mihályt, Teller Edét, Wigner Jenőt említjük meg. A hazánkba látogató külföldi fizikusok is rendszeres előadói az Ortvay-kollokviumoknak, köztük még Nobel-díjasok is. Dirac, Hund, Pohl, Schaeffer, Sommerfeld neveit idézzük. De legfontosabb, állandó jellegű referálók a hazájukban dolgozó magyar fizikusok, köztük önálló tudományos munkásságot folytató középiskolai tanárok. Az Ortvay-kollokviumok a háborút megelőző években döntő szerepet játszottak az egész ország számára a kor szintjén álló fizikai kutatások kibontakoztatásában. Pótolni próbálta egy szűk létszámú egyetemi tanszék, amit az ország úri vezetői elmulasztottak: egy tudomány számára kritikai fórumot, tapasztalatcserét, fejlődést biztosított.”

A matematikában, ahol Kőnig Gyula és Vályi Gyula munkássága nyomán erős iskolák keletkeztek, a háború és az utána következő reakciós korszak nem tudott olyan súlyos kárt okozni mint a fizikában. Ez a kor a magyar matematika egyik nagy korszaka. A gazdag termésből Riesz Frigyes (1880–1956), Haar Alfréd (1885–1933) és Fejér Lipót (1880–1959) munkássága a legkiemelkedőbb.

Riesz Frigyes mesterei a valós függvénytan új szakaszát elindító francia iskola nagyjai: Baire, Borel, Lebesque voltak. Az ő munkájukhoz csatlakozik egész életműve. Centrumában egy általa, s tőle függetlenül Ernst Fischer által 1907-ben felfedezett tétel, az ún. *Riesz–Fischer-féle tétel* áll.

Ez a tétel következőket mondja ki: Legyenek a_1, a_2 … valós számok. A belőlük alkotott $a_1^2+a_2^2+\cdots$ sor akkor és csak akkor összetartó, ha létezik a valós x változónak egy olyan f valós függvénye, amely Lebesque-féle értelemben négyzetesen integrálható, és amelynek Fourier-együtthatói éppen a_1, a_2 … A tétel azért nagyon jelentős, mert akkor is érvényes, ha a trigonometriai sorbafejtés függvényrendszere helyébe négyzetesen integrálható függvények tetszőleges orthonormál rendszere lép.

A Riesz-Fischer-féle tétel nagyon fontos volt a modern matematika fejlődésében. Riesz ugyanis tétele segítségével felismerte, hogy az ún. *Lebesque-féle értelemben négyzetesen integrálható függvények összessége* (azaz egy speciális tulajdonsággal rendelkező függvénysokaság) és a *végtelen sok koordinátával rendelkező vektorok összessége* (azaz a végtelen sok dimenziós tér irányított egyenes szakaszainak az összessége) között kölcsönösen egyértelmű és a távolság fogalmát is megtartó megfelezést lehet létesíteni. Így ezeknek a függvényeknek az összessége geometriai sajátságokkal ruházható fel, úgy tekinthető, mint valamilyen különleges tér, amit, mivel függvényekből áll, *függvénytérnek* neveznek. A függvényterek elmélete, az ún. funkcionálanalízis ma már óriási, egy ember által teljességében áttekinthetetlen szakmává nőtt, s ennek a megteremtésében döntő szerepe volt Riesz Frigyesnek.

Másik nagy eredménye a Riesz–Fischer-féle tétel felfedezésével nagyjából egy időben az ún. topologikus terekre vonatkozik. Riesz adta ugyanis a *sűrűsödési pont* fogalmára felépített topologikus terek első axiomatikus definícióját, és ezzel a modem matematika egyik legfontosabb ágának, a halmazelméleti topológiának lett az előfutára. Későbbi, topologikus vektorterekre vonatkozó vizsgálatai pedig olyan tétel felfedezésére vezették, amely az új matematikában olyan fontos *Bourbaki-féle* mértékelméletnek az előkészítője lett.

Nagy lendületet adott Riesz Frigyes az ún. *szubharmonikus függvények* elméletének a megalapozásával (az egyváltozós konvex függvény általánosítása többváltozós függvényre) a potenciálelméletnek. Ezen a területen Riesz külföldön élő tanítványa, Radó Tibor ért el a többi között szép eredményeket, és számolt be alig tizenöt évvel Riesz alapvető közleményeinek a megjelenése után az elmélet nagy haladásáról.

Riesz Frigyes munkásságának a hatása már nem korlátozódik egyetlen országra. A század legnagyobb matematikusai között van a helye. Az ő és Haar Alfréd által 1922-ben megalapított és szerkesztett szegedi *Acta Scientiarum Mathematicarum* világszerte megbecsülést szerzett a magyar matematikának. Riesz Frigyes, akárcsak egykor Kőnig Gyula, sohasem tévesztette szem elől a nevelés fontosságát. Ragyogó fiatal matematikusok gárdája nőtt fel körülötte Szegeden, sokan közülük ma már maguk is világhírű matematikusok.

A magyar matematikai kutatás másik nagy centruma a budapesti tudományegyetemen alakult ki, Fejér Lipót körül. Fejér a berlini matematikai iskola neveltje volt, főleg a Weierstrass tanítvány H. A. Schwarz hatott rá erősen. Schwarz az analízis Weierstrass által megalapozott szigorú kritikai irányát folytatta, és ezt vette át tőle Fejér is.

Fejér egy régen vitatott, nehéz sorbafejtési probléma vizsgálata közben felismerte, hogy ha a Fourier-sor összegezésekor egy-egy rögzített tagig vett részletösszeg helyett ezen részletösszegek számtani közepeinek a sorozatára térünk át, ez a sorozat ott is összetartó lesz, ahol maga a részletösszegek sorozata, tehát a folytonos függvényt előállító Fourier-sor széttartó. Ez az egyszerű és alapvető fontosságú eredmény a tárgya Fejér 1902-ben megjelent híres doktori értekezésének. Ehhez csatlakozik egész életműve. A továbbiakban kimutatta, hogy Fourier-sorok részletösszegeinek számtani közepelésével könnyen lehet sok szempontból jó tulajdonságú függvényeket szerkeszteni, s ezzel egyik úttörője lett a modern matematika rohamosan fejlődő, fontos diszciplínájának, a *konstruktív függvénytannak*.

Fejér Lipót jelentőségét éppen úgy, mint Kőnigét vagy Vályiét, nem lehet egyedül megjelent dolgozatai alapján lemérni. Kivételes képességű előadó volt és páratlan segítőkész mestere tanítványainak.

> „Szívesen vette – írja róla Turán Pál –, ha hallgatói eredményeikről szemináriumában beszámoltak. A megbeszélések tanítványaival fiatalabb éveiben az egyetem falain kívül is folytatódtak különféle kávéházakban, váltogatva a komolyat tréfával… Hatásának további okai voltak egyetemi előadásai, melyekben, különösen fiatalabb éveiben, változatos fejezetekből lényegre mutató módon nyerhettek indítékokat különböző érdeklődésű hallgatói, míg a Horthy-időkben majdnem polgárjogot nyert év eleji egyetemi atrocitások és az egyre fenyegetőbb fasizmus nem szegték mindinkább kedvét.”

Fejér hatása sem mérhető magyar keretek között. Nemcsak a magyar egyetemek professzorai kerültek ki szinte kivétel nélkül tanítványai közül, számos külföldi egyetem előadója, közöttük nem egy világhírű matematikus, Fejér egykori tanítványa.

Riesz és Fejér hatásával a két világháború közötti korszak tudósai közül egyedül Szent-Györgyi Alberté hasonlítható össze. Szent-Györgyi neve összeforrt a kor egyik centrális biológiai problémájával, a *sejtlégzéssel*.

A sejtben az oxidáció első lépése – amint azt Wieland kimutatta – az elégetendő tápanyag hidrogén atomjainak az *aktiválása*. Ez azt jelenti, hogy fermentumok hatására a hidrogén atomok kötése meglazul, és így hozzáférhetőkké válnak az oxigén atomok számára. Az aktiválást végző fermentumokat éppen ezért *dehidrogenázéknak* nevezik. Ugyanakkor – amint azt O. Warburg bizonyította – az oxigénnek is aktivált állapotba kell kerülni ahhoz, hogy a sejtben a hidrogénnel egyesülhessen. Ezt az aktiválást a Warburg áltat felfedezett *légzőfermentum* végzi. Egy angol biokémikus, D. Keilin kimutatta, hogy az aktivált oxigén nem közvetlenül oxidálja a tápanyag aktivált hidrogénjét A két folyamat közé Keilin által *cythochromoknak* nevezett festékanyagok rendszere van iktatva, amelyeknek centrális alkotóeleme egy-egy vas atom. Ezt a vas atomot oxidálja az oxigén a légzőfermentum segítségével két vegyértékű alakjából három vegyértékű vas atommá. Ez az *oxidált cytochrom* oxidálja a dehidrogenáze által a tápanyagról lehasított hidrogént, miközben maga újra redukált alakjába jut. A cytochrom rendszer közvetíti tehát a tápanyag felől jövő redukciós hatásokat az oxigén felé. A légzőfermentumot, amelynek a szerepe a cytochrom rendszer oxidálása, éppen ezért *cytochromoxidázénak* is nevezik.

Szent-Györgyi Albert nagy felfedezése ezeknek a szerteágazó sejtlégzés-vizsgálatoknak egységes képpé való összerakása volt. Ő maga így számolt be erről 1937-ben, híres Nobel-díj beszédében:

> „Mikor mintegy tíz évvel ezelőtt megkíséreltem ezt a lélegző rendszert az elméletnek megfelelően mesterségesen összeállítani és a cytochrom oxidázét cytochrommal, dehidrogenázékkal és tápanyaggal hoztam össze, úgy joggal vártam, hogy ez a rendszer lélegezni fog, vagyis oxigént vesz fel és a tápanyagot, a hidrogéndonátort eloxidálja. A rendszer azonban azt nem tette meg és így nyilvánvalóvá vált, hogy még egy vagy több tag hiányzik a rendszerből. Ezt a hiányzó tagot keresve munkatársaimmal, főleg Banghával úgy találtam, hogy a rendszer kiegészítéséhez bizonyos hőálló, alacsony molekulájú anyagokra, *kofermentumokra* van szükség, melyek nélkül a dehidrogenáze nem működik… A

kodehidrogenáze izolálása közben egy igen érdekes festékre, színes anyagra is bukkantunk, melyet Banghával »cytoflav«-nak neveztünk el… Ezek a vizsgálatok a rendszert két új taggal gazdagították, azonban a mesterségesen összetett rendszer ennek ellenére se működött. Egy további fontos tagjának kellett hiányoznia. Hűséges munkatársaim segítségével, akik közül elsősorban Annau, Bangha, Gözsy, Laki és Straub nevét említem meg, sokévi fáradságos munkával sikerült végre kimutatni azt, hogy négy szénatomot tartalmazó két bázisos savak ennek a rendszernek lényeges alkatrészét alkotják. E savak működése szintén abból áll, hogy a tápanyag felől jövő hidrogént felveszik és azután azt ismét leadják.”

Az első kémcsőben létrehozott sejtlégzés beláthatatlan távlatokat nyitott a biokémia előtt. Szent-Györgyi Albert eredeti elképzelését amerikai és angol kutatók a következő években kiegészítették és kijavították. Kimutatták, hogy a Szent-Györgyi által felfedezett négy szénatomos vegyületek mellett más egyszerű szerves savak is szerepelnek a sejtlégzésben, és a folyamat egyes lépései még bonyolultabbak, mint azt Szent-Györgyi feltételezte.

Szent-Györgyi Albert érdeklődését azonban ekkor már a biokémia más területe, az izom biokémiája kötötte le. Munkatársaival, elsősorban Straub F. Brúnóval ezen a területen elért eredményei újra a világ elismerését vívták ki, és évtizedekre ellátták témával a magyar biokémiát. Magának Szent-Györgyinek az érdeklődése későbbi, amerikai évei alatt egyre inkább a biokémia és biofizika nagy, általános problémái felé fordult és egyik megteremtője lett a „molekuláris biológia” néven ismert, nagy jövő elé tekintő tudományágnak. Régi preparatív művészete, amelynek annak idején a *C-vitamin* felfedezését köszönhette, a legutóbbi években újból magára irányította a világ érdeklődését a thymuszból izolált két, a sejtnövekedést fokozó illetve gátló anyag előállításával.

Szent-Györgyi biokémiai vizsgálataihoz fogható jelentőségűek az endokrinológiában Verzár Frigyes kutatásai. Verzár a mellékvesekéreg egyik hormonjának, a dezoxicorticosteron-acetátnak szerepét és hatásmechanizmusát vizsgálta az anyagcsere szervetlen foszfort beépítő folyamataiban, s ezzel nagyon jelentős kutatási irány egyik elindítója lett. Az ő hatása azonban, korán távozván hazánkból, tudományos fejlődésünkre nem oly közvetlen, mint Szent-Györgyi Alberté.

A biológiai és orvosi tudományok háború előtti színvonala a háború utáni időszakban is megmaradt. Ekkor alakultak ki első, világviszonylatban is jelentős növénytani iskoláink, Sopronban Fehér Dániel (1891–1955), Debrecenben Soó Rezső körül. Fehér Dániel és munkatársai a korszerű talajbiológiai kutatások meghonosítói, Soó Rezső pedig tanítványaival

Magyarország növényföldrajzi jellegzetességeit és növényszövetkezeteit tárta fel.

A növényszociológia úttörője nálunk Rapaics Raymund (1884–1954) volt.

> „Ő írta – mondotta 1936-ban, egy nemzetközi botanikuskongresszuson Soó Rezső – *A növények társadalmát* (1925) bevezetésül a növényszociológiába, azzal az alapgondolattal, hogy a szövetkezet tagjainak munkája szerves harmóniába egyesül és egymást kiegészíti, a növényszövetkezet lényege tehát a munkamegosztás. 1926-ban rendezte meg a magyar kormány az Alföld alkalikus talajainak geológiai és botanikai fölvételét. Rapaics írta le a Tisza menti és tiszántúli sziki növényszövetkezetek zonációit és minőségi összetételét (1920–27) jellemezte a főasszociótípusok talajait."

A tanácsköztársaság ideje alatti bátor viselkedése miatt a Horthy-rendszer megfosztotta Rapaicsot a debreceni gazdasági akadémián betöltött tanári állásától. A Természettudományi Társulat könyvtárosa lett. Később mint a Társulat folyóiratának, a *Természettudományi Közlöny*nek és a Társulat könyvkiadó vállalatának egyik vezetője, mindenkinél többet tett hazánkban a két világháború közötti szomorú korban a természettudomány iránti érdeklődés ébren tartásáért.

Az élettani kutatás legfontosabb centruma ebben az időben a pécsi egyetem volt. Itt a gyógyszertan és kórtan professzora, Mansfeld Géza (1882–1949) irányításával sokoldalú vizsgálatokat folytattak: a zsíranyagcseréről, a narkózisról, a légzés idegi szabályozásáról, az agy gátló központjainak a működéséről, a pajzsmirigy hőszabályozásban betöltött szerepéről.

A gyakorlati orvostudomány területén igen fontos volt Grósz Emil (1865–1941) működése, aki a budapesti szemészeti klinikát az alkalmazott természettudományi kutatás mintaszerű műhelyévé tette.

A magyar orvostudomány és élettan legnagyobb hatású egyénisége a két világháború között Korányi Sándor (1866–1944) volt. Ő fejlesztette az apja által alapított magyar belgyógyászati iskolát világviszonylatban is számottevő centrummá. Korányi érdeme a fizikai-kémiai módszerek belgyógyászatba és élettanba való bevezetése. 1907-ben megjelent *Physikalische Chemie und Medizin* című könyve a vér és a szövetközti nedvek anyagkoncentrációinak a vizsgálatával egy egész nagy fiziológiai irány kiindulópontja lett, aminek tradíciója tanítványain és azok tanítványain keresztül máig él a magyar orvostudományban.

A fizikai-kémiai szemléletmód legmegfelelőbb alkalmazási területe a veseműködés vizsgálata volt. A fizikokémiai módszerek ugyanis pontos diagnosztikus eszközöket adtak a Korányi-iskola kezébe a vesék különféle kóros működésének a vizsgálatára. A nagy kórformák, mint a nefroszklerózis, a nefrózisok és az akut glomerulonefritisz az ő kezében kezdtek jól definiált tünetegyüttesekké alakulni, és ha a vesepathologia későbbi fejlődése nem is a Korányi által nyitott úton haladt, az egzakt szemléletmód és módszerek bevezetése a vesepathológiába Korányi Sándor érdeme marad.

Klinikai szempontból igen jelentős lett az általa megalkotott *veseelégtelenség*, *vesedekompenzáció* fogalma. Ennek a fogalomnak a segítségével Korányi a különféle vesebetegségek szerteágazó tüneteit egységes alapra vezette vissza, és számos, látszólag ellentmondó kórtani tényt magyarázott meg. „A szervezet csodálatos mértékben képes arra, hogy működésének hibáit ellensúlyozza." – hangsúlyozta folyton. Ha egy szerv hibás működését meg akarjuk ismerni, sohase elegendő csak az illető szervet vizsgálni. A kutató és az orvos mindig az egész szervezetet kell szeme előtt tartsa, sokféle és bonyolult, kompenzálási lehetőségeivel. A betegség – a beteg számára legalábbis – akkor kezdődik, amikor ezek a kompenzációs mechanizmusok felmondják a szolgálatot, és beáll a dekompenzáció.

Ez a szemlélet egészen új lehetőségek és feladatok elé állította diagnosztikai és terápiás téren egyaránt az orvost. Elsőrendű fontosságú lett a szervezet működését tükröző funkcionális diagnosztika, és igen nagy helyet kaptak a gyógyításban a beteg panaszait enyhítő terápiás beavatkozások.

Korányi kitűnő előadó volt és nagy hatással volt tanítványaira mélyen humánus, segítőkész emberi egyénisége is. A magyar belgyógyászatban ma éppen úgy Korányi közvetlen és közvetett tanítványai töltik be a vezető helyeket, mint a matematikában Fejér Lipóté. Nagyon jellemző a Horthy-rendszerre, hogy a világhírű professzort nemcsak nyugdíjazta idő előtt 1936-ban, hanem klinikáját is feloszlatta. (…)

Matematika–haza[64]

A Természet Világa matematikai különszámáról

„Különszámunk a matematikáról és a matematikusainkról szól – írja az *Előszó*ban a főszerkesztő, Staar Gyula. – Összeállítóját az a cél vezérelte, hogy megmutassa, miért kemény valuta a világban még ma is a magyar matematika. A felszín látványos formái helyett az emberi és a gondolati összefüggésrendszerek bemutatására vállalkoztunk. Ehhez igyekeztem megnyerni neves matematikusainkat, kértem, tegyék le szellemi névjegyüket a Természet Világa különszámába. A közös örökségben, a matematika mélyén rejlő összetartó erőben bízva gondosan kerülgettem az embereket és a tudományterületeket elválasztó rianásokat. Az összetartó szálakat kerestem, azokkal akartam egységbe foglalni sokszínű világunkat."

Ezeknek az összetartó szálaknak a történeti szövődését vázolja Császár Ákos bevezető tanulmánya: *Magyar származású matematikusok hozzájárulása a matematika fejlődéséhez*. Nem egyszerűen mintaszerű matematikatörténeti áttekintés ez: felépítését tekintve maga is úgyszólván matematika. Először is pontosan megmondja, hogy mit ért az újkori matematika fejlődése alatt.

„Az antikvitás vagy a reneszánsz olyan tudósai, mint *Arkhimédész*, *Pascal* vagy *Newton*, a tudományok mai osztályozása szerint akár matematikusnak, akár fizikusnak (vagy éppen a műszaki tudományok művelőjének) volnának tekinthetők. Még a 18. és 19. század olyan tudósai is, mint *Euler* vagy *Gauss*, egyaránt alkottak nagyot a matematikában és a fizikában. Talán 150 éve annak, hogy a matematikában egyre több az olyan probléma s az ennek nyomán kialakuló elmélet, amelyet nem a természettudományok felvetette kérdések, hanem a matematika belső fejlődésének szükségletei indítottak útjára. Ugyanakkor ezeknek a tiszta matematikai motivációjú elméleteknek a jelentékeny része, néha egészen meglepetésszerűen, megtalálja későbbi természettudományi vagy műszaki alkalmazását."

[64] Forrás: Vekerdi László: Matematika-haza. A Természet Világa – Természettudományi Közlöny 129. évfolyamának matematika-különszámáról. = Forrás 31 (1999) No. 11. pp. 89–96.; kötetben megjelent: Vekerdi László: A közértelmesség kapillárisai. Tata – Tatabánya, 2001. Új Forrás Könyvek. pp. 146–155.

Magyarországon sem középkori politikai virágzása, sem a török hódítás és háborúk korában nem honosodott meg a Nyugathoz fogható természettudományos műveltség, s így matematika sem. A 18. században jelent meg az első magyar származású tudós, Segner János András, aki „nemzetközileg számon tartott önálló matematikai eredményeket ért el”. „Az igazi fordulatot azonban a 19. század jelenti, amikor kétlépcsős rakétaként magasba ível a két Bolyai pályája.” Bolyai Farkasban Császár Ákos leginkább a nagy probléma-látót méltányolja; János *Appendix*-ében pedig a nem-euklidészi geometria mellett kiemeli *az axiómarendszerrel való leírhatóság* felismeréséhez vezető első lépést és a *modell-módszer* első alkalmazását, amelyet később a nem-euklidészi geometriai ellentmondástalanságának a bizonyítására használtak.

Az ország ahhoz a matematikához, amelyben a Bolyaiak éltek és alkottak, majd csak a kiegyezés után, a század végére ért el, hogy aztán a nyolcvanas években született nagy matematikusok nemzedéke, mindenekelőtt a három szellemóriás, Riesz Frigyes, Fejér Lipót és Haar Alfréd munkássága nyomán kibontakozhasson idehaza és külföldön, a huszadik század minden nyomora és kegyetlensége ellenére, a magyar származású matematikusok nemzetközileg ismert és elismert, a matematika – és olykor az egész világ – sorsán fordító tevékenysége. Császár Ákos a legfontosabbak és egyben legismertebbek felfedezéseiből jelzésszerűen felvillant annyit, amennyiből legalább jelentőségüket megsejtheti bárki (a matematikához értők persze külön élvezhetik a jelzések lényeglátó szellemességét), közben, mintegy mellékesen, de nagyon lényegesen, utal arra az intézményi háttérre is, amely lehetővé tette munkájukat és útnak indulásukat: a századvégi-századfordulói Műegyetemre, a Kolozsvári Tudományegyetemre, a Trianon után kibontakozott szegedi matematikára és az *Acta*-ra, a felszabadulást követő negyedszázad folyamán elsőrangú matematikai centrummá vált Eötvös Loránd Tudományegyetemre.

A nem-matematikus, a matematikában járatlan olvasó jól teszi tán, ha memorizálja magának ezeket a neveket és a hozzájuk tartozó felfedezéseket-fogalmakat; bizonyosan könnyebben tájékozódik majd abban a matematika-házában, amelyről a következő százegynéhány oldal a legváltozatosabb területekről, kompetens történetekben, képekben és (matematikáról van szó) képletekkel tudósít.

Így például mindjárt a következő tanulmányból, amit Weszely Tibor marosvásárhelyi professzor írt *A magyar matematika első aranyérmesé*-ről, Sipos Pálról (1759–1816), megsejtheti az olvasó, hogy micsoda nehézségi erő leküzdése kellett ahhoz, hogy útnak indulhasson Magyarországról a Bolyaiak „két lépcsős rakétája”. Tán még a matematikában jártasabbaknak is beletörik a bicskája, ha megpróbálják követni – Weszely mesteri tolmácsolásában – Sipos nagy elmeélt igénylő, bonyolult szerkesztéseit, melyeknek igazi jelentőségét nemcsak a díjosztók – az akkor már meglehetősen provinciális Berlini Akadémia –, hanem maga Sipos se ismert fel. Éppen ezzel szemben emelkedhet ki a Bolyaiak fenséges problémalátása és -megoldása, s matematikai ismereteiknek és tájékozódásuknak kivételes igényessége. Kiss Elemér (rengeteg kutatásra, számos vonatkozó publikációra és egy alapvető monográfiára alapuló) tanulmánya *Bolyai János kézirataínak rejtett matematikai kincsei*-ről plasztikusan és – legalábbis matematikában nem teljesen járatlanoknak – maradéktalanul érthetően mutatja be, hogyan haladt Bolyai János a számelmélet nagy problémáiban, valamint az algebrai egyenletek megoldhatóságának kérdésében is kora matematikai kutatásának első vonalában, olykor évtizedekkel, évszázaddal előzve meg más nagy nevekhez (J. H. Jeans, Erdős Pál) fűződő felfedezéseket. Az írás tudománytörténeti fontosságát nem lehet eléggé hangsúlyozni (s mégis kell, tekintve Kiss Elemér már nem épp tegnap megjelent monográfiájának meglepő visszhangtalanságát); nemcsak azért, mert Bolyai Jánost apjához foghatóan (és Gausshoz foghatóan) univerzális matematikai géniuszként fedezi fel és mutatja be, hanem azért is, mert a komplex egészek aritmetikájának Gausstól függetlenül s vele kb. egyidőben kidolgozott aritmetikája új fényt vet az *Appendix* meglepően tökéletes analitikus apparátusára. De szerkesztői telitalálat is a dolgozat elhelyezése rögtön a kötet elején: a geometria és a számelmélet; a „folytonos" és a „diszkrét", a „végtelen" és a „véges" szembesülése és kölcsönös egymást-átvilágítása vissza-visszatér a kötet írásaiban; a centrális tanulmány, Lovász Lászlóé, azt is megérteti majd, hogy miért; sőt, talán elsősorban éppen ezt a kérdést járja körül *Egységes tudomány-e a matematika?* címmel.

Lovász írása azonban elhelyezés tekintetében is centrális; előtte néhány írás még a matematika-haza különböző tájaira vezeti el az olvasót, a matematikában teljesen járatlant is (ami nem azt jelenti, hogy hellyel-közzel nem kell „matematikusul" gondolkoznia, vagy legalábbis megpróbálkoznia vele). Edgar R. Lorch, amerikai matematikus a harmincas évek közepének Szegedéről s benne Riesz Frigyesről vázol páratlanul eleven, levegős, lényeglátóan aprólékos képet; olyan fizikai-társadalmi város-képet, amely minden furcsaságával, kisszerűségével, Nyugathoz képest elmaradottságával együtt valahogy mégis méltó és szívesen vállalt otthona lehetett egy olyan világraszóló matematikai géniusznak, mint Riesz Frigyes és egy olyan világhíres folyóiratnak, mint az *Acta Mathematica Hungarica*. Nem tudom, hányan olvasták felzárkóztatóink népes táborából Lorch írását, félek, nem sokan, pedig kötelező olvasmánnyá kéne tenni. S persze az iskolavezető professzornak is, ha az iskola-teremtést egyáltalán tanítani lehetne.

De bemutatni lehet belőle valamit; s a következő néhány oldalon Katona Gyula és Tusnády Gábor be is mutat annyit, amennyi matematika nélkül lehetséges, Rényi Alfréd emberi, vezetői, oktatói, pedagógusi nagyságából. Azaz nem jól mondom, hogy „matematika nélkül", hiszen itt is áthat minden bekezdést, minden érvelést, minden emléket a matematika; az ovidiusi „quidquid tentabam scribere versus erat" Rényire és matematikára fordítva maradéktalanul alkalmazható; mégpedig a lehető legtágasabban, legnagyvonalúbban alkalmazva a matematika szót; úgy valahogy, ahogyan Descartes szokta volt emlegetni „gondolkozásom algebrájá"-t. Talán ilyesmire gondol Katona Gyula is, mikor azt írja:

> „Rengeteget tett a magyar matematikáért. Pusztán tudományszervező munkásságáért is megérdemelné, hogy most megemlékezzünk róla. Ha nem lett volna a tudomány óriása is, nem biztos, hogy ilyen jól rátalált volna a helyes irányokra. Akkor talán már kevesen emlékeznének rá."

Még Rényi legendás optimizmusa vagy inkább tán törhetetlen derűje is „ars mathematicá"-jában gyökerezhetett, s nem egyszerűen azon „élettapasztalatában", hogy „minden lényeges dolog sikerült neki". Mert például Bolyai Jánosnak igazán nem sok minden sikerült; mégis – úgyszintén elég rövid – életének végső napjaiig munkálkodott-töprengett nehéz matematikai és társadalmi feladványokon, a megoldás reményében: tehette volna optimizmus híján? Dehát őbelőle is sugárzott az ovidiusi „quidquid tentabam".

Még látványosabban, tán mert a matematika egy viszonylag szűkebb, jól meghatározható területének vonzásában és vonatkozásában érvényes az ovidiusi mondás Erdős Pál esetében. Erdős portréját (a „matematikai" és „emberi" megkülönböztetése az ő esetében egyszerűen képtelenség lenne) tanítványa, Babai László vázolja *Magyarországon és a világban: Erdős Pál, barátai és kora* címmel.

> „Az újságírók – írja – hajlamosak arra, hogy Erdős különcségeit valamint kissé gyermeki kiszolgáltatottságát szenzációként tálalják, és úgy állítsák be, mint egy titokzatos világ (a matematika) elkötelezett bajnokát, akit teljesen felemészt szenvedélye e *»szűk«* vállalkozásban. Matematikus barátai világszerte azonban ennél jobban ismerik. Elfogadják ártatlanságát és szerető gonddal veszik körül, ily módon hálálva meg azt a melegséget és fényt, amelyet otthonukba vagy dolgozószobájukba visz. Azt is tudják, hogy Erdős egyáltalán nem a matematika robotja, hanem mindig is odafigyel környezetére, szűkebbre és tágabbra egyaránt."

Nemcsak gondolatait, mozgását sem korlátozták országhatárok; hol itt, hol ott bukkant fel váratlanul. De kapcsolata szülőházájával soha nem szakadt meg, illetve folyton újrateremtődött, nem ritkán nem csekély bonyodalmak árán. Magyar tanítványai és munkatársai, egy részük szerte a világban, szakmájuk legjobbjaihoz tartoznak; Babai tömören és gondosan beszámol róluk, munkásságukkal egyúttal azt is jelezve, mivé fejlődtek az Erdős által művelt s gyakran az ő ötletéből és úttörő munkájából kinőtt diszciplínák. Azt is elmondja, hogy korunk nem minden nagy matematikusa értett egyet Erdős munkastílusával, akadtak ellenfelei, ami nem csoda.

> „Erdős soha nem deklarált kutatási programot, nem jelölt ki általános matematikai célt. Valószínűleg nehezen lenne képes egy elfogadható kutatási pályázatot összehozni. Straus azt írja róla: »...ebben az évszázadban, amelyben az elmélet-gyártók a matematikában olyan domináns szerephez jutottak, Erdős megmaradt a problémamegoldók fejedelmének és a probléma-megfogalmazók abszolút egyeduralkodójának... Erdős sok tekintetben korunk Eulere. Ugyanúgy, ahogyan azok a speciális problémák, amelyeket Euler megoldott, utat mutattak az analitikus és algebrai számelméletben, kombinatorikában, függvénytanban stb. Erdős munkájának módszerei és eredményei már láttatják velünk olyan nagyszabású diszciplínák körvonalait, mint a kombinatorikus és valószínűségi számelmélet, kombinatorikus geometria, valószínűségi és transzfinit kombinatorika és gráfelmélet, valamint sok más terület, ami az ötleteiből még ki fog alakulni.«”.

Babai László Erdős-portréját életrajzi részletek, történetek, anekdoták, fényképek és rajzok hozzák közel az olvasóhoz, úgyhogy az is megsejt matematikájának – a mai matematika egyik fő trendjének – lényegéből valamit, aki a felsorolt diszciplinákról azt sem tudja, eszik-e vagy isszák.

Mutatis mutandis hasonló mondható el Staar Gyula interjújáról Lax Péter Wolf-díjas matematikussal, *Problémákon át vezető életút*járól.

> *„Erdős Pál 1995-ben a Gólyavári estéken tartott előadásában* – vezeti be a kérdését Staar Gyula – *így emlékezett az Amerikába érkező kisfiúra, Lax Péterre: »Vele 1941-ben ismerkedtem meg. Szülei jó nevű orvosok voltak Magyarországon. Éppen az utolsó pillanatban mentek el. Péter Rózsa, akitől sokat tanult, leírta, hogy Lax nagyon tehetséges, és kérte, foglalkozzam vele, amit én persze meg is*

tettem... Halmos is mondta, van itt Magyarországról egy csecsemő, lehetett vele matematikáról beszélni. Nem volt öreg, 16 éves volt, de már akkor elég komoly matematikus... Van egy angol cikkem a csodagyerekekről, abban róla megjegyzem: 'azután egy távoli területre vonult, amiről semmit sem tudok'.[65] *Differenciálegyenletekkel foglalkozott. Fontos felfedezéseket tett.«*

– Igen, még diák voltam, ennek ellenére Erdős többször meghívott a Princeton Institute for Advanced Studies-ba. Problémákat adott, közülük kettő megoldásából cikkem is született. Kissé csalódott volt, amikor áttértem a matematika más stílusú művelésére."

Ez a más stílusú művelés a matematika világának egy merőben másféle nagy kontinensére vezet, ahol számos út nyílik az alkalmazások felé, és fontos szerep jut a nagy sebességű számítógépeknek. A felmerülő problémák sokféleségéről ízelítőt ad Lax Péter válasza Staar Gyula kérdésére:

„– A matematika mely területein munkálkodott?

– Elsősorban a sokváltozós differenciálegyenletek megoldásán dolgoztam, főként azokon, amelyek hullámszerű mozgást írnak le. De ugyancsak érdekeltek az elliptikus egyenletek, melyek egyensúlyban lévő rendszereket ábrázolnak. Sok időt töltöttem a megoldások megközelítő kiszámolásával, ami érdekes és fontos probléma. Azután Ralph Phillips kollégámmal sokat dolgoztunk a hullámok visszaverődésén és szétszóródásán. Ezzel kapcsolatban vannak érdekes eredmények a hullámokról a Bolyai-Lobacsevszkij-féle térben.

Nagyon érdekeltek a lökéshullámok, és ezeknek a kiszámítása; itt is sok meglepetésre bukkan az ember. Még nagyobb meglepetések vannak az ún. egzakt integrálható egyenletek megoldásaiban, ilyenek például a szolitonok. A diszperzió hatása újszerű jelenségeket okoz.

Ezen kívül egész sor apróbb munkám van a matematika legkülönfélébb területeiről, még a topológiában és az algebrában is."

Ezek után a riporterben bujkáló szerkesztő nyilván meg fogja kérdezni:

„– A matematika ma milyen korszakát éli? Egymással alig érintkező darabokra esik szét, avagy megindul bizonyos egységesítő folyamat?

[65] Chamberlain hírhedt megjegyzése Csehszlovákiáról, a müncheni megegyezés után. *(– a korabeli szerk. megj.)*

> – Mindkét folyamat megfigyelhető. Nem hiszek abban, hogy a matematika egymással nem érintkező speciális ágakra esik szét. Csaknem száz évvel ezelőtt a híres párizsi előadásában Hilbert éppen erről beszélt. Olvassa el, amit a végén mondott, az ma is igaz. A matematika egyre hatalmasabban terebélyesedik, ezzel párhuzamosan új egyesítő elveket fedezünk fel, rejtett összefüggésekre bukkanunk, melyek összefűzik a szétfutni látszó területeket.
>
> Száz évvel ezelőtt például óriási különbség volt algebra és topológia között. Ma már alig lehet megkülönböztetni őket. Persze minden matematikus specialistaként kezdi. Neumann János ritka kivétel, hiszen ő már fiatalon sokat tudott, univerzális tehetség volt.”

Az interjút közvetlenül és szervesen folytatja Lovász László tanulmánya:

> „Egységes tudomány-e a matematika, vagy egyre inkább sok független, eltérő utakon fejlődő, egymás eredményeit nem ismerő, sőt lassan meg sem értő közösségre bomlik? Erősítik vagy gyöngítik ezt a folyamatot a kutatás megváltozott körülményei, mint például a számítógépek? El kell-e fogadnia ezt a szétforgácsolódást a matematikus társadalomnak?”

A kérdések megválaszolásához Lovász László először áttekinti a mai matematikát átjáró törésvonalakat, azután elemzi a matematika világát átalakító három új trendet.

> A törésvonalak legismertebbje „a tiszta és az alkalmazott matematika között halad. Az absztrakt és a konkrét matematika szembenállása az ún. Bourbaki-iskola körüli vitákban csúcsosodott ki. A strukturális matematika (amelynek eredményei tételek és bizonyítások) és az algoritmikus matematika (amelynek eredményei algoritmusok és elemzésük) közötti megkülönböztetés az ókorig nyúlik vissza. Ugyanilyen mélynek tűnik a szakadék a folytonos matematika (analízis) és a diszkrét matematika (pl. a gráfelmélet) között.”

A törésvonalakat munkahelyi- és finanszírozási feltételek, siker-esélyek, személyi ismeretségek, kulturális körülmények is meghatározzák: „a matematika egyes szakirányainak saját konferenciái, folyóiratai és díjai vannak, saját fogalomkészlete és paradigmái, sőt, mások a beszélgetés során természetesnek vett értékrendek is.”

A kisebb szakmai közösségekre való óhatatlan, mert épp a matematika fejlődésével járó elkülönülés azonban nem jelenti magának a matematikának ugyanilyen szétdarabolódását. Ellenkezőleg, ahogyan az életben a diverzifikáció, a sokfélévé válás épp az életrevalóság jele és az evolúció alapfeltétele, úgy a sokfélévé váló matematikában is lehet ez a diverzifikáció „egy mélyen gyökerező egyetemesség következménye”. Ahhoz azonban, hogy ez így legyen, a matematikusoknak is meg kell tenniük a magukét.

> „Nekünk matematikusoknak mindent el kell követnünk a közöttünk húzódó szakadékok áthidalása érdekében, és ennek a törekvésünknek éppen a matematika új fejleményei válhatnak eszközeivé.”

Három új trendet vizsgál ebből a szempontból Lovász László: a közösség méretét, az alkalmazás új területeit és a számítógépeket. A méretek növekedtével egyre bonyolultabbá és fontosabbá válik a kommunikáció és az információ-feldolgozás, másrészt, „úgy tűnik véletlenszerűen”, kisebb szakmai közösségek, akár szubkultúrák alakulnak ki, amelyek olykor makacsul ragaszkodnak módszereikhez, de kellő nyitottsággal kölcsönösen meg is termékenyíthetik egymást. Hasonlóképpen a tudományok fejlődésével az alkalmazások számos új területe nyílhat meg a matematika előtt, éspedig elsősorban a matematika úgyszintén gyorsan fejlődő újabb ágai előtt, messzi túl a fizikai alkalmazások jól ismert sikertörténetén. A számítógépek pedig nem egyszerűen katalizálhatják mindezeket, nem is csak segíthetnek „az információrobbanás túlélésében”, hanem eleve a matematikus észjárásához alkalmazkodó módszereikkel egy új, hatékonyabb matematikai kommunikációs kultúra eszközeivé is válhatnak. Lovász jobbnál-jobb és megejtően érdekes példákkal illusztrálja az itt kutyafuttában és megengedhetetlenül elvontan összegzetteket, s azután rátér a matematikai munka olyan új formáinak az ismertetésére, amelyek a három új trendben felvetődő kihívásokra, az általuk megnyíló új lehetőségek hasznosításával, a matematika mélyebb egységének a megőrzésével felelnek, mint például az *áttekintő cikkek* vagy a *problémák és sejtések*. Nem könnyű persze megmondani, hogy mitől jó egy áttekintő cikk vagy egy sejtés – annyi bizonyos, hogy az egyik kritérium a pontos megfogalmazás és a viszonylag széleskörű érthetőség –, de tán épp a matematika egységének a szolgálata igazíthat el az értékelésükben. A jó áttekintő cikkek, csakúgy mint a releváns sejtések, hozzájárulnak a matematika egyetemes fejlődéséhez és originális kutatásként tekintendők. „A sejtést, mint olyat, művészi szinten művelte a nemrég elhunyt *Erdős Pál*, aki egymaga több sejtést fogalmazott meg, mint talán a világon valaha élt minden matematikus összesen. Erdős a sejtéseit matematikai munkássága szerves részének tartotta, ugyanúgy, mint a tételeit. Egyik legkedvesebb emlékem Erdőstől a következő megjegyzés: »*Soha senkit nem irigyeltem* tétel miatt, de téged most irigyellek ezért a sejtésért.«"

A kötet jó néhány következő írásában találhatunk példát a sejtések erejére és szerepére; ahogyan például majd mindenikben visszatér, különböző kontextusban, a nagy Fermat-sejtés és A. Wiles angol matematikus általi 1994-es bizonyítása. De pompás példái ezek a tanulmányok az áttekintő cikkeknek is, kompetens összefoglalásaként egy-egy szűkebb szakterületnek a matematika más területein kutatók számára. Többségük egyúttal szépen mutatja azoknak a „máshonnan származó eszközöknek" az „erejét", amit Lovász László a matematika egységét bizonyító és őrző „hidak" egyik legfontosabbjaként jelölt ki.

Ezeknek a cikkeknek a teljes megértése azonban többnyire némi matematikai jártasságot igényel; mégis megérik a laikusnak is a fejtörést, mert egy-egy megértett részletben – és ismételt olvasással egyre több részletet érthet meg – hirtelen feltárulhat előtte a matematikai táj szépsége. Ha például valaki Kollár János *Algebrai geometriá*jában az egyszerű két ismeretlenes elsőfokú egyenletrendszertől, amelynek egyik megoldási módszerét már a babiloniak ismerték, végigdolgozza magát a nagy Fermat-sejtés bizonyításához szükséges bonyolult függvényekig, útközben váratlan (és váratlanul szép) rálátást nyer egyebek közt a Bolyai-geometriára. Vagy ha madzaggal és ceruzával a kézben végigdolgozza-végigszámolja magát Rimányi Richárd cikkén *A csomók elméleté*ről (amit kivételesen matematikai előismeret nélkül is megtehet), bizonyosan el fog csodálkozni, hogy miképpen is nem jutott eddig eszébe csodálkozni a mi három dimenziós terünk különleges voltán? A három dimenziós térben „élő" csomók két dimenziós síkban ábrázolt diagramjait kellett, rájuk kidolgozott összeadással-kivonással-szorzással, alkalmas polinomokkal jelölhetővé tenni ahhoz, hogy ... de ne akarjuk se eltúlozni, se megelőlegezni a meglepetést; Rimányi írásának egyik szépsége éppen az, hogy Lovászhoz foghatóan ért váratlan összefüggések felvillantásához, jelentésteljes sejtések merész vázolásához, távlatos alkalmazások lehetőségének érzékeltetéséhez. És milyen jellegzetesen „lovászi" téma „máshonnan származó eszközök" (geometria, algebra, részecskefizika) „összeugrasztása"! Így aztán a cikk (ismételt) áttanulmányozása után a matematikában eladdig teljességgel járatlan olvasó is szinte beavatottként kérdezheti a szerzővel:

> „Vajon várhatjuk-e, hogy a csomóelmélet fő problémáit a közeli jövőben megoldják? Ezt nem lehet megjósolni. Az azonban biztosnak tűnik, hogy a csomók tartogatnak még meglepetéseket, ha másért nem, az elméleti fizikával

> való szoros kapcsolat miatt, mely napjainkban talán olyan gyorsan fejlődik, mint századunk elején. Akár fizikai gondolatok serkentik a csomóelméletet, akár fordítva, mindenképpen sok szép matematikát várhatunk még e tárgytól.”

A matematika szépsége, amiről Péter Rózsa vallott sokszor és sokféleképpen, sugárzik ezekből a tanulmányokból, szóljanak kívülállóknak vagy matematikusoknak. Tán épp a szépséggel függ valamiképpen össze az is, hogy akár mottóul lehetett volna választani az egész különszámhoz Péter Rózsa *Játék a végtelennel*-jéből a 18. fejezet címét: *És mégis sokféle a matematika*. Hiszen mi lehet annyira, s olyan ártalmatlanul sokféle, mint a szépség? Erről a sokféleképpen szép matematikáról szólnak ezek az írások, talán ezért is sikerülhetett a szerkesztőnek olyan pompásan a kiváló szerzőgárda sokféle virtuozitásának egymást erősítő összhangot adnia. Meg persze azért, amiről az *Előszó*ban vall: „Évek óta álmodoztam erről a kötetről. Az utolsó pillanatig alakítgattam, csiszolgattam.” Így kerekedhetett ki a keze alól a magyar matematika szép képe, egy határoktól mentes hazáé, ahol a zord időkben is otthonra, bár olykor tragikus sorsra, talált a gondolat.

A *Természettudományi Közlöny* nagy hagyományainak megfelelően – a *Közlöny* mindig elsősorban a középiskolai tanárokra és kiváló diákjaikra számított – ez a kötet is kellő súlyt helyez a matematika középiskolai – „oktatására”, írnám, ha nem lenne az amit a kötet bemutat, sokkal de sokkal több annál, amit általában „oktatáson” értünk. Beszéljünk inkább Oláh Vera *Középiskolai Matematikai Lapok*at és történetét bemutató cikkének címével *Magyar csodá*ról, abban az értelemben, ahogyan cikke végén írja:

> „A matlap léte, csodája egyik összetevője a magyar titoknak: hogyan lehet, hogy egy kis ország annyi zseniális természettudóst adott a világnak.”

Hasonló lapot ugyanis sehol a világon nem sikerült összehozni. Itt viszont átvészelt minden zord időket, s a második világháború és az azt követő keserű „béke” tragédiái után és közepette is sikerült újraindítani, amint az újraindítók egyike, Surányi János beszámol róla.

> „A folyóirat első, úgynevezett mutatványszáma 1893-ban jelent meg. Mindkét világháború miatt néhány évre megszűnt, és mindkettő után akadt, aki újraélesztette.”

Ezt Oláh Vera, a jelenlegi főszerkesztő írja, s így folytatja:

> „Ez önmagában is csoda: kevés, egy évszázada alapított újság működik ma Magyarországon, de olyan talán nincs is több, amelyik ugyanúgy, ugyanazt írja és mégis újat nyújt; havonta több ezren várják-sürgetik megjelenését."

A matlap ugyanis folyton újrateremti a maga közönségét.

> „A matlapon nevelkedettek egy része tudós lett, mások »csak« nagyon jó szakemberek, egyesek tanárok. Akik tanítványaiknak, gyerekeiknek újra kezébe adták a matlapot."

Természetes következmény vagy újabb szerkesztői bravúr (vagy mind a kettő), de a kötet 19 honi szerzője közül (Erdőst és Laxot is ide számítva) tizennégynek ifjonti fényképe ott található abban a válogatásban, amelyet a belső borító közöl a matlap legjobb megoldóinak táborából. S hogy a példa ma is milyen ragadós, mutatja Herczeg János cikke az *Élet és Tudomány*ban folyó *A gondolkodás iskolájá*ról.

> „A rejtvényrovatok – írja – a legdemokratikusabb intézmények. Minden olvasójuk ugyanazokkal a kérdésekkel szembesül, s ha eljut a megfejtéshez, átélheti »az igazság ugyanaz...« pascali élményét (miközben hétköznapjaink a sokféle igazság elfogadtatására szoktatnak)."

De azt is megmutatja a cikk, hogy ugyanaz a megoldás többféle módon érhető el; a többféleség elemeinél beépül a matematikába.

És nem monolitikus építmény a matematika a csúcsain se. A kötetben tükröződő „megélt matematika" a magyar szerzők „élménybeszámolói" után közli befejezésül századunk tán legnagyobb hatású matematikai vállalkozásnak, a „bourbakizmus"-nak a történetét, érvrendszerét, eredményeit, érdemeit ismertető cikkek egy (kitűnően) válogatott csokrát, s utána az alapkérdések merőben másféle megközelítésével híressé vált amerikai matematikus, A. R. D. Mathias cikkét *Bourbaki tévútjai*ról. Külön szépsége a szembesítésnek, hogy újra visszatérnek benne az *Egységes tudomány-e a matematiká?*-ból ismert „törésvonalak" csakúgy, mint a „deduktiv szigor" és a „ráérző" megoldások ellentétei. Ahogyan Csirmaz László írja *A titkosírás matematikájá*-ról szóló, számelméleti alapkérdéseket és nem mindig meglapozott de bevált „protokollokat" mesterien keverő dolgozatában:

> „Az eljárások mögött sok és mély matematika rejtőzik. Legtöbbször pontosan tudjuk, melyek azok a mély és nehéz matematikai sejtések, amelyek megoldása után szorongásunk elmúlhatna: hátha ezek a tételek mégsem igazak, hátha csak légvárakat építünk. Az élet azonban gyorsabb tempót diktál, úgy tesz, mintha ezek a tételek már mind bizonyítva lennének, és ez az egész csak a matematikus népség fontoskodása. Bizonyára igazuk van: általában bebizonyosodik, hogy ott, ahol korábban a matematika lemaradt a gyakorlat mögött – erre jócskán akad példa az elméleti fizikából – végül a gyakorlat embereinek lett igazuk."

Vagy ahogyan Péter Rózsa fogalmazott Budapesten, 1943 őszén, csodálatos – és csodálatosan vidám – kis könyvének a végén:

> „A kereteket majd bizonyára tágítani fogja a jövő fejlődés, ha még nem is látjuk: hogyan. Az örök tanulság: a matematika nem sztatikus, zárt, hanem élő, fejlődő valami; bárhogyan próbáljuk zárt formába merevíteni, talál magának rést: elevenen robban ki belőle."

S azokban az elsötétülő és bezáruló időkben a nagy matematikus szavai a matematika vigasztalását sugározva messzi túl mutattak a matematikán.

Interjú Szőkefalvi-Nagy Béla akadémikussal Riesz Frigyes hatásáról[66]

Riesz Frigyes és Fejér Lipót valósággal legendás alakjai ma már a magyar matematikának. Nevük a szakma határain messze túl ismert. Riesz Frigyes 1907-ben, Ernst Fischerrel egy időben fölfedezett híres tétele, majd ennek alapján a lineáris operációk általános elméletének a kidolgozása, ami aztán a modern matematika egy egész új hatalmas ágának, az ún. funkcionálanalízisnek a kibontakozásához vezetett, valamint a topológia axiomatikus megalapozása 1908-ban, megkerülhetetlen határkövek századunk tudománytörténetében. Professzor Úr fogalmazta ezt meg talán legtalálóbban a Természet Világában Staar Gyula interjújában: „A Riesz–Fischer-tétel vagy a Fourier-sorokra vonatkozó Fejér-féle tétel olyan eredmények, amelyek ismerete nélkül sem Szegeden, sem Budapesten, de sehol másutt a világon nem lehet matematikusi oklevelet szerezni. Forrásvidékei ezek a matematikának, nélkülük nem lenne olyan ez a tudomány, mint amilyen ma. Gondolataik kiszakíthatatlanul benne élnek matematikai és ily módon általános kultúránkban.”

„…nem szabad azt gondolnunk, hogy csökkent a tudományos értékek megbecsülése a fiatalok körében”

Azt, hogy ez mennyire így van, szépen mutatja a Fejér és Riesz születésének századik évfordulója alkalmából, 1980-ban rendezett tudományos ülésszak. A világ minden tájékáról jöttek ekkor Budapestre kiváló matematikusok, a Szovjetunióból éppúgy mint Amerikából, de felsorolhatnám jóformán a világ minden nagy matematikai centrumit. A megemlékezések és előadások bizonyították, hogy milyen eleven ma is e két nagy matematikusunk tudományos munkásságának a hatása. Nyugodtan mondhatjuk a centenárium fényében, hogy az ő hatásuk az idők folyamán – Fejér Lipót 1959-ben halt meg, Riesz még előbb, már 1956-ban – nem csökkent, hanem folytatódik és él tovább. A matematika épülete, mint egyébként a tudományok bármelyike, öntörvényű belső növekedés mellett mindig külső – a természet, de most már a társadalom által is kitűzött – feladatok megoldásával fejlődik. Ezek a feladatok a

[66] Forrás: Vekerdi László: Vallomások tudósokról. „…nem szabad azt gondolnunk, hogy csökkent a tudományos értékek megbecsülése a fiatalok körében”. Interjú Szőkefalvi-Nagy Béla akadémikussal Riesz Frigyes hatásáról. = Magyar Tudomány 91 (Új foly. 29.) 1984. No. 4. pp. 288–293.

matematikában tükröződve magát a matematikát is fejlesztik. Bár Riesz ás Fejér ebben a fejlődésben nem ugyanazt az irányt követték, de mindketten a matematikai analízisnek voltak a klasszikusai.

Ebben a fejlődésben Professzor Úr neve a köztudatban Riesz Frigyesével forrt Össze. De hogyan indult el az útján?

Riesz Frigyes professzorom volt, de jól ismertem Fejér munkásságát is, s az én fejlődésemre mind a ketten hatottak. Ma, a múlt visszapillantó tükréből nézve azt mondhatnám, hogy egyformán hatottak rám. Életem egyik korszakában talán Fejér Lipót dolgozataihoz csatlakoztam erősebben; máig is érzem ennek a hasznát. Természetesen Riesz, aki Szegeden professzorom volt, közvetlenebbül orientálhatott. Fejér Lipót Budapesten tanított, bár mindketten a kolozsvári egyetemen kezdték pályájukat. Azzal a témakörrel, amiből később a könyveimet is írtam – tehát a funkcionálanalízissel, az operátorelmélettel – elsősorban fizikai tanulmányaim hatására kezdtem foglalkozni, még egyetemi hallgató koromban.

Tehát ez esetben is a feladat kihívása hatott?

A kvantummechanika felfedezésének és kidolgozásának az időszaka volt ez. Ma is jól emlékszem, milyen erősen megragadott *Neumann János*nak a kvantummechanika matematikai alapjairól szóló könyve, továbbá *B. L. van der Waerden* holland matematikus könyve a csoportelmélet szerepéről a kvantummechanikában és a színképek értelmezésében. Ezeknek a könyveknek az olvasása közben döbbentem rá, hogy az én tanárom, Riesz Frigyes, akitől első éves korom óta hallgattam az analízis elemeit, matematikai oldalról egyik klasszikus nagysága ezeknek az engem érdeklő témaköröknek. Ekkor vettem föl azután az ő speciális kollégiumait, s Neumann könyve után most már Riesz előadásai nyomán mélyültem el ennek a témakörnek a tanulmányozásában.

Riesz idejében nem sok egyetemi hallgató volt Szegeden, de azok között akadtak nagyon jók is. Ez részben annak is köszönhető, hogy akkoriban nyílt meg Szegeden az Eötvös Loránd Kollégium, a budapesti nagy Eötvös-kollégium kisebb méretű természettudományos megfelelője, ahol kiváló képességű kollégák között tanulhattam. Riesz vizsgáim révén hamar megkedvelt, de igazán akkor fogadott – vagy ha Úgy tetszik „avatott” – matematikussá, amikor fizikai tárgyú közlemények után az egyik első dolgozatom meglepő fordulatot hozott egy olyan témában, amivel ő maga, Riesz is foglalkozott, de – ahogyan ő mondotta – egy bizonyos pontnál nem jutott tovább. Nekem sikerült végigjárnom ezt az utat. Riesz Frigyes ezt erősen méltányolta és attól fogva másként nézett rám. Addig csak egyik kiváló diákját látta bennem, ezután azonban elfogadott matematikusnak.

Így vált hát Professzor Úr fizikusból matematikussá? De hogyan lett Riesz Frigyes közeli munkatársa, akivel együtt írták a modern matematika egyik legnépszerűbb, s máig széles körben ható könyveinek egyikét, az először 1952-ben s azóta számos kiadásban, számos nyelven megjelent Leçons d'analyse fonctionnelle-*t?*

Messzebbről kell kezdjem kicsit a választ. Az egyetem elvégzése után rövid ideig Miskolcon tanítottam, majd beosztott tanárként az Eötvös Loránd Kollégiumban. 1937-ben azután külföldi ösztöndíjat nyertem. Az 1937–38-as tanévet Lipcsében töltöttem, azután meg Franciaországban, a grenoble-i és a párizsi egyetemen folytattam tanulmányaimat. Mindhárom helyen a fizika és a matematika rendkívüli nagy egyéniségeivel találkoztam, olyanokkal, mint *Heisenberg*, *Koebe*, van der Waerden, az ergodelméletben úttörő *Eberhard Hopf*, az approximációelméletben és a Fourier-sorok elméletében kiemelkedő *Favard*, a francia matematika nagy klasszikusának számító *Hadamard* vagy az új integrálfogalmat megteremtő *Lebesgue*. Természetesen mind erősen hatottak reám. Külföldi tartózkodásom alatt szakmai előadásokat is tartottam. Dolgozataim is jelentek meg, a lipcsei szász akadémia Berichte-jében, illetve a párizsi Académie des Sciences Comptes Rendus-jében. Mindkettő igen tekintélyes tudományos fórum, s a cikkek szép visszhangot keltettek. Kivált a két nagyobb terjedelmű lipcsei cikkemre hivatkoztak azóta is sokan. 1939 nyarán tértem haza, nem sokkal a háború kitörése előtt. Nemsokára kineveztek a szegedi Polgári Iskolai Tanárképző Főiskolán a matematika tanárának, édesapám, Szőkefalvi-Nagy Gyula utódjaként, aki az egyetemre került a geometria professzorának. A főiskola mind a négy évfolyamán egyedül tanítottam matematikát, ami természetesen rengeteg elfoglaltságot és készülést jelentett, de egyben rendkívül sok pedagógiai gyakorlattal, sőt szakmai haszonnal is járt. Én soha nem éreztem semmiféle ellentétet tanítás és kutatás között. Főiskolai tanárkodásom alatt írtam meg első könyvemet, amelyik 1942-ben jelent meg *Spektraldarstellung linearer Transformationen des Hilbertschen Raumes* címen, a nevezetes „Ergebnisse der Mathematik" könyvsorozatban, Berlinben.

Ma már a szakma egyik nagy klasszikusa; 1967-ben újra kiadta a Springer Verlag.

Időközben, a háború után kiadták már Amerikában is, fotokopikusan mint „hadizsákmányt", s nem legálisan valahol távol-keleten is, de azt hiszem több illegális kiadása van a könyvnek, mint amennyiről tudok. Visszatérve Rieszre: közvetlenül a háború után fölvetette, hogy az ő 1913-ban Franciaországban megjelent könyvét meg az én Spektraldarstellung-omat alapul véve, közösen írjunk egy részletes monográfiát, amely – többek között – tartalmazza a Lebesgue integrál ő általa javasolt felépítési módját és ennek következményeit is, és általában tükrözze a témakör azóta bekövetkezett nagy fejlődését. Régen készült ő ilyesmire, de nem talált rá alkalmat és munkatársat. Most viszont, 1945 végén, 1946 elején megjött az alkalom. Az élet már elég nyugodt volt Szegeden az alkotó munkához, a körülmények azonban még elég szűkösek. Riesznek nyilván hiányzott a megszokott társasága s kedvelt szelíd időtöltései, mint a bridzs vagy a vívás, én meg a mindennapos – szó szerint is értve – favágástól pihentem meg az ő nyugodt és tudományos légkört árasztó otthonában. Csak azért említem ezt, mert fontosnak érzem hangsúlyozni, hogy a szükség igenis lehet alkotásra és előbbre jutásra sarkalló erő. Akkoriban az egyetemen se fűtöttek, a hallgatókat is többnyire hazaküldtük; hol volt még a forint megjelenésével kezdődő aranykor? Mi viszont alaposan kihasználtuk ezt az időt, s természetesen folytattuk a közös munkát azután is. Ilyen célú, terjedelmű és témakörű könyv nem igen íródott addig. A könyv megjelenésére persze még évekig kellett várni, egészen 1952-ig, amikor az újjáalakult Akadémiai Kiadó nagyon jó minőségben, szép nyomásban, megnyerő külalakkal kihozta, *Leçons d'analyse fontionnelle* címmel.

A magyar könyvkiadás legnagyobb nemzetközi sikereinek egyike a Leçons. *Több nyelven kiadták, legutóbb japánul, oroszul pedig két ízben is, a második kiadást egy kb. 100 oldalas függelékkel bővítve. De nem mondana Professzor Úr Riesz Frigyesről többet is, hiszen a közös munka során nyilván még közelebbről megismerte őt?*

Ez alatt az idő alatt csakugyan egész közel kerültem Riesz Frigyeshez, nemcsak mint volt tanítvány és kolléga, hanem emberileg is. Megtanultam tisztelni benne a tudományos gondolkozót, aki szigorúan megkívánta és megbecsülte a becsületes racionális munkát, az ellenkezőjét pedig elítélte, sőt, azt is mondhatnám, hogy megvetette. Felületességet, pongyolaságot, megbízhatatlanságot nem tűrt el maga körül sem a tudományos munkában, sem az általános emberi magatartásban. Ha később valamilyen kérdésben döntenem kellett – s ez gyakori az ember életében – sokszor feltettem a kérdést magamban, vajon miként foglalna állást ebben a problémában Riesz? És többnyire elég egyértelműen éreztem, hogy körülbelül mit mondana, s a körülményekhez és lehetőségekhez képeit próbálom is követni.

Mármost ami a külső életkörülményeit illeti, tudni kell, hogy Riesz Frigyes igen egyszerűen élt. Nőtlen ember volt. Szűk baráti köre nagyra becsülte, szerette. Ezt a megbecsülést és szeretet mutatja az is, hogy amikor a háború utolsó hónapjaiban ő is méltánytalanságoknak és veszélyeknek volt kitéve, baráti köre mindent elkövetett, hogy könnyebben elviselhesse ezeket. Persze így is megviselték a körülmények, az események, bár ő mindig nagy önuralommal, magára erőszakolt nyugalommal fogadta ezeket. És úgyszólván nyomban a felszabadulás után, már 1944 novemberében a legelsők közt kezdte meg az újrainduló egyetemen előadásait. Túl már a hatvan éven is lendülettel vett részt az egyetemi munka megindításában, sőt, átmenetileg még a rektori tisztet és teendőket is vállalta, s viselte egészen 1945 tavaszáig, amikor az egyetem kitelepítésével kapcsolatosan eltávozott tanárok visszatértek, s helyreálltak lassan a normális keretek. 1946-ban a budapesti egyetemre hívták meg. Egészségi állapota rövidesen romlani kezdett, s mindinkább szobájához kötötte. De még ekkor is folytattuk közös munkánkat, budapesti látogatásaim és levelezés révén. Továbbra is élénk figyelemmel kísérte az ország matematikai életét, a tehetséges fiatal matematikusok fejlődését.

Mit mondhatnék még róla? Talán azt, hogy amíg Szegeden élt, nagyon szerette nyáron a Tiszát; úszott, evezett, tagja volt a csónakázó egyletnek, és a vívósportnak is hódolt. Kiváló bridzselőnek ismerték.

Volt valami tartózkodó elegancia benne, megjelenésében, ahogy előadott. De hogyan viselkedett, milyen volt a hétköznapokon?

Nem mindenkihez volt egyformán kedves. Akiknek a magatartása nem ütötte meg az ő szigorú normáit, azokról bizony megmondta a véleményét, vagy legalábbis távol tartotta magát tőlük. Viszont akiket becsült és szeretett, azokért ki is állt. Én nagyon sokat köszönhetek neki, nem csupán azért, mert – ami persze a legtöbb – tanulhattam tőle és társa lehettem egy ilyen nagy tudományos vállalkozásban, hanem azért is, mert mindig éreztem, hogy ha történik valami, amiben én benne vagyok és ez abba az irányba esik amit ő helyesnek tart, akkor azt ő értékeli és támogatja.

A könyvünk harmadik (francia nyelvű) kiadásához, ami még Riesz életében jelenhetett meg – 1956-ban halt mag – egy függeléket írtam, amit neki ajánlottam, mintegy köszönet- és ajándékképpen Mesteremnek.

Hogyan folytatódott Professzor Úr saját munkája? Milyen irányokban lépett tovább?

Különös véletlen folytán ugyanazon év nyarán, melynek tavaszán Riesz meghalt, megismerkedtem Bukarestben egy fiatalemberrel, *Ciprian Foiaş*-sal, aki fölfigyelt ott egy előadásomra, melyben egy 1953-as eredményemet adtam elő. Ebbe a témakörbe nagy lelkesedéssel bekapcsolódott, s a témát kifejtő dolgozatsorozatban rövidesen munkatársam lett. Azóta számos közös tanulmányt írtunk, amelyek – mint már az 1953-as dolgozatom is – egyre inkább kitágították a funkcionálanalízisnek, közelebbről a Hilbert-tér operátorai elméletének azt a körét, amelyben Riesz alapvető – mondhatjuk azt is, hogy legalapvetőbb – szerepet játszott. Ezekkel a dolgozatokkal olyan új irány indult el, amelyről csakhamar kiderült, hogy különféle alkalmazásokban legalább olyan fontos szerepet játszik, mint amilyent a klasszikus operátorelmélet játszott pl. a kvantummechanika matematikai megalapozásában. Ahhoz, hogy az ezekből az alkalmazásokból kinövő új irányok ma nemzetközileg annyira előtérben vannak, nagymértékben hozzájárult az a könyv is, amit Foiaş-sal együtt írtunk, a Hilbert-tér operátorainak harmonikus analíziséről. Franciául jelent meg először 1967-ben, s aztán angolul és oroszul 1970-ben. A könyvhöz a nagy nemzetközi folyóiratokban állandóan bővülő ás szerteágazó irodalom csatlakozott; alkalmazási területeit ma már szinte át se tudjuk igazán tekinteni. Az úgynevezett predikció-elmélettől a matematikai statisztikán és a stochasztikus folyamatok elméletén keresztül számos fizikai és technikai problémakörig terjednek az alkalmazások. Egyik legújabb munkatársunk ebben a témakörben egy fiatal amerikai matematikus, aki egy aerodinamikai és asztrofizikai intézetben dolgozik. Természetesen közvetlen tanítványaim közül is többen kiválóan folytatják ezeket a kutatásokat, részben itthon, részben külföldön; de nehezen tudnám elválasztani tőlük az ő saját tanítványaikat vagy azokat, akik a Foiaş-sal írt könyvünk révén váltak közös tanítványainkká. És semmiképpen sem tudnám itt hirtelenjében méltatni vagy akárcsak felsorolni is őket. Ezeknek a kiterjedt kutatásoknak egyik fő publikációs helye ma is a szegedi *Acta*, de persze távolról sem kizárólagosan, hiszen az Egyesült Államokban, a Szovjetunióban vagy Japánban éppen úgy közölnek a nagy nemzetközileg ismert folyóiratok ez irányú újabb eredményeket. Az alapok itt is azok, amiket valaha Hilbert, Riesz és Neumann János lerakott, de a témakör lényegesen bővült, s bővültek ezzel együtt az alkalmazási területek is.

Maga az Acta Scientiarum Mathematicarum, a híres szegedi Acta is Riesz Frigyes nagy alkotásainak egyike. Mi ennek az első nemzetközi tekintélyű magyar matematikai folyóiratnak a „titka”?

Ami az Actá-t illeti, voltaképpen ezt is szükség szülte. Sokszor előfordul, hogy valamilyen nélkülözhetetlen dolognak a hiányából fakadó kényszer hoz létre valamit, ami e nélkül talán nem keletkeznék. A szegedi egyetem s vele a matematikai intézet Kolozsvárról települt át az első világháború után. De csak a professzorok jöttek át s néhány diák; minden fölszerelés nélkül. A matematikában a tudományos eszközök a könyvek és a folyóiratok; de az új egyetem ezek nélkül kényszerült indulni. Ezért találta ki Riesz és a vele együtt érkezett kiváló fiatalabb professzortársa *Haar Alfréd*, hogy kiadnak egy nemzetközi matematikai folyóiratot, amelynek révén termékeny külföldi cserekapcsolatok kialakítását remélhették. A kezdeményezés bevált; köszönhetően a folyóiratra fordított sok munkának, meg Riesz Frigyes és Haar Alfréd már akkor is meglevő hírnevének, kiterjedt nemzetközi tudományos kapcsolatainak. Így teremtettek közvetlenül az első világháború után, mondhatnám semmiből egy olyan tudományos folyóiratot, amelyiknek a nemzetközi visszhangja lehetővé tette legalább a legfontosabb folyóiratok és könyvek gyors megszerzését. A kezdeti lendületet kitartó, szívós munka követte, úgyhogy a színvonal megmaradt, igyekszünk megtartani ma is. 1947 óta egészen az utóbbi évekig én vállaltam a folyóirat vezetését. 1980-tól volt tanítványom és jelenlegi kollégám, *Leindler László* akadémikus vette át tőlem ezt az irányító munkát, de továbbra is részt veszek a szerkesztés feladataiban, különösen az én fő érdeklődési köröm illető területeken. A világméretű visszhangból jól lemérhető, hogy a színvonal nem marad ma sem az alapítók, Riesz ás Haar és a hozzájuk csatlakozó szegedi professzorok, mint *Kerékjártó Béla* és mások, köztük édesapám, Szőkefalvi-Nagy Gyula által megteremtett nívó alatt. Azt pedig, hogy a szegedi egyetem matematikai könyvtára mit profitált az Actá-ból, azt bármelyik, akár külföldi, akár belföldi látogatónk azonnal meg szokta állapítani, rendszerint nagy csodálkozással és némi, érthető irigységgel.

Ez a folyóirat indította meg Szegeden egyébként a matematikai nyomdásztechnikát is, és olyan színvonalra fejlesztette, hogy ma nemcsak a szegedi egyetem, de az Akadémiai Kiadó vagy a Bolyai Társulat matematikai kiadványai is gyakran itt készülnek, sőt, külföldről is rendszeresen vállal munkát a nyomda. Mindez abból ered, amit még az Acta hőskorában tanultak a nyomda szakemberei, és becsületükre legyen mondva kitűnően megtanultak, s generációkon át őrzik a tudásukat.

Az Acta tartalmát, profilját is Riesz és Haar, majd később Professzor Úr munkássága határozta meg?

Az Actá-ban megjelenő cikkekről szuverén módon dönt a szerkesztőség. Előfordult, hogy nagy szaktekintélyeknek adtunk vissza cikkeket vagy csak átdolgoztatás után közöltük. Természetesen az Acta, egyetemi kiadvány lévén, a mindenkori professzorok érdeklődési területén túlmenően is folytatja a tevékenységét; de az is természetes, hogy egy-egy tudományág nemzetközileg elismert művelői vonzzák az azonos témakörű cikkeket. Hiszen ha egy Riesz elfogad egy cikket, az önmagában is megtiszteltetés és garancia. Az persze, hogy egy egyetemen kik kiválóak vagy egyáltalában kik dolgoznak, változik; a húszas évek elejétől – amikor az Acta megindult – eltelt bő hatvan évben észlelhetők bővülések, itt-ott szűkülések is a vezető oktatók tudományos spektrumában, de a Riesz és Haar által képviselt irányok ma is előkelő módon szerepelnek. Felzárkózott persze melléjük a matematika több más ága is, kiemelném például az algebrát, az analízis más ágait, a valószínűségszámítást, de említhetném még a matematika számos egyéb ágát. Az én személyes hatásom – amellett, hogy mint főszerkesztő az egész folyóirattal minden területen foglalkoztam, s nemcsak a saját tudományágamban – eredményezte talán azt, hogy a kezdeti irányok, a funkcionálanalízis, az operátorelmélet az alapítók kiválása után is erős profilként folytatódtak az Actá-ban, és reméljük, hogy ez az irány a jövőben is sikerekre számíthat.

Mint Professzor Úr példája is mutatja, régen a nehéz körülmények ellenére is sikerült tökéletes biztonsággal kiválasztani az igazi tehetségeket. Mintha ma, összehasonlíthatatlanul jobb kutatási lehetőségek közepette nem lenne ez olyan tökéletes?

A világ megváltozott körülöttünk. Nemcsak a kis környezetünkben, hanem mindenütt, egészében. Mai életünk sok tekintetben csakugyan összehasonlíthatatlan a régivel. Nyilvánvalóan igen sok javulásról, pozitív irányú változásról beszélhetünk, de – valószínűleg szükségszerűen – összefüggenek ezek néhány negatív irányú változással is. Pozitív irányú változás például az, hogy a társadalom és a gazdaság sokirányú és széles körű fejlődése következtében a technika és az ipar sok tehetséges fiatalt tud felvenni és vesz fel, akik azelőtt csak az egyetemeken tudtak volna elhelyezkedni, már amennyiben egyáltalában el tudnak helyezkedni. Ma egy tehetséges fiatalember kétszer is meggondolja, hogy kutatásra vagy pláne tanításra tegye fel az életét és erre alapozza a családját. Ezért aztán úgy tűnhet, mintha kevesebb lenne a fiatalok közt az alkotó tehetségek relatív száma, de ne feledjük, hogy ezek a tehetségek ott vannak az iparban és az élet sok más területén, és többnyire hasznos munkát végeznek. De a legtehetségesebbek, vagy azok, akiknek az elhivatottságtudata minden nehézséget és csábítást legyőz – és szép számmal akadnak ilyenek –, azok változatlanul magas színvonalon művelik ma is a matematika tudományát, és egyáltalában nem kell – vagy inkább azt mondanám: nem szabad – azt gondolnunk, hogy csökkent a tudományos értékek megbecsülése a fiatalok körében. Még egy olyan viszonylag kicsi egyetemen is, mint a szegedi fölbukkan szinte évenként néhány kiváló tehetség, akikre akár már most büszkék lehetünk, s akiktől a matematika magas szintű művelése bizton várható. Nem minden évben születik persze egy Riesz Frigyes és egy Fejér Lipót – ők véletlenül egy esztendőben születtek alig két hét különbséggel –, de nemzetközileg számon tartott vagy éppen kiemelkedő fiatalokban nincs hiány, ha nem is bővelkedünk. Számon tartjuk őket, legnagyobb értékünk gyanánt, és segítjük őket, amíg szükségük van rá. Mert a fiatalok előbb-utóbb önállókká válnak, és az a legnagyobb öröm, amikor esetleg még a mestereiket is túlszárnyalják.[67]

[67] A témakörhöz kötődő két legfrissebb monográfia: A matematikus Riesz testvérek. Válogatás Riesz Frigyes és Riesz Marcel levelezéséből. Összeáll.: Szabó Péter Gábor. Bp. – Piliscsaba, 2010. MATI. 391 p. (Magyar tudománytörténeti szemle könyvtára 59.); Kiváló tisztelettel. Fejér Lipót és a Riesz testvérek levelezése magyar matematikusokkal. Összeáll.: Szabó Péter Gábor. Bp. – Piliscsaba, 2011. MATI. 193 p. (Magyar tudománytörténeti szemle könyvtára 87.) *(– a szerk. megj.)*

Fejér Lipót helye a matematikában és a honi matematikai életben[68]

> „Nem az emberi lények tényleges szabadsága
> tudatosít alkalmazási területet a geometriának
> és általában a matematikának, hanem megfordítva,
> a matematika eszmélteti termékeny alkalmazási
> területre az emberi szellem szabadságát."[69]

„Egy teljesítmény különleges volta csak saját korába helyezve érthető meg, ehhez azonban vissza kell mennünk a messzi múltba" – írja Turán Pál, Fejér Lipót *Összegyűjtött munkáinak* mesteri kiadását[70] bevezető soraiban. S csakugyan, a végtelen sorok, melyeknek modern elméletében mérföldkőként tartják számon a világ a matematikusai Fejér fölfedezéseit, végigkísérik úgyszólván a matematika egész történetét. Mert attól kezdve, hogy a görögség matematikai géniusza a cammogó teknőc nyomába fogta – az örök elérhetetlenség paradox szimbólumaként – a gyorslábú Akhilleuszt, szóval attól kezdve, hogy a matematika a számolás művészetéből az emberi szellem szabadságának fényes mezejévé változott, mint a mai napig kivételesen fontos szerep jutott a végtelen soroknak, a végtelen sok tagból álló összegeknek a matematikai gondolkozás megalapozásában, fogalmainak kidolgozásában s finomításában, módszereinek fejlődésében. Kivált a XVII. század nagy szellemi forradalma óta, amióta megtanulta az ember, hogyan kell kiszámítani a változást, azaz hogyan eredhet szelleme a végtelen kicsiny és a végtelen sok fogalmával a gyorslábú Akhilleusznál is sebesebben a tűnő pillanat nyomában.

Ez a forradalmi tudomány, a végtelen kicsiny és a végtelen sok fölhasználása a folytonosan változó összefüggések kiszámítására, vagy ahogyan tudományosan nevezik: a függvények elmélete, az analízis az alapja egész mai fizikai-technológiai civilizációnknak. Persze, nem éppen abban a formában, ahogyan nagy megteremtői, Descartes, Pascal, Newton és Leibniz a XVII. században kidolgozták. Az analízisnek ahhoz, hogy könnyen és biztosan alkalmazható eszközzé váljék, alaposan át kellett alakulnia. És épp ebben az átalakulásban jutott fundamentális, sorsdöntő szerep annak a végtelen sorféleségnek, amellyel örökre

---

68 Forrás: Vekerdi László: Fejér Lipót helye a matematikában és a honi matematikai életben. = Természet Világa 137 (2006) No. 6. pp. 250–252. – Kéziratoknak is megvan a maguk sorsa. Vekerdi Lászlónak ez a cikke több évtizedes megbúvás után egy papírhalom alól került elő. *(– Staar Gyula megj.)*

69 Imre Tóth: Ahile. Pradoxele eleate in Fenomenologia spiritulni. Bukarest, 1969.

70 Fejér Lipót összegyűjtött munkái I–II. köt. Szerk.: Turán Pál. Bp., 1970. Akadémiai.

összeforrott Fejér Lipót neve: a Fourier-sornak. De még ennek a megértéséhez sem elegendő Joseph Fourier-nél (1768–1830) kezdeni a históriát.

A XVIII. század közepén Jean le Rond d'Alembert (1717–1783; a kor legszínesebb s tán legérdekesebb tudósegyénisége, akiről jó jellemzést találhat az olvasó Benedek István remek XVIII. századi pszeudoregényében, a *Párizsi szalonok*ban) fölfedezte, hogy a rezgő kifeszített húr mozgását leíró egyenlet megoldását egy „tetszőleges", ám a húr (kétszeres) hosszúságától mint „periódustól" függő kifejezés *algebrája* adja meg. A század legtöbbet publikáló s legtekintélyesebb matematikusa, Leonhard Euler (1707–1783) is igazolta d'Alembert fölfedezését, s ha a periodikus függvény értelmezése tekintetében vitatkoztak is, abban egyetértettek, hogy mindketten elutasították Daniel Bernoulli (1700–1782) véleményét, aki szerint a kérdéses periodicitás *geometriai* periodicitás volt. A megoldást egyszerű trigonometrikus függvények, sinus- és cosinus-„hullámok" végtelen sora állította elő.

Daniel Bernoulli nem tudta nagy eredményét minden kétséget kizáró matematikai szigorúsággal bizonyítani, s az ő geometriai értelmezése ellen foglalt állást a századvég s a századforduló leghíresebb matematikusa, Luigi de la Grange (1736–1813), a nagy Lagrange is. Olyannyira, hogy amikor 1807-ben egy egészen más fizikai természetű, de hasonló matematikai struktúrájú probléma, a hővezetés problémája kapcsán Joseph Fourier végtelen trigonometrikus sor alakjában fejezte ki a megoldást, Lagrange nem engedte megjelenni a dolgozatát, mert nem értette meg Fourier lángeszű fejtegetéseit. Nem értette meg, mert ő – mint Newton óta mindenki – a végtelen sorokat csupán az összegük helyett fölírt számítástechnikai segédeszköznek tekintette, és el sem tudta képzelni, hogy épp megfordítva: a sor tagjainak a viselkedéséből kelljen következtetni – mint Fourier eljárása kívánta – az összeg létezésére. Fourier nagy tettét csak az új analízis megalapozói, Niels Hendrik Abel (1802–1829), Bernard Bolzano (1781–1848) és Augustin Louis Cauchy (1789–1857) értették meg s méltányolták. Hiszen ők jórészt épp Fourier példájából vették észre, hogy az egész analízist a végtelen sorok részletösszegeinek a viselkedésére kell alapítani.

Ebben az új analízisben a „tisztességes" függvények végtelen sorba fejthetősége nem számítástechnikai fogás vagy éppen szerencsés véletlen volt többé, hanem a folytonos összefüggés lényegéből következő esszenciális tulajdonság. Ám épp Fourier sorai, a végtelen trigonometriai sorok csakhamar megint rossz hírbe keveredtek. Egyes egyedül Peter Lejeune Dirichlet (1805–1859), a XIX. századi analízis talán legmélyebb s mindig makulátlanul dolgozó mestere oldotta meg hiánytalanul egy hallatlanul szerencsésen választott átalakítás segítségével – Fourier tiszteletére írt dolgozatában – a problémát egy meghatározott részterületen. Az ő megoldását próbálta azután a század legátfogóbb matematikai géniusza

Bernhard Riemann (1826–1866) általánosítani. Munkája során az analízis egész későbbi fejlődése szempontjából sorsdöntő új eredményekre s megfogalmazásokra jutott, ámde a Fourier-sorok rakoncátlankodó eseteit neki sem sikerült véglegesen kordába szorítania. A századvég nagy matematikusai egymás után produkálták a példákat arra, hogy viszonylag „tisztességes" függvények Fourier-sora milyen „tisztességtelenül" viselkedhet: részletösszegeinek a sorozata némely pontban csak „ingadozik" a függvényérték körül, s csináljanak véle bármit, nem hajlandó megközelíteni.

Valósággal az analízis alapjait veszélyeztették ezek a rosszalkodó Fourier-sorok; s az analízis új, „szigorú" korszakának pápáját, Karl Weierstrasst (1815–1897) úgy elkeserítették, hogy egy ideig szólni sem volt hajlandó róluk egyetemi előadásaiban. Így állott a helyzet, amikor Fejér Lipót ifjú diákként hallott róla a berlini egyetemen Weierstrass kiváló tanítványától s utódjától, Hermann Amadeus Schwarztól (1843–1921). Fejér mesteri huszárvágással oldotta meg a roppant bonyolult problémát: a részletösszegek helyett átlagértéküket tekintette, s – valóságos új Dirichlet-ként – egy igen szerencsésen választott átalakítással olyan „képletmagot" teremtett, amivel a „rakoncátlankodó" Fourier-sorok is összegezhetővé váltak. Fejér rövid dolgozata – amit a párizsi tudományos akadémia közlönye, a híres *Comptes Rendus* 1900. december 10-i száma közölt – érthetően óriási feltűnést keltett a világ matematikusainak körében, s a sorelméleti vizsgálatok hatalmas tömegét indította el. A modern analízis egy új szakaszát nyitotta meg, amiben elsőrendű szerepe lesz továbbra is magának Fejérnek, s nemsokára a mellette felnövő magyar tanítványoknak.

Ez azonban már a matematikatörténet-írásra, matematikus szakemberekre tartozik, s főbb vonásaiban megtalálható Turán professzor kiváló Fejér-kiadásában és Szász Pál professzor Fejér Lipót munkásságáról és hatásáról szóló alapos elemzésében.[71] Nekünk, laikusoknak is meg kell azonban próbálni megérteni azokat a körülményeket, melyek között egy ilyen nagy matematikai tehetség, mint Fejér Lipóté kibontakozhatott, hathatott, az egész világra kisugárzó magyar iskolát teremthetett.

Hagyományosan szépirodalmi értékorientációjú művelődéstörténetünk a századvéget s a századfordulót a szellemi hanyatlás korszakának tekinti. A hanyatlás-perspektívából, persze, valóságos csodának látszik, hogy a századfordulón s a század elején mintegy varázsütésre annyi elsőrendű matematikus és természettudós tűnik föl hazánkban. Holott valójában szó sincs csodáról: egy hosszú és visszaesésekkel szaggatott folyamat vezet a harmincas évek helyi értékű reformtörekvéseitől a XX. század első évtizedének immár teljesen európai

[71] Szász Pál: Fejér Lipót 1880–1959. Bp., 1960. Akadémiai. pp. 103–147. (A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai és Fizikai Osztályának közleményei 10.) *Online:* http://real-j.mtak.hu/484/ *(– a szerk. kieg.)*

vérkeringésbe kapcsolt tudományosságáig. Ebben a folyamatban egyformán fontos szerep jutott vezető akadémikusoknak és egyszerű vidéki középiskolai tanároknak; illetve utóbbiak szerepe még fontosabb volt, mert ők közvetítették a szellemi teljesítmény szépségét s vágyát egymást követő diáknemzedékeknek. Erejüket és anyagi helyzetüket mindig fölülmúló tisztesség és fáradozás árán, amit azonban elviselhetővé tett reményeik megvalósulásának lehetősége, vagy legalábbis nem-lehetetlensége. A XIX. század végén a vidéki főgimnáziumok vagy főreálok tanári karában annyi nemzetközileg ismert és elismert tudós dolgozott, mint a harmincas években az ország egyetemein és főiskoláin együttvéve.

Különösen szerencsés volt a helyzet a matematikában, mert itt egy kivételesen nagy matematikaprofesszor, Kőnig Gyula és néhány tanítványa, munkatársa – elsősorban Kürschák Józsefet, Arany Dánielt és Rátz Lászlót kell említeni közülük – a kort messze megelőző tanárképző, tanulást serkentő és tehetségkiválogató rendszert teremtett. Egy kitűnően szerkesztett, tanulságos feladatok özönét kínáló folyóirat, a Középiskolai Mathematikai Lapok gondoskodott róla, hogy tanárok s diákok érdeklődése ébren maradhasson, s a legjobb megoldások közlésével a legtávolabbi vidéki városka diákjának is utat s lehetőséget mutatott a szakmai fölemelkedésre. Az érettségiző diákoknak a Mathematikai és Physikai Társulat minden évben tanulmányi versenyt rendezett. A versenyek eredményességét és rangját bizonyítja, hogy egykori győztesei között számos világhíres név található.

Fejér Lipót is nyert 1897-ben, második díjat. De Kőnig nem csak a kiválasztásra és a képzésre ügyelt; gondja volt rá, hogy maga és tanítványai jelen legyenek a nagy nemzetközi tudományos fórumokon. Ennek az érdekében vette rá az Akadémiát arra, hogy a legkiemelkedőbb matematikai teljesítmények jutalmazására Bolyai-díjat alapítsanak. A díj – ötévenként esedékes – kiosztására kétszer került sor, első ízben Poincaré, másodjára Hilbert kapta, s mind a kétszer a világ legjelesebb matematikusai vettek részt a jutalmazottak személyéről döntő bizottságban. A magyar matematika ekkor már szerves része volta világ tudományának. A magyar matematikusok olyan otthonosan jártak Berlin, Göttingen, Pisa vagy Párizs egyetemein – a kor nagy matematikai centrumaiban –, akár a pestin. Vagy tán még otthonosabban, mert ott nem zavarták őket az itthoni, óhatatlanul föl-föltámadó ellentétek és szakmai féltékenykedések.

Fejér Lipót az 1899–1900-as tanévet a berlini egyetemen töltötte. Itt a már említett Hermann Amadeus Schwarz hatott rá legerősebben, de hallgatta Lazarus Fuchs és Georg Frobenius előadásait is. S itt kötött életre szóló barátságot Constantin Carathéodoryval és Erhard Schmidttel, ami később termékeny kollaborációt és közös dolgozatokat is eredményezett. Schwarz híres szemináriumain ismerkedett meg Edmund Landauval, a XX.

századi klasszikus analízis tán legmélyebbre szántó mesterével, aki erősen hatott Fejérre; de Landau is mindig nagy érdeklődéssel kísérte fiatalabb kollégája eredményeit. Fejér a doktorátusa megszerzése után újból külföldre ment; az 1902–1903-as tanév első felét Göttingenben töltötte, ahol elsősorban David Hilbert és Hermann Minkowski előadásait látogatta, a nyári szemeszterre pedig Párizsba utazott, ahol főleg az analízis két nagy francia mesterét, Émile Picard-t és Jacques Hadamard-t hallgatta. 1905-ben a kolozsvári egyetemre került repetitornak, 1908-ban levelező tagjává választotta az Akadémia, 1911-ben a kolozsvári egyetem nyilvános rendkívüli tanára s még ugyanazon év őszén a budapesti egyetem tanára lett.

Fejért idehaza is kiváló fiatal tudósok vették körül; Zemplén Győző, Riesz Frigyes, Tangl Károly tartozott a szűkebb tudományos baráti körébe. Zemplén Győző – ahogy egymás közt nevezték: „a talján" – kivételes matematikai tudású kísérleti fizikus volt, Eötvös Loránd tanítványa és adjunktusa, és az ő révén Fejér fontos fizikai problémák megoldásába is belesodródott. Akárcsak barátja, Fejér sem zárkózott be a tudomány korlátai közé. Mindketten élénken részt vettek a század első évtizedében kibontakozó irodalmi mozgalmakban; Zemplén a *Szerda* állandó munkatársa volt, Fejér pedig nagy zeneértő s Ady Endre barátja, még a költő nagyváradi újságíró korában. Ez a gazdag emberi kapcsolatokból fölépülő itthoni s külföldi világ Fejér csodálatos matematikai alkotásainak a produktivitásának a háttere, ebben bontakozott ki alkotó géniusza, s vonzotta maga köré értékes tanítványok egész seregét anélkül, hogy tulajdonképpen valaha is akart volna szabályos „iskolát" alapítani. Már professzorsága első éveiben olyan – immár régen világhíres – tanítványok kerültek ki a keze alól, mint Szegő Gábor, Pólya György, Fekete Mihály, Szász Ottó, Riesz Marcell.

Az első világháború, s nyomában a fehérterror Fejér Lipót lendületét s iskolateremtő erejét is megbénította egy időre. De azután a két világháború közötti veszélyes szélcsöndben újraéledt s új matematikai területeket hódított meg munkakedve, s új tanítványi gárdát vonzott maga köré.

> Iskolateremtő erejének oka – írta nagy mesterére emlékezve Turán Pál – „Értekezésének ideáin gondolatébresztő voltán és ötvözött stílusán felül egyéniségének közvetlensége lehetett. Tanítványai vele nem csak a szemináriumán beszélhettek, egyetemi szobájának ajtaját nem vigyázta altiszt, a beszélgetés időpontját nem rögzítette titkár. A szemináriumi megbeszélés, főleg fiatalabb éveiben, a kávéházban folytatódott; sok jelentős értekezés árulkodna, ha tudna, arról, hogy tartalmuk első formáit a budai Erzsébet kávéház, vagy a pesti Mignon márványasztalain, számolócéduláin vagy szalvettáin nyerte, Fejérrel való beszélgetés alatt vagy után."

Fejér akkor már a világ leghíresebb s legismertebb matematikusaihoz tartozott. 1933-ban, a chicagói világkiállítás alkalmából négy európai tudóst hívtak meg, köztük Fejért és Niels Bohrt, akivel egyszerre avatták díszdoktorrá a providence-i Brown Egyetemen. Az Amerikai Matematikai Társaságban egy tömör, mesterien fölépített és közérthető előadásban foglalta össze gazdag eredményei legfontosabb *típusait*; olyan világosan, hogy még a laikus is megérezheti belőle, hogyan vált Fejér módszere az analízis egy egész nagy gyorsan növekvő, új területének központi „magjává". Az ötletességgel ötvöződő lényegre törő közlés különben Fejér egész matematikai stílusát jellemezte; egyik tanítványa szépen és találóan hasonlította ezt Petőfi költészetéhez. „A matematika – írja Fejér előadásairól egy másik tanítványa – úgyszólván »in statu nascendi« jelent meg előttünk."

A harmincas években már világhíres tanítványai tanítottak előkelő külföldi egyetemeken; előfordult, hogy kettőt is kineveztek ugyanazon a héten. „De ez azért nincs minden héten így" – tette hozzá jellegzetes, s immár legendás humorral Fejér. Ő maga azonban sohasem gondolt arra, hogy örökre elhagyja hazáját. Eltéphetetlenül ide kötötték – ahogyan Turán Pál fejezte ki illyési szóval nagy mesterét búcsúztató szép cikkében 1960-ban – a „hajszálgyökerek".[72] Itthon maradt még akkor is, mikor Európára mind fenyegetőbben borult a hitleri birodalom szörnyű árnya. 1944-ben, az ország német megszállása után nyugdíjazták a nagy tudóst, s egy decemberi éjszakán nyilas suhancok őt is besorozták egy Duna-felé haladó halálmenetbe. Csak egy bátor tiszt közbelépése mentette meg.

Akik a felszabadulás utáni első években kezdték az egyetemet, még csodálhatták kicsiny, hajlott, törékeny, finom, fáradtan fürge alakját, amint hullámosan lobogó köpenyében s még mozdulataival is a megértést segítve a Fourier-sorok titkairól és szépségéről beszélt. Nem lehetett meg nem érezni benne az emberi szellem matematikában önmagára eszmélt szabadságát.

---

[72] Turán Pál: Fejér Lipót (1880. febr. 9. – 1959. okt. 15.) = Matematikai Lapok 11 (1960) No. 1–3. pp. 8–18. *(– a szerk. kieg.)*

Turán Pálról beszél Erdős Pál és Halász Gábor[73]

„Erős várunk nékünk a Matematika”

A most közreadott írás csaknem negyed évszázada lapult Vekerdi László kéziratai között. Szerencsére előkerült, mert igazi kincs. A huszadik század nagyhatású matematikusának, Turán Pálnak (1910–1976) szellemét idézi fel egy beszélgetésben Erdős Pál, a barát, és Halász Gábor, a tanítvány. Erdős Pál azóta eltávozott közülünk, Halász Gábort néhány évvel a beszélgetés után akadémikussá választották.

Vekerdi László értő és megértetni akaró kérdései nyomán a válaszokból kirajzolódnak előttünk Turán Pál emberi és szakmai arcvonásai.

Staar Gyula

A Fejér Lipót és Riesz Frigyes utáni matematikus-generáció kiemelkedően nagy egyénisége Turán Pál. Ezt a generációt kegyetlenül megritkította a második világháború és az őrült önkény; a megmaradottak jelentősége így még tovább növekedett a honi matematikai kutatások nagy hagyományainak közvetítésében. Az ő kutatói és nevelői munkásságuk alakította – alakítja máig – a következő generációk számos kutatási irányát hazánkban, s határozza meg a magyar matematika arcát. Hatásuk rendkívül széleskörű külföldön is, hiszen a maguk területén a világ legismertebb – s legelismertebb – matematikusaihoz tartoznak. Rényi Alfréd mesél el egy jellemző anekdotát Turán Pállal kapcsolatban: az egyik nagy amerikai matematikai intézet vezetője panaszkodott egyszer Erdős Pálnak, hogy „intézetének tagjai csak a Turán-féle egyenlőtlenséggel, illetve annak különböző általánosításaival foglalkoznak, és nem képes rávenni őket, hogy e témán kívül – melynek érdekességét és jelentőségét persze ő sem tagadta – mással is foglalkozzanak.” Ez a Legendre-polinomokra vonatkozó szép egyenlőtlenség Turán viszonylag könnyebben megközelíthető eredményeihez tartozik; tán ezért is váltott ki – jegyzi meg Rényi – akkora érdeklődést, nagyobbat, „mint

[73] Forrás: Vekerdi László: „Erős várunk nékünk a Matematika”. Turán Pálról beszél Erdős Pál és Halász Gábor. = Természet Világa 139 (2008) No. 5. pp. 194–196. – Az interjút Vekerdi László 1984-ben készítette.

például a sokkal mélyebb analitikus számelméleti eredményei". Turán 50. születésnapjára (1960. augusztus 18.) készült Rényi-esszé óta, úgy látszik, megérett az idő Turán mély és nagyon nehéz eredményeinek megértésére és méltánylására; tanítványainak munkáin és az ő módszere által inspirált dolgozatok nagy számán túl az is mutatja, hogy a világ legnagyobb tudományos kiadóinak egyike napjainkban jelentette meg – Halász Gábor és Pintz János közreműködésével – Turán módszerét és a módszer alkalmazásait ismertető vaskos könyvét, melynek bővítésén s tökéletesítésén élete utolsó napjáig dolgozott.[74] A könyvet tanítványai, későbbi munkatársai – Halász és Pintz – Turán Pál útmutatását és elképzeléseit követve fejezték be.

Turánt és Erdőst a számelmélet iránti érdeklődésük még ifjú korukban összehozta, s később több közös közleményben kamatozott matematikai barátságuk. Erdős professzor Rényi Alfrédon kívül tán senki mással annyi közös közleményt nem írt, mint épp Turán Pállal.

Erdős Pál: – Igen, és még Hajnal Andrást kell feltétlenül említeni. Velük, hármójukkal szerepelek valóban leggyakrabban közös szerzőként.

Vekerdi László: – És ez önmagában sokat mondó, hiszen professzor úr igazán nem szűkölködik az igen híres szerzőtársakban! Turán Pállal hogyan ismerkedtek meg?

E.: – Még tulajdonképpeni találkozásunk előtt megismerkedtünk a Középiskolai Matematikai Lapok hasábjain. Az első közös munkánk egy itt kitűzött feladat megoldása volt; közös annyiból, hogy a legjobb megoldás alatt – amire persze egymástól függetlenül jutottunk – együtt jelent meg a nevünk. Úgyhogy amikor aztán az egyetemen találkoztam Turán Pállal, már tudtunk egymásról, valósággal jó ismerősökként találkoztunk, s én mindjárt először azt kérdeztem tőle: igaz-e az, hogy a prímszámok reciprok értékeinek az összege divergens? Turán mindjárt felvilágosított, hogy ez egy jól ismert dolog, s ennél sokkal több is igaz. Ekkor hallottam először a prímszámtételről, Turántól. Történt pedig mindez 1930 szeptemberében. Olyan réges-régen, hogy a maiak közül akkor talán még senki se élt. Minket ettől kezdve összekötött a számelmélet, s kiváltképpen a prímszámok iránti érdeklődésünk. Turánt az analitikus módszerek vonzották, engem inkább az elemiek, így ebből a szempontból is jól kiegészítettük egymást.

V.: – Mikor jelent meg az első közös cikkük?

---

[74] Turán, P. (Paul): On a new method of analysis and its applications. New York, 1984. Wiley – Interscience.

E.: – 1934-ben, az American Mathematical Monthly-ban. Elemi cikkecske volt, egy m szám egymástól különböző prímtényezőinek a számára adtunk meg benne becslést, valószínűleg nem a legélesebbet, de máig nem sikerült jobbat találni.

V.: – De a harmincas években a legtöbb közös munkájuk nem számelméleti volt, hanem az interpoláció elméletére vonatkozott. Ebből a témakörből jelent meg ugyanis a harmincas évek végén, a negyvenes évek elején három nagy visszhangot kiváltó dolgozatuk.

E.: – Ezt a munkát alapjában még mint Fejér tanítványai kezdtük el.

V.: – Az interpolációs dolgozatok tehát Fejér Lipót gondolatvilágában gyökereztek?

E.: – Igen, persze, az alapokat tőle tanultuk. Egy függvény Lagrange-féle interpolációs polinomja egy Fourier-sorhoz hasonlítható, és mi olyan interpolációs kérdéseket vizsgáltunk, amelyek a Fourier-sorok elméletében már megoldást nyertek. Így például fontos kérdés volt, hogyan viselkednek a Lagrange-féle interpolációs polinomok a négyzetes átlag-konvergencia szempontjából. Én magam ezekkel a kérdésekkel a későbbiekben nem foglalkoztam, Turán azonban végig megőrizte érdeklődését ez iránt, a tulajdonképpeni Fejér-problémakör iránt, és fontos eredményekre jutott itt is.

V.: – Fejér körül hogyan dolgoztak professzor urék? Szemináriumokon?

E.: – Szemináriumokon, egyetemi előadásokon, beszélgetéseken, ahogy adódott. Ami az utóbbit illeti, én nem nagyon tudtam jól kifejezni a gondolataimat, nem tudtam nagyon jól magyarázni, úgyhogy Fejér szerette, ha beszélgetéskor ott van Turán is, mert ő jobban el tudta magyarázni azt is, amit én gondoltam. A harmincas években nagyon sokat beszéltünk Turánnal matematikáról, jól ismertük egymás gondolkozását. Én nem mindig fejtettem ki részletesen a mondandómat, siettem, s egy ízben, mikor kért, hogy ismételjem meg, lassú felfogásúnak neveztem őt. Turán azonban letorkollt: „Tévedsz, a világosan megfogalmazott matematikai érvelés jól megérthető, nem vagyok olyan ostoba, hogy meg ne érteném.” Akkoriban többnyire az utcákon sétálva, fejből fogalmaztuk meg sejtéseinket és bizonyításainkat. Egy ízben, mikor az egyik forgalmas utcán sétálva matematizáltunk, Turán hirtelen befordult egy csöndes mellékutcába: „Túlságosan sok szép leány járkál itt – mondta –,elvonják a figyelmemet a lényegről”. Későbbi éveiben azután már jobban szerette leírni a bizonyításokat, hogy ellenőrizhesse.

V.: – Interpolációelméleti munkássága során Turán Pál mélyrehatóan megismerkedett a polinomok minden csínjával-bínjával; talán ez is segítette őt a Legendre-polinomokra vonatkozó híres egyenlőtlensége fölfedezésében.

E.: – Ezt a ma már klasszikus egyenlőtlenséget közvetlenül a háború után találta. Azóta számos különféle bizonyítását és általánosítását közölték. Egyszer Turán Hollandiába utazott, s a vonaton találkozott egy matematikussal, aki a speciális függvények specialistája volt. Turán úgy mutatkozott be neki, hogy leírta az egyenlőtlenségét; „Ismeri ezt?” – kérdezte. „Hogyne – felelte a matematikus – ez Turán egyenlőtlensége”. „Nos, én pedig a Turán vagyok” – mondta Pali. De azért egy kicsit mindig bántotta, hogy egyenlőtlensége annyival nagyobb érdeklődést kelt, mint a sokkalta mélyebb hatványösszeg módszere.

$$P_n^2(x) – P_{n-1}(x)\ P_{n+1}(x) >= 0,\ n=1, 2,\ldots\ (-1 =< x =< 1),$$

Ahol $P_n(x)$ az n-edik Legendre-polinomot jelöli.

V.: – Turán meleg hangon ír nekrológjában Fejérről. Nyilván szerette és becsülte őt.

E.: – Igen, hogyne, Fejér nagyon sokra tartotta Turánt; tréfásan úgy fejezte ki ezt, hogy eljött a magyar matematikában az okos Pálok ideje.

V.: – Ennek ellenére Turán a harmincas években nagyon nehezen tudott elhelyezkedni.

E.: – Egyáltalában nem tudott! Elég reménytelen volt a helyzet: sokkal több tehetséges fiatal volt, mint hely. Turán magántanítványokból élt, csak később kapott állást a Rabbiképzőben. Persze, nem kell valami fényes lehetőségre gondolni. Turán kollégájának, a matematikus Vázsonyinak az apja, a Weissfeld bácsi, aki híres cipőkereskedő volt, nevetve mondta: „Turán úr, magának havi fizetése van egy évre!” De Pali nem keseredett el, mosolyogva válaszolta: „Lesz még nekem évi fizetésem egy hónapra!” Turán Pál már világhíres matematikus volt, s még mindig óraadásból élt.

V.: – Professzor úrék rendszeres találkozásai mikor szakadtak meg?

E.: – Én 34-ben mentem el, a háború előtt utoljára 1938-ban jártam itthon. Aztán egészen 1948-ig nem találkoztunk. Akkor Pali kijött Amerikába, Princetonba. Már a hajónál vártam.

V.: – Írt Turán a háború után a Matematikai Lapokban egy megrendítően szép emlékezést a magyar matematika háborús veszteségeiről. Ő hogyan szenvedte át azokat a borzalmas éveket?

E.: – Már hamar behívták munkaszolgálatra, de aránylag szerencséje volt. Egyik parancsnoka matematikus volt, vagy valaki, aki ismerte őt, s nagyon rendesen bánt vele. Később, egy másik parancsnoka pedig jó embernek bizonyult, aki még akkor se bántott senkit, ha nem volt megvesztegetve. Úgyhogy másokkal ellentétben neki aránylag könnyebb dolga volt. A háború után mindjárt kezdtünk levelezni, s mihelyt értesültem a Fejért ért méltánytalanságokról s a nélkülözésekről, küldtem csomagot, amennyit csak tudtam. Turánnal 1946-ban már egy közös cikket is írtunk. Levelezés útján, persze, mert én csak 1948 végén voltam itthon egy rövid időre.

V.: – Turán a háború után igen nagy szerepet vállalt a honi matematikai élet újraindításában, az oktatás és a kutatás megszervezésében. Beszámolt ezekről a szervezési kérdésekről is?

E.: – Persze, pontosan tudtam, mi történik itthon. De főként a közös munkák töltötték meg a leveleket. 55-ben jelent meg egy interpolációs cikkünk, ami elég erősen hatott: ezt 54-ben írtuk, amikor egyáltalában nem is találkoztunk. Pár számelméleti cikk is származik ebből az időből. De erőteljesen 1960-ban kezdtünk el újra együtt dolgozni, amikor visszajöttem. Ekkor indult el a közös munkánk az úgynevezett statisztikus csoportelmélet területén.

V.: – A háború után dolgozta ki Turán Pál a híres és nagy hatású új módszerét, a hatványösszeg módszert.

E.: – Igen, 1951-ben kaptam meg, akkor írta meg az eredményt, éppen Angliában voltam.

V.: – Lehetne erről a nagyon nehéz módszerről úgy beszélni, hogy a kívülállók is megsejtsenek belőle valamit?

E.: – Erről Halász Gábor bizonyosan többet tudna mondani; ő és Pintz János alaposan beledolgozták magukat, amikor a most megjelenő könyvet a meglévő tervezet és feljegyzések alapján befejezték. Beszéljen erről Halász. Nekem csak kis részem van a hatványösszeg módszerben, a komplex számok hatványösszegének a maximumára vonatkozóan. Halász ellenben igen sokat dolgozott vele. Írtam én is erről egy ismertető cikket, abban benne van minden.

V.: – Lehetne a laikusoknak is elmondani belőle valamit?

Halász Gábor: – Mennyire laikusoknak?

V.: – Olyanoknak, akik annyit azért sejtenek, hogy mi a „hatvány" meg az „összeg", de nem többet.

H.: – Mondhatjuk akkor, hogyha veszünk véges sok – mondjuk n – komplex számot és hatványra emeljük őket, s aztán képezzük az n-edik hatványösszeget, majd ennek n-edik gyökét vesszük, akkor ennek a kifejezésnek a limesze az a maximális tag. Ez egy elemi összefüggés, Turán ebből alkotott véges esetű egyenlőtlenségeket. De hát ez csak egy sovány – bár könnyen érthető – parafrázis, fogalmat sem ad a módszer gazdagságáról és szépségéről. Erről szavakban nemigen lehet mit mondani, csak felírni lehet, képletek sorával.

V.: – Hogyan jutott Turán a módszerre?

H.: – Ezt már nem lehet közérthetően elmondani. Eredetileg egy rendkívül nehéz és máig megoldatlan számelméleti probléma, a Riemann-sejtés, illetve az úgynevezett „sűrűségi hipotézis" vizsgálatára dolgozta ki Turán a hatványösszeg módszert. Ez a sejtés, illetve hipotézis lényegében a prímszámok eloszlását fejezi ki egy adott intervallumban, bizonyos speciális komplex-változós függvény, az ún. „zetafüggvény" gyökeinek segítségével. Mármost az az érdekes, hogy Turán alapvető észrevétele a probléma bonyolultságához képest meglepően egyszerű, valósággal apróságnak tűnhet, akadhatnak, akik triviálisnak vélik.

V.: – Éspedig? Mi ez az alapvető észrevétel?

H.: – Hát, amit az előbb mondottam: a hatványösszegek abszolút értékéből vont gyöknek a limesze az a maximum. Ezt mindenki azonnal belátja és hajlandó akár trivialitásnak is tekinteni. Pedig óriási a jelentősége és szinte beláthatatlan az alkalmazási köre.

V.: – Mi ez a jelentőség?

H.: – Az, hogy ennek az effektív változatai, tehát nem a határérték-forma, hanem a tényleges egyenlőtlenség-alakjai nagyon sok helyütt előkerülnek a matematikában. Azaz, limesz-reláció helyett véges egyenlőtlenség írható fel. Ez a széleskörű alkalmazhatóság „titka". Ez a számelméleti alkalmazások jelentősége: egy komplex változós analitikus függvény, a zetafüggvény gyökei ezen egyenlőtlenségek révén kapcsolatba hozhatók a prímszámokkal, a prímszámok eloszlásával. Az, hogy a prímszámeloszlás analitikus módszerrel kezelhető, már régebben is ismert volt. Turán nagy felfedezése, hogy ebben a vizsgálatban egy ilyen egyenlőtlenség nagyon hasznos. De hát képletek nélkül ennél tovább menni nem lehet, az eddigiek is inkább csak verbális pótléknak tekinthetők. Egyébként a képletek is elég egyszerűek; Turánra általában is jellemzőnek tekinthető, hogy rendszerint valami apró, egyszerű észrevételig ment vissza – mint amilyen ez a hatványösszeg tétel is volt – és abból bontott ki egy nagy elméletet.

V.: – Tudna még erre a hatványösszeg módszer mellett egyéb – viszonylag felfogható – példát mondani?

H.: – Például az egész valószínűségszámítási számelmélet – egy egész új matematikai diszciplína – Turán Pálnak egy egyszerű észrevételéből és bizonyításából nőtt ki, bár neki magának akkor még fogalma se volt róla, hogy tulajdonképpen valószínűségszámítási módszert alkalmaz: a Csebisev-egyenlőtlenséget. Ez különben még első cikkeinek egyike volt, a harmincas évek közepén, Hardy és Ramanujan tételéről. Vagy például 1932-ből híres közös sejtésük Erdőssel: minden pozitív felső sűrűségű sorozat tartalmaz tetszőleges hosszú számtani sorozatot. A probléma több mint 40 évig megoldatlan maradt, Erdős professzor 1000 dollárt ajánlott fel a bizonyításáéért vagy cáfolásáért, mígnem 1973-ban Szemerédi Endre megoldotta. Hasonlóképpen egy egész nagy problémakör, az ún. extremális gráfok elmélete fejlődött ki egy egyszerű kombinatorikai tételéből, amire munkaszolgálatos korában jött rá.

V.: – Milyen volt Turán professzor előadóként?

H.: – Sohasem az úgynevezett „anyagot” adta le, mindig elvezetett a legmaibb kutatásokig. Ez a legjobb értelemben vett modernség volt előadásaiban a lenyűgöző. Mindig megmutatta a dolog értelmét, s ráirányította az ember figyelmét a fontos összefüggésekre. Az előadás persze más, mint a kutatás, és azt hiszem, Turán nagyságát inkább szűkebb tanítványi köre tudta igazán méltányolni. Nemcsak magyar tanítványai, a külföldiek is. Igen szép eredményeket ért el például egy lengyel tanítványával, S. Knapowskival közösen, a hatványösszeg-módszer területén. Ez a módszer valószínűleg élete fő műve, de a matematika egyéb területein is hallatlanul inspiráló problémákat tudott fölvetni. Erről azonban Erdős professzor bizonyosan többet tudna mondani nálam.

V.: – Említette elébb Halász professzor az extremális gráfok elméletét. Ennek mi a lényege?

E.: – Turánnak megvolt az a képessége, hogy sokszor felvetett lényeges problémákat olyan területről, amellyel egyébként nem is foglalkozott. A halmazelméletben is van egy ilyen problémája, amivel aztán később Hajnal András foglalkozott sokat. Az extrém gráfokról felvetett problémája pedig lényegében abból indul ki, hogy hány él kell egy n szögpontú gráfban ahhoz, hogy legyen benne egy háromszög. Ezt aztán Turán maga is általánosította és ez lett a kiindulópontja a gráfelmélet extremális problémáinak. Magyar és külföldi tanítványaival Pali számos kombinatorikai cikket írt, én is dolgoztam velük ebben a témában.

V.: – Általában szeretett inspirálni, problémákat átadni megoldásra másoknak?

E.: – Igen, mert ő maga inkább csak olyan problémákkal foglalkozott, melyek máshol is alkalmazhatók. Azt mondta, hogy olyan sok a probléma, s olyan kevés az ember ideje, hogy szükségképpen korlátoznia kell magát.

V.: – És mit szólt professzor úr elsöprő probléma – áradatához?

E.: – Kicsit kritizált, hogy túl sok problémát vetek fel, „de – mondta – szerencsére valami jó ösztönnel mindig olyan kérdésre bukkansz, aminek van értelme”.

V.: – Turán Pál utolsó éveiben ismét gyakran találkoztak professzor úrék személyesen is.

E.: – Igen, és dolgoztunk is közösen, bár a régi nagy matematikai beszélgetések nem tértek vissza. Pali – bár ezt nem lehetett rajta észrevenni – úgy mondta, hogy „meglassult”, jobban szerette írásban követni a dolgokat. Betegsége óta – évekig leukémiában szenvedett – fáradékonyabb is lett. De nem akarta tudomásul venni a betegségét: haláláig dolgozott. A hetvenes években Kanadában adott elő, s onnan jött haza – kétszer is – kezelésre. Én akkoriban pár évig nem jártam haza: 1973-ban, a tiszteletemre rendezett tudományos ülésre ugyanis nem engedték be az izraeli munkatársaimat, s akkor három évig nem jöttem haza. 1976-ban aztán egy konferencián Párizsban találkoztam Turán Pál feleségével, Sós Verával, ő mondta, hogy ha még élve akarom látni Palit, jöjjek haza. S akkor persze nyomban hazajöttem. Az utolsó szava, amit még érteni lehetett, matematika volt.

V.: – Professzor úr írja barátjáról szóló emlékezésében, hogy Turán fiatal korában úgy tartotta, három dolog van, amiért élni érdemes: a matematika, a nő és a zene. Ebben a sorrendben. Turán Pál megnyerő, vonzó egyéniség volt; szeretett és tudott élni?

E.: – Igen, és ezt az elvét mindvégig megtartotta. Végig dolgozott a nagy könyvén, nem tudta befejezni, várta, hogy jobban legyen. Sajnos, nem lett jobban, úgyhogy a könyv befejezése, a végleges sajtó alá rendezése Halászra és Pintzre maradt. Egészen bizonyosan nagyon nagy hatású könyv lesz.

V.: – Fejérről közölt nekrológjában írja Turán Pál, hogy a nagy professzor „széleskörű műveltsége, univerzális kulturális érdeklődése a művészetek iránt, szellemes társalkodó képessége” tüntette ki emberként. Ezek a jellemvonások mintha reá magára is érvényesek lennének.

E.: – Igen, és őt – akárcsak engem – erősen érdekelte a történelem. Persze, nem szakmai szinten, hiszen a forráskutatás fáradalmait nem vállalhattuk, de sok történeti munkát olvastunk, kivált Turán. Érdekelte a sport is, nézőként s résztvevőként egyaránt. Mindenekelőtt azonban matematikus volt, ízig-vérig, szenvedélyen. Egyszer, amikor elkeseredett voltam, ezt a zsoltár-parafrázist írta vigasztalásomra: „Erős várunk nékünk a Matematika”.

Egy nagy matematikaprofesszor dicsérete[75]

Kalmár Lászlóról

Annyi nagy matematikuséhoz hasonlóan, Kalmár László matematikai tehetsége is kitűnt már gyerekkorában.

> „Tizenegy éves korában – írta Péter Rózsa róla ötvenedik születésnapjára (1955. március 27.) szóló szép tanulmányában – megértette egy kezébe került logaritmus-táblázat rendeltetését, és azt, hogyan szerkeszthetne ő maga is egy műveleteket megkönnyítő táblázatot; 12 éves korában pedig 11-et hatványozgatva felfedezte a binomiális tételt. A régi IV.-VIII. gimnázium anyagát felölelő ún. Kőnig–Beke tankönyvet már az iskolai algebratanulás előtt szinte egy ültő helyben elolvasta, és ettől fogva azok a kérdések érdekelték, amelyekre a könyv nem ad választ. A 13. születésnapjára Cesaro analíziskönyvét kérte, végigolvasta és meg is értette.”

Amikor a húszas évek elején a budapesti egyetemre került, már kész matematikus volt, „évfolyamtársai mestere”, amint Péter Rózsa nevezi. Maga köré gyűjtötte az érdeklődőket, s feladatok alakjában dolgozta föl velük a matematika különböző területeit. A budapesti egyetemen akkortájt Fejér Lipót körül és hatására igen élénk matematikai élet folyt; Fejér absztrakciót és konkrét részleteket szintetizáló látása, az egész matematikára (s messze azon túl) kiterjedő ritka nagy műveltsége kiváló tanítványokat vonzott és nevelt. Interpoláció, függvénysorok, számelméleti problémák, konstruktív függvénytan, az analízis sokszor apró, de mégis mély részletekig menő kérdései és feladatai szerepeltek előadásaiban s szemináriumain; mintha csak Pólya és Szegő (szintén egykori Fejér-tanítványok) híres *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis* című könyve elevenedett volna meg: ilyen volt az a matematika, amely Fejér körül Pesten virágzott.

Fejér előadásairól kitűnő jegyzeteket készített Kalmár, az egyikre később maga a mester is hivatkozott. Fejér egyik dolgozatához csatlakozott Kalmár doktori értekezése az interpolációról, s a Fejér-féle gondolatkörrel függött össze érdeklődése az analitikus számelmélet iránt. S akárcsak Fejér, később Kalmár is páratlanul sokoldalú és kiterjedt

[75] Forrás: Vekerdi László: Egy nagy matematikaprofesszor dicsérete. In: Kalmárium. Kalmár László levelezése magyar matematikusokkal. 2. köt. Összeáll.: Szabó Péter Gábor. Szeged, 2008. Polygon. pp. 17–30. (Polygon könyvtár)

matematikai műveltségre tett szert; ez a nagy matematikai műveltség színezi azután a fölfedezéseit s az összefoglalóit. Sohasem elégszik meg az eredmények puszta közlésével; a fölfedezések távolabbi összefüggései izgatják, sokszor a matematika határian túl is követi a nyomot, a többi tudományok és a filozófia területére. Bárhova kalandozik azonban, mindent mindig a matematikai logikus szemével néz.

A diploma megszerzése után, a húszas évek végén a szegedi egyetemre került tanársegédnek, ott ismerkedett meg a matematikai logikával. A rohamosan fejlődő, izgalmas diszciplína magával ragadta, hamar elmélyült az új tudományban, s göttingeni tanulmányútján már nemcsak tanult: a kor vezető matematikusainak, David Hilbertnek és Edmund Landaunak az elismerését is kivívta a matematika alapjaira vonatkozó kutatásaival.

Két nagy irány harcolt akkoriban egymással a matematika megalapozásáért: az intuicionizmus és a Hilbert-féle bizonyításelmélet. Az intuicionizmus – ahogyan akkori fő képviselője Luitzen Egbert Jan Brouwer megfogalmazta – a tradicionális logikától függetlenül, a pozitív egész számok „ősintuíciójából" kiindulva akarta fölépíteni a matematikát; a bizonyításelmélet pedig a helyes matematikai gondokozás formáit és törvényeit kereste; vagy amint Kalmár egyik dolgozatában megfogalmazta, azt vizsgálta, „hogyan is áll a dolog a matematika csalhatatlanságával".

> „Ha a gyakorlati alkalmazásoktól eltekintünk – írta –, a matematika csalhatatlanságán azt kell értenünk, hogy a matematikai módszerek nem vezethetnek egymásnak ellentmondó eredményekre. Ebben sokáig nem is volt okunk kételkedni."

A századfordulón azonban a halmazelmélet antinómiái megingatták a matematikusok fenntartás nélküli önbizalmát, hiszen itt a matematikában addig szokásos és megengedett érveléssel önmagának ellentmondó fogalomra bukkantak. Az önellentmondást sikerült ugyan a halmazelmélet gondos axiómatikus fölépítésével kiküszöbölni, sikerült a botrányt okozó „önmagának ellentmondó halmazt" kitiltani, azonban megmaradt a kétely, vajon nem lehet-e mégis a halmazelmélet axiómáiból valamilyen más ellentmondást levezetni; illetve hogyan lehet bebizonyítani az axiómarendszerről, hogy nem tartalmaz önmagának ellentmondó állítást, ellentmondástalan?

Egy A_1, A_2, ..., A_n axiómákból álló axiómarendszert akkor mondunk ellentmondástalannak, ha az axiómák által meghatározott elméletben nincs olyan B tétel, hogy a B tagadása is tétele az elméletnek. Az elemi logika axiómarendszeréről viszonylag könnyű volt bebizonyítani, hogy ellentmondástalan: az elemi logika minden tételéről, az axiómák minden következményéről el lehet mindig dönteni, hogy igaz-e vagy sem. Csakhogy a matematika vizsgálatához nem elég az elemi logika, a matematikában szokásos összes következtetésmód vagy akár a következmény-fogalom formalizálásához az elemi logikai műveleteknél (konjunkció, diszjunkció, implikáció, negáció) általánosabb logikai függvényeket kell bevezetni. A logikai függvény olyan egy- vagy többváltozós függvény, amely egy tetszőleges halmazon (ún. „individuumtartományon") van értelmezve, az értékkészlete azonban csupán két értékből, az „igaz" és a „hamis" logikai értékből áll. Azaz a logikai függvény független változói egy tetszőleges halmaz elemei lehetnek, értéke azonban csak az „igaz" és a „hamis" logikai érték egyike lehet. (A logikai műveletek is logikai függvények, ezeknek azonban nemcsak az értékkészletük, az értelmezési tartományuk is csak az „igaz" és a „hamis" logikai értékekből áll.) A logikai függvényekből a logikai műveletekkel formulák képezhetők, a formulák képzésére azonban még két fontos magasabb műveletet is használunk, két olyan operációt, melyet csak a logikai függvényeken, nem pedig a logikai értékeken van értelme elvégezni. Az egyik függvényoperáció a „bármely x-re" lefordítása logikai nyelvre: a függvényoperáció F(x) logikai függvényre való alkalmazásával kapott formula értéke akkor és csak akkor igaz, ha az F(x) logikai függvény az egész individuumtartományon igaz. A másik függvényoperáció a „van olyan x, hogy …" lefordítása: a függvényoperáció F(x) logikai függvényre való alkalmazásával kapott formula értéke akkor és csak akkor hamis, ha F(x) az egész individuumtartományon hamis, minden más esetben igaz. Az első függvényoperációt „általános kvantor"-nak, a másodikat „exisztenciális kvantor"-nak nevezik. Azt, hogy az F(x) logikai függvény egy egész halmazon mindenütt „igaz", illetve „hamis", rövidebben úgy mondják, hogy „azonosan" igaz, illetve hamis. Hasonlóképpen azonosan igaznak neveznek egy logikai formulát egy halmazon, ha bárhogyan is definiáljuk ott a formulában szereplő logikai függvényeket, mindig igaz lesz az értéke. Végül ha egy formula bármely halmazon azonosan igaz, egyszerűen „azonosan igaz"-nak nevezzük. Ez az unalmas fölsorolás arról szól, hogy a következőkben a lényeget tömören s viszonylag egyszerűen el lehessen mondani.

A logikai függvényekből, logikai műveletekből, matematikai függvényekből és a két kvantorból fölépített logikai függvénykalkulus már alkalmas a következményfogalom szabatos definiálására és a matematikában szokásos összes következtetési mód formalizálására. Ha tehát található lenne olyan eljárás, amellyel a logikai függvénykalkulus bármely F formulájáról mindig el tudnók dönteni, vajon azonosan igaz-e vagy sem, akkor minden G formuláról el tudnók dönteni, következménye-e tetszőlegesen adott F_1, F_2, …, F_n formuláknak, tehát bármely formuláról el tudnók dönteni, tétele-e valamely tetszőlegesen adott, véges számú axióma által axiomatizált diszciplínának. Ezzel azután egyúttal az is eldőlne, hogy ellentmondástalan-e az axiómarendszer.

Azt a problémát, hogy miként lehet eldönteni a logikai függvénykalkulus egy tetszőleges formulájáról, hogy azonosan igaz-e, *eldöntésproblémának* nevezik. Pontosabban az eldöntésproblémában azt keresik, mik a feltételei, hogy egy adott logikai formula azonosan igaz legyen. Az eldöntésproblémát csak néhány speciális alakú formulára sikerült megoldani, azaz a függvénykalkulus formuláinak néhány speciális osztályához találtak csak olyan eljárást, amelynek segítségével bármely adott, a kérdéses osztályhoz tartozó formuláról véges számú lépésben el lehet dönteni, hogy azonosan igaz-e. Egy ilyen speciális osztály, a két egymás melletti általános kvantort tartalmazó formulák eldöntésproblémáját oldotta meg Kalmár a harmincas évek elején, Kurt Gödel-lel és K. Schütte-vel egy időben, tőlük függetlenül.

> „Bár Gödel közleménye előbb jelent meg – írja Péter Rózsa –, Hilbert mégsem engedte visszavonni a *Mat. Annalen*-től Kalmár cikkét, mert az volt a véleménye, hogy ebből jobban meg lehet érteni az alkalmazott módszert.”

Kalmár 1930 novemberétől Haar és Riesz professzorok „közös” adjunktusa. Ekkor már nemzetközi hírű matematikus. Professzorai elérkezettnek látták az időt, hogy magántanárrá habilitálják. Problémát csak az okozott, hogy mindketten, különösen Riesz, a matematikai logikát egzotikus dolognak tartották és lenézték. Haarnál ez nem ütközött ki annyira, mivel Hilbert is foglalkozott matematikai logikával, akinek Haar tanítványa volt és úgy gondolta, hogy akkor ez mégsem lehet olyan „születlenség”. Ezután Haar tekintettel Kalmár doktori értekezésére, mely analízis témájú volt és néhány számelméleti cikkére: az Analízis és Aritmetika tárgykört javasolta. Ehhez Riesz is hozzájárult, így Kalmár 1932-ben „Aritmetika” és „Analízis” tárgykörből magántanári képesítést szerez.

Szinte rímel ez a „csel” Kalmár eldöntésproblémára adott módszerével.

Mivel a közvetlen út csak nagyon kevés esetben járható, a vizsgálatok másik iránya igyekszik az általános eldöntésproblémát egyszerű típusú formulák esetére redukálni; az így keletkező vizsgálatok képezik az eldöntésprobléma redukcióelméletét. Kalmár kutatásai főleg az eldöntésprobléma redukcióelméletére vonatkoznak. Az 1932-es zürichi nemzetközi matematikus kongresszuson tartott előadásával kezdte erre vonatkozó vizsgálatsorozatát, melynek során az eldöntésproblémát különféle egyszerű típusú problémák esetére redukálta. Számos egyszerű típusú formulát sikerült találnia, amelyre redukálható volt az eldöntésprobléma; ha ezek valamelyikéről sikerült volna bebizonyítani, hogy azonosan igaz, az általános eldöntésprobléma meg is oldódott volna. Csakhogy a matematika fejlődése kiszámíthatatlan, kacskaringós és egyáltalában nem könnyen követhető utakon halad. Az eldöntésprobléma megoldásába ölt sok ötlet és munka legnagyobb eredménye például bizonyosan az *eldönthetetlen* problémák fölfedezése volt.

Riesz és Fejér a két jóbarát és matematikai hatalmasság eldöntötte, hogy együtt utaznak a zürichi matematikai kongresszusra. Úgy intézték az utazást, hogy néhány napot Németországban tölthessenek. Fejér meglátogatta a nagy göttingeni matematikust, Edmund Landaut. Landau a matematikusok körülményeiről faggatta Fejért. „Nincsenek különösebben rossz és méltatlan helyzetben – válaszolta Fejér – talán csak Sidon Simon (1892–1941) kivétel ez alól – de ő – mondotta – kissé „mesüge”. „De hát barátom – szólt Landau – maga is mesüge, mi mindnyájan mesügék vagyunk kicsit.”

Mármost épp ez a „mesügeség” a matematika nagysága, amely hajlandó jelentéktelennek vagy éppen bolondságnak látszó kérdéseken rágódni évekig, furcsa és szokatlan problémák kibogozásával bajlódni türelmesen. Ha ugyanis becsülettel megpróbáljuk követni (nem biztos, hogy sikerül) ezeket a furcsa vagy – nekünk laikusoknak – éppen bolondosnak látszó problémákat, kiderül, hogy nagyon is fontos, fundamentális kérdések rejlenek a furcsa külső mögött, a gondolkozás sehogy másként meg nem közelíthető szépségei.

Az eldönthetetlen problémák fölfedezéséhez is az axiómarendszerek vizsgálata vezetett; azt keresték, mi annak a feltétele, hogy egy axiómarendszert „teljes”-nek lehessen mondani. A teljesség kritériumaként azt követelték, hogy bármilyen állítást fogalmazunk meg az axiómarendszer által meghatározott elméletben, vagy ez az állítás vagy a tagadása bizonyítható legyen benne. Ez a követelmény roppant természetesnek látszott, nagy föltűnést keltett hát, mikor Gödel olyan aritmetikai problémát szerkesztett, amely ugyan megfogalmazható az aritmetika és a logika eszközeivel, de el nem dönthető, feltéve, hogy a kérdéses eszközök nem vezethetnek ellentmondásra. Az utóbbi feltétel nagyon lényeges, mert végső soron ezen alapul az eldönthetetlenség bizonyítása: a választott axiómarendszerben megfogalmazott aritmetikai (azaz az egész számokra és a velük való műveletekre vonatkozó) formulát ugyanis sikerül megcáfolni, ha a bebizonyíthatóságát tételezzük fel, ami ellentmondás; és sikerül igazolni, ha a formula bebizonyíthatatlanságából indulunk ki, ami újra ellentmondás. Azaz akár a formula bebizonyíthatóságából, akár a bebizonyíthatóság tagadásából indulunk ki, egyaránt ellentmondásra jutunk, a formula tehát eldönthetetlen. Mármost azt az állítást is föl lehet írni a rendszer jeleivel, hogy az axiómarendszer ellentmondástalan, s így voltaképpen azt bizonyítjuk, hogy ebből az ellentmondástalanságot kifejező formulából következik a kérdéses eldönthetetlen formula. Ha ez az ellentmondástalanságot kifejező formula bizonyítható volna a rendszerben, akkor bizonyítható volna a következménye is, azonban láttuk, hogy az utóbbi bizonyíthatóságából kiindulva ellentmondásra jutunk. Ha tehát – amint föltételeztük – az axiómarendszer valóban ellentmondástalan, akkor az a formula, amely az axiómarendszer ellentmondástalanságát formalizálja, nem bizonyítható be az axiómarendszerben. Tehát már maga a rendszer ellentmondásmentessége is a rendszer eldönthetetlen problémái közé tartozik. Természetesen hozzávehetjük *új* axiómaként az eredeti rendszerhez azt a formulát is, amely az eredeti axiómarendszer ellentmondástalanságát mondja ki, és akkor az így kapott *új* axiómarendszerben az eredetileg eldönthetetlen formula bizonyíthatóvá válik, de újra jelentkeznek más, ebben az új rendszerben eldönthetetlen problémák. Minden olyan axiómarendszer, amelyből legalább a természetes számok aritmetikája kibontható, tartalmaz az axiómarendszerben megfogalmazható, de el nem dönthető problémákat; az ilyen axiómarendszerek ellentmondástalanságát csak olyan meggondolással lehet bizonyítani, amely tartalmaz legalább egy lépést, amelyet *nem* lehet a vizsgált axiómarendszerben formalizálni. Éppen ezért, Gödel eredménye nyomán alkalmazott Gentzen az aritmetika ellentmondástalanságának bizonyításához egy olyan tételt, amely *nem* formalizálható a természetes számok aritmetikájának axióma rendszerében.

Az eldönthetetlen problémák fölfedezésével megnyílt kutatásokban, az eredmények matematikai és filozófiai értelmezése körül zajló vitákban Kalmár kezdettől igen aktívan szerepelt. Először is sikerült a Göldel-tételt az eredeti nagyon nehéz bizonyításnál sokkal egyszerűbben és kevesebbet kívánó (nem annyira az olvasótól, mint inkább a matematikától kevesebbet kívánó) eszközökkel bizonyítania, s földerítette a tétel általános feltételeit. Észrevette, hogy „Gödel gondolatmenete nagyon hasonlít ahhoz, amivel Cantor a transzcendens számok létezését megmutatta". Ennek alapján azt sejtette, hogy

> „az eldönthetetlen problémák nem kivételes jelenség, hanem bizonyos értelemben ezek vannak többségben; az a véletlen, ha egy probléma megoldható."

A tétel filozófiai interpretációjában később főként a különféle agnosztikus értelmezések ellen szállt síkra: a Gödel-tétel nem a matematikai megismerés korlátait mutatja, hangoztatta, csupán a matematika valamiféle „abszolút" axiomatizálhatóságának a lehetetlenségét.

„Gödel tétele azt mutatja – írja a matematikai logikáról szóló egyetemi előadásaiban –, hogy akárhogyan rögzítjük le (elég szabályos módon) összes eddigi matematikai módszereinket (beleértve az egész aritmetikát is), mindig lesz olyan aritmetikai, tehát a világ mennyiségi viszonyaira vonatkozó probléma, amelynek megoldásához a lerögzített módszerek nem elegendők; tehát már a világ mennyiségi viszonyai kimerítő megismerésének problémája is csak az emberiség végtelen progresszív fejlődésében oldódik meg. A matematika történetében többször előfordult, hogy lerögzítették, milyen módszereket szabad igénybe venni bizonyos fajta matematikai problémák megoldására. Ilyenkor előbb-utóbb be is bizonyították, hogy ez nem is sikerülhet. Így pl. olyan mennyiségek mértékszámának megadására, amelyek a mértékegységnek nem egészszámú többszörösei, már az ókorban felfedezték a törteket; ezt a módszert azonban nem lehet alkalmazni pl. azon négyzet átlója mértékszámának kifejezésére, amelynek oldala a hosszegység. A geometriai szerkesztések elvégzésére megengedett módszerként a körző és vonalzó ismert módon való alkalmazását rögzítették le; a kocka megkettőzése, a szög harmadolása, a szabályos hétszög vagy kilencszög szerkesztése, a kör négyzetesítése példák olyan feladatokra, amelyek e lerögzített módszerrel nem oldhatók meg. Az algebrai egyenletek megoldására a négy alapművelet és a gyökvonás ismételt alkalmazását rögzítették le megengedett módszerként; ily módon sikerült megoldani az általános első-, másod-, harmad- és negyedfokú egyenletet, de mint a Ruffini–Abel-tétel mutatja, az ötödfokút már nem. Függvények megadására a (hét alapművelet, a trigonometrikus és a ciklometrikus függvények segítségével felírható) kifejezéseket tekintették egy darabig megengedett módszereknek; az elliptikus integrálok példát szolgáltatnak olyan függvények megadására, amelyek nem adhatók meg így. E problémák minden egyes esetben szétfeszítették a legrögzített módszerek keretét és új módszerek létrejöttére vezettek; így jött létre az irracionális számnak, a közelítő szerkesztésnek, az egyenlet közelítő megoldásának fogalma és az általános függvényfogalom. Ezek az új fogalmak minden egyes esetben a matematika továbbfejlődését eredményezték, amelynek a legrögzített módszerek kerete addig akadálya volt. A Gödel-tétel mutatja, hogy minden egyes axiómarendszer is ilyen keret, amely hasznos lehet jelenlegi módszereink lerögzítésére, de ha ragaszkodunk hozzá, ha nem vagyunk hajlandók bármikor új axiómákkal bővíteni, akkor a fejlődés gátjává válik.”

A Gödel-tétellel való foglalkozás során Kalmár jól kiismerte a nehéz problémakör minden csínját-bínját, annyira, hogy a legnehezebb eldönthetetlen helyzetekben is tájékozódni tudott. Így például a nevezetes Church-féle tétel esetében. A Gödel-tétellel ellentétben, amely axiómarendszertől függő, *relatíve* eldönthetetlen problémák létezését mutatta meg, Church tétele axiómarendszerhez nem kötött, ún. „abszolút eldönthetetlen” probléma létezését bizonyítja. Ezért Church tételét általában „mélyebbnek” gondolták a Gödel-tételnél, s a filozófusok merész agnosztikus spekulációkat építettek rá. Éppen ezért igen jelentős volt Péter Rózsa felismerése, hogy Church tétele levezethető a Gödel tételből. Ennek a felismerésnek az alapján azután Kalmár bebizonyította, hogy Church tétele egyenesen *speciális esete* a kellő általánossággal megfogalmazott Gödel-tételnek. A bizonyítást az 1948-as amszterdami nemzetközi filozófus-kongresszuson adta elő, levonva belőle a megfelelő anti-agnosztikus filozófiai tanulságokat.

Anélkül, hogy akárcsak érzékeltetni is akarnánk a roppant nehéz bizonyítást – ami az amsterdami kongresszus nagyon sok résztvevőjének a megismerőképességét is bizonyosan meghaladta – próbáljuk legalább megízlelni a módszerét. Tudni kell ehhez, hogy Church tétele eredeti alakjában különlegesen megformulázott kifejezésekre és a kifejezések egymásba való átalakíthatóságára vonatkozik. A tétel azt bizonyítja, hogy nincs olyan univerzális eljárás, amellyel – valahányszor adva van a rendszer két kifejezése, *k* és *l* – véges számú lépésben el lehetne dönteni, vajon a *k* kifejezés átalakítható-e az *l* kifejezésbe. Itt *k* és *l* a természetes számok 1,2,3,… megszámlálhatóan végtelen halmazán futhat át, úgyhogy Church magyarán azt állítja, hogy léteznek rendszerében megszámlálhatóan végtelennyi kifejezés-seregek, amelyek egymásba alakítására semmiképpen sem található univerzális eljárás, ahogyan mondani szokás „algoritmus”. Másszóval Church példát szerkesztett olyan *problémaseregre*, amely semmiféle algoritmussal nem oldható meg. Mármost Kalmár megmutatta, hogy ha a Gödel-tételt alkalmasan választott A axiómarendszerre alkalmazzuk, a Church-féle tétel egyik alakja adódik,

> „nevezetesen az a tétel, hogy az a problémasereg, amely a következő alakú problémákból áll: felveszi-e a φ függvény az m értéket, ahol φ valamely egyváltozós rekurzív függvény, m pedig pozitív egész szám, nem oldható meg algoritmussal”.

A „rekurzív függvény” pontos definíciója jól megtalálható például a Természettudományi Lexikonban, itt csak annyit jegyezzünk meg, hogy aritmetikai (azaz természetes számokon értelmezett és természetes számokat felvevő) függvény, amelynek minden értéke kiszámítható véges számú lépésben a függvényt definiáló függvény-egyenletrendszerből. Az A axiómarendszer, amelyre Kalmár a Gödel-tételt alkalmazta, nem nagyon hasonlít a megszokott axiómarendszerekre, de bebizonyítható, hogy kielégíti azokat a feltételeket, amelyek a Gödel-tétel alkalmazásához kellenek, s ez a lényeg. Speciálisan definiálta Kalmár az A axiómarendszerben a „bizonyítást" is. „Bizonyítás" alatt ebben a rendszerben egy A algoritmus azon alkalmazásai értendők, amelyeknek az az eredménye, hogy „valamely φ rekurzív függvény sehol sem vesz fel valamely m értéket." Ezt így jelöljük $\varphi \not\equiv m$.

Erre a rendszerre alkalmazva a Gödel-tételt azt kapjuk, hogy van olyan $\psi(x)$ egyváltozós rekurzív függvény, hogy ha a $\psi(x) \not\equiv m$ formula az A axiómarendszerben bizonyítható, akkor sikerül megcáfolni, ha pedig a formula tagadásából indulunk ki, akkor sikerül igazolni. Lefordítva ezt az eredményt a jelenleg használt nyelvre, amelyen a „bizonyítás" az A algoritmus azon alkalmazását jelenti, melynek következtében a függvény sehol sem veszi fel az m értéket, a következőt kapjuk: Vagy az az algoritmus alkalmazásának az eredménye, hogy a függvény nem veszi föl az m értéket, de akkor mégis felveszi vagy azt adja az algoritmus – ha egyáltalán alkalmazható –, hogy felveszi a függvény az m értéket, de akkor mégsem veszi fel egyetlen helyen sem.

> „Mindkét esetben kiderül, hogy az A algoritmus nem alkalmas a szóban forgó problémasereg bármely adott problémájának a megoldására, mert arra a problémájára, hogy felveszi-e a ψ függvény az m értéket, vagy nem lehet alkalmazni, vagy ha lehet, helytelen választ ad rá".

A bizonyítás persze sokkal bonyolultabb, a fentiek legfeljebb a széléből ha éreztetnek valamit. Az azonban talán érezhető ennyiből is, hogy a Church-tétel valóban megkapható a Gödel-tétel speciális eseteként, ha megfelelőképpen választjuk az algoritmust és az axiómarendszert. Az is észrevehető tán ennyiből is, hogy az eldönthetetlenségi-vizsgálatokban általában milyen fontos a rekurzív (illetve még egyszerűbb aritmetikai) függvények szerepe. Kalmár, akárcsak Péter Rózsa, kivételes érzékkel bánik ezekkel a hasznos függvényekkel, s gyakran alakít áttekinthetővé ügyes alkalmazásukkal nehéz és alig követhető bizonyításokat. Hogy legalább egyet említsünk a sok közül, e rekurzív függvények szerepét vizsgálva a Church-tétel eredeti bizonyításában Kalmár Church egyik feltevéséből igen különös és érdekes következményt vezetett le.

Láttuk, hogy a Church-tétel azt mondja ki, hogy van olyan megszámlálhatóan végtelen sok azonos típusú problémából álló problémasereg, hogy nincs hozzá olyan általános eljárás, ú.n. algoritmus, amellyel a problémasereg bármely adott problémáját véges számú lépésben meg tudjuk oldani. Mármost a megoldás megfogalmazható egy megfelelőképpen definiált függvény, az ún. „karakterisztikus függvény” értékét kiszámító eljárásként is, és ekkor a Church-tétel úgy is elmondható, hogy van olyan problémasereg, melynek karakterisztikus függvényéhez nincs olyan eljárás, hogy segítségével bármely adott helyen véges számú lépésben ki lehetne számítani a megfelelő függvényértékeket.

Ami a függvényérték kiszámító eljárást illeti, nyilvánvaló, hogy a rekurzív függvények bármely adott n helyen kiszámítható függvények, ez a definíciójukból következik. Church azonban – s itt van a kutya elásva – a *fordított* utat járta tétele bizonyításában: feltételezte, hogy a bármely adott n helyen kiszámítható aritmetikai függvényt általános rekurzív függvényként definiálhatja. Mármost Kalmár viszonylag egyszerű ellenpéldával megmutatta, hogy felírható olyan egyváltozós aritmetikai függvény, amely *nem* általános rekurzív függvény, s ennek a függvénynek a segítségével bebizonyította, hogy ha Church „definícióként” közölt feltevését elfogadjuk, abból olyan tétel létezése következik, amely ugyan igaz, de az, hogy igaz, semmiféle helyes meggondolással nem bizonyítható be. A tétel egy előzőleg gondosan definiált φ(x, y) általános rekurzív függvényre vonatkozik és így szól: van olyan n nemnegatív egész szám, amelyhez nincs olyan y nemnegatív szám, hogy φ(n, y) = 0, de azt, hogy nincs ilyen y, nem lehet bizonyítani.

A tétel bizonyítása nem egészen egyszerű, s így, bár nagy sajnálattal, mert roppant szellemes, ismét meg kell elégednünk a szellemével. Kalmár egy φ(n, y) általános rekurzív függvénnyel definiál egy ψ(n) kiszámítható aritmetikai függvényt, amely nem rekurzív, azután megmutatja, hogy a ψ(n) függvényértékek véges számú lépésben kiszámíthatók legalábbis némely n egész számra, éspedig azon n-ek esetén, amelyekhez vagy *van* olyan y nemnegatív egész szám, hogy φ(n, y) = 0, *vagy* pedig *be lehet bizonyítani, hogy nincs* ilyen y. De Church feltevése szerint a ψ(n) függvény értéke nem lehet kiszámítható bármely adott n helyen véges számú lépésben, hiszen a ψ(n) függvény nem általános rekurzív függvény. Tehát a harmadik kizárásának az elvét alkalmazva azt kapjuk, hogy van olyan n nemnegatív egész szám, amelyre a ψ(n) értéke nem számítható ki a megadott módon, azaz ehhez az n-hez *nincs* olyan y nemnegatív egész szám, hogy φ(n, y) = 0, *és nem lehet* bebizonyítani, hogy nincs ilyen y.

Kalmár ezt az eredményt erős érvnek tekintette a Church-féle hipotézis ellen, mert hogyan képzelhető el, hogy egy ítélet igaz, de ez sohasem derülhet ki? Márpedig ez a helyzet, hiszen másként, mint bizonyítással hogyan derülhetne ki? Az sem kibúvó, ha azt állítjuk, hogy a Church-féle hipotézis nem a „valóságra” vonatkozik, mert a φ függvény választható úgy is, hogy a nemnegatív egész számokon kívül csak a négy aritmetikai alapművelet szerepeljen benne, s minden ítélet, amelyben nemnegatív egész számokról és a négy számtani alapműveletről van szó, a való világ mennyiségi viszonyaira vonatkozik.

> „Eszerint a Church-féle hipotézisben benne rejlik az az állítás – érvelt Kalmár –, hogy van olyan törvényszerűség, amely az objektív valóságban megvan, de az, hogy megvan, semmiféle helyes meggondolással nem látható be. Ezt az állítást nem fogadhatja el senki, aki meg van arról győződve, hogy az objektív valóságban levő törvényszerűségek megismerhetők; ennélfogva a Church-féle hipotézist sem fogadhatja el."

Óvatosabban értelmezve Kalmár nagy eredményét Péter Rózsa: „erősen megingatta azt az elgondolást – írta róla –, hogy a matematika eljárásait zárt keretek közé lehet kényszeríteni". De tán nem is az értelmezés itt a fontos, hanem maga a Kalmár-féle módszer, amelyhez nagyon hasonló szellemben bizonyította be néhány évvel később J. P. Cohen a kontinuum-sejtés bebizonyíthatatlanságát a halmazelmélet axiómarendszerében.

A Church-féle hipotézis elfogadása vagy el nem fogadása természetesen nem érinti a Church-tétel érvényességét, amelynek jelentőségét éppen Kalmár hangsúlyozta legáltalánosabban, didaktikai szempontból.

> „A középiskolában legnagyobbrészt olyan matematikai problémákkal foglalkozunk – írta egyetemi jegyzetében –, amelyeket valamilyen sablon szerint lehet megoldani (pl. elsőfokú) egyismeretlenes egyenleteket vagy egyenletrendszereket, számtani vagy mértani sor összegezését stb.) Ez azt a veszélyt rejti magában, hogy tanítványaink úgy képzelik, hogy minden matematikai probléma ilyen: csak meg kell találni, melyik sablon húzható rá és a megfelelő képletet, szabályt vagy eljárást kell alkalmazni. Sokszor a tanár helytelen magatartása, a sablonok, képletek, szabályok fontosságának túlságos hangoztatása (formalizmus a matematika tanításában) fejleszti ki ezt a téves nézetet.
>
> A Church-tétel mutatja, hogy a formalista tanár tévtanokat hirdet, meghamisítja a matematika jellegét: mert nem minden problémához van olyan sablon (problémasereg), amely alá tartozó problémák valamely közös képlettel, szabállyal, eljárással (algoritmussal) megoldhatók. E téves nézet ellen a tanárnak úgy kell harcolnia, hogy helyesen állítja be a képletek, szabályok, eljárások szerepét: arra valók, hogy bizonyos (a megfelelő sablon alá tartozó) problémákat, ha egyszerűbb, a probléma speciális természetéből fakadó módszert nem találunk, azok segítségével biztosan meg tudunk oldani (pl. törtet törttel csak akkor osztunk úgy, hogy a reciprok értékével

megszorozzuk, ha egyszerűbb módot nem látunk, de pl. a $\frac{2}{3}:\frac{2}{9}$ osztást nem így végezzük); és hogy gyakran ad olyan problémákat tanítványainak, amelyek megoldására nincsen sablonos eljárás, vagy még nem tanultak ilyent, és ezeken keresztül, továbbá olyan feladatokon keresztül, amelyeket valami alkalmi, a feladat speciális természetéből fakadó módszerrel sokkal könnyebb megoldani, mint a sablonos eljárással, arra neveli őket, hogy minden egyes problémánál támaszkodjék egyéni találékonyságára, és gondolkodjék azon, hogyan lehetne minél egyszerűbben megoldani."

Az egyéni találékonyság, a sablonok kerülése, a konkrét matematikai problémák és példák szeretete jellemző Kalmár egész matematikai gondolkozására. A számelmélettől a nemeuklideszi geometriákig – hiszen úgyszólván a matematika minden területén járatos – mindenütt az egyénit, a konkrét részletekben megnyilvánuló valóságot keresi, ezért is követi s figyeli érzékenyen és lelkesen a matematika minden új felfedezését és irányát. Az elsők között ismerte föl például a kibernetika jelentőségét s úttörő volt a logikai gépek elméleti és gyakorlati meghonosításában a matematikusok között.

„Ennek a munkának – mondotta 1956 májusában az Akadémián rendezett számológép-ankéton – még az elején vagyunk. Irodalom hiányában – mindössze 600 deviza-forintunk van ez évben az ilyen tárgyú könyvek beszerzésére – nagyon keveset tudtunk még tanulni. De ebben van valami jó is. Ugyanis, ha egy matematikus kénytelen aránylag kevés irodalommal a kezében töprengeni valamilyen kérdésről, természetes, hogy a legegyszerűbb problémákat kezdi megoldani az adott kérdés keretében. Így mi is olyan áramkörökkel kezdtünk foglalkozni, amelyekben semmi bonyolult alkatrész nincs, csak huzal és érintkező; de az érintkezőket nem jelfogók működtetik, hanem kézi működtetésű érintkezőkről van szó, olyanokról, mint pl. egy tumbler kapcsoló – mert a matematikusnak már a jelfogó is túlságosan bonyolult alkatrész. Kiderült, hogy bizonyos műszaki feladatokat, amiket mások jelfogók segítségével oldottak meg, már ilyen primitív eszközökkel is meg lehet oldani."

A Szegedi Logikai Gép huzalos dobozokkal instrumentálta a logikai műveleteket, a gép által vizsgálandó logikai formulát eredetileg úgy kellett a géppel közölni, hogy a műveleti dobozokból dugaszolással fel kellett építeni a megfelelő áramkört. Később Kalmár kidolgozta egy kvalitatív információelmélet alapjait, s ennek a segítségével automatikus formulaközlő művet tervezett a géphez.

A kvalitatív információelméletre persze egyébként is igen-igen nagy szükség lenne, hiszen

> „az információmennyiség fogalma az információnak csak egyik, kvantitatív oldalát tükrözi és így a ráépített *kvantitatív* információelmélet is csak egyik aspektusát vizsgálja az információnak. Akármilyen fontos is pl. a gazdaságos és megbízható hírtovábbítás szempontjából a továbbítandó híranyag információmennyiségének ismerete, annak számára, aki a hírt megkapja, sokkal fontosabb az, vajon születésről vagy halálesetről szól-e a hír. Akármilyen fontos is, hogy valamely automata gépsor vagy izomcsoport vezérlése esetén lehetőleg semmi se vesszen el a vezérlőmű, ill. a központi idegrendszer által küldött vezérlőjelek és a visszajelentő-jelek információtartalmából a huzalos, ill. az idegpálya vezetékekben, éppoly fontos az is, hogy a vezérlő- és visszajelentőjelek torzítatlanul érkezzenek meg, hogy valóban a szükséges akciót válthassák ki. Hasonlóan, valamely szövegnek más nyelvre való lefordítása során nemcsak az a fontos, hogy a lefordított szöveg lehetőleg ugyanakkora információmennyiséget tartalmazzon, mint az eredeti szöveg, hanem az is, hogy ugyanazt jelentse."

Azt lehetne gondolni, hogy az információ eme kvalitatív aspektusára csak a különféle szaktudományoknak kell figyelni, a matematikának nem. Csakhogy, figyelmeztet Kalmár, a matematikát tévesen nevezik magyarul „mennyiség"-tannak, hisz a matematika „sohasem szorítkozott tisztán kvantitatív vizsgálatokra". Egyébként is, már a hagyományos kvantitatív információelméletben is jelentkeztek kvalitatív szempontok. Így pl. a hasznos jel és a zaj megkülönböztetése voltaképpen kvalitatív különbségtétel. Hiszen a zajnak is megvan a maga információtartalma, így nem mennyiségileg, hanem abban különbözik a hasznos jeltől, hogy olyan valamiről ad információt, ami a vizsgált kérdés szempontjából nem érdekel bennünket. Nyelvjárásban beszélő ember hallgatása közben a nyelvjárásból eredő fonéma-variánsok zajnak számítanak, mert a megértést nehezítik, de a dialektológus számára esetleg értékes információt közölnek.

A kvalitatív információfogalom definiálása céljából Kalmár – szokásához híven – egyszerű, konkrét példából indul ki: a természetes szám megadásából a tízes számrendszerben.

> „A tízes számrendszer egyszerű példa *egylépcsős matematikai nyelvre* – foglalja össze a tanulságokat a szám-megadás elemzése után. Egylépcsős, mert a rendszer jeleiből, az A = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ∇} »ábécé« elemeiből, ahol ∇ az üres jelet jelöli, csak

egyféle funkciójú jelsorozatokat, ti. kifejezéseket képez, amely természetes számokról adnak hírt. E nyelv *szintaxisa*, vagyis a kifejezések képzési szabálya nagyon egyszerű: kifejezés minden olyan az A ábécé elemeiből képzett »szó« (véges jelsorozat), melynek utolsó »betűje« ∇, többi betűi azonban ∇-tól különbözők és valóban van ∇-tól különböző betűje. A nyelv szintaxisa tehát azt határozza meg, hogy az ábécé jeleiből képezhető szavak P(A) halmazából melyek tekintendők a nyelvben kifejezésnek. A nyelv kifejezéseinek K halmaza a P(A) halmaz egy részhalmaza. A K halmaz k elemeihez, azaz a kifejezésekhez *jelentés* is tartozik, ezt a nyelv *szemantikája* határozza meg, mégpedig ebben az egyszerű példában úgy, hogy minden k kifejezéshez hozzárendeli a jelentések I halmazának, az ún. »individuumtartomány«-nak egy meghatározott σ(k) elemét, mint k *jelentését*. A matematikus úgy mondja, hogy σ a K halmaz »leképezése« az I halmazba. Amikor egy-egy k kifejezést fölépítünk a rendszer jeleiből, a σ leképezés egyúttal mindig kijelöli az I halmaz egy-egy részhalmazát is. Még mielőtt egyetlen jelet megadnánk, tudjuk, hogy természetes számról van szó, azaz a megadandó objektum a természetes számok I halmazába tartozik. Minden további információ ennek a kiinduló információnak megfelelő I halmazt szűkíti. Egy a_1 jel által szolgáltatott információ tehát célszerűen definiálható egy halmaz-párral: az egyik az I_{1-1} halmaz, amelybe a kifejezés jelentése az a_1 jel hozzáírása előtt tartozik, a másik az I_1 halmaz, amelybe a kifejezés jelentése tartozik, miután megtudtuk, hogy a kifejezésben soron következő jel az a_1.

A tízes számrendszer természetesen túlságosan egyszerű eset, hiszen már a közönséges matematika vagy a matematikai logika nyelve is *kétlépcsős* az ábécéjéből képezhető szavak közül *két* kategóriába osztja azokat, amelyeket fölhasznál. A *kifejezések* matematikai individuumokat (pl. számokat, függvényeket, halmazokat) jelölnek, a *formulák* pedig állításokat. A számítógépek programozásában használt nyelvek, pl. az ALGOL 60 »*négylépcsős*« nyelvek, amennyiben kifejezéseken és formulákon kívül deklarációkat és utasításokat is képeznek. A természetes nyelvek nyilván még több lépcsősek."

Az egyszerű, konkrét példa alapján kidolgozott elvek azonban a bonyolultabb esetekben is érvényesek, s a matematika „kvalitatív" lehetőségeinek s módszereinek a hangsúlyozásával Kalmár a hatvanas években nálunk is föllendülő matematikai nyelvészet legfontosabb honi inspirátora lett. Az Általános Nyelvészeti Tanulmányok második, 1964. évi kötetében – amelynek egyik szerkesztője is volt – nagy, kitűnő pedagógiai érzékkel fölépített tanulmányban foglalta össze, mi s hogyan hasznosítható a modern matematikából a nyelvészeti kutatásokban; a cikk nyomán s szellemében azóta valóságos magyar algebrai nyelvészeti iskola keletkezett.

Kalmár inspirációja persze nem szorítkozik a matematikai logikára és a matematikai nyelvészetre, a magyar matematikai kutatások csaknem minden területén érezhető. A hatást páratlan matematikai műveltségén kívül nyilván az is magyarázza, hogy Kalmár – mint Péter Rózsa írta róla – „vérbeli pedagógus, tanulni is, alkotni is tanítva tudott a legjobban. Volt rá eset, hogy félig kész munkáját adta elő fiatal matematikusoknak és előadás közben találta meg a hiányzó lépéseket." Kiváló tanítványait – akikhez szerényen s büszkén Péter Rózsa is számítja magát – mindig külön gonddal figyelte; „amikor Szele Tibor érdeklődése a modern algebra felé fordult, olyan levelet írt neki a Galois-elmélet alapgondolatáról, hogy ezt többen lemásolták és kézről-kézre járt a fiatal matematikusok között."

A tanítás, a tanulás, az állandó keresés és az új vállalása jellemzi Kalmár munkásságát ma is; soha nem ragaszkodik a kitaposott utakhoz vagy akár a saját korábbi eredményeihez. 1965-ben például, a londoni tudományfilozófiai kongresszuson, a matematikai alapkutatás helyzetéről szólva ő, akinek legnagyobb sikerei a matematikai logikához fűződtek, az alapkutatás mély *válságát* hangoztatta s bátran a matematikai empíriához fellebbezett: a való világ egyedi részleteinek a felfedezésére. Szinte a saját útját vázolja s kritizálja, ahogyan végigtekint a Hilbert-féle bizonyításelmélet fejlődésén, melynek körébe kutatásai legnagyobb s legismertebb része tartozik. „Először úgy látszott – írja –, hogy ez az elmélet hatalmas módszer lesz a matematikusok kezében az újabb logikai antinómiák ellen. Ehhez csak arra volt szükség, hogy időlegesen föláldozzák a matematikai tételek értelmét, azaz egyszerű szimbólumok puszta kapcsolatainak tekintsék, s arra, hogy elkerüljék a matematika nem-finitisztikus (a végessel meg nem elégedő) következtetéseit. Úgy látszott, hogy az ellentmondástalanság-bizonyítások purgatóriumában eltöltött rövid tartózkodás után a matematikusok megint visszakapják formuláik értelmét, s az ellentmondástalannak bizonyult rendszerben most már bármely következtetési szabályt használhatnak. A bizonyításelmélet legkiemelkedőbb pozitív eredményeként Gentzen bebizonyította, hogy a természetes számok aritmetikája ellentmondásmentes. Gentzen bizonyítása óta azonban kiderült, hogy a bizonyításelmélet alkalmasabb a formális rendszerek kategorikus és monomorf voltára vonatkozó *negatív* eredmények keresésére (hacsak az ember meg nem elégszik „másodrendű" eredményekkel). A legfontosabb negatív eredmények Löwenheim és Skolem tétele, a Gödel-tétel, a nem-standard modellek létezése, Gödel és Cohen eredményei a Cantor-féle kontinuumsejtés függetlenségéről a halmazelmélet szokásos axiómarendszerében. Ezek a negatív eredmények megmutatták, hogy fel kell adnunk a klasszikus elképzelést, ami szerint a matematika egy ágának elsődleges ideái implicite definiálhatók egy axiómarendszerrel; ma azt gondoljuk, hogy az axiómarendszer az illető ág összes, standard és nem-standard modelljének a közös tulajdonságát definiálja. Ezt a szemléletet az algebrában már régen elfogadták; nemsokára ugyanúgy beszélünk majd a természetes számok egy aritmetikájáról vagy egy halmazelméletről, mint ahogyan ma egy csoportról vagy egy gyűrűről beszélünk.”

Így halad s kutat a szegedi matematikaprofesszor folyton a nagy tudomány új s legújabb fejlődési lehetőségeit keresve s közvetítve, fáradhatatlanul. Munkássága nagyságrendekkel nagyobb műveinek összegénél: éltető erő és forrás a magyar matematikában.

A magyar matematika jelenéből

Csákány Béla

A fél évszázada született írás elé[76]

Amikor a médiából megtudtuk, hogy Vekerdi László anyagi valóságában nincs többé közöttünk, nem egy híradásban nevezték Őt az utolsó magyar polihisztornak. Ez az epiteton ornans gyermekkoromban Brassai Sámuelt illette meg, aki a XIX. században a nyelvészettől kezdve a botanikán és teológián át a matematikáig sok tudományról írt és tanított hosszú élete során. Az utókor tisztelettel emlékezik rá, de nem hallgatja el talán egyedüli nagy tévedését sem: Brassai nem értette meg, mi több, gáncsolta Bolyai felfedezését, a nemeuklideszi geometriát. Ehhez hasonló hibát Vekerdi László bizonyosan nem követhetett volna el.

Nem csupán műveinek olvasása, rádió-előadásainak hallgatása során épült fel bennem ez a bizonyosság. Egyetlen lényeges személyes találkozásunkra a hatvanas évek második felében került sor. Fiatal docensként akkor fontosnak számító feladatot kaptam a szegedi egyetem Bolyai Intézetében: úgynevezett szakmai-ideológiai konferenciát kellett szerveznem. Így nevezték azokat az oktatói értekezleteket, amelyeken az adott szakterület és a marxista ideológia valamely találkozási pontjáról szóló előadást kötetlen beszélgetés, jó esetben vita követte. Természetesen Kalmár Lászlót szerettem volna előadónak felkérni – akkortájt még aspiránsvezetést is vállalt filozófiából –, de hiába: félszáz bizottság tagjaként joggal mondhatta Arany Toldijával: „Szakmány módra rám van mérve minden óra.” De ha kalácsot nem is, tanácsot kaptam tőle: „Van a Kutatóban egy könyvtáros, annak jó gondolatai vannak a matematika történetéről, és jól is beszél róluk. Őt kérd fel!”

Így kerültem a köszönőviszonynál érdemibb kapcsolatba Vekerdi Lászlóval. Készségesen vállalkozott a feladatra, és sajátos, lelkes, szuggesztív stílusában érdekes előadást tartott a szabad matematikai gondolat újkor elei kirobbanásáról. A „dialektikus materializmus” szókapcsolat ugyan nem hangzott el, de az előadó dialektikus gondolkodására és materialista szemléletére tekintettel ezt senki sem kifogásolta. Néhány évvel később jelent meg a bukaresti Kriterion kiadónál Vekerdi könyve, „A matematikai absztrakció történetéből” – annak az előmunkálataiba pillanthattunk be az

[76] Forrás: Csákány Béla: A fél évszázada született írás elé. = Természet Világa 141 (2010) No. 7. p. 298.

előadás révén. A könyv Bolyai János gondolatait is beilleszti az absztrakt gondolkodás fejlődésének folyamatába.

Most, amikor a Természet Világa főszerkesztője elküldte nekem Vekerdi Lászlónak a magyar matematika (akkori) jelenéről ugyanabban az időszakban, 1964-ben írt, e pillanatig kiadatlan dolgozatát, megint Kalmárra gondoltam. Egy nem régi beszélgetésből kiderül,[77] hogy a dolgozat Veress Jenő kővágóörsi tanár kérésére született, aki a jelenkor nagy magyar matematikusai felől érdeklődött, tanítványai ismeretszomját kielégítendő. Előképe ennek Kalmár László híres integrállevele, amelyben negyven gépírásos oldalon világítja meg Szabó Miklós makói orvosnak az integrál fogalmát. Az említett beszélgetésben elhangzik, hogy a dolgozat eljutott a New Hungarian Quarterly (NHQ), a korszak reprezentatív angol nyelvű hazai folyóirata szerkesztőihez, akik közölni akarták, le is fordíttatták angolra a szerzővel, de a publikálásra végül nem került sor. Hogy miért, azt Vekerdi László így magyarázza: „… azt hittem, értek annyit a matematikához, hogy szabadon válogathassak nagy matematikusaink között. Később tudtam meg, ennek létezik egy majdhogynem hivatalos rangsora. Azt pedig ugyanúgy be kell tartani, mint az angol királynő fogadásán a protokollt. Nem csókolhatsz előbb kezet a londoni polgármester feleségének, mint a királynőnek. Nahát, én pedig nem aszerint csókoltam kezet matematikusainknak, hogy ki hol állt a hivatalos rangsorban.” Tegyük ehhez még, amit Veress tanár úrnak írt kísérőlevelében: „…a matematika nálunk annyira eleven tudomány, hogy erősen művelői elevenébe vág, a matematikusok egymásról való véleményét ezért óhatatlanul személyes ellen- és rokonszenvek bonyolult szövevénye módosítja.”[78]

Egyre kevesebben emlékszünk ma már arra, hogy ezek az ellen- és rokonszenvek a hatvanas években táborokat szervező erővé váltak. A táborok reprezentánsaitól forró drótok vezettek a pártközpont munkatársaihoz, akik számára lehetetlen küldetés volt megoldani a szellem túlfinomult idegrendszerű arisztokratáinak[79] zsigeri konfliktusait, arra viszont volt hatalmuk, hogy a sajtó útján elszenvedhető vélt sérelmektől megóvják őket. Így gondolkozhattak: „Az NHQ a néhány ablak egyike, amelyeken át a nyugati olvasó kis országunkba bepillanthat. Ha az NHQ-ban közölt cikk két sorban emlékezik meg X tudósról, de oldalakat szentel Y-nak, akkor ebből a művelt laikus csak két dologra következtethet: X vagy kevéssé jelentős alkotó, vagy kegyvesztett a magyar

[77] Staar Gyula: Múló szerelem volt a matematika? Beszélgetés Vekerdi Lászlóval. = Forrás 40 (2008) No. 3. pp. 81–91.; No. 4. pp. 109–121.

[78] Nyomtatásban: Kalmár László: Integrállevél. Matematikai írások. Szerk.: Varga Antal. Bp., 1986. Gondolat. 266 p.

[79] Pollák György kollégám találó kifejezése.

tudománypolitika irányítói előtt. Ennek nem tehetjük ki X-et.” Ezért kellett kéziratban maradnia az olvasók elé most kerülő írásnak.

Közel fél évszázad messzeségéből visszanézve megállapíthatjuk, hogy Vekerdi László – aki Veress Jenőhöz írt levelében kívülállónak, foglalkozása szerint könyvtárosnak, vágyai szerint történésznek mondta magát – ebben a munkájában könyvtárosi alapossággal igyekezett leltározni a kisebb mestereket is, a nagyok kiválasztásában meg igazi történésznek bizonyult: akiket piedesztálra emelt, azoknak mai szemmel nézve is ott van a helyük. Értékelése szubjektív – mondhatná valaki –, barátját, a fiatalon elhunyt Szele Tibort a legnagyobbakkal egy sorban méltatja. Hogy ezt teljes joggal teszi, egy személyes élménnyel és Szele első, magyar nyelvű, 1943-ban megjelent cikkével támasztom alá. Szele halála után három évvel lettem A. G. Kuros, a kiemelkedő orosz algebrista aspiránsa (mai nyelven doktorandusza). Kérdésére, hogy milyen témával szeretnék nála foglalkozni, szakirodalmi olvasottságom alapján öntudatosan válaszoltam, hogy Abel-csoportokkal. „Azért nem érdemes Magyarországról idejönni – válaszolt megütközve –, hiszen ott van Szele iskolája!” A kombinatorikai valószínűség-számítási módszerről szóló, nemrég már harmadszor is kiadott alapvető monográfiában[80] pedig ezt olvashatjuk: „…Szele a valószínűségi módszert már 1943-ban alkalmazta.” A könyv irodalomjegyzéke az említett (a Mathematical Reviews számára Erdős Pál által referált) cikket tartalmazza.

Ezen a ponton meg is állok. A szerző nem szorul az én igazolásomra. Értékeléseit az idő igazolta. Azt pedig nem sejthette a hatvanas években – ha nem is volt egészen kívülálló –, hogy 2000 táján a majdnem hivatalos és félig teljes magyar matematikatörténet[81] teljes joggal Lax Pétert és Takács Lajost emeli ki (igaz, implicite) a huszadik század magyar matematikusai közül. Olvassuk ezt a tartalmas és bátor (hiszen saját korszakáról szóló) tudománytörténeti opus minort úgy, ahogyan Ő készítette: sine ira et studio.

***

[80] Első kiadása: Noga Alon – Joel H. Spencer: The probabilistic method. With an appendix by Paul Erdős. New York , 1992. John Wiley & Sons. XIII, 254 p.

[81] János Horváth (ed.): A Panorama of Hungarian Mathematics in the Twentieth Century, Vol. I. Bp. – Berlin, 2006. Springer – Bolyai Society. 639 p. – A kötetben nem szerepel a diszkrét matematika: algebra, kombinatorika, logika, halmazelmélet.

A magyar matematika jelenéből[82]

Fejér Lipót és Riesz Frigyes

Az irodalomtörténet-írás régóta kedveli a „kettős csillagokat”; mint Goethe és Schiller, Petrarca és Dante, Puskin és Lermontov, Ibsen és Björnson, Petőfi és Arany példája mutatja, szeretik két (vagy három) névvel jellemezni a nemzeti keretek közül kinőtt poézis világirodalmivá válásának pillanatát. Ez a jellemzés sohasem teljes és mindig igazságtalan, s elsősorban nem az elmaradt nevek miatt. A jellemzésre használt írók munkájára esik más fény, a jelen múltba vetített fénye, és „igazi” énjüket már csak szorgalmas (s nagyjából érdektelen) lábjegyzetekkel megtűzdelt szaktörténeti kutatások tudják megközelíteni. A pillanat jellemzésére használt énjük kevesebb és egyben több lesz, mint történelem, legendává válik.

A magyar matematika történetének Fejér és Riesz a legendás ikercsillaga. Előttük a korai történelem homálya, néhány váratlan és magunk számára is érthetetlenül megjelenő prófétával, mint a Bolyaiak, és néhány Keresztelő Jánosa a magyar matematikának, mint Kőnig Gyula,[83] Kürschák József. Utánuk a történelem világos, évkönyvszerű feljegyzései. A két világ között van – action gratuit-ként – meglepően és világosan, a kezdet és a beteljesedés egységében, a legenda.

Mindkét névhez egy-egy tétel fűződik, egy-egy tétel, amely a XX. század talán 10 leggyakrabban idézett és használt tétele közé tartozik. A két tétel elég lenne világhírük biztosításához, a magyar matematika azonban jószerivel abból keletkezett, amit ennek a két tételnek a segítésével ezen túl alkottak.

Fejér Lipót (1880–1959) igen fiatalon, még egyetemi hallgató korában (1900) észrevette, hogy ha egy *speciális* végtelen sor, az ún. Fourier-féle sor vizsgálatában az egyes tagok összeadásából keletkező részletösszegekről a részletösszegek *aritmetikai közepére* térünk át, akkor az eredeti végtelen sor olyan esetben is megközelíthetővé válik, amikor maguknak a részletösszegeknek a segítségével nem sokat tudunk mondani a sorra vonatkozóan. Azaz ha

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

az eredetileg adott végtelen sor, akkor az

---

[82] Forrás: Vekerdi László: A magyar matematika jelenéből. 1–2. = Természet Világa 141 (2010) No. 7. pp. 299–302.; No. 8. pp. 342–346. – A kézirat lezárva: Budapest, 1965. december 2.

[83] Lásd Szénássy Barna kitűnő, alapos monográfiáját: Kőnig Gyula, 1849–1913. Bp., 1965. Akadémiai. 142 p., 1 t.

$s_0 = u_0$

$s_1 = u_0 + u_1$

$s_2 = u_0 + u_1 + u_2$

$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$

részletösszegek s_0, s_1, s_2, …, s_n, … sorozata alapján nem minden esetben határozhatók meg a végtelen sor tulajdonságai, például az a fontos tulajdonság, hogy egy adott számköz valamely x helyén az $u_0 + u_1 + u_2 + \dots$ végtelen sor előállítja-e az $f(x)$ függvényt, vagy sem. Ha azonban az s_0, s_1, s_2, … $s$orozatról áttérünk az

$$s_0, \frac{s_0 + s_1}{2}, \dots, \frac{s_0 + s_1 + \dots + s_n}{n+1}$$

számtani középértékek sorozatára, akkor összetartó sorozathoz jutunk, amely az x folytonossági helyen $f(x)$-et szolgáltatja.

Ennek az egyszerű tételnek a segítségével maga Fejér és mások igen sok nehéz kérdést oldottak meg a Fourier-féle sorok s általában a hatványsorok elméletében, úgyhogy – amint G. H. Hardy megjegyezte – Fejér tétele „halomnyi modern kutatás kiindulópontja”. A tétel, éppen egyszerűsége miatt, hirtelen átvilágított egy igen bonyolult, nehezen áttekinthető területet, ahol Fejér felfedezése előtt már minden további haladás reménytelennek látszott. Nem hiába kezdte Fejér 1902-ben magyarul megjelent doktori értekezését a következő szavakkal: „E dolgozat az analízis oly témájával foglalkozik, melynek elméletét a matematikusok már vagy 15 év előtt kimerítettnek, lezártnak tekintették és melyről azóta nem is írtak valami lényegesen újat.” Fejér eljárása egy minden esetben meghatározott, *definit* műveletet (számtani közép képzése) helyettesített egy meghatározatlan, *indefinit* művelet (részletösszegek képzése) helyébe, s mint egy 1933-ban Amerikában tartott előadásában mondotta, „e kétféle típusú lineáris operáció közötti markáns eltérés … kétségtelenül fokozta azt az érdeklődést, amelyet a matematikusok már régóta tápláltak ez iránt a különbség iránt”.[84]

Fejér gondolatvilágában a Fourier-féle sorok egyre inkább egyszerűen áttekinthető, konkrét minta szerepét töltik be, a segítségükkel talált összefüggések és műveletek más, általánosabb függvénysorokra utalnak, s a Fourier-sorok egyszerű trigonometrikus függvényein megismert lineáris operációk a XX. századi matematika egyik legfontosabb fejezetének, a lineáris operációk általános elméletének első fontos példái lettek.

[84] Fejér, Lipót: On the infinite sequences arising in the theories of harmonic analysis, of interpolation, and of mechanical quadratures. = Bulletin of the American Mathematical Society, 1933. pp. 521–534.

Egészen más irányból közeledett ehhez a fontos területhez *Riesz Frigyes* (1880–1956). Fejér gondolatvilágát mindig a konkrét összefüggések szeretete uralta, konkrét példákból haladt általánosítások felé: a konkrét matematikai konstrukció volt egyik legerősebb oldala, talán éppen ezért hatott életműve a magyar matematika fejlődésében annyi sok területen inspirálóként.

Riesz gondolkozása kezdettől fogva zárt, formakedvelő, absztrakt volt. Viszonylag későn, 27 éves korában lépett a világ matematikájának színterére az ún. Riesz–Fischer-féle tétellel. A Fejér-tétel egy még meg sem született matematikai diszciplína első nagy eredménye volt, olyan, mint a mag, amiből később nő ki a fa. Riesz tétele olyan, mint a kagylóban a gyöngy: az első kristályosan tiszta eredménye egy képlékeny, konkrétan nem körvonalazott, akkor még el sem nevezett diszciplínának.

Riesz tételét nem lehet olyan egyszerűen elmondani, mint a Fejértételt. Durván szólva úgy lehetne kifejezni, hogy míg a Fejér-tétel arra tanít meg, hogyan kell egy *speciális* végtelen függvénysor tagjaiból valamely $f(x)$ függvényt előállító összetartó sorozatot konstruálni, a Riesz–Fischer-féle tétel azt mondja meg, *melyik* az a *speciális* függvényosztály, amelyikbe tartozó $f(x)$ függvényeket egy tetszőleges speciális (ún. ortonormált) függvényrendszer szerint sorba fejtve a sorfejtés $s_n(x)$ részletösszegei az $f(x)$ függvényhez konvergálnak. Ez a függvényosztály a Lebesgue-féle értelemben négyzetesen integrálható függvények osztálya, azaz az olyan függvényeké, amely függvények négyzete a Lebesgue által bevezetett (akkoriban) új integrálfogalom értelmében integrálható. A régi, Riemann-féle értelemben integrálható függvényekre a Riesz–Fischer-féle tétel nem érvényes. Ez azért volt nagyon fontos, mert akkoriban a Lebesgue-féle integrálfogalmat sokan még afféle felesleges elméleti preciőzködésnek tartották, a Lebesgue-féle integrál csak a Riesz–Fischer-tétel következtében lett elsőrendű fontosságú, ennek a tételnek a folyományaképpen vonult be a matematikai hétköznapok világába. A Riesz–Fischer-tétel értelmében ugyanis a Lebesgue szerint négyzetesen integrálható függvények osztálya, az ún. L_2 függvényosztály matematikai műveletek tekintetében azonosnak, „izomorfnak” bizonyult a Hilbert által pár évvel azelőtt bevezetett (megszámlálhatóan) végtelen sok dimenziós euklideszi térrel. Ahogyan a Hilbert-féle vektortérben végtelen sok komponens véges négyzetösszegét tekintjük egy vektor „hosszúságnégyzetének”, ugyanúgy az L_2 függvényosztály egy $f(x)$ függvényének a „hosszúságnégyzetét” a függvény négyzetének Lebesgue-féle integrálja definiálja. Tehát a Riesz–Fischer-tételnek hasonló szerepe van az L_2 függvényosztályban, mint egy közönséges n dimenziós euklideszi térben (pl. n = 2 esetében a síkban) a Pitagorasz-tételnek: megadja, hogyan kell összetevőiből összetenni vagy összetevőkre bontani a tér egy objektumát. Ennek megfelelően az L_2 függvényosztály úgy tekinthető, mint valami absztrakt tér, *függvénytér,* s ennek a függvénytérnek meg a Hilbert-féle végtelen sok dimenziós vektortérnek a közös tulajdonságait absztrahálva alkották meg az absztrakt Hilbert-féle teret. Ezt az absztrakt Hilbert-teret használta Fejér és Riesz tanítványa, *Neumann János* a kvantummechanika megalapozására.

Maga Riesz az L_2 függvénytér mintájára más absztrakt tereket is bevezetett és vizsgált, s az egyes függvényterek példája alapján már az 1910-es években körvonalazta az általános lineáris metrikus terek elméletének az alapjait. Ezt az elméletet azután nemsokára lengyel és amerikai matematikusok dolgozták ki, részben Riesz nyomán, részben tőle függetlenül. Riesz is felépítette a húszas és harmincas évek alatt az általános lineáris operációk terének egy absztrakt, elegáns elméletét. Ezt az elméletet az 1928-as bolognai nemzetközi matematikai kongresszuson ismertette, később azonban sikerült még jobban általánosítania. „Nem a számközt vagy ponthalmazt helyettesítem – írja – absztrakt halmazzal, nem a folytonos függvényeket általánosabb függvényosztállyal, hanem maguknak a függvényeknek a szerepét veszik át absztrakt elemek és a függvényosztályét ezeknek az elemeknek az összessége, melyet néhány, nagyon kevés, az elemek összeadását illető föltevéssel jellemzünk.”[85]

Riesz absztrakció iránti érzéke a függvényterek ezen globális, egészükben való vizsgálata mellett egy másik, mintegy belülről, a tér egyes elemeiből kiinduló vizsgálati irány szempontjából is alapvető eredményeket hozott. A ponthalmazok elmélete által diktált új szellemnek megfelelően Maurice Fréchet 1906-ban bevezette az absztrakt elemekből álló halmazon értelmezett függvények vizsgálatába a határérték fogalmát. Riesz két évvel később, az 1908-as római nemzetközi matematikai kongresszuson megmutatta, hogy a határérték fogalma (a megszámlálhatóság fogalmához való kötöttsége miatt) nem alkalmas az absztrakt halmazok elméletének a megalapozására, s ehelyett az általa definiált *sűrűsödési pont* fogalmát vezette be, amivel a modern matematika egyik legfontosabb ágának, a halmazelméleti topológiának az elindítója lett.[86]

Riesz absztrakt, világosságra és egyszerűsítésre törekvő gondolkozása a matematika más területein is, például a komplex változós függvények elméletében (szubharmonikus függvények), a potenciálelméletben, az integrálegyenletek elméletében, az ergodelméletben fontos, sokszor egész nagy későbbi kutatási irányok kiindulását képező felfedezésekhez vezetett. Tanítványával, *Szőkefalvi-Nagy Bélával* írt könyve, a „Lecons d’analyse fonctionnelle” (Budapest, 1952) az utóbbi két évtized legsikeresebb matematikai könyvei

[85] Riesz Frigyes: A lineáris operációk általános elméletének néhány alapvető fogalomalkotásáról. = Mathematikai és Természettudományi Értesítő 56 (1937) No. 1. pp. 1–46.

[86] Manheim, Jerome H.: The Genesis of Point Set Topology. Oxford, 1964. Pergamon Press. pp. 119–120.

közé tartozik, pár éven belül négy kiadása fogyott el, több nyelvre lefordították. A Riesz által elindított irány mai napig a magyar matematika legfontosabb fejezetei közé tartozik, Szőkefalvi-Nagy Béla munkásságát világszerte ismerik és becsülik.[87]

Szeged

Az első, az egész világ matematikája szempontjából fontos magyarországi matematikai centrum Szegeden alakult ki. A trianoni békeszerződés után Szegedre költöztetett kolozsvári egyetemmel került Riesz Frigyes és *Haar Alfréd* (1885–1933) Szegedre. Leginkább nekik s még néhány professzortársuknak, elsősorban Szent-Györgyi Albertnek köszönhető, hogy Szeged a matematikai-természettudományos kutatás magyarországi centrumává nőhetett. Riesz és Haar indították el 1922-ben az „Acta Scientiarum Mathematicarum"-ot, a híres „Szegedi Aktá"-t, az első tisztán matematikai kutatásoknak szentelt, világnyelveken megjelenő magyarországi folyóiratot. A Szegedi Akta lett minden azóta keletkezett, igényes magyar matematikai folyóirat mintaképe. Már az első évfolyamokban sok világhírű külföldi matematikus neve látható a magyaroké mellett: M. Brelot, O. Perron, J. Dieudonné, E. R. Lorch, H. Bohr, S. Saks, N. Wiener – hogy csak a legismertebbeket említsük. Mégis, az Acta igazi „aranyfedezete" a szegedi matematikusok munkássága volt.

A szegedi matematikai élet irányát az első évtizedben Riesz mellett főleg Haar Alfréd szabta meg, korai haláláig (1933). Haar Göttingenben tanult, és Riesz kifejezetten francia szemléletéhez ő ennek a nagy német matematikai centrumnak a szellemét csatolta. Göttingen akkoriban leginkább David Hilbert és Richard Courant hatását jelentette, sokoldalúságot, axiomatizálást, elmélet és gyakorlat egységét. Haar Alfréd a matematika nagyon sok, egymástól távoli területén dolgozott, a későbbi fejlődés szempontjából legfontosabb eredményét a folytonos csoportok elméletében érte el. A folytonos csoportok elméletének fejlődését egy igen komoly korlátozás gátolta: a csoportban szereplő függvényeknek kétszer differenciálhatóknak kellett lenniük. Hilbertnek a párizsi matematikai kongresszuson felvetett híres „megoldatlan problémái" között ötödikként éppen az a kérdés szerepelt, hogy el lehet-e ejteni ezt a korlátozást. Számos nagy matematikus próbálta megoldani a kérdést, míg végre Haarnak 1932-ben sikerült a folytonos csoportok olyan elméletét felépíteni, amelyben el lehetett ejteni ezt a kikötést. Az általa bevezetett új mértékfogalom, az ún. „Haar-mérték"

[87] Lásd pl. Császár Ákos: Szőkefalvi-Nagy Béla tudományos munkásságának ismertetése. = Matematikai Lapok 15 (1964) pp. 1–22.

segítségével azután át lehetett vinni az integrál fogalmát a csoportok elméletébe, s így lehetővé vált a folytonos csoportok szerkezetének egy új oldalról való vizsgálata.

Igen fontos szerepe volt a csoport fogalmának *Kerékjártó Béla* (1898–1946) gondolkozásában is. Ő képviselte Szegeden a geometriát. Legfontosabb dolgozatai a topológia klasszikus, Poincaré és Brouwer által elindított formájával foglalkoznak. Kerékjártó a nagy rendszeralkotók közé tartozott: több kötetre tervezett művéből, ami végigment volna a geometria egészén, csak az első két kötet készült el, az euklideszi és a projektív geometria. Az euklideszi geometria felépítésében a keret Hilbert híres Grundlagen-axiomatikája, de az axiomatika kereteit áttöri Kerékjártó eleve geometriai intuíciója, s a kongruens transzformációk csoportjának szimmetriatulajdonságaiból egy olyan abszolút geometriát vezet le, amelyből – a párhuzamosság definíciója szerint – egyaránt megkapható az euklideszi és a nemeuklideszi geometria. Hasonlóképpen a projektív megfelelkezések csoportstruktúráiból vezeti le a második kötetben a projektív geometriát. Mind a két kötetben azt a tervet realizálja, amit Felix Klein vázolt híres „erlangeni program"-jában, de senki Kerékjártóig ilyen részletesen meg nem valósított.

Absztrakció, matematikai struktúrák és alapelvek iránti érzék volt jellemző a szegedi matematikai légkörre, s ez jó keret volt *Kalmár László* sokoldalú tehetsége számára. Kalmár igazi matematikai hazája mégis nem Szeged volt, hanem Göttingen, s talán nem is csak szigorúan matematikai értelemben. Kalmár honosította meg ugyanis nálunk azt a matematikai-pedagógiai szellemet, ami a legjobb német egyetemek szemináriumaiban, főleg Göttingenben, egészen 1933-ig otthonos volt, a szervezett és mégis közvetlen, egyéni nevelésnek azt az ötvözetét, ami a matematikapedagógusi életformából egy kisváros egyetemének szűk falai között is színes, érdekes, szakmai kalandot faragott. Kalmár közelében a matematika mindig emberivé sűrűsödött, az absztrakció (gyakran egymás után többféle) emberi tartalommal telítődött, a szó szoros értelmében érdekessé vált. Tanítványa és munkájának sok tekintetben folytatója, *Péter Rózsa* kitűnően jellemzi: „Mint vérbeli pedagógus, tanulni is, alkotni is tanítva tudott legjobban. Volt rá eset, hogy félig kész munkáját adta elő fiatal matematikusoknak és előadás közben találta meg a hiányzó lépéseket. A matematikai logikával szegedi tanársegéd korában ismerkedett meg, úgy, hogy 40–50 oldalas leveleket írt róla…"

Ettől kezdve Kalmár sokfelé irányuló matematikai érdeklődésének a matematikai logika volt a tengelye. Mint egykor nagy elődjét, Kőnig Gyulát, Kalmárt is Hilbert gondolkozása vonta bűvkörébe, Hilbert bizonyításelmélete vezette kutatásaiban. Kalmár nagy hatásának tulajdonítható, hogy „a matematika alapjának tudománya terén ma működő magyar matematikusok – eltekintve néhány halmazelméleti kutatástól – elsősorban a *matematikai logika* kérdéseivel foglalkoznak. … A matematikai logika egyik fontos teendője, hogy a *következmény* fogalmának matematikai szempontból szabatos, a matematika legkülönbözőbb területein mindenféle következtetésre egyaránt alkalmazható meghatározását adja. Kézenfekvő azt is megkívánni, hogy adott állításokról (tételekről, feltevésekről vagy sejtésekről) a meghatározás alapján mindig el lehessen dönteni véges számú lépésben, vajon egy további adott állítás következményük-e. A matematikai logika az ilyen meghatározás kérdését az ún. *eldöntésproblémára* vezeti vissza. Az eldöntésprobléma annak a feltételeit keresi, hogy egy adott *logikai formula* bármely halmazon *azonosan igaz* legyen; ezzel ekvivalens másik alakjában annak a feltételeit keresi, hogy egy adott logikai formulához legyen olyan halmaz, amelyen (a formula) kielégíthető."[88] Kalmár éppen azáltal, hogy az eldöntésproblémát mindkét oldalról, a formula meg a formula kielégíthetőségi tartományának a szempontjából egyaránt vizsgálta, a matematikai rendszerek olyan szabad, nyitott, fejlődésben lévő felfogásához jutott, amely – mint Péter Rózsa írja – „erősen megingatta azt az elgondolást, hogy a matematika eljárásait zárt keretek közé lehet kényszeríteni."[89]

A matematikai logika abban a szabad formában, ahogyan Kalmár felfogta, igen sok helyen érintkezik a matematikai struktúrák vizsgálatának a tudományával, az absztrakt algebrával. Láttuk, hogy már Riesz vizsgálataiban milyen fontos szerepe volt az absztrakt struktúráknak, Kerékjártó pedig absztrakt algebrai fogalomra, a csoport fogalmára alapozta a geometriát. Minden feltétel adva volt, hogy Szegeden kialakuljon az első magyar absztrakt algebrai iskola. Ennek a folyamatnak az elindítója *Rédei László* volt. Rédei mint *Bauer Mihály* tanítványa kezdett algebrával foglalkozni, Bauer Mihály pedig az algebrai számelmélet legkiválóbb képviselői közé számított a húszas-harmincas években. Az akkoriban „modern"-nek nevezett absztrakt algebrát azonban hatalmas lépés választotta el az algebrai számelmélettől, s ezt a nagy lépést az absztrakció irányába Rédei Szeged hatására tette meg. Rédei és Kalmár tanítványa volt *Szele Tibor*, aki ugyanolyan szilárdan megalapozta Magyarországon az absztrakt algebrai kutatásokat, mint Fejér a sorelméletet, Riesz a funkcionálanalízist.

---

88 Kalmár László: A matematika alapjaival kapcsolatos újabb eredmények. = A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és fizikai) osztályának közleményei. Vol. 2 (1952) 89–103.

89 Péter Rózsa: Kalmár László matematikai munkássága. = Matematikai Lapok 6 (1955) pp. 138–150.

A Fejér-iskola

A két világháború közötti nehéz időszakban Szeged volt az egyetlen magyarországi egyetemi város, ahol a matematika talán még kicsi támogatást is élvezett. Az ország urai nem bánták, hogy Szegeden kialakult valamiféle kis „magyar Göttingen”, amire külföldiek előtt hivatkozni lehetett. Pesten más volt a helyzet. Itt az egyetemen a jogi és a teológiai fakultások uralkodtak, a matematikát, a fizikát a Horthy-korszak hatalmasságai nem támogatták. Pedig az egyik matematikai tanszéken 1911 óta Fejér volt a professzor, és körülötte felnőtt az első összefüggő, folyamatos matematikai iskola. „Budapesti működését – írja *Turán Pál* – nagy ambícióval kezdette el és hamarosan egész gárdája nő fel mellette a kiváló tanítványoknak. Elég, ha Fekete Mihály, Egerváry Jenő, Pál Gyula, Csillag Pál, Szász Ottó, Lukács Ferenc és Sidon Simon neveit említem meg, a teljességre és rendszerezésre való minden igény nélkül.” Fejér iskolateremtő erejének oka értekezésének ideáin, gondolatébresztő voltán és ötvözött stílusán felül egyéniségének közvetlensége lehetett. Tanítványai vele nemcsak a szemináriumán beszélhettek, egyetemi szobájának ajtaját nem vigyázta altiszt, a beszélgetés időpontját nem rögzítette titkár. A szemináriumi megbeszélés, főleg fiatalabb éveiben, a kávéházban folytatódott; sok jelentős értekezés árulkodna, ha tudna, arról, hogy tartalmuk első formáit a budai Erzsébet kávéház, vagy a pesti Mignon márványasztalain, számolócéduláin vagy szalvettáin nyerte, Fejérrel való beszélgetés alatt vagy után.”[90]

A Fejér körül és hatására kialakult matematikai kör érdeklődésének irányát a mester matematikai sokoldalúsága határozta meg. Interpoláció, függvénysorok, számelméleti problémák, konstruktív függvénytan, az analízis konkrét, sokszor apró, de mégis mély részletekig menő kérdései és feladatai: mintha *Pólya György* és *Szegő Gábor* (szintén egykori Fejértanítványok) híres „Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis” című könyve elevenedett volna meg, olyan volt az a matematika, amelyet Fejér Pesten inspirált. Így pótolta egyetlen nagy professzor tudása, lelkiismeretessége, embersége és a tanítványok lelkesedése azt, amit az ország kultúrájának hivatalos vezetői elmulasztottak. A Fejér-iskola kibírta a fasizmus irtózatos pusztítását, s a szegedi matematika mellett ez volt a másik forrás, amelyből az újraszülető magyar matematika táplálkozott.

***

[90] Turán Pál: Fejér Lipót. = Matematikai Lapok 11 (1960) pp. 8–18.

A II. világháború után megváltozott a magyarországi matematika helyzete és jellege. A régi, sikeresen művelt területek mellett megjelentek a matematika addig elhanyagolt területei, sokkal több matematikus sokkal többféle matematikai szakmában dolgozhatott rendezett anyagi körülmények között. Ez a változás időben egybeesett a matematika jelentőségének és tekintélyének világszerte bekövetkezett hatalmas megnövekedésével, így a matematikai produktivitás olyan nagy lett hazánkban is, hogy még a legfontosabb eredmények felsorolása is kötetnyi lenne. A következő néhány kiragadott eredmény szakmák szerint elrendezett felsorolása csupán arra való, hogy megmutassuk: a hirtelen és nagy expanzió nem merítette ki a magyar matematikát, inkább megerősítette.

Számelmélet

Mikor fentebb azt mondottuk, hogy a háború után Magyarországon a szegedi központból és a Fejér-iskolából kiindulva született újra a matematikai élet, kihagytunk egy nagyon fontos tényezőt: *Erdős Pált.*

Erdős nem korlátozható, még lakhely szempontjából sem, a magyarországi matematika történetére, az egész mai matematika „katalizátora" ő, de talán sehol olyan fontos és sokoldalú nem volt inspiráló hatása, mint éppen itthon. Erdős hatalmas munkássága közel félezer hosszabb-rövidebb dolgozatban, a világ minden fontosabb matematikai folyóiratában szétszórva található. Minden dolgozata egy-egy (vagy több) konkrét probléma felvetéséből, első megoldásából, vagy egy már megoldott probléma megoldásának az egyszerűsítéséből áll: megannyi matematikai szonett, amelyek között az összefüggést, akár a költők versei esetében, az író egyénisége teremti meg. Azok közé a nagy matematikusok közé tartozik, akik nemhogy könyvet, még nagyobb összefoglaló és ismertető jellegű cikket is alig írtak, annyira az állandóan változó új problémák és új felfedezések bűvöletében élnek. Sorai között szinte látni a gondolkozás szökellését, az embernek az az érzése, hogy gyorsan haladó gondolatai rögzítésére az írás és a szó lassú, és szívesebben alkalmazna valami gondolat-fényképészt (talán nem is egyet). Lehet, hogy ennek a nagy belső mozgásnak külső kifejezése, hogy állandóan útban van Magyarország, Izrael és Amerika között, hordozva, mint valami szellemi monszun, ötletei megtermékenyítő esőjét világrészről világrészre.

Munkássága ismertetése még szakmatematikus számára is reménytelen feladat, mégis gondolkozásának legalább érzékeltetésére szolgálhat az alábbi, ritka összefoglaló cikkeinek egyikéből vett idézet. „Ebben a fejezetben – írja a modern matematika néhány fontos új eredményéről kiadott gyűjteményes munka számelméletről szóló fejezetében – még csak kísérletet sem tehetek a számelmélet újabb fejleményeinek teljes áttekintésére, és számos ágában nem én vagyok erre a leghivatottabb – például az algebrai geometriai ágakban. Dolgozatom nagyon szubjektív lesz; elsősorban az engem érdeklő kérdésekről fogok írni, és természetesen nem akarom azt a képzetet kelteni, hogy azok a problémák és eredmények, amelyekre nem térek ki, kevésbé fontosak vagy érdekesek, mint azok, amelyeket részletesen tárgyalok. Például kiemelem a prímeket és a kombinatorikus problémákat; és természetesen kiemelem a saját munkámat. Nem szentelek nagy figyelmet a Waring-problémának, amelyet az utóbbi időben több könyv is elemez; nem térek ki a számok geometriájára és a diofantikus approximációra sem, amelyről nemrégiben írtam. Ugyanez a sors vár a valószínűség-számítás több számelméleti alkalmazására, de újabban számos átfogó cikk is megjelent erről a témáról (néhányukat én írtam), most adták ki Kubilius könyvét, s Rényivel írt könyvünk is hamarosan napvilágot át. Azoknak a kérdéseknek a többsége, amelyeket most tárgyalni fogok, kombinatorikus természetű [szó szerint: kombinatorikus ízű] vagy a prímekkel kapcsolatos (vagy mindkettő); ezek érdekeltek a legjobban az utóbbi harminchárom évben..."[91]

A „kombinatorikus íz" és a prímszámok világa: kellően tágan értelmezve ez a két fogalom legjellemzőbb Erdős szerteágazó matematikai munkásságára. Ezen a két úton hatol be a számelmélet feltáratlan sűrűjébe, s a kihozott eredményeket azután sokszor a matematika látszólag igen távoli területein alkalmam. A számelmélet ugyanis nem egyszerűen egy a sokféle matematikai diszciplína közül. A számelmélet is „matematikai alapkutatás", amelyik azonban az absztrakt formalizmusok helyett az egész számok konkrét (de azért egyáltalán nem könnyű!) logikájára épít. Németh László írja Gauss fiatalkori számelméleti munkájával kapcsolatban, hogy „aki a matematikát csak mint a fizika eszközét tiszteli: az efféle kutatást, mely a számokat önmagukban (mint a bennük rejlő matematikai varázslatok bűvészcilinderét) nézi, másodrendűnek érezheti. A matematika alapja azonban mégiscsak a szám, s a számelmélet fellendülése a görögöknél Püthagorasz, az újkor elején, Fermat idejében mindig annak a jele volt, hogy a szám elvonatkozik attól, amit számol, és a matematika az alkalmazástól visszahúzódva, mint tiszta s még tisztább matematika igyekszik önnönmagában elmerülni, hogy e tornával és eredményeivel aztán még alkalmasabbá váljék az alkalmazásra."[92]

---

[91] Erdős, Pál.: Some recent advances and current problems in number theory. In: Lectures on modern mathematics, Vol. III. New York, 1965. Ed. T. L. Saaty. pp. 196–244.

[92] Németh László: A kísérletező ember. Bp., 1963. Magvető. pp. 278–279.

Németh 1950-ben írta azt a tanulmányát, melyből ez az idézet való. Mintha csak igazolni akarta volna az író sejtését, a magyar alkalmazott matematikai kutatás néhány legszebb eredményét, a valószínűség-számításban és gráfelméletben, éppen Erdős tiszta számelméleti eredményeinek köszönhette. Ugyanezt lehet látni a magyar számelmélet másik nagymestere, Turán Pál esetében is: a tiszta számelméletbe tartozó elméleti tételei meglepően sok és érdekes gyakorlati alkalmazást találtak.

Turán Pál Fejér tanítványa, s mesterétől örökölte a sorokkal és a komplex változós függvényekkel való munka varázslatos képességét. Mint egykor Fejér, aki szinte egyetlen téma gazdag variálásából építette fel matematikai szimfóniáit, Turán is, munkásságának egyik nagy részében, egyetlen centrális gondolat, egyetlen nehéz, sokféleképpen alkalmazható módszer nyomán halad a számelmélet legmagasabb csúcsai felé. Éppen itt, ezeknek a csúcsoknak a közelében, érdekes és jellemző módon találkozik a két számelméleti gondolkozás, az Erdősé és a Turáné.

Ismeretes, hogy a valamely x számnál nem nagyobb prímszámok $\pi(x)$ számát megadó képletet, az ún. prímszámtételt milyen nehezen tudta igazolni 1896-ban, egymástól függetlenül, J. Hadamard és C. J. de la Vallée-Poussin. Mindketten az analízis legbonyolultabb eszközeit használták a bizonyításban. Fontos szerepe volt ezek között az analitikus eszközök között egy Riemann által bevezetett speciális komplex változós függvénynek, az ún. Riemann-féle zeta-függvénynek, amelyet a végtelen sor definiál, ahol s valamely komplex szám. Riemann felismerte, hogy ennek a függvénynek a komplex síkon

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \dots$$

való viselkedéséből a prímszámok eloszlására lehet következtetni. Sok sejtést fogalmazott meg a ζ-függvényre vonatkozóan, a sejtései azóta egy kivételével mind igazolódtak. Ez az egy, a „Riemann-sejtés" azt állítja, hogy a $\zeta(s) = 0$ egyenlet minden komplex gyökének 1/2 a valós része.

A prímszámtétel Hadamard és de la Vallée-Poussin általi bizonyítása után a világ legnagyobb matematikusai próbálták igazolni vagy cáfolni a Riemann-sejtést, sikertelenül.

Erdős egyik világhírű eredménye az volt, hogy 1948-ban sikerült a prímszámtételt *elemi úton* bizonyítania, a ζ-függvény használata nélkül. Turán alapvető, meglepően sok területen alkalmazható módszere pedig ζ-függvény gyökeinek a becslésére végzett munkája közben született. A módszert még a számelméletben járatos matematikusnak sem egészen könnyű megértenie, de ha mégis érzékeltetni szeretnénk a tétel jellegét, azt lehetne mondani, hogy Turán egy egész számokra érvényes *aritmetikai tétel* és egy $b_1, b_2, \dots, b_n; z_1, z_2, \dots, z_n$ komplex számokra felírt analitikus egyenlőtlenség megoldása között fennálló ekvivalenciából kiindulva megad két új, az addigiaknál lényegesen kevesebb feltételt követelő és mégis pontosabb alsó becslét az analitikus egyenlőtlenségben szereplő

$$|S_\nu| = |b_1 z_1^\nu + b_2 z_2^\nu + \ldots + b_n z_n^\nu|$$

hatványösszegre úgy, hogy a v egész szám az *m* és *m* + *n* egész számok közé essen.

A két becslést kifejező két tétel s Turán és munkatársainak többi hasonló tétele a „diofantoszi approximáció" elméletébe tartozik. Az ilyen természetű számelméleti problémák általában nehezek, már egyik Diophantosz-kézirat középkori másolatán olvasható a másoló következő szívből jövő megjegyzése: „pokolba, Diophantosz, a lelkeddel, amiért ilyen nehéz problémákat találtál ki, mint ez itt".[93]

Turán módszere sem könnyű, *Rényi Alfréd* olyan hegymászóhoz hasonlította – munkásságáról írt ismertetésében – Turánt, akit az égbe nyúló sziklafalon csak kevesen tudnak követni. De a módszer segítségével olyan csúcsra lehet jutni, ahonnan hirtelen meglepő kilátás nyílik nemcsak a csúcshoz tartozó hegyvonulatra, hanem a völgyekbe rejtett, addig egészen más szemszögből ismert területre is. Turán módszere talán éppen az alkalmazások sokoldalúsága és meglepő volta miatt annyira fontos. Emellett azonban új színben látszik a módszer felől tekintve maga a diofantoszi megközelítés egész elmélete is. A Turán-tételekben ugyanis igen fontosak egyes trigonometrikus kifejezések, komplex formában felírva. Az ilyen kifejezésekkel való munkának már Turán tanára, Fejér Lipót híres nagymestere volt. Éppen ezekre a trigonometrikus kifejezésekre célozva írta Turán a módszeréről szóló könyvében: úgy látszik, „bár talán túlságosan is egyszerűsítve a dolgot, hogy a diofantikus approximációk egész elmélete nem más, mint a trigonometriai kifejezések elméletének egy fejezete".[94]

Fejér iskolateremtő képességét is örökölte Turán. Erdősnek bámulói és gazdag ötleteit felhasználni tudó hívei vannak. Turánnak munkatársai és tanítványai. A Turán-szemináriumoknak igen fontos, ahhoz hasonló szerepe van a magyar matematikai életben, mint egykor a franciában az Hadamard-szemináriumoknak volt. A Turán-féle gondolatkörben dolgozó, vagy vele érintkezésbe került matematikusok közül *Alpár László, Balázs János, Dancs István, Makai Endre, Knapowski, T. Sós Vera, Szüsz Péter* nevét kell említeni.

[93] Ore, Øystein: Number theory and its history. New York, 1948. McGraw-Hill. p. 204.
[94] Turán, Pál: Eine neue Methode in der Analysis und deren Anwendungen. Bp., 1953. Akadémiai. p. 21.

Absztrakt algebra

A magyar algebrai kutatások történetében centrális jelentősége van *Szele Tibor* (1918–1955) rövid ideig tartó, hihetetlenül intenzív munkásságának. A romantikus alkotók közül való volt, a Galois-k és az Abelek fajtájából. A matematikai tehetség veleszületett és korán jelentkező adottsága volt, de tehetségének Szeged matematikai légköre szabott irányt. Rédei és Kalmár tanítványaként a matematikai struktúrák vizsgálata kötötte le már korán érdeklődését. Rédei nyomán kapcsolódott be a Hajós-tétel által elindított vizsgálatokba, s az itt nyert eredményei sok tekintetben jellemzők egész további pályájára.

Hajós György 1941-ben megjelent alapvető dolgozatában Minkowski egy híres sejtését bizonyította be, amely szerint: „Ha az n méretű euclideszi térben párhuzamosan elhelyezkedő, egymást nem fedő, egybevágó kockák az egész teret betöltik és középpontjaik pontrácsot alkotnak (ún. egyszeres térfedő kockarács), akkor van e kockák között kettő, melynek egy-egy oldallapja teljes egészében közös.”[95] Háromdimenziós térben könnyű „látni”, hogy egy egyszeresen térfedő kockarács mindig tartalmaz két olyan szomszédos kockát, melynek egy oldallapja közös, háromnál nagyobb dimenzióban a szemlélet cserbenhagy.

A bizonyításhoz először is át kellett fogalmazni, le kellett fordítani a sejtést olyan matematikai nyelvre, amelyen az a dimenziószámtól független. Ez volt Hajós első nagy tette, mikor a Minkowski-féle sejtést lefordította az absztrakt algebra nyelvére. A sejtés ebben a Hajós-féle formában ún. véges Abel-csoportra van kimondva, azaz absztrakt elemek olyan véges számú együttesére, amelyben az elemek között értelmezve van valamely művelet, amelynek az eredménye mindig csak a megadott absztrakt elemek valamelyike lehet, s az elemek, amelyekre a műveletet alkalmazzuk, akárcsak a közönséges szorzásban vagy összeadásban a számok, felcserélhetők. Ebben az absztrakt algebrai megfogalmazásban – ez volt második nagy eredménye – bizonyította be mármost Hajós a sejtést, amely ezáltal *Hajós-tétellé* vált. A Hajós-tétel véges Abel-féle csoportok elemeik részhalmazából történő speciálisan megadott előállítására vonatkozik, és azt mondja ki, hogy ezek között a speciális részhalmazok között mindig van egy *csoport*, azaz elemek olyan együttese, amelyben a tekintett művelet mindig csak az elemek egyikét eredményezheti.

A Hajós-tétel tehát kifejezetten csoportelméleti tétel, egyik legszebb példája az absztrakt algebra nagy teljesítőképességének és mélységének. Hajós eredeti bizonyítása azonban nagyon nehéz volt, ezenkívül felhasznált két nem csoportelméleti jellegű tételt. Rédei

---

[95] Hajós György: Többméretű terek egyszeres befedése kockaráccsal. = Matematikai és Fizikai Lapok 48 (1941) pp. 37–64.

egyszerűsítette Hajós bizonyítását, de a bizonyítás szerkezetét megtartotta. Szelének sikerült olyan formára hozni a bizonyítást, amelyben már csak egy nem csoportelméleti úton bizonyított segédtételre volt szükség, és Hajós eredetileg indirekt bizonyítását direkt bizonyítás váltotta fel. Szele, akárcsak Rédei, a Hajós-tétel nagy csoportelméleti jelentőségét hangsúlyozta dolgozatában.

> „Rédei erre vonatkozó megjegyzéseihez szeretném itt hozzáfűzni, hogy véleményem szerint Hajós tétele az Abel-csoportok egy olyan alapvető strukturális tulajdonságát világítja meg, amelyik sokkal mélyebben hatol a dolog lényegébe, mint az »alaptétel«. Ha ez a sejtésünk helyesnek bizonyul, Hajós tételét kétségtelenül az Abel-csoportok elméletének egyik legfontosabb pilléreként kell tekinteni."

További élete során azután Szele, munkájának oroszlánrészében éppen az Abel-csoportok strukturális vizsgálatával volt elfoglalva. Sok új fogalmat vezetett be az Abel-csoportok elméletébe és alapvető tételeket fedezett fel. Munkáját azonban lehetetlen még utalásszerűen is jellemezni, a modern algebra talán a matematika minden más részénél megközelíthetetlenebb nem szakember számára. Szele maga egy akadémiai beszámolójában a következőképpen határozta meg az absztrakt algebra helyét a mai matematikában:[96]

> „Az absztrakt algebra, vagy kevésbé szabatos elnevezéssel modern algebra bizonyos értelemben különleges helyet foglal el a matematika legújabb ágai között. Ennek oka az a hatalmas mérvű és rendkívül gyors ütemű fejlődés, amely ezt a tudományt a XX. század immár mögöttünk levő első felében mai állapotához eljuttatta. Elegendő néhány szóval utalni erre a nagy átalakulásra. Száz esztendővel ezelőtt még nyilván nem lehetett szó arról, hogy az algebra önálló tudomány volna, hiszen az akkori algebra még ún. alaptételét is kénytelen volt a függvénytanból kölcsönözni. Ezzel szemben a századforduló táján feltörő hatalmas erejű új gondolatok és fogalomalkotások, valamint ezek kristálytisztaságú rendszerének kialakulása lehetővé tette, hogy az algebra századunk első negyedében teljesen autark tudománnyá váljék, ... és a szánd második negyedében bekövetkező legújabb fejlődés odavezetett, hogy ma az algebra a matematika úgyszólván valamennyi ágában folyó kutatásoknál jelentős szerepet tölt be. Alapvető fontosságú fogalmakat és módszereket lehetett átültetni a tiszta algebra talajából a matematika látszólag egészen távol eső tudományágaiba, s ez nemcsak

[96] Szele Tibor: Újabb eredmények az absztrakt algebra területén. = A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és fizikai) osztályának közleményei. Vol. 2 (1952) pp. 73–88.

> rendkívül termékenynek bizonyult a korszerű kutatásban, hanem érezhető volt az illető tudományágak »problémalátására«, beállítottságára is...”

A hazai algebrai kutatásokra térve megállapítja, hogy itt elsősorban a csoportelméleti kutatások fontosak, nagyrészt éppen Hajós György „világraszóló eredménye” következtében.

> „Ez annyira nyilvánvaló – írja Szele –, hogy ma már nem elhamarkodott derűlátás egy önálló magyar csoportelméleti iskoláról beszélni, mely éppen ezekben az években alakul ki, de körvonalai már most is teljes határozottsággal felismerhetők.”

Ezeknek a „körvonalaknak” a kialakításában, Hajós és Rédei mellett, Szelének volt a legnagyobb szerepe.

Szele munkája a csoportelméleten kívül az absztrakt algebra egy másik nagy területén, az ún. gyűrűelméletben is alapvető volt. Élete utolsó hónapjaiban intenzíven foglalkoztatta a folytonosság algebrai struktúrákba való bevezetésének nagy problémája, tanítványai közül többeket indított el a topologikus gyűrűk és csoportok vizsgálatának útján.

Szele körül, akárcsak Kalmár, Fejér és Turán körül, iskola alakult ki, az első nagy absztrakt algebrai iskola Magyarországon. Rövid debreceni professzorsága alatt lelkes tanítványok kis seregét (Kertész Andor, Erdős Jenő stb.) vonzotta maga köré, s a szegedi Acta... mintájára lapot indított „Publicationes Mathematicae” címmel, melyet nagy szorgalommal és tehetséggel emelt a szegedi Actához fogható, világszerte megbecsült folyóirattá. A mai algebra egyik legnagyobb szaktekintélye, A. G. Kuros többször nagy elismeréssel emlékezett meg a „debreceni algebrai iskola” munkájáról.

Szele tragikus halálával a debreceni algebrai iskola rövid, fényes korszaka véget ért. A magyar algebrai kutatások centruma a budapesti egyetemre tevődött át, ahol Szele munkatársa és barátja, *Fuchs László* részben közösen kezdett munkájukat folytatva az Abel-csoportok területén, részben a modern algebra egyéb területein elért eredményeivel nemzetközi hírnevet szerzett.

Könyvei a matematikai könyvpiac legkeresettebb termékei közé tartoznak, minden munkáját ugyanolyan világosság és érthetőség jellemzi, mint a Szele Tiborét. Sohasem mulasztja el korán meghalt barátja és munkatársa eredményeinek az említését. Abel-csoportokról írott szép könyvében[97] olyan módon idézi Szele munkáit, hogy az olvasó szinte rekonstruálhatja belőle a nagy algebrista Abel-csoportok területén elért eredményeit. Az előszóban Szeléről írott sorai – „elsősorban az ő rajongó személyisége és termékeny ötletei

[97] Fuchs, László: Abelian groups, Bp., 1958. Akadémiai. 367 p.

hatására fordultam az abeli csoportelmélet problémái felé”– az egész mai magyar algebrára érvényesek.

Valószínűség-számítás

A valószínűségszámítás a II. világháború előtt a magyar matematikai kutatások egyik legelhanyagoltabb területe volt. *Jordán Károly* főleg külföldön méltányolt, hősies erőfeszítése is csak a felszabadulás után hozta meg gyümölcsét, ekkor adták ki nagy gonddal összegyűjtött, alapos művét a klasszikus valószínűség-számításról.

Az 1950-ben alapított Alkalmazott Matematikai Intézet, amely 1955-ben a Matematikai Kutató Intézet nevet vette fel, egyik legfontosabb munkájának kezdettől fogva a valószínűség-számítás alapjainak a kutatását és különféle alkalmazásainak a fejlesztését tekintette. Az intézet külföldön is egyre népszerűbbé vált. *Közleményeinek* cikkeiben lehet látni, milyen sikeresen és sokoldalúan felkészülve dolgoztak ezen a területen az intézet munkatársai. Megkönnyítette, egységessé és eredményessé tette a munkájukat, hogy az intézetet hosszú, másfél évtizedes fennállása alatt megszakítás nélkül *Rényi Alfréd* vezette.

Rényi a valószínűség-számítás megalapozásában Kolmogorov és Fréchet nyomán olyan axiomatikus módszert vezetett be, amelyiknek segítségével a valószínűség-számítás addig meglehetősen szétszórt s részben empirikus szabályok alapján tárgyalt területeit egységes elméletbe sikerült ötvözni. A módszer nagyon nehéz, és a modern analízis bonyolult eredményeit használja fel. Korunk matematikájának fő jellegzetességei közé tartozik, hogy éppen a gyakorlati alkalmazás szempontjából legfontosabb területei kívánják meg a legnehezebb módszereket és a legnagyobb felkészültséget, amint azt többek között Neumann János hatalmas életműve is példázza.

Rényi a modern matematika egyik centrális, nehéz fogalmának, a „mérték” fogalmának eredeti és szellemes alkalmazásával általánosította a valószínűség-számítás Kolmogorov-féle axiomatikáját. Rényi elméletében – ugyanúgy, mint a Kolmogorovéban – a véletlen eseményeket egy absztrakt halmaz mérhető részhalmazai reprezentálják, de a Kolmogorov-féle megalapozással szemben a Rényi-féle elméletben a mérték nem szükségképpen korlátos, míg a klasszikus elmélet kizárólag korlátos mértéket enged meg. A klasszikus elméletben egy A esemény valamely B eseményre vonatkozó $P(A|B)$ valószínűsége olyan P „halmazfüggvénnyel” (az A és B eseményeket reprezentáló A és B halmaz függvényével) van definiálva, amely valamely tetszőleges absztrakt H halmazra vonatkozóan kielégíti a $P(H) = 1$ feltételt. Ez az a korlátozás, ami a Rényi-féle elméletben elmarad. A Rényi-féle elmélet egy tetszőleges, a bizonyos eseményt reprezentáló Ω halmazból indul ki és olyan μ mértéket vezet be, amelyre nem kell állania a $\mu(\Omega) = 1$ feltételnek. Lehet $\mu(\Omega)$ 1-től különböző érték, vagy akár végtelen is. Pontatlanabbul szólva, úgy lehetne érzékeltetni a helyzetet, hogy míg a klasszikus valószínűség-számításban a bizonyosság valószínűsége szükségképpen 1, addig a Rényi-féle elméletben a bizonyos eseményt képviselő Ω halmazon úgy lehet bevezetni egy μ mértéket, hogy $\mu(\Omega)$ akár végtelen is lehet. Az egyes konkrét események valószínűségét azután az így bevezetett $\mu(\Omega)$ mérték segítségével kell meghatározni.[98]

Az új elmélet azért jelentős, mert segítségével a valószínűség-számítás körébe tartozó jelenségek a nagy számok törvényétől kezdve az információelméletig egységes szempontok szerint tárgyalhatók. Az elméletben és gyakorlati alkalmazásokban egyaránt olyan fontos valószínűségi folyamatok (Markov-láncok, sztochasztikus folyamatok) tárgyalásában is sokszor előnyös a nem korlátos mérték használata. A Rényi-féle elmélet nagy átfogóképessége magyarázza, hogy segítségével nemcsak szorosan vett valószínűség-számítási problémák, hanem például számelméleti feladatok, integrálgeometriai és fizikai problémák is sikerrel tárgyalhatók. A Rényi-iskola *(Csiszár Imre, Bártfai Pál, Bognár Katalin, Révész Pál, Prékopa András)* sokfelé ágazó kutatásai között éppen ez az elmélet teremt egységet.

Szintén a Kolomogorov-féle valószínűség-fogalomból kiindulva, de speciális problémák megoldása irányában dolgozott *Takács Lajos* és *Medgyessy Pál,* előbbi a várakozási modellek elméletéről, utóbbi a valószínűség-eloszlások keverékének felbontásáról írt alapos és nagy sikerű monográfiát. Rövid, sikerült tankönyvet írt a valószínűség-számításról és matematikai statisztikáról *Prékopa András.* A matematikai statisztika területén *Sarkadi Károly* és *Vincze István* neve a legismertebb.

Gráfelmélet

A magyar matematikusok régi adósságából törlesztett *Gallai Tibor Kőnig Dénesről* (1884–1944) írt tanulmányával.[99] Nem lehet a magyar matematika eléggé hálás Kőnig Dénesnek, hogy ezt a gyakorlat szempontjából ma annyira fontos szakmát már akkor tankönyvben[100] foglalta össze, amikor másutt ebben a tudományban még csak a „szórakoztató matematika” egyik

[98] Lásd pl. Rényi, Alfréd: Sur les espaces simples des probabilités conditionelles. = Annales de l'institute Henri Poincaré, Section B: Calcul des Probabilités et Statistique. 1 (1964) pp. 3–19.

[99] Gallai Tibor: Kőnig Dénes. = Matematikai Lapok 15 (1965) pp. 277–293.

[100] Kőnig, Dénes: Theorie der endlichen und unendlichen Graphen. Kombinatorische Topologie der Streckenkomplexe. Leipzig, 1936. Akademische Verlagsgesellschaft. XI, 258 p.

fejezetét látták. Ennek a könyvnek és Kőnig egyetemi előadásainak az érdeme, írja Gallai Tibor, „hogy olyan sok magyar kutató nevét és eredményeit ismerik a gráfelméletben. ... Közvetlenül vagy közvetve valamennyien az ő hatására kezdtünk gráfelmélettel foglalkozni. Egerváry Jenő, Egyed László, Erdős Pál, Hajós György, Krausz József, Szele Tibor, Turán Pál, Vázsonyi Endre és sok más magyar matematikus gráfelméleti dolgozatainak létrejöttében Kőnig tevékenysége fontos szerepet játszott.” Kőnig egy tételének alapján, melyet Egerváry általánosított, az ötvenes években „H. W. Kuhn amerikai matematikus a matematika gazdasági alkalmazásainál felmerülő ún. hozzárendelési problémára egy megoldási algoritmust konstruált. Kuhn, akit módszerének kialakítására az Egerváry-féle általánosítás bizonyítása inspirált, eljárását magyar módszernek nevezte, és az eljárás ezen a néven vált közismertté. A magyar módszer alkalmazási körét azóta más gazdasági problémákra is kiterjesztették.”

A Smolenicében 1963-ban tartott gráfelméleti szimpózium[101] mutatja a magyar matematikusok szerepét ennek a fontos új diszciplínának a fejlesztésében. Erdős Pál kombinatorika iránt fogékony géniusza természetesen ezen a területen is megtalálta a maga adekvát alkalmazási körét, Turán mély tételei fontos általánosításokat inspiráltak. Rényi pedig Erdőssel együtt a valószínűség-számítás és gráfelmélet kapcsolatával egy egészen új, a gazdasági alkalmazások szempontjából reményteljes irányt indított el, a véletlen gráfok elméletét. Leginkább azonban mégis *Gallai Tibor* nevét kell említeni a magyar gráfelméleti kutatásokkal kapcsolatban, az ő szívós, türelmes munkássága lett lassan a magyar gráfelméleti vizsgálatok centruma. Különösen legújabb, ún. kritikus gráfokra vonatkozó vizsgálatai fontosak.

A gráfelmélet egyes alapelvei ugyan egyszerűek, de az elmélet eredményes művelése a matematika olyan sok más ágából – kombinatorikus topológiából, halmazelméletből, analízisből stb. – átvett eredmény alkalmazását követeli meg, hogy még a tételek elolvasása is nehéz feladat. Azonkívül rengeteg új elnevezés és fogalom akadályozza az olvasást, úgyhogy itt is azzal a modern matematikára nagyon jellemző jelenséggel találkozunk, amit már többször láttunk, hogy éppen a matematika gyakorlati alkalmazás szempontjából legfontosabb területei követelik meg a legnagyobb tiszta elméleti felkészültséget.

[101] Theory of graphs and its applications. Proceedings of the Symposium held in Smolenice in June 1963. Ed. by M. Fiedler. New York, 1964.

Analízis

Éppen ebből a szempontból fontos a magyar analitikai iskola működése. A magyar matematikai műveltség magas színvonalát ez az iskola biztosítja. A legtöbb magyar matematikus ma is az analízis területén működik, s hogy szerteágazó kutatásaik ellenére egységes analitikai iskoláról beszélhetünk, az annak köszönhető, hogy mind többé-kevésbé a Riesz Frigyes és Fejér Lipót által megkezdett irányban haladnak. *Aczél János*[102] és *Alexits György*[103] könyve egy-egy fontos területen specializálja a Fejér és Riesz gondolkodásából kinőtt tudományt.

A magyar analízis nagy reménysége volt a fiatalon meghalt *Czipszer János* (1930–1963), és az analízis legkülönfélébb alkalmazásaiban utolérhetetlen mester volt *Egerváry Jenő* (1891–1958).

Legfontosabb az analízis művelése szempontjából továbbra is a szegedi iskola. Szegeden Szőkefalvi-Nagy Béla és tanítványai nemcsak fenntartották, ha lehet, még talán növelték is azt a nemzetközi tekintélyt, amit Riesz Frigyes és Haar Alfréd működése szerzett meg a szegedi absztrakt analitikus iskola és a Szegedi Akta számára.

Geometria

Az utóbbi két évtized alatt Magyarországon is, akár a világ többi részén, a kifejezetten geometriával foglalkozó cikkek száma elmaradt a matematika egyéb ágaihoz képest. A differenciálgeometria ebben a korban inkább a fizikusok szívügye, a különféle differenciálgeometriák legfőbb inspirátora a relativitáselmélet volt.

Magyarországon a modern differenciálgeometriai kutatásokat *Varga Ottó* honosította meg. Varga legfontosabb vizsgálatai mind vonalelemekből felépített sokaságokra, ún. Finsler-féle terekre vonatkoznak. L. Berwald és E. Cartan nyomán sikerült bevezetnie a Finsler-tér egyes pontjaiban egy egyszerűbb helyi geometriát, aminek a segítségével meg lehet határozni a Finsler-tér fontos geometriai jellemzőit. A Varga Ottó által teremtett differenciálgeometriai iskolából kiemelkedik *Soós Gyula* munkássága, aki a japán differenciálgeometriai iskola eredményeihez kapcsolódva a mozgáscsoport transzformációit vizsgálja vonalelem-terekben.

A modern geometriakutatások másik szélén, az ún. diszkrét geometriában is kialakult a felszabadulás után egy egyre fontosabbá váló nagy iskola. A vonalelem-terek geometriája a

[102] Aczél, János: Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen. Berlin, 1961. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 331 p.

[103] Alexits, György: Convergence problems of orthogonal series. Bp., 1961. Akadémiai. IX, 350 p.

folytonosság fogalmára épül, olyan geometriai sajátságokat vizsgál, amelyeket speciális folytonos transzformációk nem változtatnak meg. A diszkrét geometria ezzel szemben különálló, elszigetelt geometriai elemek szabályos ismétlődéseit vizsgálja, egyenlő elemek diszkrét halmazában létesíthető szabályos elrendezéseket, s azokat az elveket, amelyek ilyen szabályos elrendezéseket eredményeznek. Az elmélet eme részében „a szabályos elrendezéseket rendezetlen, kaotikus halmazokból generálják egy – tág értelemben vett – gazdasági elv rendező hatásával".

Az idézet a magyar diszkrét geometriai iskola (s egyben az egész diszkrét geometria) egyik megteremtőjének, *Fejes Tóth Lászlónak* „Regular Figures" (Oxford, 1964) című könyvéből való. Ez a könyv a magyar matematikai irodalom legszebb alkotásai közé tartozik. Két részből áll, az első rész az euklideszi sík, a gömbfelület, a hiperbolikus sík szabályos elrendeződéseket eredményező szimmetriát tárgyalja, s az euklideszi terek esetében a kettőnél nagyobb dimenziókra való általánosításokat. Az új és izgalmas rész a második. Itt Fejes Tóth főleg saját és iskolája vizsgálatait ismerteti, a szabályos alakzatoknak ez a „genetikája" elsősorban az ő türelmes, évtizedes munkája nyomán jött létre. „A szabályos alakzatok genetikája – írja – különböző szélsőérték-tulajdonságokkal jellemzi az alakzatokat. A versenybe bocsátott alakzatok osztálya esetében a szélsőérték-problémáknak egyszerűnek, természetesnek és általánosnak kell lenniük. A probléma tartalmazhat változó paramétereket. Ekkor az extremális alakzatok teljes halmazát vizsgáljuk, amely a benne levő szabályos alakzatok családja természetes általánosításának tekinthető." Fejes Tóth tudománya a terek belső struktúrájának a vizsgálatával szinte a modern algebra geometriai megfelelőjének tekinthető.

A diszkrét geometria a modern matematika olyan területe, ahová nehéz tanulás és alapos előképzettség nélkül, tisztán józan értelme segítségével bárki eljuthat. Éppen ez a tudományág egyik szépsége. Fejes Tóth Clebschet idézi könyve bevezetőjében: „Az alak, forma által keltett, magasabb értelemben vett öröm az, ami a geométer igazi jellemzője", és hozzáfűzi: „Szeretném ezt a nemes játékot életre hívni az olvasóban, s így megmutatnám, hogy Clebsch szellemében mindannyian geométerek vagyunk." Egy másik, Párizsban élő magyar, Victor Vasarely szinte ugyanezekkel a szavakkal indokolta a festészet történetében korszaknyitó, tiszta geometrikus művészetét.

A Bolyaiak világa

Bolyai Farkas és Bolyai János[1]

Az Akadémiai Könyvtár féltett kézirataihoz tartozik Bolyai Farkas néhány egészben vagy töredékként megőrződött levele. Tisztán irodalmi szempontból is csupa kis remek: Bolyai Farkas érzi és érezteti a korabeli társadalmi és tudományos élet rejtett összefüggéseit; finom, tartózkodó, okos, ironikus eleganciával ír örömök, s gondok apró hullámzásairól és mély rejtelmeiről. Bőségesen megérdemelnék ezek a levelek ennyiért is, hogy múlt századi irodalmunk java alkotásai közt tartsuk számon, s végre kiadjuk őket, ám igazi jelentőségük mégis másutt keresendő. Vonzások és vonatkozások megelevenítő légkörét varázsolják a nem-euklidészi geometria – a gondolkozás sorsdöntő nagy forradalmi sorából is kiemelkedő óriási fölfedezéscsúcs – genezise köré.

Különösen ötvöződnek ezek a levelek. Magyarázó és megható személyi adatok –, amik poézisükkel Németh László Bolyai-drámáit és tanulmányait inspirálták – fűzik bennük ezer szállal a honi élethez Bolyai János fölfedezését; ugyanakkor szakmai hivatkozások, s utalások özöne képeszt el: hogyan kerülhetett sor a honi parlagon ilyen szakszerű, s ennyire korszerű matematikai diskurzusra?

Bolyai Jánost – ez a levelekből nyilvánvaló – az apja tanította meg a matematikai gondolkozás és fölfedezés művészetére, de hol tanulta meg ő maga? Göttingai tanulóéve legföljebb ha tájékozódásra lehetett elég, s arra is csak akkor, ha már meglehetős tudással indult. Tudása javát pedig később, itthon, marosvásárhelyi tanárkodása alatt, könyvekből szerezte. Itthon képezte ki magát szakavatott, elsőrendű tudóssá, aki azután útjára indíthatott olyan matematikai géniuszt, amilyen a fia volt. Bolyai Farkas úgyszólván egymaga teremtette meg azt a kulturális légkört, amelyben lángra lobbanhatott a nagy fölfedezés szikrája. Ennyit tehetett: többhöz már a tudomány fejlődésére alkalmas szocio-kulturális háttér kellett volna. De Bolyai János egész munkássága mögül hiányzott a befogadásához és folytatásához

[1] Forrás: Vekerdi László: Bolyai Farkas és Bolyai János. In: Kállai Gyula – Pozsgay Imre (szerk.): Ezer év. Arcképek a magyar történelemből. Bp., 1985. pp. 169–175. – *Újra kiadva:* A magyar matematika történetéből. Tanulmánygyűjtemény. Összeáll.: Gazda István. Piliscsaba, 2000. Magyar Tudománytörténeti Intézet. pp. 233–244. (Magyar Tudománytörténeti Szemle Könyvtára 15.)

szükséges szakmai keret; a nagyszerű indítás így messze kihajította magányossága űrjébe. Tragédiája – mint indítása, s géniusza is – egyedülálló, de a képlet, ami sorsában megvalósult sokáig – lényegében a felszabadulásig – érvényes a honi matematikai és természettudományos kutatásokra: a tehetség, s tudás elindító posztulátumait úgyszólván sohasem követte a folytatáshoz szükséges követelmények sora. De tán ezért is kényszerültek a megismerés nehéz, szokatlan, „nem-euklidészi" útjain, s tán ez is magyarázza, hogy a kicsi Magyarországról annyi sok új és fontos nyitást találó nagy tudós származott.

A 18. századvég egész Hungáriát megrázó gazdasági és szellemi váltzásainak hullámai Erdély védettebb tájaira érkezve csillapodtak. Lassúbb volt itt a nyocvanas–kora-kilencvenes évek fölvilágosító lendülete, viszont a vérmezői tragédiát követő országos bénulás sem hatolt olyan mélyre, mint Magyarországon. Az élet a megszokott keretek között folydogált. Még az a kicsi, s Magyarországon hirtelen bezáródott kapu is nyitva maradt, amin keresztül évszázadok óta, rendíthetetlenül hordták honukba a műveltség terhét nyugati egyetemekről a tehetségesebb vagy egyszerűen csak törekvőbb diákok. Ezen a sok-sok évszázados diákúton indult el 1796 tavaszán az ifjú Bolyai Farkas is nyugatra, a kolozsvári református kollégium elvégzése után, báró Kemény Simon nevelőjeként, ami a feudális úri világban afféle magasabb rangú szolgát jelentett. Viszontagságos utazás után Jénában csatlakozott az úrfihoz, ahonnét néhány hónapi mulatás, s tanulás után mentek tovább, a mifelénk már az idő tájt is híres-neves göttingai egyetemre.

Göttingában eléggé otthonosan érezhették magukat a hazánkból odakerülő ifjak. Nemcsak azért, mert Göttinga sem volt nagyobb lényegesen élénkebb város, mint Debrecen, Kolozsvár vagy akár Enyed; hanem elsősorban azért, mert az egyetem ott is ugyanolyan fejedelmi-nagyúri-egyházi kegyek és szeszélyek függvénye volt, akár a honi felsőbb iskolák. Különlegességét, s viszonylagos kiválóságát is ennek köszönhette: a hannoveri-braunschweigi hercegek az előkelő brit királyi rokonság miatt tetszeleghettek maguknak azzal, hogy meghonosítsák a kontinensen az ősi angol kollégiumi rendszer németesített formáját. Göttingában a tanárok nem csupán előadtak és vizsgáztattak; a jelesebb hallgatókat otthonukba is meghívták, s elbeszélgettek vélük szakmájuk és a tudomány legfrissebb, legérdekesebb kérdéseiről. Így értesült a csillagászat professzorának, Carl Felix Seyffernek (1762–1822) a „szemináriumain" Bolyai Farkas (1775–1856) és jó barátja, Carl Friedrich Gauss (1777–1855) a parallelák problémájáról, ami akkoriban a szűkebb értelemben vett matematikusok körén túl is erősen izgatta a gondolkodók képzeletét.

A 18. század végén a matematika iránti érdeklődést ugyanis nem csupán fokozta, hanem egészen új irányba terelte a kanti filozófia rohamosan növekvő divatja. A gondolkozás hálójával elménk tér- és időszemléletéből kihalászott, s így bár „ismeretszerző”, mégis „föltétlen” („szintetikus a *priori*”) ítéletek tárházának képzelték el a matematikát, s valósággal az Emberi Ész mintaképének rangjára emelték; ugyanakkor azonban elvették tőle azt a hetyke magabiztosságát, amit a d'Alembert-i „Allez et la foi vous viendra” – „csak előre, s a többit majd meglátjuk” – jelszó fejezett ki. A 18. század végén a matematika filozófiai méltóságot nyert, ám elbizonytalanodott. S az elbizonytalanodás egyik góca, a dicső építmény egyik botránykövе a párhuzamosok axiómája volt.

A párhuzamosság euklidészi axiómája – a híres XI. axióma – nem hirtelenjében vált gyanússá. Már az ókorban tudták, hogy valamiképpen különbözik a többi axiómától, s később meg is próbálták belőlük levezetni, azaz ki akarták deríteni róla, hogy ugyanolyan bebizonyítható tétel, mint az *Elemek* többi jól ismert teorémája: például az, hogy egy háromszögben a szögek összege mindig két derékszöggel, 180 fokkal egyenlő. Az efféle próbálkozások makacs sikertelensége keltette azután századok során a párhuzamosság rossz hírét. A kanti filozófia szemszögéből nézve azonban másról, többről volt szó. Az Emberi Ész, az Ítélőtehetség méltóságát veszélyeztette volna, ha kiderül, hogy az euklidészi párhuzamosság nem tér- és időszemléletünk szükségképpeni következménye. A régi kísérletezése, hogy a párhuzamosságot levezessék az axióma elhagyása után megmaradó geometriai rendszerből, így új, filozófiai értelmet kapott. S közben a probléma, szinte észrevétlenül, elveszítette ősrégi kapcsolatát a logikával.

A 17. század, s még inkább a 18. század szédítő fejlődésében a matematika nemcsak megnőtt, s megerősödött, hanem teljesen el is szakadt korábbi nagy inspirálójától és támaszától, a logikától. Az elválásra ösztökélt az új természettudomány skolasztika- és Arisztotelész-ellensége is, s a matematika, ha kellett, akár le is tagadta a formális logika gyanúsnak érzett rokonságát. Csak néhány nagy, s a maga korában alig észrevett gondolkozó sejtette, hogy a matematika megalapozási gondjai lényegében logikaiak. Az egyik legelső, s legfontosabb közülük egy olasz jezsuita, Gerolamo Saccheri (1667–1733) volt.

Saccheri a reneszánsz kori skolasztikusok spekulációinak folytatásaképpen kidolgozott egy új indirekt érvelési formát, amit azután a párhuzamosság problémájára alkalmazott. Saccheri módszere szerint egy állítás igazságát úgy kell bizonyítani, hogy önellentmondást kell keresni az állítás tagadására fölépíthető rendszerben. Az euklidészi párhuzamossági posztulátum mármost kétféleképpen is tagadható. Az egyik féle tagadás szerint a geometriában egymást nem metsző egyenesek, s így párhuzamosok egyáltalán nincsenek. A másik tagadás azt állítja, hogy egymáshoz hajló és egymást nem metsző egyenesek közül ezután az egymást először nem metszőket kell „párhuzamosoknak” tekinteni. Saccheri egy egész sor tételt levezetett ezen új, nem-euklidészi párhuzamossági feltétel alapján, míg végre az egyikről – tévesen – azt hitte, hogy önellentmondást tartalmaz.

Saccheri eredményeit a 18. században alig ismerték. Csak közvetve értesült róla a század második felének legeredetibb logikusa, Johann Heinrich Lambert (1728–1777), akinek azonban ennyi elég volt ahhoz, hogy a később nem-euklidészinek nevezett geometria valóságos rendszerét dolgozza ki, azt hivén persze ő is, hogy önellentmondásra sikerült bukkannia benne. Így is óriási jelentőségű azonban Saccheri és Lambert vizsgálódásában az, hogy a vélt cáfolás kedvéért egy egész új rendszer körvonalait, sőt (Lambert) alapjait kidolgozták; egy lehetetlennek vélt világ alternatíváját kínálták tehát az egyedül lehetségesnek vélt mellé. Ez a mindenféle értelemben „megtagadott" kerülőút a bizonyítási kísérletben az ő nagy fölfedezésük; ez váltotta ki azt a krízist, ami a logikai-matematikai fejlődés „normál" kanti útjának elhagyására késztette a gondolkozást.

Így állott a helyzet, amikor a század végén Seyffer professzor szemináriumán a két jó barát, Gauss és Bolyai hallott róla. Az ő töprengéseikben is, mint akkoriban majdnem mindenkiében, az euklidészi párhuzamossági axióma közvetlen bizonyítására való törekvés uralkodott. De Gauss inkább a matematikai módszerekben, Bolyai Farkas a logikában volt erős. Matematikából a fiatal Bolyai vajmi keveset tudott, a logikát ellenben – mégpedig az akkoriban éppen elmaradottnak, „skolasztikusnak" számító arisztotelészi formális logikát – jól beléjük sulykolták Kolozsvárott. Kora többi nagy matematikusával ellentétben Bolyai később is mindig logikai alapokból kiindulva kívánta fölépíteni a matematikát, akárcsak előtte Saccheri és Lambert, s utána – jó fél évszázaddal – Georg Cantor (1845–1918), Gottlob Frege (1848–1925) és David Hilbert (1862–1943). Valamiféle nagy és gyönyörűséges jelrendszernek tekintette a matematikát, s a jelekre érvényes szabályokat kereste. De túlságosan kora gyermeke volt, s a szabályokat tér- és időszemléletünk szükségképpeni és egyedül lehetséges megnyilvánulásaiként értelmezte; tán épp ezért is éppen ő minden elődje, s kortársa közül legintenzívebben a párhuzamosság krízisét. Mindenesetre matematikai tudásával párhuzamosan, hosszú marosvásárhelyi tanárkodása alatt mélyült benne fokozódott olykor alig elviselhetőségig a parallelák titkának meg nem érthetése miatti elkeseredés. Élete nagy örömei, s nagy bánatai mind a parallelákkal függöttek valmiképpen össze. Nincs reá még egy példa, hogy egyetlen, évezredekig érlelt probléma így hatalmába kerítsen embert, mint a két Bolyait.

A boldog göttingai évek után Farkas 1799-ben – megint csak nagyúri patrónusai „jóvoltából" – hazatért, megnősült, 1802. december 15-én felesége szüleinek kolozsvári házában fia született, akit János névre kereszteltek. Farkas apja, az öreg Bolyai Gáspár az ifjú párnak adta domáldi tanyáját, s itt élt a kis család valami két esztendeig távol a világtól, ritka boldogságban. Azután Farkast 1804-ben megválasztották a marosvásárhelyi református kollégiumban a matematika, fizika és kémia tanárának, s beköltöztek a kisvárosba. A fiatal tanár nyugodt domáldi évei alatt kerek kis egésszé dolgozta ki a párhuzamosok Göttingában elkezdett elméletét, s ezt most letisztázva elküldötte Gaussnak. A nagy matematikus azonnal észrevette a szellemes elméletben a hibás pontot, de a válaszából kitűnik, hogy az idő tájt még ő is az euklidészi párhuzamossági posztulátum egyedülvalóságában és bizonyíthatóságában hitt. Farkas négy év múlva, 1808-ban egy kiegészítésben még megpróbálta – persze sikertelenül – kiküszöbölni a hibát, de aztán más gondok és múzsák kötötték le a figyelmét. Sok időt fordított a három tárgyára: nemigen volt akkor Európában középiskola, de egyetem se sok, ahol olyan magas szinten, s olyan korszerűen tanítottak volna matematikát, fizikát s kémiát, mint Bolyai Farkas Marosvásárhelyen. Bizonyosan a maga kedvéért is ragaszkodott a szokatlanul magas színvonalhoz, de amint Benkő Samu gondos kutatásai megmutatták, a tanítványai fölött sem múlottak el híresen nehéz órái olyan nyomtalanul, mint korábbi életrajzírói állították. Különben sem volt gyakorlati érzéktől mentes, elméleti ember; ellenkezőleg, valóságos ezermester volt, mezőgazdasági és technikai géniusz. Fúrt-faragott, fákat ültetett, épített. Részt vett a városka ébredező szellemi életében, dolgozott, s tervezett az Aranka György-féle Nyelvmívelő Társaságban. Még arra is jutott ideje, hogy öt szomorújátékot írjon, s beküldje az *Erdélyi Muzéum* drámapályázatára; arra a híres pályázatra, amelyiken Katona József nyeretlen maradt *Bánk bán*-jával. Nem nyert Bolyai sem, pedig már jó előre szegények étkeztetésére szolgáló alapítványt tett a nyereségre. Iszonyatos éhínséges, éhhalásos esztendők jártak akkoriban arrafelé, s Farkas sokfelé ágazó érdeklődése és gondjai között mindig fontos helyet foglalt el az emberiség. De minden foglalatosságánál fontosabbnak, élete központi feladatának, elhivatásának tartotta, hogy János fia kivételes matematikai géniuszát ápolja.

Sokan megírták, legszebben Németh László és Benkő Samu, milyen féltő szeretettel, hozzáértéssel, apai büszkeséggel irányította, kísérte és kommentálta Bolyai Farkas a lángeszű gyermek fejlődését; elbeszélték, miként ápolta-dédelgette magában, s fiában is a reményt, hogy annak idején a nagy Gauss, akit akkor már „princeps mathematicorum”-ként tiszteltek Európa-szerte, fogja folytatni a matematikai géniusz kibontakoztatását ott, ahol Farkas, Gauss ifjúkori jó barátja abbahagyta. Sokan találgatták azt is, miért hiúsult meg a ragyogó terv: nem sikerült a göttingai úthoz szükséges pénzt előteremteni, Farkas természetes közvetlenségével megsértette a nagy matematikus önérzetét, vagy éppen a göttingai óriás maga tartotta időszerűnek, hogy elhatárolja tündöklő pályáját egy vidéki kisszerűségbe süllyedő tanár bizalmaskodásaitól? Akármiért is történt, János sohasem került Göttingába. Pedig a tanuláshoz szükséges pénz – hála az apa fiúhitének, fáradozásainak, hajlongásainak – mégiscsak előteremtődött, s János 1818 augusztusában elindulhatott a bécsi hadmérnök akadémiára. A körülményekhez képest a legjobb helyre került – sóhajtanak föl ennél a pontnál megnyugodva az életrajzírók.

S részben tán igazuk lehet: a hadmérnök akadémia nem volt rossz hely nyílt eszű, s matematikai érdeklődéssel megáldott ifjak számára. Az olyan formátumú géniusza azonban, mint a Bolyai Jánosé, az égvilágon semmit sem profitálhatott a hadmérnök akadémia alkalmazások körére szorítkozó és idejétmúlt tankönyvek börtönébe zárt matematikájából. Bolyai János matematikai fejlődését Bécsben is egyes-egyedül apja levelei irányították, Marosvásárhelyről.

A hadmérnök akadémia kiváló növendékét, aki még az iskola legfőbb patrónusának és elöljárójának, János főhercegnek a dicséretét is kiérdemelte, 1823 őszén a temesvári helyőrségbe nevezték ki alhadnagynak. Szeptember 30-án érkezett meg állomáshelyére. Jól megépített, erős, s mindenekfelett igen ravaszul álcázott erődítés volt az osztrák ármádia; Bolyai Jánosnál sokkal kevésbé érzékeny ember is összetörte magát, ha óvatlanul beléütközött a falaiba. S a fiatal Bolyai méghozzá fejjel rohant a falnak. Szó se róla, nem bántották. Áthelyezgették, előléptetgették, meg-megdicsérték, meg-megrótták. Munkával se terhelték nagyon, kis rutinföladatokat bíztak rá, étkezdék ellenőrzését, latrinák építését, s elnézték, ha nem csinálta meg. Főnöke, a derék Zitta őrnagy még azt is megpedzette, hogy valamilyen fölsőbb tanintézet matematikaprofesszoraként lehetne a katonai szolgálat iránt szemmel láthatólag nem sok rokonszenvet mutató, s a Bánság mocsaraiban egyébként is súlyosan megbetegedett tisztet leghasznosabban alkalmazni. A jó szándékú javaslatból persze semmi sem lett, az osztrák birodalomnak nem Bolyai-szerű matematikusokra volt szüksége professzorként. Mentségükre szolgáljon különben, hogy valószínűleg senkinek nem kellettek Bolyai-szerű matematikusok, kivéve az Emberiséget. Az pedig igencsak megfoghatatlan és roppant hálátlan gazda. Azért ha nem is igaz, iszonyatosan találó a nagy vasszöget egyetlen kardcsapással kettévágó fiatal Bolyai legendája; hisz egy nagyratermettségét tudván-tudó ifjú matematikus pazar erejét és erőpazarlását példázza. Szeptember 30-án érkezett meg Temesvárra, s már november 3-án értesíti apját híres levelében: „…semmiből egy ujj, más világot teremtettem”.

Bolyai Farkas fölismerte, s kifejezte fia munkájának összefüggését a sajátjával, hiszen Appendixként bevette a maga matematikai töprengéseit, s fölfedezéseit összegező *Tentamen*-ébe. A *Tentamen* ugyanis egyáltalában nem az a sok későbbi fölfedezését előlegező, nem kis pedagógiai érzékkel, bár excentriusan elrendezett tankönyv, aminek későbbi kommentátorai hiszik. A *Tentamen* tankönyv formában kísérli meg a matematikának logikai alapokból kiinduló felépítését. A matematika alapjainak modern vizsgálata és a görög gondolkozók eszméi között teremt kapcsolatot. S nem csupán képletesen, hiszen előkészítette a matematikának azt az új fölfogását, ami éppen a hozzája csatolt *Appendix*-ben valósult meg először.

Addig a matematikában eleve föltétlenül „igaznak" vélt, kész fogalmak és összefüggések rövidítésére használták a jeleket; fogalmuk sem volt igazi jelentésükről és szerepükről. Bolyai János jött rá – néhány lángeszű kortársával, a francia Galois-val, a norvég Abellel, a cseh Bolzanoval, az ír Hamiltonnal, az angol Boole-lal egy időben, hogy a jelekkel csínján kell bánni: óvatosan, lépésről lépésre kell őket tulajdonságokkal fölruházni, s az így értelmezett jelekből kell felépíteni a matematikai összefüggéseket, helyesebben a matematikai relációk (viszonyulások) rendszerét. Az *Appendix* egy csomó jel és reláció fölsorolásával és értelmezésével kezdődik, s ezután azt mondja el Bolyai János, hogy mit akar érteni azon a két különböző reláción, hogy két egyenes „párhuzamos", illetve „nem metszi egymást". A helyesen értelmezett jelentésekből azonnal kiderül, hogy a két reláció csak határesetben, az euklidészi geometria esetében esik egybe, egyébként széjjelválik, és „párhuzamosnak" ez utóbbi esetben csupán az egymást először nem metsző egyenesek nevezhetők; a párhuzamos mintegy választóvonal az egymást metsző és az egymást nem metsző egyenesek között. Az új párhuzamossági definícióból tehát kétféle párhuzamosság lehetősége adódik, s ez a kétféle megvalósulás széjjelválasztja egymástól – éspedig teljesen, mindenféle keveredés lehetősége nélkül – az euklidészi és a nem-euklidészi geometriát. Két-, illetve háromféle geometriai rendszer keletkezik így, magyarázza páratlanul világosan Bolyai csodálatos művének 15. §-ában, az egyik „azon a feltevésen alapul, hogy Euklides XI. axiómája igaz", a másik pedig „az ellenkező feltevésre támaszkodik". Az elsőt Bolyai ∑-rendszerének, a másodikat – a nem-euklidészi geometriát – S-rendszernek nevezi. A két különböző rendszert tehát a párhuzamosság két különféle megvalósulása teremti meg. Mindazok a tételek pedig, amelyekben a párhuzamosság relációja sem közvetlenül, sem közvetve nem fordul elő, egyformán érvényesek mind a két rendszerben, úgy ahogyan Bolyai János írta: „abszolute, vagyis feltétlen igaznak tekintendők". Ezeknek a tételeknek az összessége egy harmadik rendszert alkot, az abszolút geometria rendszerét. Két testvérrendszer keletkezik tehát, amelyek a párhuzamosság meghatározásánál ágaznak le egy harmadikról, örökre elválván egymástól. Ez az „elválás" azonban nem azt jelenti, hogy többé semmi „közük" se lenne egymáshoz. Ellenkezőleg, a két „testvér" szinte lépésről lépésre összehasonlítható utakat követ, mintha a párhuzamosság átúszhatatlan folyamának két partjáról figyelné egymást. Mesteri levezetések sorával Bolyai János még azt is megmutatja, miként kell megszerkeszteni az *S*-rendszerben a ∑-rendszer „képét”, vagy ahogyan ma neveznénk: „modelljét”.

Azaz nem létezik többé matematika a szemléletünk kategóriái által eleve meghatározott, egyedül lehetséges rendszerként. A matematika ilyen felfogása ezentúl teljességgel értelmetlen. Maga a matematika „igaz” értelme változott meg ugyanis azzal, hogy kritériumaként egy relációrendszer ellentmodástalansága fogadtatott el. A folyamat, amely Saccherivel a régi matematika megtisztítására és megmentésére irányuló törekvésként indult, homlokegyenest ellenkező irányba fordulva teljesedett be: Bolyai János művében új, minden eddigitől különböző matematika született. A matematikai fogalmak igazi, teljes jelentése ezentúl csak különböző, önmagukban konzisztens rendszerek összehasonlításával deríthető ki. Az *Appendix* következő paragrafusaiban Bolyai János néhány alapvető geometriai fogalmat, s tételt vázol a három rendszerben, s összehasonlításukkal a matematikai fogalomalkotás mélyére világít, mégpedig kétféleképpen: a klasszikus görög szerkesztési eljárásokkal, s az újkori matematika büszke fegyverével, az analízissel. Analitikus formában az új párhuzamossági követelmény következményei különösen szépen, s egyszerűen tárgyalhatók: egy viszonylag egyszerű folytonos függvény fejezi ki azokat a fundamentális változásokat, amelyek a három rendszert egymástól elválasztják. „Ha ehhez még hozzájárul annak lehetetlenségének bebizonyítása – írta *A tér tudományának* német fogalmazványához Bolyai János –, hogy valaha ∑ és *S* között dönthessünk (ami a szerzőnek szintén sikerült): akkor ezzel a XI. axióma lényegének egészen a mélyére hatoltunk, és a párhuzamosok bonyolult matériáján teljesen keresztülhatoltunk, a teljes napfogyatkozás pedig, mely a jelen óráig (az igazság után szomjazó lelkek felett) oly szerencsétlenül uralkodott, a tudomány iránti kedvet lelohasztotta, és annyi ember idejét és erejét elrabolta, örökre eltűnt. És a szerzőben él az a (teljesen tisztult) meggyőződés (amelyet minden értelmes olvasónál is feltételez), hogy e tárgy tisztázásával a tudomány igazi gyarapításának, az ész művelésének, és így az emberi sors lendítésének egyik legfontosabb és legfényesebb lépése megtörtént.”

A nyomtatásban megjelent *Appendix*-ből ez a néhány sor hiányzik, a német nyelvű fogalmazvány azonban nem szakembereknek készült: az osztrák hadi- és matematikai tudományok legfőbb urának, s patrónusának, János főhercegnek küldötte el Bolyai kapitány. Remélte, hogy megszabadulhat a garnizonélet terhétől, ami ugyan nehéznek az akkori osztrák birodalomban nem volt nevezhető, de az alkotókedvet a fegyelem iszonyatos unalmával bénította. Meg aztán Gauss kimért dicsérő sorai is valamilyen kiegészítésfélére szorultak. Mert dicsérte Gauss a lángeszű művet – amit Bolyai Farkas még a *Tentamen* megjelenése

(1832) előtt, 1831 júniusában elküldött néki –, hogyne dicsérte volna. De úgy, ahogyan az a szakma csúcsára (maga erejéből s nagyúri támogatással) följutott hatalmasságtól egy régesrég elmaradt, vidéki tanárságba és ismeretlenségbe süllyedt ifjúkori barát fiának kijár. Szemére szokás vetni, hogy néhány év múlva Lobacsevszkij dolgozatát sokkal lelkesebben, s nyilvánosan dicsérte; de hát Lobacsevszkij professzor volt, a kazanyi egyetem rektora, s Gauss pontosan úgy dicsérte őt is, ahogyan társadalmi és tudományos pozíciójának kijárt. Mert a nagy Gauss szívvel-lélekkel a feudális életszemléletet (jórészt épp a modern tudományos-technikai haladás segítségével) konzerváló világ híve volt; azé a német birodalmi fejlődésé, ami elől néhány év múlva Marx Károly Angliába menekül. A harmincas évek elején még nem dőlt el a küzdelem, de Gauss mindig rendíthetetlenül – s hálásan – állott urai oldalán. Éppen ez különböztette meg elsősorban az Emberiség üdvéért fáradozó, s érte életét áldozni kész – s végül érte áldozó – Bolyai Jánostól, Két világ állott szemben egymással, kiengesztelhetetlenül: a hatalom őrületébe rohanó német birodalomé, s a polgári haladásé, s ez választotta el egymástól a két nagy matematikust. Nem esze nyíltságában vagy szerencséjében különbözött Bolyai János a göttingai óriástól, hanem emberségében. Gauss lehetett a matematikusok fejedelme, Bolyai ellenben, az új matematika megteremtője, csak Bolzano, Beethoven, Hölderlin, Galois, Saint-Simon, Shelley, Blake kor- s szellemtársa lehetett. Azoké, akik a tudást és az észt nem a Hatalom, hanem az ember szolgálatába kívánták állítani, sorsa könnyítésére, üdve érdekében. Ha János főherceg és tanácsosai történetesen megértették volna az *Appendix* üzenetét, úgy lehet nemcsak nyugdíjazzák, de be is csukatták volna a kapitányt.

Annál nagyobb büntetés azonban, mint ami a nyugdíjazása után következett, a legszigorúbb börtön is aligha lehetett volna Bolyainak. Marosvásárhelyre azzal a reménnyel tért haza, hogy apjával – az egyetlen emberrel, aki a nagy Gausson kívül értette a fölfedezés jelentőségét – közösen fáradozzanak a tan tökéletes kidolgozásán. De a kezdődő nemzeti konjunktúra hullámain felfelé evickélő kisváros minden lehetett, csak éppen ilyen vállalkozásra alkalmas keret nem: a két szellemóriás szövetség helyett furcsa vetélkedésbe keveredett, s csakhamar távolabb kerültek egymástól, mintha országrészek vagy országok választották volna el őket. János kiköltözött a domáldi tanyára, s feneketlen, kínzó magányosságban küszködött nagy eszméivel, rótta papírra fáradhatatlanul gyötrődése gyümölcseit. A töredékek tömegétől megijedt életírók sokáig azt hitték, hogy ezeket a sorokat (olykor a sietség miatt alig olvashatóan, de mindig kristálytiszta, töretlen vonalvezetéssel!) egy egyensúlyát veszített vagy éppen magányba beléhibbant elme vetette papírra; Benkő Samu érdeme, hogy az összekuszált cédulatengerből kihalászta Bolyai János vallomásait. S most egyszeriben megváltozott a kép: kiderült, hogy a magányos elme vívódásai szervesen illeszkednek a kor gondolkozásának fő irányába, logikus folytatásként „az emberi sors lendítésének”, melynek „egyik legfontosabb és legfényesebb lépése” az új matematika megteremtésével megtörtént.[2] Annál égetőbb azonban a kérdés, hogy miért maradtak ki teljesen a Bolyaiak – nemcsak a lobbanékony és szókimondó János, hanem a tisztelettudó és bölcsen megalkuvó Farkas is – a harmincas-negyvenes évek megpezsdülő honi tudományos- és közéletéből?

---

[2] Bolyai János számelméleti és algebrai kutatásairól legutóbb Kiss Elemér tett közzé fontos kutatásokat. Győry Kálmán ezt írja Kiss Elemér „Matematikai kincsek Bolyai János kéziratos hagyatékából” (Bp., 1999. Akadémiai–Typotex. 214 p.) című könyvéről:

„Bolyai János az abszolút geometria megalkotásával korszakalkotó felfedezést tett a matematikában. A zseniális geométer nevét az egész világ ismeri és becsüli. Könyvtárnyi Bolyai-írás, -méltatás, köztük számos rangos monográfia jelent meg életéről és munkásságáról. A korábbi Bolyai-kutatók véleménye szerint Bolyai János híres művének, az Appendixnek publikálása után végzett ugyan más, nem geometriai tárgyú kutatásokat is, ezekkel azonban nem ért el érdemleges eredményeket.

Kiss Elemér marosvásárhelyi matematikaprofesszor Bolyai-kutatásaival és -könyvével tudománytörténeti szenzációval szolgál. A szerző a marosvásárhelyi Teleki–Bolyai Könyvtárban található publikálatlan Bolyai-hagyaték többéves kitartó, aprólékos tanulmányozása, a több ezer oldalt kitevő feljegyzések szakértő elemzése után arra a meglepő eredményre jutott, hogy Bolyai János a saját korában jelentősnek számító algebrai és számelméleti problémákkal is foglalkozott, s mai szemmel is igen figyelemreméltó tudományos eredményeket ért el ezeken a területeken. Bár ezen eredmények jelentősége nem mérhető össze Bolyai geometriai felfedezésével, megszületésük idején – ha ismertté válnak – fontos hatást gyakorolhattak volna az algebra és a számelmélet bizonyos ágainak fejlődésére. Bolyai említett, mindeddig nem ismert eredményeit mostanáig más matematikusoknak tulajdonították, mivel azokat Bolyaival lényegében egyidejűleg vagy későbbi időkben mások is felfedezték és publikálták. Mostoha sorsa miatt Bolyai saját írásaiból csupán a 26 oldalas Appendixet láthatta nyomtatásban.

Felvetődik a kérdés, hogy mi mindennel gazdagíthatta volna még a matematika tudományát ez a géniusz, ha kedvező körülmények között folytathatta volna kutatásait és publikálta volna felfedezéseit.

Kiss Elemér nemes feladatot teljesít, amikor szakavatott módon tárja elénk és adja közre Bolyai eddig nem ismert algebrai és számelméleti vizsgálatait és azok eredményeit. Ezzel nagy mértékben járul hozzá a Bolyai-hagyatékban még mindig létező fehér foltok eltüntetéséhez, valamint az eddig ismertnél árnyaltabb, teljesebb, színesebb Bolyai-kép kialakításához. (...)

Az Appendix 1831-es megjelenése nem hozta meg Bolyai János számára a megérdemelt elismerést. Bolyai élete második felét a világtól elzárva, csalódottan, erdélyi magányában
töltötte. Szinte élete végéig folytatta matematikai kutatásait, s mint írja, élvezte a kutatás örömét. Matematikai feljegyzéseit saját maga számára készítette, gondolatait egyedül apjával, Bolyai Farkassal, a neves matematikaprofesszorral osztotta meg levelezés formájában. Feljegyzéseit magyar, német és latin nyelven írta különféle papírokra, borítékokra, hivatalos dokumentumokra, szinte mindenre, ami keze ügyébe került. A feljegyzéseken sok a betoldás, áthúzás, a félbeszakadt szöveg. Mondanivalóját sokszor más lapokon folytatja, vagy csak következtetni lehet arra, hogy a folytatás a hagyaték egy részével együtt elveszett.

Mint Kiss Elemér könyvében rámutat, a feljegyzések olvasását az is nehezíti, hogy Bolyai János gyakran sajátos, az elfogadottól eltérő jelöléseket és terminológiát használt. Ezzel is magyarázható, hogy bár a Bolyai-hagyatékot ezt megelőzően többen végigolvasták, a korábbi Bolyai-kutatóknak nem sikerült az algebrai és számelméleti eredményekre rábukkanniuk. A hagyaték ilyen vonatkozású megszólaltatásához az kellett, hogy egy lelkes algebrista Bolyai-kutató, Kiss Elemér több évet eltöltsön a Teleki Tékában, felismerje a különböző papírlapokon található feljegyzések közötti matematikai összefüggéseket, s feltárja azok igazi matematikai mondanivalóját. (...)

Bolyai János fontos eredményekre jutott a prímszámok tanulmányozásakor. Ha p prímszám és a p-vel nem osztható egész szám, úgy a kis Fermat-tétel szerint $p|a^{p-1}-1$. Apja ösztönzésére János megkísérelte bebizonyítani a tétel fordítottját, ami azt eredményezte volna, hogy a tétel prímkritérium. Hamarosan rájött azonban, hogy ez nem lehetséges, mivel $341|2^{340}-1$, holott $341=11\cdot31$ összetett szám. Ezzel az első ún. pszeudoprímszámot találta meg.

Matematikatörténeti kutatások alapján ma már tudjuk, hogy ezt egy ismeretlen szerző valamivel korábban, Bolyai Farkast a Magyar Tudós Társaság – az *Erdélyi Múzeum* egykori szerkesztőjének, Döbrentei Gábor „titoknoknak” az ajánlatára – levelező tagjai sorába választotta, de nem a matematikai, hanem a természettudományi osztályban. Az új és nagy reményekkel induló Akadémia tekintélyes vezető matematikusai nem sokra becsülték Bolyai Farkas munkásságát. Vállas Antal a magyar matematikai termést recenzeálva Bolyai Farkas kis remekét, *Az arithmetica elejé*-t (M. Vásárhely, 1830) épp csak említi – a szerző neve nélkül –, miközben egekig magasztalja Nagy Károly akadémiai nagyjutalommal is kitüntetett munkáját, aminek – ahogyan Bolyai Farkas kesernyés humorral írta Gaussnak Göttingába – „egyéb érdeme nincsen, mint az, hogy Bécsben szépen és pontosan kinyomtatták.” Nem az Akadémia 200 aranyát, hanem ezt a szép és pontos nyomtatást „irigyelte” a marosvásárhelyi tanár, aki

---

Bolyaitól eltérő módon bebizonyította és publikálta, erről azonban Bolyainak nem volt tudomása. Általánosabban, Bolyai módszeres eljárást dolgozott ki az olyan különböző *p, q* prímszámok keresésére, melyekre $pq|2^{pq-1}-1$ teljesül, azaz amelyekre $p{\cdot}q$ pszeudoprím. Több mint 40 évvel később ezt egy Jeans nevű matematikus újra felfedezte, azóta a tételt Jeans-tételként ismeri a matematikai szakirodalom. Bolyai azt is megmutatta, hogy a nevezetes $F_5 = 2^{2^5}+1$ Fermat-féle szám pszeudoprím. Érdemes megjegyezni, hogy a pszeudoprímek kutatása csak jóval Bolyai János halála után, 1876-ban indult meg. Bolyai kezdeményezője lehetett volna ennek a problémakörnek.
Gauss egyik nagy matematikai felfedezése a később róla elnevezett Gauss-egészek ($a+bi$ alakú számok, ahol *a, b* egészek és $i=\sqrt{-1}$) aritmetikájának kidolgozása volt. Bár Gauss és Bolyai Farkas időnként leveleztek, Gauss ezen eredményei nem jutottak el a Bolyaiakhoz. Mint Kiss Elemér a hagyaték alapján könyvében kimutatja, Bolyai János Gausstól függetlenül és lényegében vele egyidejűleg szintén kidolgozta ezen számok, az általa komplex egészeknek nevezett számok oszthatósági elméletét, és feltárta az összes komplex prímeket. Ez tekinthető Bolyai János legértékesebb számelméleti eredményének. Mint Bolyai feljegyzéseiből kiderül, az általa prímtannak vagy imaginárius számelméletnek nevezett elméletét publikálni is akarta, sajnos azonban erre nem került sor. Bolyai elméletét nem csupán kidolgozta, annak alkalmazásait is adta. Egyebek között több szép és új bizonyítást adott Fermat azon híres tételére, mely szerint bármely $4k+1$ alakú prímszám előáll két négyzetszám összegeként. Bolyai ún. 4. bizonyítása minden idők egyik legszebb és legrövidebb bizonyítása a tételnek.
Mindezek után joggal állapítja meg Kiss Elemér könyvében, hogy az eddigi vélekedéssel ellentétben a magyarországi számelméleti kutatások valójában a Bolyaiakkal kezdődtek.
Bolyai János korában több évszázados nyitott kérdés volt az algebrai egyenletek gyökképlettel való megoldhatóságának problémája. $n \geq 5$ esetén hosszú ideig hiába keresték az n-edfokú algebrai egyenlet általános gyökképletét. Ruffini 1799-ben publikált egy bizonyítást, mely szerint ilyen gyökképlet nem is létezik. Bolyai János ismerte ezt a bizonyítást, és felfedezte, hogy az hiányos. Ezért először ő maga is a gyökképlet keresésén fáradozott. Feljegyzései szerint a kérdés már 1826 óta foglalkoztatta. Később azt írja, hogy Ruffini bizonyításának hibáit kijavította, ilyen gyökképlet valóban nincs. Sőt, mint írja, ezen tételre talált egy másik bizonyítást is. Ezek a bizonyítások sajnos nem találhatók meg a feljegyzések között, valószínűleg elvesztek. Bolyai nem tudott arról, hogy 1826-ban Abel a tételre teljes bizonyítást közölt, s nem ismerte Galois eredményeit sem. Mindenesetre Bolyai feljegyzéseiből világosan kitűnik, hogy kortársaitól függetlenül ő is eljutott a Ruffini–Abel-tételig és annak bizonyításáig, ami mai szemmel mérve is igen jelentős matematikai teljesítménynek tekinthető.
A két Bolyai, János és Farkas levelezéséből a napjainkig feltárt levelek csak elvétve tartalmaznak matematikai szövegrészeket. A könyv VII. fejezete a Bolyaiak levelezéséből 18 matematikai tárgyú levelet tesz közzé, melyek – három levél egyes részleteinek kivételével – eddig kiadatlanok voltak. A levelek közül négyet Farkas küldött Jánoshoz, a többit pedig János írta apjának. A legtöbb levél számelméleti kérdésekkel foglalkozik.
Mint már említettük, Bolyai János gyakran eltért az ő korában már elfogadott és alkalmazott elnevezések és jelölések használatától. Ezzel sajnos nagyon megnehezítette kéziratos hagyatékának olvasását. A VIII. fejezet a Bolyai által használt sajátos műszavak és jelölések jegyzékét és magyarázatát tartalmazza. Ezáltal a szerző azok munkáját kívánja megkönnyíteni, akik a jövőben is tanulmányozni szeretnék Bolyai írásait.”
Lásd: Győry Kálmán: Bolyai János számelméleti és algebrai kutatásairól. Kiss Elemér „Matematikai kincsek Bolyai János kéziratos hagyatékából” című könyvéről. = Természet Világa 130 (1999) No. 10. pp. 469–470.

keservesen kellett küzdjön könyve kiadásáért, magának kellett előre összegyűjtenie az előfizetőket, s még a matematikai jeleket is magának kellett metszenie, s ólomba öntenie diákjaival. Ha nem egyébért, a sok lelkes vesződségért megérdemelt volna egy kis elismerést; de az Akadémia még Farkas recenzióját se közölte, amiben szelíden, s szőrmentén megemlítette Nagy Károly könyvének némely tévedéseit. Láthatóan nem kellett az Akadémiának Bolyai. Míg Döbrentei volt a titoknok, küldött egy-egy hóbortos találmányt bírálatra – elárasztották a derék hazafiak akkoriban ilyesmivel a hon első komoly tudományos fórumát –, amiből aztán Bolyai Farkas technológiai géniusza ki is hámozta a szerző által még csak nem is sejtett műszaki magot, de amikor Döbrenteit Toldy váltotta föl, abbamaradt ez is. S ezzel végleg megszakadt minden kapocs az Akadémia – azaz az öntudatára ébredő honi tudományos élet legfőbb képviselője – s Bolyai Farkas között. Bolyai János a hadseregnél elszenvedett kudarca után az Akadémiával már nem is próbálkozott. De a Magyar Orvosok és Természetvizsgálók kolozsvári nagygyűlésére jelentkezett, biztatást azonban aligha nyerhetett, mert a tervezett előadásból végül is semmi sem lett. A reformkor sokféle, s részben nem is jelentéktelen tudományos mozgalmaiban, s szerveződéseiben a két Bolyai sehol sem kapott helyet. Ámde 1848–49 lelkesedéseit és megrázkódtatásait kívülállóként is teljes felelősséggel és aggodalommal élték és szenvedték meg. „A forradalom ügye – írja Bolyai Jánosról a dokumentumok alapos elemzése után Benkő Samu – személyes ügyévé vált. Olyan lírai hevülettel magasztalja a hősi vállalkozást, máskor meg olyan racionális okfejtéssel próbálja feltárni a kudarc okait, hogy lehetetlen fel nem figyelni a személyes érdekeltség hangzataira." Mégis, a Bolyaiak számára az 1848-as év legnagyobb személyes élménye Lobacsevszkij művével való megismerkedésük lehetett.

A kolozsvári *Nemzeti Társalkodó* 1844. augusztus 30-i számában Mentovich Ferenc folytatásokban közölt útirajzaiban beszámolt Gaussnál tett látogatásáról. Elmondotta, hogy a nagy matematikus, amikor megtudta, honnét jött, szívesen érdeklődött a Bolyaiak iránt, dicsérte János munkáját, s megemlítette, hogy nemrégiben kapott egy könyvet „egy orosz matematikustól, s előtte azért érdekes, mert nézeteiben merőben egyezik a Bolyaiak mathesis körüli önállóbb nézeteikkel; … s magyarnak a csodálatos nézetazonosságért kétszeresen érdekes, s könnyen hozzájutható lehet, mert orosz nyelven van írva." Bolyai Farkas azonnal írt a dologról fiának, de három év kellett hozzá, hogy elszánja magát Gaussnak írni, s 1848 januárjában érdeklődjék az orosz matematikus netán németül is megjelent munkái iránt. Gauss – Farkas örömteli meglepetésére – gyorsan és pontosan válaszolt, s 1848 októberében Bolyai János kezében volt Lobacsevszkij *Geometriai vizsgálatok a párhuzamosok elméletének köréből* című, 1840-ben Berlinben megjelent munkája.

Az orosz tudós rokonszellemű műve szakmai, s emberi reakciók sodró áradatát váltotta ki Bolyaiból, A megdöbbentő azonosság miatti meglepődés, a kívülről jött igazolás kételyoszlató hatása, a gyanú, amely óhatatlanul ébred a szívben az *Appendix*-et kurtán-furcsán elismerő, Lobacsevszkij művét pedig lelkesen dicsérő Gauss ellen: végül is mind-mind egyetlen hatalmas érzéssé olvad, s tisztul a mű olvasásába mélyedő Bolyaiban. Az igazság diadalmaskodása fölötti önzetlen örömmé. „Én – írja a társakat s beszédet pótló papírra – örömest megosztom a találói érdemet. Bár minden orosz és más államtanácsnok hasonló szeretettel bírna a tiszta mathesisi s tehát – mert az természeti és szükséges következmény – az erkölcsi igazhoz is."

A tudományos prioritás-harcokkal teli történetében egyedülálló szavak kötetnyi tanulmánynál élesebben világítják meg az 1860-ban elhunyt Bolyait, az embert, akinek egész életét, minden törekvését, a közüdvért való olthatatlan lángolását, a tudományok rendszeres előadására való igyekezetét a tiszta mathesisi és az erkölcsi igazság föltétlen tisztelete, s szolgálta határozta meg. Gondolkodást forradalmasító, az értelmet az egysíkúság évezredes rabságából kiszabadító fölfedezése mögött ez az eggyéolvadó kettő szenvedély lobog, s emeli a nagy magányos matematikust az emberiség héroszainak sorába.

„Alig van párja atyámnak...”[3]

Bolyai Farkasról

Bolyai Farkas neve ahhoz a néhány magyar névhez tartozik, amit világszerte ismernek. Igaz, nem a viselője miatt. És nem is az ő kedvéért. János fia miatt ismerik, akit a nem-euklidészi geometria egyik kidolgozójaként tart számon a világ, s a nagy Gauss kedvéért, akivel Bolyai Farkas együtt diákoskodott – s össze is barátkozott – Göttingában. Ezért találta aztán meg benne a történetírás fejlődéslogikája azt a „hiányzó láncszemet”, ami a nagy Gauss nem-euklidészi gondolatcsíráját a tant kidolgozó Bolyai Jánoshoz közvetítette. Így vált Bolyai Farkasból szerény, de nélkülözhetetlen mellékfigura a nagy Gauss monumentális márványszobrán, tiszteletteljes távolban a főalaktól, csitítva indulatos fia túlzott követeléseit a világraszóló fölfedezés jussához. Ebben a historizáló, evolucionista pózba rögzülten őrizte meg Bolyai Farkast a napjainkban hatalmasan elterebélyesedett tudománytörténet-írás. „Bolyai Farkas Gauss-szal egy időben Göttingában tanult és néha levelezett Gauss-szal”, és „maga is sok időt töltött azzal, hogy az ötödik posztulátum bizonyításán fáradozott, de határozott eredményre nem jutott. Fia örökölte ezt a szenvedélyét...” siet megjegyezni rövid, mindössze 218 oldalas összefoglalásában Dirk J. Struik, miután ellenkezést nem tűrően közölte, hogy „Gauss volt az első, aki komolyan gondolt arra, hogy a párhuzamossági posztulátum független, és logikailag lehetséges egy új geometria megalkotása, amely más axiómákon alapul”. Ugyanígy, csak részletesebben meséli el a históriát Morris Kline súlyos, 1238 oldalas matematikatörténete, és még egyértelműbben összegezi: „Lobacsevszkij és Bolyai egyaránt igen sokat köszönhet Gaussnak.” Mert persze az evolucionista történészek Lobacsevszkijhez is meglelték a hiányzó láncszemet Gauss egyik futólagos, Kazányba került tanítványában.

Csakhogy az eszmék fejlődése – napjaink élénk tudományfilozófiai vitáiból ennyi mindenesetre kiderült – nem rendezhető a biológiai evolúcióhoz hasonló lineáris rendszerbe. Mert először is Gauss a XVIII. század végén, amikor Bolyai Farkassal együtt Göttingában tanultak, másokhoz hasonlóan még csak nem is gondolt „a párhuzamossági posztulátum függetlenségére”, és így Farkasnak nemigen volt mit „közvetítenie”, azután meg – és ez a lényegesebb – annyira különbözött egymástól az egész környezet, az egész világ, az egész kor, amiben Gauss s amiben a két Bolyai a maga eszméit érlelte, hogy merő képtelenség őket

[3] Forrás: Vekerdi László: „Alig van párja atyámnak”. = Tiszatáj 29 (1975) No. 2. pp. 36–41.

egyetlen fejlődésvonalba összefoglalni. Még ha szóról szóra azonos is lenne a nagy Gauss és Bolyai János új geometriája – mert valójában egyáltalában nem az –, még akkor sem lehetne a két elméletet egyetlen összefüggő históriába sűríteni, annyira különböző a genezisük. És éppen ebben a genetikai eltérésben jutott sorsdöntő szerep Bolyai Farkasnak. De nem, vagy nem elsősorban a párhuzamosokra vonatkozó vizsgálatainak és ilyen meg amolyan óvásainak és tilalmainak, hanem egész eszmevilágának. Az életének. Meggyőződés-rendszerének. A „korának", ha ezzel a névvel jelöljük az ember művét meghatározó meggyőződésrendszerét.

Ezen a ponton azonban a történelmi elemzés alig leküzdhető, leküzdhetetlen akadályokba ütközik. Mert „a mű korához – tanította Fülep Lajos – mindaz hozzátartozik, ami meghatározza, minden meghatározót feltárni viszont emberileg lehetetlen. De még ha csak azt keressük is, ami a legdöntőbb, vagy amit ilyennek vélünk, meddig kell nyújtóznunk, hol megállnunk? A meghatározottság milyenségére, méretére, componenseire nincs norma, nincs szabály. Az egyetlen szabály; hogy nincs ilyen szabály. Csak a meghatározó kor felderítésének általános követelménye azonos mindig: a kor méretét és a művet meghatározó tényezőket fel kell deríteni a rationes sufficientes fokáig. A kettő reciproce korrelatív. Egyszer kevés is elég, máskor az elérhető legtöbb is kevés. A kor határai mozgók. ... Lehet-e nem kérdezni, nem muszáj-e kérdezni: hogyan lehetséges, hogy az a kor, amely meghatározza, benne van a műben, szemmel látható benne, az a kor, amelyet a mű kifejez, nem érti, másik kor viszont, amelyik tulajdonképpen már nem kora, érti? melyik hát a kora, amelyik érti vagy amelyik nem érti? vagy olyan is van benne, ami a közvetlen korából nem érthető, csak tágabb korból, és éppen ez a más, ez a több, ez a nagyobb nehezíti vagy gátolja meg az értést a saját korának? s ha így van, mi az a több és nagyobb, honnan, miből ered, hova kell még menni és mit felderíteni, hogy megértsük, mitől, miért olyan a mű, amilyen?"

Ez a nem-euklidészi geometriák történeti megértésének a bonyolult problémája; érthető, ha az elemzés szívesen eltérül a lényegesen egyszerűbb evolucionista emlékmű irányába. Csakhogy Bolyai Farkas semmiképpen sem statisztálhat mellékfiguraként a nagy Gauss szobrán, mert lényegesen, döbbenetesen különbözik egymástól a koruk.

*

Bolyai Farkassal valamiképpen megállott az idő, amikor Göttingából hazatért Marosvásárhelyre. Az a kép ugyanis, amit ö a városkáról és az európai felvilágosodás német műveltségéről magával hozott, rohamosan s végképp alámerült a napóleoni háborúk világrengető forgatagában. A legegyszerűbb német polgártól Goethéig és Gaussig mindenki megváltozott. A hatalmas ország egész értékrendszere kicserélődött. A gondolkozók szívében az „emberiség” helyét a „német nemzet” váltotta fel; Fichte a nevelés végső céljául a tudás fényének terjesztése helyett az Állam szolgálatát jelöli ki. A *nyelv* tökéletessé művelésének eszméje helyett a nemzeti nyelv eredendő tökéletességének a gőgje tölti el a kebleket: elképzelni sem tudnak többé olyan szakterületet, amelyiken ne lehetne a fogalmakra az eredetinél – az „idegennél” – jobb és szebb német kifejezést kiagyalni. Általában az „idegen” és az „idegenség” elveszíti a fények századában élvezett előkelő varázsát: Montesquieu, Voltaire, Swift, Bessenyei perzsáit, kínaiait, Hauhnhnm-jait, Tariménesét – mind a sok kedves és titokzatos idegen népet és utast – marcona és mindenre elszánt „teuton” hazafiak váltják föl. Még a jog nagy alapeszméi is kicserélődnek: Cesare Beccaria csodálatos eszméit, az egyenlő jogokat egyenlő esélyekkel kiegészítő emberiesség eszméit a Nemzet Szellemét Szolgáló Hierarchia gondolata – és gyakorlata – váltja föl. Az arisztokraták – születési és vagyoni arisztokraták –, akik „legtöbbet” tudnak „áldozni a honért”, újra elvileg is a társadalmi értékrend csúcsára kerülnek. Nemcsak az idegen válik gyűlöletessé és megvetetté így, hanem a „hazáért” semmit vagy éppen „csak” az életét áldozni képes – s biz’ azt nem szívesen áldozó – paraszt is. Az egymást becsülő és kíváncsi érdeklődéssel figyelő népek harmóniája az egymás torkának eső, öntelt nemzetek zűrzavarába süllyed. Új Európa bontakozik ki a napóleoni háborúkból, s ebben az új világban alig maradnak a Fények századából eszmék – és emberek. S ők is oly szörnyűségesen magánosak, mint az őrületbe menekülő nagy poéta, az utolsó európaiak egyike, Hölderlin:

„Wo aber sind die Freunde? Bellarmin
Mit den Gefährten? Mancher
Trägt Scheue, an die Quelle zu gehn;
Es beginnet nämlich der Reichtum
Im Meere.”

*

Bolyai Farkas Göttingából való hazatértekor még talált, ha nem is barátokat, legalább eszme- és munkatársakat. A változások Erdély bércei közt lassabban terjedtek, a városkák ideig-óráig őriztek még valamit a felvilágosodás álmaiból. Az európai „fények” világából hazajött ifjú eleinte Domáldon, feleségével, Benkő Zsuzsannával móringolt kicsi birtokán gazdálkodott – gyümölcsöst telepített, kertet épített, kutat és vízesést tervezett –, de már ekkor egész Erdély-szerte jól ismerték, és 1804-ben őt választotta ki a huszonhárom tagú kuratórium tíz jelölt közül a matematika–fizika–kémia tanítására a marosvásárhelyi kollégiumban. Ettől kezdve összeforrt az élete a városkával, az iskolával, a tanítással, s az egész erdélyi közművelődéssel. Lelkesen részt vett a marosvásárhelyi Nyelvmívelő Társaság munkáiban; 1806-ban ki is dolgozott egy alapos, nagyon reális tervezetet a honi kutatómunka megindítására. „Nagyokat nem lehet álmodnunk – végzi a hosszú írást. – Kicsi a kútfő, nincs a Ganges árkaira szükség, nőttön nőhet, maga csinál árkat magának, s még valaha a fényes népek tengereibe szakadhat." A tervből ugyan semmi sem lett, mert a régebben még elég aktív társaság most már csak senyvedt s nemsokára meg is szűnt, de Bolyai Farkas egy szál magában is őrizte a kicsi kútfőt, erején felül, hogy valaha majd a fényes népek tengereibe szakadhassék. „Es beginnet nämlich der Reichtum im Meere." És itt, ezen a ponton válik az életrajz jól ismert és könnyen követhető adatai mögött áttekinthetetlenül bonyolulttá a kor. Nem az ország kora, hanem a Bolyai Farkasé. A kettő ugyanis még látszólag sem, még a felszínen sem azonos.

Az ország – mint egész Európa – több-kevesebb késéssel híven követte a német mintát. A Szent Szövetség szellemi, katonai és gazdasági merevgörcseit lassan liberalizálódás és reformok váltották föl, a gyorsan növekvő városokban új ipari és pénzarisztokrácia képződött, s ha csak és ahol tehette, kiegyezett a régi nemességgel. A kiegyezés eredményeképpen mindenfelé – nemcsak Poroszországban, hanem még Franciaországban is – új, nemzeti arisztokráciák keletkeztek s állottak az országok élére. A fényes népek tengerét nemzeti érdekközösségek szigeteire szétesett refeudalizálódó világ váltotta föl. Ahol és ameddig az érdekek nem metszették egymást, viszonylag békés és gyors fejlődés kezdődött, amely sokat megőrzött – megőrizni látszott – a XVIII. század humanitárius és racionális eszméiből; de ahol s amikor a fejlődés mélyén működő erők egymásnak feszítették az országokat hordozó földlemezeket, ott és akkor azonnal szörnyű földrengések rázták meg a világot.

Bolyai Farkas eleitől fogva érezte a földrengések veszélyét, s a nemzeti fejlődést legföljebb átmeneti megoldásként, egy jobb, új, emberségesebb egység előkészítőjeként volt hajlandó elfogadni. Még arra is külön és gyakorta figyelmeztetett, nehogy az emberi változatosság és találékonyság nagyszerű eszköze, a nyelv valamiféle csoportönzés és elnyomás fegyverévé válhassék. Így például azt javasolta, hogy tanítsanak meg minden leányt az anyanyelvén kívül még egy közös nyelvre – lehetne jobb híján a latin is –, hogy már kisded korában mindenki fölvérteződhessék a nyelvi meg nem értésből fakadó oktalan ellenszenv ellen. Tudta ő jól, hogy ez a javaslata és egész meggyőződése ellentétes a nemzeti újjászületést sürgető koráramlattal, mellyel különben sok tekintetben egyetértett. Ezt a konfliktust írta meg *a Pausaniasban;* az egyik drámájában, amit pályaműként küldött be

Kolozsvárra Döbrentei Gábornak arra a pályázatra, ami arról híres, hogy még csak megemlítésre sem méltatta Katona *Bánk bán*ját. Bolyai három drámája sem nyert, de Döbrentei, ha el is marasztalta az írót a „drámai bog" meg nem kötése miatt, megdicsérte legalább a barátot – jó szándékáért. A felületes Döbrentei azonban valószínűleg félreértette a szándékot, mert a *Pausanias* semmiképpen sem illik az ő kazinczys, német mintájú nemzetcsinosításába. Pausanias-Bolyai ugyanis el nem fogadhatván a „szent" nemzeti önzés jogát, föllázad hazája ellen az emberiesség nevében, s föllázítja az elnyomott hélótákat is. Ám „spártai" ő is, s ha hazája rút korlátait nem is, törvényeit elfogadja, s a konfliktus elől halálba menekül: „Az én mentségemnek Spártaiak! értelme nem lehet, mig a' tsetsemő emberi Nem a' nagy Lycurgus böltséjéből ki nem kél ... 's a' ti hazai szeretetetek ... ez az Istennek kedves gyermeke, emberi szeretetté nem nő: de ezt a' nyelvet a' mellyen a' föld ezer esztendők mulya szoll, Sparta nem érti..."

Ha valaki a *Pausaniast* avatott kézzel – mint Keresztury Dezső a *Mózest* – restaurálná, tán remekművel gazdagodnánk; az azonban így is nyilvánvaló, hogy a drámaíró Bolyai Farkas helye nem Kisfaludy Károly közelében keresendő – ahogyan irodalomtörténet-írásunk Heinrich Gusztáv óta makacsul hiszi –, hanem Madách mellett. Nem elődjeként, hanem kortársaként. Mint ahogy nékünk is fájdalmasan aktuális kortársunk a nemzeti lét gonosz elfajulásai ellen jókor az emberiesség felvilágosult eszméihez fellebbező Bolyai Farkas.

*

Épp ezek a fények, az emberiesség kimondhatatlanul szép fényei különböztetik meg leginkább láthatóan Bolyai Farkas eszmevilágát nagy barátjáétól. Gauss ugyanis a lehető legteljesebben alkalmazkodott – ha lelkesedésről az ő hatalmas szelleme esetében szó nem is igen lehet – az új német nemzeti-feudális fejlődéshez. Benkő Samu vette észre ezt is, s írta meg ebből a szempontból is alapvető és eligazító Bolyai-monográfiájában. „A Georgia Augusta Egyetem professzora – írja Benkő, hogy megmagyarázza Gauss Bolyaiak iránti viselkedését – lovagi címével, udvari tanácsosi méltóságával mindenkinél inkább tisztában lehetett azzal, hogy a feudalizmus mennyire komolyan veszi önmagát. A címek és a rangok említésekor még a cinikusabb természetű emberek sem kacsintottak egymásnak cinkosan, hiszen a rendszer lényegéből fakadó dolgok voltak a külsőségek. A tudás társadalmi elismerésének Európa-szerte ugyancsak kialakult hierarchikus rendje volt." És ezt a hierarchiát, amit a nagy Gauss nemcsak elfogadott, de ügyesen használni is tudott mérhetetlen tekintélye és több-kevesebb társadalmi hatalma gyarapítására, ezt a feudális hierarchiát Bolyai

Farkas legföljebb külsőségeiben viselte el, lényegében azonban mindig és nagyon következetesen elutasította. Olyan erősen élt benne az eredendően demokratikus, egalitárius meggyőződés, hogy – mint a matematika megértéséhez nélkülözhetetlen előfeltételt – az 1843-ban megjelent *Arithmetika* bevezetésében is összefoglalta: „Csak úgy lehetne mindennek mindene, ha bizonyos értelemben senkinek külön semmije se volna, kivéve azon darab földet, melyen megnyugszik ’s a’ melyet senki se perel.” Mert csak így remélhető – írja a szigorúan matematikai könyv bevezetésében, szervesen a tárgyhoz tartozóan –, hogy eljő végre az a boldog idő, amikor Földünkön, „ez annyiszor vérzett mellen, annyi ezer év után kinyilik a’ köz egészség’ és szeretet’ állandó ro’sája – mikor mindennek elege lesz, ’s az annyi méreg’ kutfeje a’ gazdagság ’s szegénység (két iker-nyomorék) magyarázást kivánó eszme leénd – ’s annyi mesterkedés után a’ pátriárkai ház-tartásra viszen az okosság és sziv vissza; melyből csak a’ Kain’ gyilka (fegyveres tárokká nőve) tartatott vala meg, hogy a’ mennydörgő éggel vetélkedő mezők testvér-vér’ záporát oncsák.”

A XIX. század első felében Európa-szerte efféle kommunisztikus utópiák éltették s közvetítették az uralkodó koráramlatok alatt s ellenére a XVIII. századi társadalomfilozófusok forradalmi gondolatait. Ebben a szívvidámító „kísértetjárásban” azonban kivételes hely illeti meg Bolyai Farkast, mert néki a társadalmi igazság és egyenlőség eszméje olyan matematikai szigorúságú evidencia volt, ami az emberi lét és gondolkozás minden részletét meghatározza. Az egyenlőség nagy eszméje, a szabadság és a függetlenség alapvető evidenciája determinálta Bolyai Farkas matematikafelfogását. Ez a fényes matematikakép elsősorban az, amit lángeszű fia jókor megtanult tőle. És ez az, amit a világ egyetlen más nagy matematikusától sem tanulhatott volna meg, a nagy Gausst is beleértve.

*

Mert a nagy Gaussnak a matematika nehéz és nemes szenvedély volt; teljes mélységében csak néhány kivételes elme számára megközelíthető, de elég sok – s egyre több – embernek kenyeret adó szakma. Bolyai Farkas ellenben az emberiség fölszabadításának nélkülözhetetlen, integráns részét látta a matematikában. Meglátta ő is, ugyanolyan jól, mint a nagy Gauss, az alkalmazási lehetőségeket, hisz erre már kiváló technikai érzéke is determinálta. Híres kályhája, lakókocsija s egyéb kisebb-nagyobb találmánya jól ismert, de kitalálta ő egyebek között a golyóscsapágy elvét is, a Magyar Tudós Társaságnak egy léghajóterv ürügyén beküldött szakvéleményén ott látható lerajzolva. Azt meg Benkő Samutól tudjuk, hogy milyen nagy szerepet játszott a marosvásárhelyi tanár az erdélyi műszaki – és orvosi – értelmiség modern szellemű fölnevelésében. Mégsem a technikai alkalmazhatóság fölismerése és a pedagógiai eredmények miatt fontos elsősorban Bolyai Farkas tanítása. Másért vélte ő fundamentálisnak és univerzálisan tanítandónak a matematikát. A XVIII. századi *philosophe*-ok jó utódaként az igazság formai kritériumainak megismerésére vezérlő kalauzt látott ő a matematikában. És ez a legfontosabb, mert ezért nem volt hajlandó elválasztani a matematikát a logikától. S így a formális logika ellen egyre inkább berzenkedő induktív világban ő a matematikai fejtegetéseket logikára kívánta alapozni, a logikai érveléseket meg matematikai ruhába, matematikai jelekbe akarta öltöztetni. Azazhogy nemcsak akarta, hanem meg is valósította ezt a forradalmi programot, két remek tankönyvben, egy latinban meg egy magyarban.

A latin változat, a *Tentamen* teljesítményeit az analízis, a sorelmélet és a geometria megalapozása területén gondosan és szakavatottan ismertette már Szénássy Barna, s ugyancsak ő figyelmeztetett Bolyai Farkas megfontolásainak korszerűségére vagy épp újságára; a marosvásárhelyi matematikatanár didaktikai módszereinek modernségét Dávid Lajos és Könyves Tóth Kálmán tárta fel.[4] Nem mondható tehát, hogy nem ismerjük eléggé a matematikus Bolyai Farkas nagyságát. Mégis a „tankönyv” szó már a minden lében kanál Brassai bácsi polihisztorkodása óta megtévesztette valamiképpen a matematikusokat és matematikatörténészeket (hisz a „tankönyv” csak napjainkban kezd tán hasonló rangot nyerni, mint a nevelést elsőrangú tudományos vállalkozásnak tekintő XVIII. században), s csak a minap mutatta meg kitűnő kicsi monográfiájában Weszely Tibor,[5] hogy a *Tentamen* ízig-vérig eredeti és úttörő munka, amely a modern matematikai logika olyasféle nagy megálmodójának és megelőzőjének mutatja Bolyai Farkast, mint amilyen elődként tartják számon Bolyai Farkas nagy cseh kortársát, Bernard Bolzanót a halmazelmélet történetében.

A kétkötetes *Tentamen* és az első kötet magyar nyelvű megfelelője, az 1843-as *Arithmetika eleje* azonban nemcsak előd, hanem a saját korában is fontos és meglepően érdekes alkotás. A két könyv – és az 1830-ban ugyancsak Marosvásárhelyt kiadott magyar nyelvű elődjük – ugyanis egy hosszú, Newton *Arithmetica universalis*ától kezdve meggyorsult folyamatba illeszkedik szervesen, és igen fontos állomás a számfogalom megértéséért vívott évezredes nagy szellemi küzdelemben. Bolyai Farkas az elsők között jött rá, a nagy brit algebristákkal – George Peacock-kal, Charles Babbage-dzsal, John Herchellel és mindenekelőtt William Rowan Hamiltonnal – egy időben s tőlük függetlenül, hogy az

4 Dávid Lajos: Bolyai Farkas és a matematikai oktatás reformja. = Magyar Paedagogia 30 (1921) pp. 148–156.; Könyves Tóth Kálmán: Bolyai Farkas, a matematika modern didaktikájának előfutára. = Matematikai Lapok 10 (1959) No. 1. pp. 12–22. *(– a szerk. megj.)*

5 Lásd bővebben: Weszely Tibor: Bolyai Farkas a matematikus. Bukarest, 1974. Tudományos Könyvkiadó. 101 p. *(– a szerk. megj.)*

aritmetikában és az univerzális aritmetikában – azaz az algebrában – a műveletekből kell kiindulni, nem a számokból; ahhoz, hogy a számokban megadott mennyiségekkel elbánhassunk, jelölni kell a számokat, és a jelekre alkalmazott műveletek azok, amik akár a legközönségesebb számolásban is „számítanak”. Ha egyszer a műveletek szerepét és tulajdonságait, azaz a műveleti jelek *jelentését* – erre Bolyai Farkas különösen nagy súlyt helyez – tisztáztuk, akkor számok már többféle kifogástalan matematikai módszerrel szerkeszthetők; igen jól használhatók például az összetartó végtelen sorok, melyek limeseiként – „széjbecs”-eiként vagy „véghatárai”-ként, ahogyan Bolyai magyarul nevezte – kaphatók meg az olyasféle – „irracionális”-nak nevezett – számok, mint például a 2 négyzetgyöke. Csak arra kell nagyon ügyelni, hogy a különféle számok előállítására szolgáló különböző módszerek valahogy el ne rombolják az alapvető műveletek egyszer s mindenkorra megállapított érvényességét, azaz hogy a „műveletek az általánosság vitorlája alatt folytathatók legyenek és az általánosság – amennyire csak lehetséges – el ne vesszen” – fordítja le a *Tentamen*ből a mai absztrakt algebrában oly fontos „permanencia-elv” Bolyai Farkas-féle megfogalmazását magyarra Weszely Tibor.

Luboš Nový, a kiváló csehszlovák tudománytörténész elemezte legutóbb egy igen alapos, szép monográfiában a modern algebra eredetét,[6] s megállapította, hogy a XIX. század húszas-harmincas éveiben az egész matematika fejlődése szempontjából milyen fontos volt a különféle számtartományok struktúrájának a vizsgálata. Megmutatja – elsősorban egy régen elfelejtett szerző, Martin Ohm 1929-ben megjelent művének s Bolzano kézirataínak a megvilágításában –, hogy a mennyiségfogalom általánosítása és a „műveletek tulajdonságainak” a hangsúlyozása egyrészt hogyan készítette elő az algebra új, absztrakt fázisát, másrészt meg miként szolgálta, már a saját korában, az *egész* matematika – aritmetika, algebra és geometria – egységes „axiomatikus interpretációját”. És pontosan itt, a kor matematikai fejlődésének eme kulcsfontosságú pontján áll – az axiómarendszerek általános, mélyre hatoló vizsgálatával – Bolyai Farkas.

Igaz, Bolyai Farkas gondolatai nem ömlöttek közvetlenül a kor nagy matematikai áramlataiba, még annyira sem, mint Bolzanóé, Galois-é, vagy akár mint Nový nagy fölfedezettjéé, Martin Ohmé. Ámde Bolyai Farkas mély matematikai eszméit is megértette valaki, éspedig éppen az az ember, akinek megértenie tán az egész világon a legfontosabb volt. Hisz a matematika új értelmezése és fölmagasztosítása egyaránt igen erősen hatott Bolyai Jánosra, akinek matematikai érését a bécsi hadmérnöki akadémián is – vagy talán épp

[6] Nový, Luboš: Origins of modern algebra. Prague, 1973. Academia. VIII, 252 p. (Czechoslovak Academy of Sciences)

ott elsősorban – apja levelei irányították, Marosvásárhelyről.

A kor hirtelen magasba ívelő literatúrájának legszebb lapjaihoz tartoznak tisztán szépirodalmi szempontból is ezek a levelek; Berzsenyi s Vörösmarty művészetének szomszédságába. Szinte eksztázisig fokozódik bennük a szeretet, immár nem az apáé a fiú iránt, hanem az idősebb s tapasztaltabb küzdőtársé a fiatalabb iránt az Emberiség közös nagy ügyeként értelmezett Mathézis szolgálatában. „A' mi a' mathesist illeti – írja egyik Bécsbe szánt fogalmazványában (aminek a megfejtését a Bolyaiak kezevonását páratlanul értő mesternek, Benkő Samunak köszönöm) –, most hiszem, hogy ki-jöttél belőlle, 's egyrészbe a' kezdés nehézségét állod ki: de azon hamar túlhaladva osztán menni fogsz; tsak legyen kitől kérdeni: hidd-el, hogy egy tudomány sints, a' melly ollyan passioval ragadja azt a' kinek réávalo talentuma van, mintha egy méjségbe motu accelerato süllyedne bé a lélek, és semmi sints, a' mi ugy fel-emelje az embert a' testi világ felibe ... paraditsomi gyönyörüség a' ki haladhat benne; hanem arra megkivántatik a nagy készsége a' felső mathesis calculussába; hogy mint a' gyenge hegedüs ne ijjedjen meg, a' hol [...] geschrieben – hovatovább mind inkább hiszem, hogy tsak excellens elme jókor kezdve érkezik el és ollyan helyt a' hol közbuzgósággal gyakorlatozik esztendőkön által: már azután olvasni Eulert, La Croixt La Granget folyvást s at. – valamely földi idvesség – nekem nem volt az a' szerentsém a mi neked; 's mi magyar mathematikusokul, mind nagy korunkba tanult hegedüsek vagyunk." „Higgy nékem – kerül át a gondolat a tisztázott levélbe 1818. szeptember 10-én –, hogy semmi sem emeli-fel az, embert ugy a' föld felibe, mint a felsőbb mathesis, mint a Sas a' méjj égbe, ugy el-sülyed az ember, el-hagyva az egész világot ... Te ezt bizonyosan el-érted, tsak használd azt az időt, mely most és tsak egyszer foly rád nézve; az élted arany ideje ez, fuss a' tzélra..."

Bolyai János korszakalkotó *Appendix*éhez mindenképpen szervesen illeszkedik apja *Tentamen*je. Ikarosz sorsa abban a pillanatban eldőlt, amikor atyja elhatározta, hogy repülni tanítja fiát.

Emlékezés Bolyai Farkasra[7]

Kétszáz évvel ezelőtt, 1775. február 9-én született Bolyai *Farkai* Bolyán, egy erdélyi falucskában, Szebentől északra. Apja, Bolyai Gáspár elszegényedett nemesi családból származott. Hiába gazdálkodott ügyesen, sohasem sikerült kilábalnia a szegénységből. *Pedig feleségével,* Vajna Krisztinával is móringolt egy kicsi – 12 holdas – birtokot a nem messzi Domáldon. Ennek a domáldi tanyának később pihenő- s menedékhelyként igen fontos szerep jutott a két híres Bolyai – Farkas és János – életében: Gáspárnak azonban, az akkori erdélyi gazdasági elmaradottságban – keveset termett a föld, s annak se volt ára – több bajt okozott, mint amennyi hasznot hajtott. *De* gyerekei – Farkas és Antal – neveltetésére így is na*gy* gondot fordított; a kis Farkast 1781 szeptemberében útnak indította a nagyenyedi Bethlen kollégiumba.

Bolyai Farkas első életírói, *Koncz* József (1829–1906) és Bedőházi János (1853–1915) óta sokan leírták, hogyan érkezett meg a falusi magányhoz szokott gyermek a híres-neves intézetbe s hogyan emelkedett fényes eszével az ősi *iskola* legelső *diákjává,* valóságos eleven büszkeségévé. Azt is elmesélték – nem feledkezvén meg a kor pálcát nem kímélő pedagógiájának kellő elmarasztalásáról –, hogy miféle megerőltetést, *látomásokig jutó szellemi izgatottságot okozott az érzékeny* lélekben ez a nem feltétlenül kívánatos mintadiákság. Így hát ismétlés helyett helyénvalóbb idejegyezni Sütő András nagyenyedi kollégiumra való emlékezéséből: amióta Bethlen Gábor „.megtiltotta a főuraknak, hogy jobbágyfiak tanulását bárminő formában is megakadályozzák”, a kollégium ösvényein a diákok ezrei haladtak – s köztük igen tehetségesek is – a tudás távoli világai felé, és ezt a hatalmas, föltartózhatatlan áramlást soha le nem ronthatják a tényleg meglévő – s többé-kevésbé a kor egész pedagógiájában, másutt is megtalálható – oktalanságok és hibák.

Amikor Bolyai Farkas Enyedre érkezett, Erdély négy református kollégiumában – Enyeden, Marosvásárhelyt, Kolozsvárt és Székelyudvarhelyen – idestova háromezer diák tanult, ebből majdnem ezer Enyeden. S körülbelül ennyien tanultak a görögkeleti, a katolikus és a luteránus közép- és felsőbb iskolákban is. Ennek a néhány ezernyi diákseregnek a többsége persze egyházi pályára készült, papnak vagy tanítónak. Ez azonban a XVIII. században egyáltalában nem úgy értendő, mint ma. Akkor ez afféle értelmiségi alapképzést jelentett, amire azután később teológiai, jogi, orvosi, vagy akár mérnöki stúdium egyként

[7] Forrás: Vekerdi László: Emlékezés Bolyai Farkasra. = Élet és Tudomány 30 (1975) No. 6. pp. 249–253.

épülhetett. Bolyai Farkas is majdnem a teológiát választotta a kolozsvári református kollégium nagy tudású professzorának, *Szathmári* (Pap) Mihálynak (1737–1812) a hatására.

1790-tól ugyanis a kolozsvári kollégiumban tanult, ahová Kemény Simon báró Simon fiának nevelőjeként került a fiatal báróval. Szokás volt az akkori Erdélyben az előkelő ifjak mellé idősebb diáktársaik közül egy-egy kiválóbbat oktatóként – de egy kicsit személyes szolgaként is – felfogadni. A nevelő fizetsége abból állott, hogy tanulhatott, használhatta az úr könyvtárát, kísérhette az úrfit tanulmányaiban, külföldre is, az úr mindkettőjükért fizetett. Bolyai Farkas is így került Jénába előbb, s aztán *Göttingába,* a fiatal Simon báró nevelőjeként. Négy évvel volt nála fiatalabb a báró, aki azután a fényes tehetséget s nemes jellemet egyaránt becsülni tanulta – s tudta – mesterében. Egész életében hűséges barátja és támogatója maradt; Bolyai Farkas meg is jegyezte egyszer, hogy Kemény Simon nélkül semmi sem lett volna belőle. Ez így persze a nagy matematikus nagylelkűségére – de tán társadalmi alkalmazkodóképességére is – jellemző túlzás; az azonban csakugyan valószínű, hogy Göttinga nélkül, ahová Kemény Simonnal ment, Bolyai Farkasból aligha válhatott volna az, aminek ma ismerjük: a matematikai gondolkozás legmélyebb átalakulásának előkészítője.

Kisebb könyvtárnyi irodalom szól a göttingai egyetem jelentőségéről a honi művelődés történetében,[8] de csak most, hogy *Juhász* István kolozsvári történész kiadta s elemezte *Fogarasi* Sámuel (1770–1830) volt göttingai diák, gogánváraljai pap önéletrajz-írását,[9] csak most érthető meg igazán, mi vonzotta a XVIII. század végén a magyarországi és az erdélyi diákokat a felvilágosodás-kori Göttingába. Ebben a szépen épített iparos- és kereskedővároskában – amely alig volt nagyobb, de gazdagabb s városiasabb a honiaknál – otthon érezhették magukat, a honi szegénység és szükség szorítása nélkül; a város mindössze 12 ezer lakosához képest igen népes egyetemén pedig szó szerint ott folytathatták a tanulmányaikat, ahol otthon abbahagyták. Mert a honi református kollégiumokban sok szempontból hiányos és elmaradott volt ugyan az oktatás, de épp azokat a *logikai* és *nyelvtani* alapokat hangsúlyozta – ez is Juhász István említett tanulmányából látható legszebben –, amikből a felvilágosodás kori német gondolkozás java kivirágzott. Azt is mondhatnánk, hogy Göttinga egyetemén – amely a hannoveri választófejedelem s egy személyben angol király személyes támogatása és védelme alatt állott – a magyarországi s erdélyi protestáns diákok az álmaikkal találkoztak. Amiket mintha itthonról ismert szálakból szőtt volna számukra valaki. Hazatérve azután igyekeztek itthon is megvalósítani ezt-azt a látottakból, s egész életükben epekedtek eltűnt ifjúságuk egyre távolibb s egyre szebb színekben tündöklő színhelye után.

8 Göttingáról az Élet és Tudomány 1972. évi 46 számában irtunk *(– a korabeli szerk. megj.)*

9 Fogarasi Sámuel: Marosvásárhely és Göttinga. Önéletírás 1770–1799. Bev., jegyz.: Juhász István. Bukarest, 1974. Kriterion. 386 p.

Bolyai Farkas is fájó szívvel búcsúzott Göttingától 1799. június 5-én.

> „Az elváláskor – írta sok-sok év múlva – sírva, mint egy gyermek, akaratom ellen mentem vissza, míg erőt vettem magamon; az utolsó tetőről, ahonnan még látszott Göttinga, még egyszer visszanéztem megállva, míg az örök elválás homályában az emlékképe megmaradott.”

Jó oka volt a búsulásra, hisz Göttingában hivatást *s* jó barátokat egyszerre talált. Karl Felix *Seyffernek,* a csillagászat professzorának a szemináriumain ismerkedett meg a *párhuzamosak* problémájával és Karl Friedrich *Gauss-szal, s* mind a két ismeretség életre szólóan meghatározta a sorsát.

A párhuzamosok problémája a XVIII. század végén és a XIX. század elején a tulajdonképpeni matematikai kérdésen túl az egész európai gondolkozás egyik központi ügye is volt. Nem kevesebbről volt ugyanis szó, mint a gondolkozás mintaképéül választott euklidészi geometria – a híres geometriai módszer – matematikai érvényességéről, megbízhatóságáról. Azt már régóta érezték matematikusok s filozófusok egyaránt, hogy a párhuzamosságot meghatározó euklidészi követelmény valamiképpen más, mint a többi; helyesebben – másként viszonyul a többihez, mint azok egymáshoz. A többi követelmény ugyanis – mint például az, hogy „minden ponttól minden ponthoz egyenes húzható”, vagy az, hogy „minden derékszög egymással egyenlő”, meg az, hogy „minden középpont körül bármely sugárra kör rajzolható”, – nyilvánvalóan egymástól független s másként meg nem fogalmazható dolgokat állít; a *párhuzamossági követelmény* („Ha két egyenest metsző egyenes ugyanazon az oldalán két derékszögnél kisebb belső szöget alkot, a két egyenes határtalanul meghosszabbítva, azon az oldalon találkozik, melyen a szögek két derékszögnél kisebbek.”) esetében azonban ex a többitől való függetlenség és csak–így–elmondhatóság egyáltalában nem volt ennyire természetes és magától érthető. Meg is próbálták valamiképpen levezetni a többiből, ez azonban sehogyan sem sikerült. A sok sikertelenségből a század végére egész kis külön párhuzamossági elmélet kristályosodott ki, amiben – ezt Tóth Imre mutatta meg – mindig igen nagy szerep jutott *logikai* megfontolásoknak.[10] Hiszen a „parallelák”, ahogyan akkor a párhuzamosokat nevezték, híres problémájában végső soron a matematika „természetéről”, a matematika *alapjairól* volt szó. *És* ezen a terülten Bolyai Farkas otthonról hozott logikai jártassága szerencsésen egészítette ki tehetségét, úgyhogy Seyffer megbecsülésén és barátságán túl elnyerte a Gaussét is, akiről már akkor sejtette, hogy minden idők legnagyobb matematikusa lesz belőle. Ezt onné*t* tudjuk, hogy egyszer kerek

[10] Lásd erről Tóth Imre cikkét az Élet és Tudomány 1968. évi 23. számában „Nem euklideszi geometria” címmel.

perec meg is mondotta Gauss édesanyjának, mikor meglátogatta barátját braunschweigi otthonukban. A két göttingai barát kölcsönösen sokat tanulhatott egymástól; Bolyai Farkas mindenekelőtt az egész számokkal és a folytonos függvényekkel végezhető műveletek fontosságát sejthette meg: a műveletek alapvető szerepét a matematika fölépítésében. De ezeket a kérdéseket csak később, marosvásárhelyi professzorsága idején kezdte rendszeresen vizsgálni. Amikor Erdélybe hazatért, még elsősorban a párhuzamosok problémája izgatta.

Erdélyben elébb Kolozsvárt telepedett le, ahol Kemény báróék meghívták kisebbik fiúk nevelőjének. De nem sokáig időzött ott, mert megismerkedett Benkő József chirurgus – orvos – Zsuzsanna lányával, belészeretett s feleségül vette. A boldogságuk nem tartott sokáig, Zsuzsanna érzékeny, heves, könnyen egyensúlyát veszítő lélek volt. Farkas pedig, aki kénytelen-kelletlen úgyis eleget tűrt a világban, otthonra már nem sok türelmet tartogatott.

Ez azonban későbbi történet, egyelőre szerencsésen látszott indulni az életük. Apja nékik adta a domáldi birtokocskát; itt gazdálkodott, kertészkedett s gondolkodott, míg 1804-ben meg nem hívták a marosvásárhelyi református kollégiumba a matézis, a fizika és a kémia tanarának. Tanárrá válásának körülményeit s pedagógiai működését Benkő Samu kolozsvári történész – akinek igen sokat köszönhet a Bolyai-kutatás – tárta fel; az ő tanulmányai oszlatták el azt a régi tévhitet, hogy Bolyai Farkas diákjai feje fölött „elbeszélő”, a maga „érthetetlen” gondolataiba elmerült tanár lett volna. Ellenkezőleg, nagyon is jól ismerte és számba vette diákjai és hazája lehetőségeit és igényeit, s nem utolsósorban néki köszönhető, hogy a század közepére fölnőtt Erdélyben is a korszerű műszaki és természettudományos föladatok megoldására alkalmas értelmiség. Hanem az igaz, hogy – kivált eleinte – a tanításon és a tudományos munkásságon kívül igen sok minden lekötötte a figyelmét, emésztette az erejét. Reá is kényszerült, hiszen a szűkös tanári fizetést mindenképpen pótolnia kellett, de minden iránt érdeklődő s a közjóért lelkesülő természete is erre ösztökélte.

Csakugyan ott találjuk őt a korabeli haladó szellemű mozgalmak csaknem mindegyikében. A század elején Aranka Györggyel (1737–1817) együtt tervezi és szervezi a Nyelvmívelő Társaság újraindítását, a tízes években Marosvásárhelyt ő Döbrentei Gábor (1785–1851) Kolozsvárt megjelenő *Erdélyi M*úzeumának leglelkesebb terjesztője, a harmincas években az induló *Tudományos Akadémia* munkásságába igyekszik bekapcsolódni (s ha nem sok sikerrel, az nem őrajta múlott), a negyvenes évek forrongásaiban jól meggondolt, radikális tervet dolgozott ki *Úr-bér kárpótlás* címmel[11] a mezőgazdasági termelés szabad munkán és egyenjogúak szövetségén alapuló újjászervezésére. (…)

---

[11] A tervezet szövegét lásd: Sarlóska Ernő – Gazda István: Az utópista Bolyai Farkas. = Világosság 18 (1977) No. 7. pp. 443–445. *(– a szerk. megj.)*

Akármit csinált is azonban: írhatott pályázatra, vagy saját tetszésére drámát (*Öt szomorú játék* – Szeben, 1817., *A párisi per* – Marosvásárhely, 1818), rakhatott kedvtelésből vagy pénzért kályhát, törhette a fejét technikai, vagy szervezeti kérdéseken: szenvedélye, álma, szerelme mindvégig a matézis maradt. A matézis szeretete és a matematikai gondolkozás fennköltsége kapcsolta leginkább lángeszű *fiához*, akit kisded gyerekkorától kezdve ő nevelt féltő szeretettel és kivételes gonddal. S mikor a lánglelkű gyermek az ő útmutatásai – egyben tilalmai! – nyomán a párhuzamosak évezredes titkának közelébe férkőzött, riadt elragadtatással követte őt a meredek úton, s elsőként értette meg a korszakalkotó fölfedezés – az abszolút geometria – lényegét *is* fontosságát. Ezért *is* nyomtatta ki fia művét saját *T*entamen című könyvének „függelékeként", de – páratlan eset minden volt s leendő függelékek történetében – majd egy évvel a kétkötetes könyv első kötetének megjelenése (1832) *előtt*! 1831 tavaszán már el is küldötte János fia remekművét, az abszolút geometriát tartalmazó *„Appendix"*-et nagy barátjának Göttingába, izgatottan várva a „matematikusok fejedelmének" véleményét. Azt ugyan várhatta, Gauss csak sürgetésre, nagy késve válaszolt, s néhány sorban csupán:

> „Ha avval kezdem, hogy nem szabad megdicsérnem, bizonyára egy pillanatra meghökkensz; de ha megdicsérném, ez azt jelentené, hogy magamat dicsérném: mert a mű egész tartalma, az út, melyet fiad követ, és az eredmények, amelyekre jutott, majdnem végig megegyeznek részben már 30–35 év óta folytatott meditációimmal..."

Jól ismert a levél erősen különböző hatása apára s fiúra; Kocsis István romániai magyar író össze is foglalta az összecsapó vélemények és szempontok tragédiáját egy tudománytörténeti hitelességű drámában (*Bolyai János estéje*, 1970). Azt meg Benkő Samu ásta ki Bolyai János kéziratos vallomásaiból hogy miként emelkedett felül az abszolút geometria új világát föltáró nagy lélek Gauss – s részben apja – kicsinyességén. Pedig jórészt ennek a Gauss-levélnek köszönhető az is, hogy Bolyai János kapitány soha az osztrák–magyar ármádiában tehetségének s tudásának megfelelő beosztást nem kapott, s nyugdíjaztatását kérve, hazaköltözött Erdélybe. Elébb Marosvásárhelyt lakott, de azután. mikor szertefoszlott az apjával való közös munka ábrándja, kiköltözött Domáldra. A két nagy ember sok felesleges fájdalmat okozott egymásnak; pörlekedéseik jó részét föl is jegyezték; a feljegyzéseket azután életrajzíróik később hol az egyikük, hol a másikuk „pártjáról" értelmezték. Benkő Samu vonta meg végül is a nagy per mérlegét *Bolyai János* vallomásai című könyvében.

„Apjáról szólva – írja Bolyai Jánosról – élete különböző korszakaiban szinte teljesen kimeríti a magyar nyelvnek A szép és a rút, a nemes és a nemtelen megnevezésére szolgáló valamennyi jelzőjét. Dicséret és szidalom, fiúi büszkeség és kötekedő perlekedés sűrűn váltogatják egymást a ránk maradt kéziratokban. A legérdekesebb azonban az, hogy mindketten a legkíméletlenebb sértést is nyomban elfelejtik, ha hirtelenjében valami érdekes tudományos kérdés kerül szőnyegre. Halálosan komolyan vették, hogy életük a tudomány."

Bolyai Farkas tudományért való életének eredményeit legutóbb *Weszely* Tibor marosvásárhelyi matematika-professzor foglalta össze. A nem matematikusoknak is érthető könyv (*Bolyai Farkas*, Bukarest, 1974) elsősorban azt mutatja meg, hogy milyen nagy, eredeti ötletes matematikus volt Bolyai Farkas. Túl azon, hogy az általa tárgyalt területeken mindig lépést tartott korával, számos esetben meg is előzte azt. Például halmazelméleti fogalmakra és tételekre alapozta az analízist harminc-negyven évvel a halmazelmélet szabályos megszületése előtt, s valóságos matematikai logikai bevezetéssel kezdte a *Tentamen*t akkor, amikor ennek a napjainkban annyira fontos tudományágnak még a csírái sem léteztek. És fölismerte a matematikai alapkövetelmények, az ún. „axiómák" egymáshoz való viszonyát. A matematika alapjainak tisztázásra irányuló vizsgálatairól ő maga – és napjainkig úgyszólván csak ő maga – mindig tudta, hogy milyen fontosak. Ezért is írhatta már 1808 végén Gaussnak: „Szép volna, ha Te a büszke torony tetején dolgoznál, én pedig az alapjain elmélkedném..."

Gauss ekkor már világhíres matematikus volt*, s* egyébként sem igen érdekelhette egy efféle munkamegosztás. Igen erősen hatott ellenben a büszke torony alapjain elmélkedő Bolyai Farkas másvalakire, akinek nagyobb szüksége volt rá, mint Gaussnak: a fiára. Az *eszmék* fejlődését tekintve Bolyai János matematikai gondolkozást forradalmasító műve egyáltalában nem véletlenül és nem esetlegesen került a matematika alapjait vizsgáló *Tentamen* első kötetének a végére, hisz végül is ez az *Appendix* oldotta meg a geometriai axiómák egymáshoz való viszonyának évezredes problémáját, amit a *Tentamen* – ha általánosságban is és logikai síkon – megközelített. Érezte az összefüggést saját munkája és ez abszolút geometria között Bolyai Farkas is, *és a Tentamen* második kötetében (1833) néhány nagyon *fontos* megjegyzést tartalmazó „függelékben" reflektált fia *Appendix*ére. Itt vázolta például azt az utat amelyen haladva azután az olasz Eugenio *Beltrami* megalkotta a nem-euklidészi sík euklidészi „modelljét". Élete vége felé, 1851-ben egy német nyelvű könyvben foglalta össze vizsgálatait, s ez a könyv is fia – s Lobacsevszkij – eredményeire való utalással végződik. És az öreg tudós tanár „módszertani" alapelvének is fölfogható a *Befejezés*:

> „Az országúttól való eltérés nem volt szándékos, a végtelen mélység feletti mágnestűé volt. A helyreigazítás épp oly szívesen látott lesz, amint azt híven követni az egyedül az igazságra tisztán törekvőnek szabadságában állott.”

Maga sem élt mindig elvei szerint; fiával való keserű perlekedéseikben igencsak őt terhelheli a súlyosabb felelősség. De a *Tentamen* – Benkő Samu szép szavával: „apa és fiú együvétartozásának legszebb szimbóluma” – kárpótol „a sok fatális minus”-ért. A *Tentamen* – Bolyai Farkas matematikai életművének summája – összhangzó háttérként hangsúlyozza és erősíti az (emberi és szakmai szempontból egyaránt) legilletékesebb bíró, Bolyai János szavát: „Alig van párja atyámnak”.

Bolyai-levelek[12]

Benkő Samu könyvéről

A Bolyai-levelek elsősorban ennek a másságnak az „árát” mutatják meg. Azt a töméntelen kínt s szenvedést, amivel apa s fia fizetett a mi mai kényelmesen bejárható nem-euklidészi világunkért. Mert ami nékünk ma már – Sinkó Ervin tanulmányával szólva – „Middlesex”, azaz a reális és hasznosítható tapasztalat világa, az az ő korukban még merő „Utópia” volt, úgyannyira, hogy a nagy Gauss, félvén a „middlesexiektől”, nem is merte nyilvánosságra hozni a maga hasonló gondolatait. Igazában még saját magának is alig-alig vallotta be őket. Bolyai Farkas–Gauss Bolyai János görög tragédiákba kívánkozó kapcsolata – Benkő Samu páratlan szakértelemmel s történész-lényeglátással összeállított válogatásából azonnal nyilvánvaló – „Middlesex” és „Utópia” küzdelme. Eleve „reménytelen” volt tehát, és szükségképpen kellett, hogy az Utópia – később jórészt Middlesexszé szelídülő – bukásával végződjék. Így hát semmi köze az ügyhöz Gauss „hidegségének”, „szívtelenségének”, Bolyai Farkas annyiszor s oly oktalanul felhánytorgatott – „bizalmaskodásának”, „maga- és fiakelletésének”, János „bizalmatlanságának”, „sértődékenységének” stb. Ezek s hasonló – meglevő vagy vélt – tulajdonságaik teljesen lényegtelenek, félrevezetőek. Hiába írt volna Bolyai Farkas királyokat megillető hódolattal Gaussnak, hiába „kímélte” volna meg sok gondot okozó borküldeményeitől s magánélete viszonzást váró – „kiteregetésétől”, de János is mind lehetett volna mintafiú és mintakatona, a sorsukon mindez nem vagy alig változtatott volna. Mert az azon minutában eldőlt, hogy átlépték – János végleges és végletes elszánással, Farkas tán tétován és hátra-hátrapillantgatva – az utópiák határát. „Az egyes ember – írja Sinkó Ervin –, amint az utópisztikus szellem kerül felül benne – mert az egyes emberben a middlesexi és utópisztikus princípium halálosan közel áll egymáshoz, és nem valahol egyik ezen, másik más csillagon –, akkor minden közösségből következő, közösséget összetartó relatív etika összeomlik, és az egyes ember, mint individuális lélek, az abszolút igézete alatt állván, a közösség rossz lelkiismerete lesz.” A jó marosvásárhelyi polgárok például még a századfordulón sem tudták megbocsátani szegény Bolyai Jánosnak – a rossz lelkiismeretüket; de nem lehetetlen, hogy a nagy Gauss kurta-furcsa elismerése megett is valami efféle dilemma rejtőzködött.

[12] Forrás: Vekerdi László: Bolyai-levelek. Válogatta, a bevezető tanulmányt írta és a jegyzeteket összeállította Benkő Samu. Bukarest, 1975. Kriterion. (Téka). (Ism.). = Tiszatáj 29 (1975) No. 9. pp. 99–101.

Bolyai Farkas Gaussnak írott levelei magyarul (B. Fejér Gizella szó szerint hűséges, de jellegzetes Bolyai Farkas-fordulatokkal hitelesített fordításában) mindenesetre sokkal természetesebben hatnak, mint németül, s még elképzelni is nehéz, hogy valóban „sérthették” a matematikusfejedelem „érzékenységét”. Elhidegülésük, a levelezés meg-megszakadása hosszú időre, s legfőképp az epedve várt s csak ismételt sürgetésre megérkező vélemény János művéről így semmiképpen sem magyarázható efféle egyszerű pszichológiai momentumokkal. S az is jól látható a levelekből, hogy a göttingai s a marosvásárhelyi professzor szellemi és anyagi helyzete sem különbözik olyan égbekiáltóan, mint a tudománytörténet-írás tartja. Igaz, Bolyai Farkas Marosvásárhelyt sokkal bajosabban jutott könyvekhez, s főleg hasonlíthatatlanul rosszabbak voltak publikációs lehetőségei; de évek hosszú sora alatt mégis igen jól használható kézikönyvtárat gyűjtött, s ha nehezen, ha küzdelem s megalázó pártfogáskérés árán is, de kinyomtathatta legfontosabb gondolatait s fölfedezéseit. Hasonló gondokkal – még a feudális világban mindenütt megkívánt hajbókolást sem kivéve – Gaussnak is küzdenie kellett, a különbség inkább kvantitatív mint kvalitatív. S Gauss is hasonlóan – s ugyanolyan nehezen – gondoskodott tanítványairól, mint a maga szerényebb lehetőségei közepette Bolyai Farkas. S Gauss sem volt mentes az afféle anyagi gondoktól, amik a marosvásárhelyi professzor életét lépten-nyomon keserítették.

Az itt először vagy egészükben először közölt levelek – Bodor Pálhoz, Kendeffi Ádámhoz, Bod Péterhez, Incze Dánielhez – a kor átlag kisvárosi professzorainak az életmódjához közelítik a Bolyai Farkasét, s a „nyomorgó” és az „arisztokraták kegye után kapkodó” – maga módján egyformán romantikus – Bolyai Farkas-képet egyaránt megcáfolják. „A helyzetéből következően segítségre szoruló Bolyai Farkas – írja Benkő a Bevezetésben – a reformmentességtől remélhetett támogatást. ... Sokszor bátorította magát, s mellőzte a »kényes point d'honneur«-t, ha úgy érezte, hogy ezzel mozdíthat valakinek kátyúba ragadt szekerén. Nem önös célok s nem urakhoz dörgölődző szolgalelkűség vezérelték lépteit a szalonokba, hanem a körülmények kényszerítő ereje, hogy a tőle függetlenül létező társadalmi szerkezetből kikényszerítse a lehetséges kompromisszumot. Akciói váltakozó sikerrel jártak, de jóérzés töltötte el, valahányszor közvetíthetett a tehetség és a tehetősek között.” Fiát is csak így sikerült bejuttatnia a bécsi hadmérnöki akadémiára, a néki akkor elérhető legjobb helyre. A Bécsbe, fiának írt leveleiből itt közöltek – s hozzájuk Benkő értő kommentárjai – szépen mutatják, milyen kivételes szakmai s apai gonddal irányította a távolból is lángeszű gyermekét. S egyben figyelmeztetnek is a többi – a Magyar Tudományos Akadémia Könyvtárában őrzött –

Bécsbe írt levél kiadásának a szükségességére és felelősségére.

A kiadás, a *csonkítatlan* kiadás fontosságát mutatja az az itt először közölt néhány levél is, amit Bolyai János öccsének, Gergelynek írt az ötvenes években. Ezeket a (Magyar Tudományos Akadémia Könyvtárában őrzött) leveleket régóta ismerik a Bolyai-kutatók, használtak is belőlük szavakat, töredékeket eleget. De csak így, teljességükben árulják el igazi mondanivalójukat, s csakis értő kézzel összeszedve – épp ebben rejlik az edíciós munka művészete – segíthetik az igazság megismerését. Ezekből a levelekből például eddig főleg Bolyai János apja elleni – „hálátlannak” vagy épp „kórosnak” minősített – kifakadásait „mazsolázták ki”, vagy makacsul folytatott s bőven részletezett Priessnitz-kúrájából próbáltak „karakterére” következtetni. Holott valójában egy velejéig normális és racionális elme, csak éppen félelmetesen magára maradt lélek próbál ezekkel a levelekkel – még önmaga leplezgetése árán is – kapcsolatot teremteni, megkeresni az egyedül lehetségesnek látszó fogódzkodót az emberek világához. Üdvtana utópiáiról nyilván nem írhatott nagyon is middlesexi öccsének; de akkor aligha maradhatott egyéb, mint kisebb-nagyobb közös ügyeik: apjuk sajnálkozással s szeretettel teljes fiúi szidása – magában is a „családi együvé tartozás” jele –, az örökség s egyéb anyagi ügyek latolgatása, a betegség, a kúrák, az öregedés. Szívfacsaró, ahogyan belékap az első halvány reménybe, mihelyst Gergely némi matematikát-tanulhatnéknak látszik. Hogyan tanítaná mindjárt, hogy’ ajánlkoznék mesterül! Igaza van Benkő Samu kommentárjának: a magányról szólnak ezek a levelek, s a kitörés vágyáról. „A magány a kényszerűség fattyúhajtása, alapvetően ellentétes az emberi természettel, s ezért valamennyi magányos előbb-utóbb megpróbál rést vágni az öt bezáró falakon.” De nem akármilyen magány a Bolyai Jánosé. Ez a magány – ismét Sinkó Ervin szavával szólva – „...a közösségtől különvált emberé, aki szenved alatta, hogy nincs társadalmi küldetése – és kigondol magának egyet, azt, amit a legnemesebbnek tart és – s ez nagyon fontos: a legszebbnek.” Nyilvánvaló: az Üdvtan forrásvidékén járunk. Ám „aki kiválik a kész feltételek világából, annak minden kérdéssé válik. Shakespeare embere már semmitől és senkitől se kap segítséget: egyedül kérdez és neki magának kell életéhez célt és tartalmat találnia”. Bolyai Jánosnak Gergely öccséhez írott levelei éppen tökéletes kérdésmentességükkel, normalitásukkal, mondhatni mindennapi józan egyszerűségükkel árulkodóak – és félelmetesek.

„Don Quijote észre tér, s mert észre tér, már nem tud tovább élni ... A norma győz, de nem válik dicsőségére. A győzelem nem morális érv, csak faktum, de hogy Don Quijote számára a valósághoz való megtérés egyértelmű a remény feladásával, s hogy megtérni a valósághoz összeomlást jelent a lélek s halált Don Quijote számára: ez érv a valóság és a kollektívum ellen, ha sírásba fúló érv is.” „Don Quijote – összegezi a Sinkó-kötethez írt előszóban Bretter György – a vergődő, meddő, tragikusan elszigetelt, a társadalomból kiközösített ember szimbóluma ... Csak esztétikai és etikai viszonya van saját magával, a világgal szembeni viszonya a bolondé. aki mikor észre tér – meghal.” Sinkó Ervin tanulmányai elsősorban azt firtatják, hogy miféle társadalom az, amelyik száműzi magából az öntudatára ébredt individuumot ábrándjai világába, s csak a normáit elfogadókat veszi vissza – meghalni.

Apa és fiú[13]

Benkő Samu könyvéről

Bolyai Jánosról nem maradt arckép, s 1968-ig ugyanilyen ismeretlen volt szellemi portréja is. 1968-ban jelent meg *Bolyai János vallomásai* címmel Benkő Samu monográfiája, s ez egyszeriben megváltoztatta a helyzetet. Az *Appendix* lángeszű szerzője Benkő szakavatott munkája nyomán hirtelen hús-vér emberré változott, akit nem varázsolhatnak többé kutatók s regényírók kényük-kedvük szerint párbajhőssé, tüzes forradalmárrá, osztrák katonatisztté, háládatlan gyermekké, mániákus őrültté, szarvasbikává s ki tudja még mivé. Ezek a közkeletű – s részben még ma is divatos – történelmi papírfigurák *Bolyai János vallomásai* nyomán szertefoszlottak s nevetségessé váltak. Benkő munkájának ugyanis aranyfedezete volt: tizennégyezer lapnyi Bolyai János kézirat, amit ő olvasott el először s rendezett használható állapotba. A megfejtett kézirattömeget, illetve az abból kibontakozó Bolyai-portrét azután páratlan helyzetismerete segítségével pontosan a kellő helyre tette a korabeli Erdély életében, s még ahhoz is értett, hogy ezt a helyzet-azonosított portrét a történelem sodrásával sorssá elevenítse. Azaz a Bolyai-monográfiában készen s egyben *in statu nascendi* figyelhető meg egy újfajta művelődéstörténet-írás, amit egyik értő kritikusa joggal nevezett „szerencsés”-nek, de nevezhetnénk akár „Benkő-módszer”-nek is, annyira új, ötletes és jellegzetes. A módszer fölismert elemei (a forrás-bázis lehető legnagyobb mérvű bővítése, a sokfelől betájolt helyzetazonosítás, a helyzettudatban tükröződő sorsok fölfejtése) ha nem másként, legalább igényként azóta behatoltak történetírásunkba: Benkő azonban túl ezeken a metodikai kritériumokon tud még valamit, ami utánozhatatlan s aminek semmi köze módszerhez és szerencséhez. Csakhogy ezt a többletet nem lehet ilyen egyszerűen megfogalmazni és nem intézhetjük el az írni tudás emlegetésével sem; jobb tehát, ha visszatérünk a jelen kötet[14] recenzeálásához.

Az *Apa és fiú* Domáld leírásával indul, mely az *Utunk*ban jelent meg először 1969-ben, s aztán a *Sorsformáló értelem*ben, Benkő 1971-es nagy sikerű tanulmánykötetében. Az írásból szinte szemmel láthatóan bontakozik ki a táj, ahol a Bolyaiak hosszabb-rövidebb ideig együtt s külön éltek; Benkővel – megérkezésünk Domáldra beavat drámájukba, mert megértjük „az emlékezés örömét és felelősségét”. Az emlékezés öröme és felelőssége azután végig velünk

---

[13] Forrás: Vekerdi László: Benkő Samu: Apa és fiú. Bp., 1978. (Ism.) = Irodalomtörténeti Közlemények 83 (1979) No. 3. pp. 334–336.

[14] Benkő Samu: Apa és fiú. Bolyai-tanulmányok. Bp., 1978. Magvető, 393 p. (Elvek és Utak)

marad, a Farkasról szóló tanulmányokban csakúgy, mint az itt újraközölt *Bolyai János vallomásai*ban, mert Benkő minden sorából világít az emlékezés öröme és minden sorát szilárdan a Földhöz köti az emlékezés felelőssége. A hely így színhellyé transzformálódik, Domáld csakúgy mint Marosvásárhely vagy Göttinga, s a dráma személyei személyes ismerőseinkké szelídülnek. Ez óvja meg a részletek elképesztő bőségét attól, hogy tudós tudás-fitogtatássá üresedjenek: itt minden apróságnak jelentése van. Így például a vetélytársak részletezése Bolyai Farkas marosvásárhelyi meghívásának tárgyalásában a főkonzisztórium utólag fényesen igazolódott választani tudásán túl mélyen bevilágít a közép-kelet-európai értelmiségképződés sűrű homályába, s megérteti, hogy a nagy professzor nem holmi művelődéstörténeti csudabogárként hajolt üstökösként megjelenő fia bölcsője fölé, hanem hosszú s nehéz folyamat része – s előrelendítőjeként szervesen kapcsolódott egy százados társadalmi és pedagógiai fejlődésbe. Egy másik dolgozatában pedig levéltári dokumentumok részletes elemzésével oszlatja el Benkő a „nagy tudós de rossz tanár” megrögzött legendáját Bolyai Farkas körül, s visszavonhatatlanul kijelöli elsőrendű helyét a hazai műszaki értelmiség első nemzedékének fölnevelésében. Még évfordulóra írt meditációja is sokkal mélyebbre ás a szokásos jubileumi megemlékezéseknél, s Bolyai Farkas pályáját tehetség s társadalmi igények izgalmas ütköztetéséből deriválja. Utóbbi szó itt nem merő metafora, mert miként a derivált – a differenciálhányados – meghatározza minden egyes pontban a görbe irányát, úgy igazodik itt a marosvásárhelyi tanár pályája a honi társadalmi és kulturális erőtér vektoraihoz, célratörő részletgazdagságot eredményezve. Így válik evidenciává Benkő konklúziója:

> „Bolyai Farkas tehetségének gazdagsága és kora művelődési életének szegénysége, tudományos légkört teremtő intézmények hiánya egyaránt közremunkált életműve szétaprózódásában. A szétszóródó energiákat azonban mégiscsak összetartotta a célratörő erkölcsi elv: az igazság szolgálatának a pátosza és a permanens intellektuális magatartás: a teremtés igénye… Gazdagság vagy szegénység ez? Mind a kettő: maga a meztelen élet.”

És ezzel eljutottunk Bolyai János életének apjáéval párhuzamosan, ám intenzitásban s tragikusságban magasan fölötte futó ívéhez.

Benkő Samu *Bolyai János vallomásai*ban részletek bőségét hasznosító ökonómiával vázolja ezt az ívet. Először egyhuzamban idézi Bolyai János eddig csupán kivonatosan publikált önéletírásának leglényegesebb részeit, s ez a lényegre törően tömör írás vezeti azután az olvasót a jól ismert Bolyai-témákban, mint a paralellák, Gauss, Lobacsevszkij, apa-fiú viszony, nő, magány, betegség. A kéziratok bizonysága szerint mindenütt bőven akad módosítani való, de Benkő sehol nem a cáfolatokra s a tévedések „leleplezésére” helyezi a hangsúlyt. Egyszerűen, pár szóval intéz el történész-legendákat s hagyományos kisvárosi pletykákat; nyoma sincs benne az új forrásanyagot föltáró történészek kioktató magabiztosságának. Ellenkezőleg, ahol csak lehet elismerőleg idézi s érdemben használja megelőző Bolyai-kutatók eredményeit. A kikerekedő Bolyai-portré mégis merőben új, még részleteiben sem hasonlít addigi elképzelésünkre. Benkő Bolyaija: „*Vállaló* embernek született, s apja is annak nevelte.” Innét vonzódásuk és ellentétük, s küzdelmük a paralellákkal.

> Mert „az apák szomorúságára, de az élet nagy diadalára, minden gyermek mindent elölről kezd, s a tett, a gondolat és az álom jogához egyaránt ragaszkodik… A generációk, mikor egymással feleselnek, pünkösdi apostolok módjára, idegen nyelveken beszélnek, s keblükből feltörő igék ritmusára lépnek. Bölcs öregek tanácsára a fiatalok sohasem mondhatnak le a csalódáshoz való jogukról. – Többek között ezért ment előbbre az emberiség.”

Ifjonti újrakezdés eredménye a paralellák kiküzdött igazsága, melybe egyaránt beleépült az apa útkeresése és féltő óvása. Finoman elemzi Benkő Gauss elsősorban önmagát mérő ítéletét, s meghatóan szép idézetekkel dokumentálja Bolyai János vívódását Lobacsevszkij remekével, s növekvő elismerését iránta.

> „Az orosz tudós teljesítményét méltató Bolyai-sorok írójuk jellemnagyságáról árulkodnak: »…én örömest megosztom a találói érdemet. Bár minden orosz és más államtanácsnok hasonló szeretettel bírna a tiszta mathesisi s tehát – mert az term[észeti] és szüks[éges] következményi – az erkölcsi igazhoz is.«”

Az erkölcsi igaz, „a jónak tudata” vezette mindig a gondolatait, töprengéseit, gondjait papírra rovó Bolyai Jánost. Benkő Samuig erről a Bolyairól legföljebb legendákat vagy anekdotákat tudtunk; Benkő ismerte föl a kézirattömeg különleges jellegét: egy végzetesen magára maradott nagyságos elme önmagával folytatott dialógusát, egy fényes, nagy lélek görög sorstragédiákba illő vergődését. Társak teljes hiányában Bolyai lejegyezte minden gondolatát, olyanokat is, amiket mások óvakodnak papírra vetni, vagy akár magukban is tisztán megfogalmazni.

> „A Bolyai-kéziratok egyik különlegessége éppen abban áll, hogy szép számmal őrzik alkotójuk senki másra nem tartozó, legbensőbb gondolatait.”

De még ezek a senki másra nem tartozó, legbensőbb gondolatok is – ez a kéziratok másik különlegessége – valamiképpen a közjóval, a közüdvvel függenek össze; a domáldi majd marosvásárhelyi remete minden gondolatát, egész életét betölti a javítani akarás, a segítés vágya, a lelke legmélyéből szánt szegény emberiség üdvössége. Benkő Bolyaija makacs következetességgel vallotta, vállalta és ismételte: Tisztességes ember addig igazán boldog nem lehet, míg más, amíg a másik ember emberi butaság s gonoszság miatt szenved. Ez az *Üdvtan* alapeszméje, amit nagy ás nyugtalanító örökségként hagy reánk.

Tan és *Üdvtan* változatait s terveit vég nélkül papírra rovó Bolyai Jánost sajnálni volt szokás fényes tehetségének elpocsékolása miatt; most hirtelen megfordul a perspektíva: a megszánt megszállott nagy és szuverén morálfilozófusul tart tiszta tükröt elibénk, melyben meglátszik „a jeleni valóságos állapot hív képe”, s kirajzolódnak társas szenvedéseink ész és okosság általi megszüntetésének lehetőségei. Semmelweis jut az ember eszébe, ő harcolt korán reászakadó vénségében ilyen makacs és racionális elszántsággal a szegény sorsú szülő nőkért. S egyéni sorsát tekintve a honi intézmények keretében s a világ tudós közvéleményében ugyan olyan tragikus sikertelenséggel.

> „A szétszóródó energiákat azonban mégiscsak összetartotta a célratörő erkölcsi elv: az igazság szolgálatának a pátosza és a permanens intellektuális magatartás: a teremtés igénye. Gazdagság vagy szegénység ez? Mind a kettő: maga a meztelen élet.”

Benkő Bolyaija pedig elfoglalja helyét az ember sorsáért aggódók s felelősséget vállalók sorában. Túl a matematika tágas világán így épül be kitéphetetlenül a honi nehéz pallérozódás folyamatában. Alakja, gondjai s gondolatai nélkül a magyar művelődés ugyanúgy érthetetlen és értelmetlen, mint Petőfié, Aranyé, Vörösmartyé vagy Bartóké nélkül.

Benkő Samu két új könyvéről[15]

Két új Benkő Samu-kötet látott napvilágot mostanában: egyik a Magvető Könyvkiadónál, másik a Kriterionnál. A Magvető „Elvek és utak” sorozatában kiadta az először épp tíz éve megjelent *Bolyai János vallomásai*t – az azóta írt Bolyai Farkas-tanulmányokkal együtt – *Apa és fiú* címmel, a Kriterion pedig mintaszerű gonddal és gyorsasággal kötetbe gyűjtötte *A helyzettudat változásai* cím alatt a kolozsvári történész legutóbbi években megjelent rövidebb tudományos dolgozatait, esszéit, könyvbevezetőit, recenzióit. A szakma *Bolyai János vallomásai*t azonnal a terebélyes Bolyai-irodalom néhány eligazító alapművének egyikeként ismerte fel és el; Tóth Imre – akinél a dolog megítélésében nincs illetékesebb – Paul Stäckel Bolyai-kutatást elindító, máig nélkülözhetetlen klasszikus monográfiájához hasonlította s mérte Benkő Samu könyvét. A könyv azonban szakmai körökön túl is valósággal revelációként hatott – Németh László említi, hogy ismeretében egészen másként írta volna meg Bolyai-drámáját –, s szerzője akarva-akaratlanul a gyorsan fejlődő művelődés- és tudománytörténet-írás élvonalába került, akitől most már a Bolyai-könyvhöz méltó műveket vártak. Benkő Samu pedig úgy felelt meg a várakozásnak, hogy szép csendesen forradalmasította az egész magyar művelődéstörténet-írást: megreformálta módszereit, újrafogalmazta célkitűzéseit és kereteit.

Először is egészen különleges és szoros kapcsolatot teremtett forrásvilágával. A magyar művelődéstörténet-írás nagyjai persze Takáts Sándortól Klaniczay Tiborig mindig is források közelében éltek, írtak és gondolkoztak; ámde Benkő Samu ezen túl bensőséges, valósággal személyes és baráti viszonyba kerül velük. A többi történész – szerencsés esetben – „megeleveníti” adatait; Benkő Samu ellenben mesteréhez, Kelemen Lajoshoz hasonlóan – eleven forrásokra lel, élő vizekre vezeti az olvasót. Úgy ül le faggatni a kéziratokat, ugyanazzal a természetes magatartással és észjárással, mint ahogyan a kilencvenesztendős Kós Károllyal – maga is élő történelem – elbeszélgetett magafaragta sakkfiguráiról. Nem ölt tudós doktori ornátust, nem igyekszik elképeszteni mérhetetlen filológiai tudásával és értelmezéseinek szellemességével. Olyan közvetlenül és köntörfalazás-mentesen bánik forrásaival, mint a nagyon jó riporter a beszélgetőpartnereivel; Beke György szokta ilyen lényegre törő egyszerűséggel megszólítani és megszólaltatni riportjainak szereplőit. Ez az egyszerűség és közvetlenség engedi azután az olvasót is közvetlenül a megszólaltatott

[15] Forrás: Vekerdi László: Benkő Samu két új könyvéről. [Apa és fiú. + A helyzettudat változásai.] (Ism.) = Tiszatáj 32 (1978) No. 6. pp. 74–78.

források közelébe; nyoma sincs Benkő historiográfiájában a forráskritikai akríbia rafinált és monumentális lábjegyzet-kriptáinak s apparátusmauzóleumainak. Bolyai János sok évnyi fáradtsággal rendezett kézirattömegéből például micsoda megközelíthetetlen, könyvtárnyi irodalommal körülbástyázott, és az összes volt s jövendő tudományos vetélytársakat „lesöprő" forráskritikai remekelést sikerítettek volna mások; Benkő Samu ellenben nem fitogtatja jártasságát a kéziratokban, a legszükségesebb másodlagos irodalomra szorítkozik, s hagyja beszélni a forrásokat. Nem mintha nem bánna vélük nagyon is kritikusan. Csak éppen nem engedi, hogy a kritika kavicsai eltérítsék és eltömjék őket. Még magától a forrástól is védi annak tisztaságát: biztos szemmel s kézzel válogat az áttekinthetetlen kézirattömegben, elválasztja a fontosat a lényegtelentől, az eleven embert keresi, nem csontváza ezernyi apró darabra hullt porcikáit. Nem fetisizálja az általa először föltárt kéziratokat, nem akar fényükben mindent újraírni. Szívesen elismeri elődei érdemeit, s ahol Bolyai-képe megegyezik az övékével, elfogadja – tisztességgel idézett – megállapításaikat. Mégis merőben új és organikusan összefüggő Bolyai János így kikeresendő portréja, s nem kell külön hangsúlyozni, mert evidens, hogy ez az igazi. Benkő Samu forrástechnikája evidenciaélményt teremt, a források az ő historiográfiájában „evidenciák" forrásai, Veres Péter-i értelemben. *Ezért* pontos és jogos a címben a „vallomásai" szó, nem az idézett kéziratos anyag kivételes bősége és újdonsága miatt. Az idézetek tömegéből konkrét emberi kapcsolatok emelkednek ki, ezek rendezik, észrevétlenül szinte, szervessé és életessé a hatalmas anyagot.

Benkőnek soha sincs rá szüksége, hogy karakter- és jellemábrázolásokkal bűvölje olvasóit (s önmagát), az ő emberi kapcsolatokba szerveződő forrásrendszerében minden magától a helyére kerül, s még a hiány is forrássá válik, mint például az öregedő Bolyai János *nem* találkozása ifjúkori barátjával, Szász Károllyal, aki Bolyai Farkas tanszéki utódaként évekig ugyanabban a kisvárosban él. S a konkrét emberi kapcsolatok rendszerében megnyugszik végre az évszázados pör apa és fiú között; végleg a történetírás lomtárába kerül a hálátlan, kötekedő, nagyvilági „osztrák–magyar katona-lángelme" rosszfiú, és a meg nem értő hiú, irigy, önmagát szétszóró, Gauss-szal bizalmaskodó, szentimentális kisvárosi atya rémképe. De nem mintha Benkő bármiféle vétküket vagy akár gyengéjüket is elhallgatná vagy pláne szépítené: apa és fiú teljes egészében bemutatott viszonyában azonban önmagától szétválik az érc a salaktól, s bolond (vagy szellemtörténész) legyen, aki ezután is összekeveri a kettőt. S ugyanígy tisztázódnak a Bolyaiak kapcsolatai a többiekkel: családjukkal, barátaikkal, ismerőseikkel; a nagy Gauss-szal, Lobacsevszkijjel, a világgal. S bár Benkő le nem ír egyetlen matematikai képletet, és tudatosan tartózkodik a nagy fölfedezés bármily futólagos ismertetésétől, mégis jobban megértjük könyvéből a matézis jelentőségét apa és fiú életében, s az övékét a matézisében, mint bármiből, amit eddig erről írtak. Pedig az nem kevés, és nem is mind értéktelen.

A megértés „titka” végeredményben Kolumbusz tojása: a források konkrét emberi kapcsolatokká rendeződését a „helyzet” mérnöki pontosságú bemérésével alapozza meg Benkő Samu. Így, és csakis így érthető meg, a tényleges erdélyi helyzetből, Bolyai János észjárásának szédületes pályája és egyéni életének tragédiája: de tán még ennél is jobban tetten érhető Benkő helyzetanalízise a Bolyaiakénál kisebb jelentőségű esetekben, ahol a teljesítmény és a helyzet racionális arányát nem váltja még fel a lángelme mindig legföljebb csak megközelíthető irracionalitása. Így például a Sipos Pált, Beke Sámuelt vagy Ormós Zsigmondot bemutató esszékben.

Sipos Pál viszonylag jól ismert alakja a magyar művelődéstörténetnek: az első nemzetközileg nyilvántartott magyar matematikusként „jegyzik”. Ámde Benkő nem ebből az absztrakt aspektusból közelít hozzá; őt nem ez a – valljuk be, szívszorítóan sokadrendű – „világhír” érdekli. Ő azokat a tényleges és közvetlen megélhetési, művelődési és emberi viszonyokat keresi, melyek egy ilyen kvalitású ember pályáját az akkori Erdélyben meghatározták, kibontakoztatták, behatárolták. Észreveszi a hagyományosan kialakult oktatási rendszer lehetőségét arra, hogy egyetlen hivatott fizika–matematikatanár, Kováts József munkája nyomán hirtelen föllendülhessen a matematikatanítás színvonala. De látja a feudális korlátokat is: Kováts kiműveléséhez a Telekiek támogatása kellett, Sámuel gróf „mentoraként” járta meg a külföldi egyetemeket. Esetleges és esendő tehát ez a lehetőség, ámde szerencsés esetben még a tanítványokra is kiterjedhet: Sipos indulását mindenesetre Kováts Telekieknél kivívott presztízse egyengette. Előkelő pártfogók s jóakarók révén jutott később is szászvárosi, illetve sárospataki professzorsághoz. Mindkét helyt derekasan megalapozta, illetve megjavította a természettudományos és matematikai oktatást, ámde ahhoz, hogy gondolatai az iskola horizontján túlemelkedhessenek, külső inspiráció kellett: Kazinczy fáradhatatlan biztatása. Kazinczy nyelvmívelő kapcsolatai persze nagyon jól ismert fejezetét képezik a magyar művelődéstörténet-írásnak, ámde Benkő az anyanyelvűség igényében a nemesi kultúrapártolás hagyományos feudális kereteit szükségképpen szétfeszítő új erőt fedezi föl. Mert az anyanyelvű filozófiai esszé megteremtésével Sipos nem csupán azt igazolja, hogy a magyar ugyanolyan alkalmas magvas filozófiai gondolatok kifejezésére, mint a német vagy a latin. Kant, Fichte és Schelling rendszerének tanulmányozása nyomán Sipos úgy fogalmazza meg a szabadság problematikáját, hogy abban nemcsak a cenzúra, de még a felvilágosodott eszmékkel kacérkodó Aranka György is „eretnekséget” szimatol. Nem is kapta meg egyikre sem „a cenzor Imprimatur-ját, s ez önmagában véve is sokat mondó minősítés”.

Ámde esszéi – Benkő nem rest kikutatni – így is terjedtek, másolatokban. S „ez az önmagában véve is beszédes érdeklődés jele egyben annak is, hogy Sipos írásai kora értelmiségi világában objektív szükségletet elégítettek ki.” „Filozófiai írásaival Sipos tudatosan vett részt kora eszmei harcaiban”; segítette az értelmiségiek kicsiny körében a helyzet tudatosulását. S ezzel a kitörést készítette elő a „feudalizmus zárt hierarchikus rendjéből”, hiszen „a helyzettudat változásainak lényegére jellemző sajátossága vizsgált korszakunkban a demokrácia hiányának egyre konkrétabb érzékelése, következésképpen kivívása szükségességének fokozatos felismerése és az érte vívott küzdelem vállalása.”

Az anyanyelvűség és a demokrácia igénye ezeken a tájakon tehát genetikusan és elválaszthatatlanul egyesült. A szintézisben olykor az egyik, máskor a másik hangsúlyozódott; Beke Sámuel zilahi református pap az ezernyolcszázharmincas években például – a korabeli román értelmiséghez hasonlóan, Lamennais abbé hatása alatt – a demokratikus társadalmi átalakulást sürgette és „a feudalizmusból való kilábalásnak a külföldi modelljeit” népszerűsítette prédikációiban; Ormós Zsigmond is a radikális polgári átalakulás lehetőségeit taglalta *Szabadelmű leveleiben*, hiszen az ő haladáseszményük önként értődőként tartalmazta a népi, illetve nemzetiségi szabadság eszméjét.

Hasonlóképpen az 1848-as román röpiratok és felhívások „azt bizonyítják, hogy az erdélyi román értelmiség már kora tavasszal fölkészült, hogy megfogalmazza a társadalmi és nemzeti fölszabadulás programját. Ez az értelmiség a maga létalapját látta abban, hogy nemzeti jogait törvény biztosítsa, mert értelmiségi mivoltából következett, hogy a román nyelv használatát, anyanyelvű kultúrája szabad kibontakozását a demokrácia elidegeníthetetlen részeként értelmezze”. A magyar és a román demokratikus törekvések nem keresztezték eleinte egymást nemzeti tekintetben sem. „Iosif Ighian aranyosbányai ortodox esperes »az Európában közelebbről megtörténtek« legfőbb következményét abban látja, hogy »Erdély különböző ajkú és fajú, eddig egymástól elszakasztott fiait egységben, testvériségben és barátságban közelíteni s összeforrasztani« fogja.” Az „Eszmék és tettek 1848 tavaszán Erdélyben” című társadalompolitikai esszében Benkő Samu félreérthetetlenül demonstrálja, hogy akik a magyarság „javára” korlátozni kívánták a többi nemzet önállóságát, azok egyben a radikális polgári átalakulás ellenségei is voltak, s fejtegetéseit Simion Bărnutiu elvének szellemében summázza, „mely szerint »nemzet nélkül a köztársaság is átkozott zsarnokság«”.

De éppen ez az esszé mutatja meg nagyon tisztán az eszmék – s véle az értelmiség – akciókorlátait. „A világnézeti eligazodásban elsősorban a társadalmi fejlődés elért szintje döntötte el, hogy ki maradt meg bezárva (ideiglenesen vagy éppen örökre) a gondolatok szférájában, s velük szemben mely eszmék találták meg a maguk természetes útját a tettek irányába, s dúsították maguk is az eseményeket alakító-formáló energiákat.” Azaz Benkő Samu soha, egyetlen pillanatra se csábul el adatai mai kívánságok és értékek szerinti „súlyozására”, de mint az eszmék jó történésze kötelességszerűen s hűen regisztrálja az uralkodó koráramlatokkal szembehelyezkedő meg nem valósult tendenciákat is. Benkő jól tudja, hogy a való világ nem a történészek oknyomozó láncai szerint igazodik; valójában választási lehetőségek teremtődnek, s ez értelmiség egyik föladata éppen az alternatívák észrevétele s tiszta kidolgozása. Így például Kemény Zsigmond az ezernyolcszázhatvanas évek elején, mikor a *Pesti Napló*t szerkesztette, a nemzetiségi politikának olyan elveit fogalmazza meg, melyek tizenhárom évvel korábban Balázsfalván, az azóta Szabadságmezőnek nevezett réten hangzottak el, követelvén, hogy az erdélyi román nemzet váljék alkotmányos és szervezett, a törvényhozás házában tanácskozó és határozati-szavazati joggal felruházott nemzetté”. Óva int, nehogy a németesítés bukott politikáját valamiféle magyarosítás váltsa fel; „Kemény egyenesen nevetségesnek tartja, ha valaki azzal hozakodnék elő, hogy a kultúra általános terjesztését össze kell kapcsolni a magyar nyelv terjesztésével... »A nemzetiségi igényeknek az emberjogokkal és korszellemmel ellenkező ignorálása« bűn, mert az emberi léthez nélkülözhetetlen életfeltételektől fosztja meg az egyik csoport a másikat.” A kiegyezéshez vezető erők huzavonájában Kemény radikális polgári politikai elvei, tudjuk, nem váltak tetté, de lapjában fölsorakoztatta a nemzetiségi probléma legképzettebb magyar szakértőit, köztük Mocsáry Lajost, aki azután egészen a századelő radikális értelmiségi mozgalmaiig *(Huszadik Század, Galilei kör)* ható politikai programmá és testamentummá fejlesztette Kemény nemzetiségi kérdésben vallott nézeteit. Benkő régebbi kötetéről, a *Sorsformáló értelem*ről írt recenziójában Gáll Ernő már figyelmeztet rá, hogy milyen kompetens érzékenységgel vizsgálja Benkő Samu nemzettudat és társadalmi haladás tájainkon különösen erősen és nehezen kibogozhatóan évődő szálait; *A helyzettudat változásai*ban ezek a vizsgálatok a közép-kelet-európai értelmiségtörténet világosan meghúzott koordinátáiba illeszkednek.

Arra is Gáll Ernő figyelmeztetett különben, hogy Benkő Samu szívós következetességgel folytatott értelmiségtörténeti tanulmányai a konkrét történettudományi eredményeken túl fontos elvi megállapításokkal szolgálhatnak „az értelmiség általános szociológiájához”. A jelen kötet ebből a szempontból is nagy előrelépés, s minden szempontból igazolja Gáll Ernő várakozását.

> „A történelem – összegezi értelmiségszociológiai megfontolásait Benkő Samu – sorshelyzeteket hoz létre, s ezekben a tudatosság különböző szintjén magatartásformákat

alakít ki az ember. A tehetség, a tudás és a meggyőződéssé kristályosodott erkölcsi normák egyénenként ugyan váltakozó erőtérben szabják meg az életpályák irányát, s a véletlen is elég gyakran belejátszik azok alakulásába, de – ha tetszik, ha nem – a megörökölt történelmi helyzet határolja körül a cselekvés lehetőségeit. Nem úgy, hogy az egyén szükségszerűen megbékél, illetőleg megelégszik azzal, ami születésekor körülveszi, hanem úgy, hogy számol vele. Az értelmiségi tudatnak különösképpen az a rendelt hivatása, hogy az objektív szituáció megváltoztatására vállalkozik. Csak így születhetnek új eszmék, csak ezen az úton léphet előre a tudomány és a művészet."

Ebben az általános értelmiségszociológiai keretben azután önként fölszámolódik művelődéstörténet-írásunk krónikus és gyakran tudós dicsekvésekkel kompenzált elmaradáscentrikussága. Hiszen Európának ebben a térségében „a változások mindenekelőtt világbirodalmak mérkőzéseinek az eredményétől függtek, s egy-egy nemzedék már szerencsésnek érezhette magát, ha otthonát nem kellett üszkös romokból újraépítenie". Az erdélyi (s mutatis mutandis a magyarországi s a többi közép-kelet-európai országbeli) értelmiségnek, mely számban lassan gyarapodott s szakműveltségben gyéren differenciálódott, más föladatokhoz és másként kellett alkalmazkodnia, mint a nyugat-európainak. Más lesz tehát az adekvát válasz, kvalitatíve is, kvantitatíve is, de ez a különbség nem födheti el a mérce azonosságát, s az értékelés és értelmezés szempontjából ez a lényeg.

„Az erdélyi értelmiség századokkal ezelőtt megtanulta, hogy önmagát egyetemesen elfogadott mércével mérje: egyéni célt, közösségi feladatvállalást, az alkotásban elért eredményt aszerint értékelt, hogy mit mutatott az európai szellemi élet hőforrásainak fokmérője."

Így keletkeznek itt a külső világ nyomásának s az egyetemes művelődéstörténet sok-sok áttételen keresztül érvényesülő belső ritmusának interferenciájára példák (Gáll Ernő megfogalmazásában „Kelet-európai értelmiségtípusok") és eszmények, melyek „tudományos és művészi eredményeken túl magában az élet elviselésében, az etikus magatartásban realizálódnak." Az így megképződő „helytálló értelmiség" érdekli elsősorban Benkő Samut. Rájuk irányítva a figyelmet, újrafogalmazta művelődéstörténet-írásunk feladatait, hiszen az ő pályájuk, sorsuk, lehetőségeik, korlátaik, helyzetük és reális értékelése nélkül művelődésünk történetében legfeljebb tévelyeghetünk. De nélkülözhetetlenek ők „történelmi jelenlét"-ünkhöz is, mert ez az érte1miség „nem silány vigaszt testált az utókorra, hanem az ember nembeli lehetőségeinek fogalmakba kristályosodó tapasztalatait."

A Bolyai-dráma és a Bolyai drámák[16]

Okvetlenül jó dráma lesz-é önmagában drámai sorsból? S ha nem – mi kell még hozzá? A tehetségen kívül, persze, amiből több-kevesebb mindenféle íráshoz, még a drámához és az önéletrajzhoz is kívántatik, illetve – az elterjedt gyakorlattal ellentétben – kívánatos lenne. Meg ne ijedjen az olvasó: jelen szerény cikk nem kíván efféle nehéz irodalomelméleti kérdésekbe bonyolódni. Csupán szembesíteni szeretné a Bolyai-sorsot két különböző drámai földolgozásával. Kocsis István Bolyai János eséje című monodrámáját egyébként a Radnóti Színpadon Sinkovits Imre játssza és a közeljövőben a művet Rajhona Ádám címszereplésével a televízió is bemutatja.

A Bolyai-sors és a tudománytörténet-írás

Bolyai-sors? – biggyeszthetnék szájukat a tudós tudománytörténészek. – Mit kell itt dramatizálni! Egy zseniális matematikus tehetséges és főleg Göttingen-ben képzett atyjának közvetítésével közvetlen kapcsolatba került a párhuzamosak jó kétezer éves problémájával, mely a matematika fejlődése és a problémák belső érése miatt épp az idő tájt jutott el a megoldás küszöbére. Ezt a „küszöböt” – a nagy *Gauss* egyetemi tanuló- s később levelezőtársaként – éppen *Bolyai Farkas* „söprögette tisztára” azzal, hogy makacs következetességgel próbált ki s talált járhatatlannak úgyszólván minden utat, amelyen a párhuzamosak axiómáját szabályos tételként le lehetett volna vezetni az euklideszi geometria többi alapföltevéséből. Persze, akarva vagy akaratlanul a nagy Gauss, a matematikusok koronázatlan királya vezette vagy legalábbis „motiválta” ezeket a vizsgálatait, s így, mikor 1831-ben Farkas elküldötte volt néki fia új párhuzamossági axiómára fölépített geometriáját s véleményét kérte, a nagy Gauss joggal válaszolhatta régi barátjának: nem dicsérhetem fiad művét, mert ezzel magamat dicsérném, hiszen saját lángeszű gondolatomat látom íme itt viszont kibontva.

Persze csinálhatják ketten ugyanazt, mégsem ugyanaz (si duo faciunt idem non est idem), és így a modern tudománytörténet-írásban végül is nem jár rosszul *Bolyai János* sem: a nagy Gauss-szal egyszerre fedezheti fel az axiómarendszer fogalmát átalakító és az egész

[16] Forrás: Vekerdi László: A Bolyai-dráma és a Bolyai drámák. = Film, Színház, Muzsika 21 (1977) No. 3. (jan. 15.) pp. 12–14.

matematikai gondolkozást forradalmasító nem-euklideszi geometriát. S méghozzá épp egy olyan elmaradott helyen, mint az akkori Magyarország! Igaz, hogy a fiatal Bolyai Bécsben az osztrák hadmérnöki kar leendő tisztjeként európai hírnevű s szintű iskolában tanulhatott, értő és méltányló följebbvalók alatt. Nincsen-é írásos dokumentuma a hadmérnöki akadémiát igazgató János főherceg személyes jóindulatának? S nem kísérte-é végig katonai pályáján Bolyait ez a kegyes jóindulat, bizonyíthatóan sok „lezserséget" elnézve a tehetséges tisztnek? Az már az ő egyéni szerencsétlensége, hogy a primitív hazai környezetben összekülönbözött egyetlen potenciális munkatársával, a „szintén" nem túlságosan „jó természetű" atyjával, elmagányosodott, s parlagon hevertetve fényes matematikai zsenijét, „hóbortos" utópiák összehordásába ölte idejét s erejét. S külön fatális „pechje", hogy makacs atyja eleve elrontotta „konfidenskedő" leveleivel fia dolgát a nagy Gaussnál; még szép a nagy embertől, hogy ezek után olyan készséggel ismerte el sajátjának Bolyai János világra szóló alkotását! Mert az alkotás nagyságát, azt kivétel nélkül mindenki elismeri! És Farkas érdemei is (kivált évfordulók alkalmából) erősen méltánylandók, hiszen elsőrendű elme volt ő is, valóságos matematikai „reformkor" előkészítője, aki nélkül, ugyebár, fia sem juthatott volna jókor a párhuzamosak problémájához, és így tovább és így tovább, kezdődhet elölről a „Bolyai-kultusz" impozáns tudománytörténeti keringője.

Ugyan mi mindebben a „sors"? Ha valaki, hát legfeljebb az a megátalkodott vén polihisztor, *Brassai* bácsi hibáztatható, aki nem átallotta a nyolcvanas években, amikor már mindenki a nem-euklideszi geometriák dicsőségét zengte, Euklidesz egyedülvaló igazát védeni a Magyar Tudományos Akadémia folyóiratában!

Csakhogy

Gauss és a két Bolyai kapcsolata semmiképpen se képzelhető el holmi „tudománytörténeti szerelmi háromszög" mintájára, ahol egyetlen szeszélyes szépségtől két vetélytárs kap – erősen különböző – kegyeket. És egy ember élete sem azonosítható soha egyetlen művével, legyen az bár akkora nagy alkotás, mint a Bolyai-geometria. Látni kell a mű megett az embert, saját lényének s létének bűvkör ében.

Éppen ezt mutatta meg *Benkő Samu, Bolyai János vallomásai* című szép könyvében. Hallatlan fáradsággal kihámozta az *Üdvtant* tartalmazó szétszóródott s összekeveredett papírhalmazból a nagy utópia lényegét; azóta tudjuk, hogy milyen tiszta s értelmes szenvedély emésztette domáldi s vásárhelyi magányában Bolyai János emberiségért s a gondolkozás tisztaságáért izzó lelkét. Nem „elfecsérelte”, hanem emberhez méltó nagy küzdelemben áldozta föl életét. Azóta tudjuk, hogy az *Üdvtan* nem egy bomló elme cselekvéspótléka, hanem a század legnagyobb könyveinek egyike, méltó folytatása A tér tudományának, közismertebb nevén *Appendix*-nek – mert apja *Tentamen* ... című alapvető matematikai művének „függeléke”-ként, de a könyv elkészülte előtt esztendővel jelent meg. Benkő Samu monográfiája óta tudjuk, hogy a Bolyai-geometriának nemcsak „tudománytörténete” van, hanem „sorsa” is.

Fény derült a nem-euklideszi geometriák euklideszivel majdnem egyenlő korú történetére is; ezt meg *Tóth Imre* derítette ki fontos tanulmányaiban s *Ahile. Paradoxele eleate în fenomenologia spiritului* című könyvében. Azóta tudjuk, hogy ez sem olyan „forsriftos” tudománytörténet: az összefüggések rengetegét s az emberiség szellemi fejlődésében betöltött szerepüket tekintve találóbbnak látszik a nem-euklideszi geometriákkal kapcsolatban „sorsról” szólani. Igen, a nem-euklideszi geometriáknak külön sors jutott a szellem fenomenológiájában, s ebben a sorsban lényegesen fontosabb, mondjuk Arisztotelész, Cusanus, Spinoza, Saccheri, Platón, Kant szerepe, mint a nagy Gaussé. De akkor miként hathatott éppen Gauss döntően Bolyai János sorsára? Egyszerű a válasz, legalábbis matematikai szempontból: sehogyan. Ám ami a sors emberi oldalát illeti, ott is ennyire közömbös Gauss hűvös elismerése? A válaszhoz pontosan kéne ismerni Gausst, őt azonban tudománytörténész-hozsannák sorstalan és emberfeletti márványszoborrá misztifikálták.

És Bolyai Farkas? Ő csak ül szerényen a *Tentamen* két vaskos kötetén, s ha egy-egy matematikatörténész vagy matematikus többnyire valamilyen évforduló alkalmából – belé-belé lapoz a nagy könyvbe, meglepődve dörzsöli a szemét: milyen okos képleteket talált ki másoknál elébb az öreg! Milyen kár, hogy idejében meg nem ismerték ezt a könyvet!

Pedig ismerte és értékelte valaki: a fia. Mint ahogyan a fia lángeszű rendszerének igazi jelentőségét és jelentését is egyedül Bolyai Farkas ismerte föl kortársaik közül. Miért nem háborodott hát föl a nagy Gauss vérig sértő „dicsérete” miatt? Ifjúságának miféle bálványát őrizte példátlan ragaszkodással ebben a hűlt szívű elmekolosszusban? Ez meg az ő titka volt, ha tetszik, úgy is mondhatjuk: sorsa.

A három sors: a nem-euklideszi geometriáké s a két Bolyaié sűrűsödött iszonyú és fenséges drámává a múlt századi Marosvásárhelyen. Persze nem a valódi, vagy nemcsak a valódi városban, hanem egy „metageográfiai” és „metahistóriai” Marosvásárhelyen, ahol ott van az eszménnyé szépített Göttinga, az osztrák ármádia borzalmas, budiépíttető. butasága, Domáld süvítő magánya, negyvennyolc mégiscsak fényes reményei, negyvenkilenc döbbent némasága, a napi civódások pokla és a matézis mennyei boldogsága. De hátha éppen ez a metageográfiai és metahistóriai Marosvásárhely a valódi, hisz nyilvánvalóan ebben, s csak ebben keresendő az emberi lényeg? És itt kezdődik az írók kompetenciája.

Apai dicsőség

Németh László éles szeme a két Bolyai drámájában a különlegesen intenzív és életes apa–fiú-viszonyt vette észre s elemezte. „Az apa, aki maga irányította fia nevelését, belemámorosodik a védence előtt nyílt új életbe, közben a nevelői szenvedélyében támadt ürességbe sem tud belenyugodni; Marosvásárhelyről is segíteni akarja” – írja, lapozgatva Bolyai Farkas Bécsbe írt, meghatóan szép leveleiben. Németh László ismerte föl, hogyan készíti elő – s nem, mint a történészek vélték, „közvetíti”! – lépésről lépésre, páratlan pedagógiai műgonddal és szakértelemmel a nagyszerű tanár tanítványában – fiában – a lángeszű fölfedezést, hogyan drukkol immáron maga helyett is fia dicsőségéért, hogyan izgul, hogy valahogy meg ne előzze valaki, hiszen ezért nyomtatja ki – diákjaival, maga metszette jelekkel – életét összegező *Tentamenének Függeléke*-ként jóval a könyv elkészülte előtt János új geometriákat megalapozó munkáját, *A tér tudományát.* János nem sokat törődött az efféle gyakorlati dolgokkal; úgyhogy, ha Farkas pedagógiai szenvedélye, önzetlensége s realitásérzéke közbe nem szól, ma ugyan bizonygathatnák tudománytörténészeink Bolyai János közét – s még csak nem is. jogát! – nem-euklideszi geometriákhoz! Mert tán mondanunk se kell, hogy a „nagylelkű” és „megértő” János főhercegnek beküldött kéziratos példány nyomtalanul elveszett. Nem különösebb gonoszság vagy intrika miatt, egyszerűen császári és királyi közönyből. Ha nincs a marosvásárhelyi professzor...

De szerencsére volt. De az, hogy lehetett – ez Németh László másik nagy fölfedezése – egyáltalán nem „magától érthető”. Mert ehhez először is kellett egy Kollégium, ahol ha nem is érdeme szerint becsülni, ám mégis megbecsülni tudtak egy ilyen tanárt. S aztán keltett a város, amelyik igényelni s fönntartani tudott egy ilyen Kollégiumot, s ahol ilyen nagy matematikusok, mint a két Bolyai, élni s úgy-ahogy alkotni tudtak. Nélkülözésekkel, anyagiakban-szellemiekben szörnyű hiányokat szenvedve, de mégis alkotni. Tervezhetett ott nagy Matematikus ugyanolyan minőségigénnyel, mint az akkori Európában bárhol. A honi művelődés a XIX. század közepén a tudományban is egyszerre tépett: illetve: léphetett egyszerre Európával. S ha el-elmaradt, azt nem tehetség hiánya, s még csak nem is fatális társadalmi körülmények okozták egyedül, hanem elsősorban irigység, törtetés, marakodás, emberi silányság. Persze nem a két Bolyaié s még csak nem is a nagy Gaussé.

„Csak az él, aki valamiből éj",

– mondja keserűen *Kocsis István* Bolyai Jánosa, szembeállítva a maga s atyja matematikáért élését a nagy Gauss matematikából élésével. Persze nem kell okvetlenül a tényleges göttingai professzor Karl Friedrich Gaussra gondolnunk, ezt Kocsis István a monodráma elején – azzal, hogy Bolyaival „elfelejteti" Gauss nevét – külön hangsúlyozza. Inkább valami „gauss-ságról" van itt szó: a valamiből élés, az emberekből élés, a mások bőrén dicsőségre jutás szimbólumáról. Mondani se kell tán, hogy ebben a gauss-ságban Gaussnál sokkal „többre vitték" honi matematikusok, tudósok, katonák, vezetőemberek, a Bolyaiak életének igazi megkeserítői és tragédiába fordítói.

Ez ellen a gauss-ság ellen küszködik marcangoló magát vizsgálással *Bolyai János estéjében* Kocsis István Bolyaija. A valóságos Karl Friedrich Gauss-szal is perel, hogyne pörölne, hiszen végtére ő is a matematikából élt s nem a matematikáért, de Őt inkább fényes lehetőségeinek elmulasztása miatt korholja: „Ez az ember képes lett volna, ha rászánja életé felét, elvégezni azt, amire az én egész életem ráment *(Rövid szünet.)* De nem szánt rá semmit, nem is szánta volna rá egy évét sem, de még egy hónapját sem, mert a tér tudományának megalapozásában nem látta meg az azonnali siker lehetőségét. *(Keserűen felkacag.) És* igaza volt, áldozatáért cserébe azt kapta volna, mit én kaptam: a szegénységet és kiszolgáltatottságot." Nem Gauss, inkább Gauss tettei a hibásak. „Mit tett Gauss? A matematika segítségével vagyont, hatalmat, tiszteletet szerzett magának! Mit tett Goethe? Versírással nőtt az emberek feje fölé, addig írta a verseit, míg ki nem nevezték miniszternek! Mit tett Napóleon? Hogy dicsőítsék, elindult, hogy kipusztítsa az embereket. Sok millió embert kipusztított, hát nagyon dicsőítették." Ezek ellen a gaussi, goethei, napóleoni tettek ellen, az emberekből s az emberek rovására élők tettei ellen harcol igazában Kocsis István Bolyaija. „Ennek a küzdelemnek a színhelye nem a matematika, még csak fel sem merül ebben a küzdelemben. hogy kettőnk közül ki a nagyobb matematikus – érvel Gauss ellenében. – Ebben a küzdelemben nem a küzdő felek fontosak, a fontos, az egyedül fontos a világ összes embereinek viszonyulása ehhez a küzdelemhez." Mert ez a küzdelem „tulajdonképpen az emberiség küzdelme a megmaradásért".

A hang ismerős: az *Üdvtan*t s a *Tökéletes közállomány*t író Bolyai hangja ez: „művelt, okos, második természeti szövetség sem lehet soha üdvös: melyben a kül-erőszaknak bármi kis nyoma, maradványa van még". Kocsis István eszmetartó transzformációjában Bolyai János autentikus panaszaként s figyelmeztetéseként hangzik, hogy „az ember erőforrásai visszahúzódnak a föld mélyébe, ha csak az él, aki valamiből él, s az nem élhet, aki valamiért…"

Vekerdi László és Németh László levelezése a két Bolyai kérdésköréről

VEKERDI LÁSZLÓNAK[17]

[Sajkod, 1959. november 4–19.]

Kedves Laci!

A feleségem lehozta a könyvet; azóta úgy hallottam, hogy ezt az idézetet tudományosan is feldolgozták, s Sőtér megígérte, hogy ezt a feldolgozást juttatja majd el Grúziába.

Nagyon köszönöm, amit a könyvbe tett cédulára írtál. Te voltál az egyetlen, akinek gondja volt rá, hogy megnyugtasson, s épp azt írtad, amivel én is nyugtatom magam; hogy amit írtam, az igaz és helyes. Hozzátehetjük: s mint előre tudtam, nem szerzek vele semmiféle előnyt, csak hátrányt magamnak.[18]

Egy erdélyi nő fejébe vette, hogy drámát írat velem a Bolyaiakról. Legépeltette az apjával az egész Bolyai-levelezést, s ideajándékozta. Én a Te drámádra gondoltam, s azt mondtam: legföllebb tanulmányt írnék róla: a pedagógus apa – aki egy lángeszű s kegyetlen kritikust nevel a fiában magának, ez, ami ebben a témában személy szerint is érdekel.

Amióta hazajöttem, keresem a munkát, amibe beleölhessem magam. S ebben a témában igazán benne van a mi magyar életünk egész borzasztósága! Arra gondoltam – nem írhatnék-e mégis, nem drámát, de drámai költeményt róla. A tiédet így kétszeresen is elkerülné, mint elsősorban Farkasról szóló munka s mint költemény.

Tudnál-e tanácsot adni: mit érdemes elolvasni? Olvastam egy regényt (a Barabás Gyuláé), annak bővebb forrásai lehettek, mint nekem. Az Appendix megjelent-e modern kiadásban, esetleg fordítással, magyarázattal?

Egészség dolgában jobban vagyok, de persze hermetice elzárva attól, ami bánthatna, s ami tudom, hogy van, de az mégis más, mint ha érintkezem is vele.

Lezárom egy-két munkámat (fordítások javítása), s akkor visszamerülök tudománytörténetünkbe is!

Szeretettel köszönt, Jutkának kézcsókját küldi:

Németh László

*

[17] Forrás: 1463. sz. levél. Vekerdi Lászlónak. In: Németh László élete levelekben. I. 1949–1961. Összegyűjt. és szerk.: Németh Ágnes. Bp., 2000. Osiris. p. 669. (Osiris klasszikusok)

[18] Célzás a szovjet úttal kapcsolatos cikkekre.

VEKERDI LÁSZLÓTÓL[19]

Budapest, 1959. november 19.

Kedves Laci Bácsi!

Nagy örömmel olvastam a Bolyai-tervet. Még jobban örülnék, ha nem „elkerülné” az enyémet, hanem megcsinálná – jól – azt, amit én is szerettem volna. Annál is inkább, mert a mintát úgyis Laci Bácsi drámáiból vettem, főleg a *Görgey*ről és *II. József*ről. 1956 tavaszán egymás után 4 ilyen kísérletet írtam (*Bolyaiak, Kepler, Erasmus, Watteau*), s még kettőt készültem (*Csokonai, Bessenyei*), amikre már nem került sor. Ma visszanézve úgy látom, hogy ezek az érzelmi és gondolkozási krízis vetületei voltak: az érzelmi krízis a meg nem értett vagy félreértett tudóst háborgatta bennem (Watteau-t átírtam a festés tudósának, ami persze nem igaz), a gondolkozásomban pedig a természettudományokról történelemre való áttérés nagyon is bonyolult folyamata jelentkezett. Túlságosan is személyes ügyeim voltak ezek az írások akkor, hogy türelmem lett volna javítani rajtuk, s én túlságosan filológus [vagyok] ahhoz, hogy cselekvő alakokat tudjak teremteni. Nagy kínomban is azzal küszködtem, hogy beszorítsak pl. a *Bolyaiakba* egy *Tentamen*ről és egy *Appendix*ről szóló tanulmányt. S emellett egyet a 48-as Erdély lelkivilágáról. Ez a vágy: a tanulmányé azóta is él bennem, ha égető munkám legelején túljutok, belefognék. Így elég jól ismerem a Bolyai-irodalmat, egy-más nekem is megvan. A leginkább én is Farkas levelezését ajánlom, itt is mint legfontosabbat, a Bolyai–Gauss-levelezést. A század elein ezt kiadta az Akadémia is. Utána messze (és egyetlen valamirevaló) legjobb a P. Stäckel tanulmánya (a két legnagyobb magyar tudósról magyar eddig elfogadható tanulmányt nem írt! Stäckel német professzor). Pár éve sikerült ezt a ma már ritka könyvet megszereznem. A magyar tanulmányok közül még ma is legtöbbet ér Bedőházi János, a *Két Bolyai*, Mvhely, 1897. Sokkal jobb, különösen Farkast illetőleg, mint ahogy a későbbi kritika írja. A *Tentamen*t ebből lehet legkönnyebben megérteni (Egyetemi Könyvtárban megvan). Nagy hibája, hogy Farkas nagy emberi és matematikai tulajdonságait János hátrányára igyekszik kiemelni. A másik elviselhető magyar tanulmány: Dávid Lajos *A két Bolyai élete és munkássága* pedig megfordítja: Jánost emeli Farkas rovására, akiben inkább csak a nagy embert, nem a nagy matematikust látja. A harmadik terjedelmesebb magyar tanulmány: az Alexits György: *Bolyai János*a pedig már mind a kettőben csak főurak áldozatát látja. Szerinte Farkas: vén talpnyaló, János pedig (akit bosszantó módon állandóan „szegény”-nek titulál) üldözött és meg nem értett – kommunista, csak nem következetes. (Ezért „szegény”?).

[19] Forrás: 1469. sz. levél. Vekerdi Lászlótól. In: Németh László élete levelekben. I. 1949–1961. Összegyűjt. és szerk.: Németh Ágnes. Bp., 2000. Osiris. pp. 673–677. (Osiris klasszikusok)

Az igazság az, hogy Farkas matematikusnak is éppen olyan nagy, mint János, Tentamenében lefekteti egy olyan geometria alapjait, amit sokkal később – igaz, hogy sokkal világosabban – Felix Klein fog a híres Erlangeni programban levezetni: a „mozgáscsoportokra” felépített geometria fogalmát. Több mint fél évszázaddal Klein előtt pontosan definiálja a mozgáscsoportok és a csoportgeometria fogalmát, s ezt a tudománytörténészek – még a jó szemű Stäckel sem veszi észre, s Farkast mint a nem euklideszi geometria „Mózesét” marasztalják el, amiben persze nem is első és nem is legnagyobb. De mint a koordinátamentes térgeometria megteremtője igen is első, s ezt nem tudják ma sem. Azt Stäckel is észreveszi – nehéz is lenne nem –, hogy az axiomatikus geometria első nagy mestere Farkas, de inkább elszórt, zseniális intuícióknak tekinti alkotásait. Pedig az egy egészen új, s csak a XIX–XX. század fordulóján kibontakozó matematikai világ első megfogalmazása.

János pedig embernek se kicsi. Látszik ez annyit szidott és lesajnált *Üdvtan*ából is, meg azokból a kivonataiból is, amik hozzáférhetők. (Nem adták ki soha, csak szemelvényeket idéztek itt-ott.) Az *Üdvtan*ban a lehetetlen nagy vállalkozások és félig megtett utak annyira ismerős világa is keserít. Farkasnak inkább a matematikája ilyen: az emberi oldala neki szerencsésebb volt. János matematikája mentes ettől. Az *Appendix* olyan nagy, olyan teljes, befejezett, hogy már nem mérhető matematikai mértékkel (ezért nem is fogható Gauss és Lobacsevszkij hasonló jellegű munkáihoz).

Többek között benne van – éspedig tudatosan – az *Appendix*ben az Általános Relativitás elméletének egész problematikája is. Tökéletes Kristály. A zene és a matematika privilégiuma csak ez a tömörség: a par excellence művészeté és tudományé. Itt nem Sejtések és Mélységek szólnak, mint Farkasnál, hanem Tudás és Magasság. Az *Appendix* a történelem ritka nagy pillanatai közé tartozik. Nekünk jelképünk lehetne és vigaszunk: lényegét tanítani kéne az elemiben. Az *Appendix* csúcsaihoz azonban nem egészen könnyű eljutni. Ismerni kell hozzá az euklideszi geometriát, s valamely modern differenciál geometriából valamit. Jó tudni valamit hozzá a Hilbert axiomatikájából, pl. ahogy az oly korán elhalt nagy matematikus, Kerékjártó geometriájában olvasható. Az Appendixnek különben van jó magyar kiadása is, Kárteszi Ferenc adta ki 1952-ben, az Akadémiai Kiadónál. Nem könnyű olvasmány, de az I. fejezet, amelyben a párhuzamosság fogalmát tisztázza, könnyen, előtanulmányok nélkül érthető, s vezérmotívumként elmondja az egész mű „hangulatát”. De a legszebb éppen a következő részekben van: különösen a II. fejezet. A párhuzamosság vezérmotívuma itt tágul ki: segítségével könnyűszerrel el tud különíteni két rendszert: amelyikben az euklideszi párhuzamosság-axióma érvényes (Σ rendszer), és egy másikat, amelyikben a Bolyai-féle párhuzamossági axióma érvényes (S rendszer). A geometriai tételek egy része csak a Σ rendszerben, mások csak az S rendszerben érvényesek.

„Mindazok a tételek, amelyeknél nem említjük kifejezetten, hogy vajon a Σ vagy az S rendszerben érvényesek, *abszolút* igazak, vagyis állítjuk, hogy érvényesek, akár Σ, akár S teljesül a valóságban.” Bolyai ismerte fel először világosan, hogy egymástól független, önmagukban zárt rendszerek állhatnak fenn egymás mellett anélkül, hogy bármelyikük is helytelen lenne. Ezeket *önmagukban* összemérni *nem* lehet. Ha azonban egy átfogóbb, az alaprendszerektől függetlenül, abszolút érvényes tételekből álló rendszert sikerül találni, ez a geometriai problémák egészen más, sokkal mélyebb szinten történő tárgyalását teszi lehetővé. *Ez* a Bolyai geometriai csodájának a lényege: az abszolút geometria felismerése. Itt már készen áll a század végén kialakított invariáns elmélet minden lényeges vonása, az általános relativitáselmélet pedig nem egyéb köztudomásúan, mint az invariáns elmélet egy alkalmazása. Maga Bolyai veti fel még a kérdést: vajon a valóságban a Σ vagy az S rendszer realizálódik-e? Helyesebben valamelyik S rendszer, mert S rendszer végtelen sok van, megfelelően annak, hogy (pl. két dimenzióban) az S rendszer nem *sík*, hanem egy *görbült* felület geometriája, s ennek a görbülete végtelen sokféle lehet. Ezek a problémák a III. fejezetben tisztázódnak, ahol a gömbi trigonometria axiómáiról mutatja ki, hogy ezek az S rendszerben is érvényesek, tehát az abszolút geometria kincsei.

A IV. fejezetben különböző geometriai idomokra vonatkozó számításokat (pl. a kör területe) végez az S rendszerben, s itt fogalmazza meg a XX. század *fizikájának* a nagy kérdését: melyik rendszer realizálódik a *világban*? S arra a végső következtetésre jut, hogy ha tudnánk, hogy nem a Σ érvényesül, akkor hosszméréseinkben szükségszerűen fellépne egy bizonyos természetes egység, épp az illető S rendszer görbületét jellemző állandó, s mi anélkül, hogy tudnánk, mindent ehhez viszonyítva mérnénk.

Ugyanezt számtalanszor elismétlik a relativitáselmélet klasszikusai és tankönyvei – Bolyairól még csak említést sem téve. Mert beskatulyázták a „nem euklideszi geometria” megteremtőjeként, s hogy sokkal többet tett, azt nem hajlandók elismerni még ma sem. Mint ahogy még kevesebben tudnak Farkas nagyságáról. S ami a legszomorúbb, hogy világviszonylatban is kiváló matematikusaink és történészeink közül nem akadt egy se, aki felismerje. (Igaz, Gauss mellett! legalább megemlítik Jánost – „szegényt”.)

Az *Appendix* a Tentamen hátterében még fényesebben tömör és világos, s annak kavargó mélysége ennek világos ragyogásában is benne van. Zeusz és Pallasz Athéné: s mi csak alig hogy tudunk róluk! Ezért Németh Lászlónak – s éppen a drámaírónak a sok közül – kötelessége is hozzájuk fordulni. A téma olyan nagy s fennkölt, hogy talán az időbeli közelsége ellenére is elbírja a verset, ha ugyan a mi korunk elbírja (az igazi verset soha nem csak az író írja). Én valahogy jobban el tudnám képzelni *Széchenyi-, II. József-, Galilei*-féle prózában, mint *Sámson* soraiban.

A tragédiát én nem a magánál nagyobb matematikust nevelt apa és a kegyetlen kritikussá vált fiú közt érzem: a két életmű matematikailag is, emberileg is külön vágányokon fut. A tragédia a két ember s a világ között van, külön-külön, amit csak indikál az egymással való – és eltúlzott – zsörtölődésük. Abból, hogy a kor két legnagyobb matematikusa egymás mellett élve kerüli egymást: a szörnyű és szörnyeteggé tevő magyar magány látszik. Farkas egy kicsit II. József: Világpolgár. Marosvásárhelyen és Göttingában él, 48-ban is a felvilágosodott századfordulón.

János sokkal bonyolultabb. Az Appendix tökéletessége mellett még döbbentőbb élete sikertelensége. Nemcsak külső: belső sikertelensége is. Úgy látszik, hogy az a nagy rend, amit az *Appendix*be préselt, belőle mindent kimosott. Farkas sztoicizmusa tudott egy kis világot teremteni magának, amiben, ha rosszul is, élhetett. János csak az egész világ megváltásával érezte volna magát otthon a földön. Ez az alapmagatartás tükröződik matematikájukban is: Farkas axiomatikába keríti a geometria egy speciális ágát, János a végtelenből befogja minden geometria alapjait. Farkas az emberek világában él, János maga teremtette más világban. Farkas a környezetével harcol, János önmagával. A XIX. század eleje és vége: Schiller és Rimbaud közti különbség.

Matematikai-generációs kor- és magyar kérdések kereszteződnek a két Bolyai találkozásában, még akkor sem egymással van bajuk, ha egymást marják, mint a kutyákat a tavaszi levegő, hajtja őket egymásnak a világ. Annak a bogozását, hogy az akkori Erdély és a mostani Magyarország, a drámabeli Farkas és Németh László között volt-e, és miféle hasonlóság, már az irodalomtörténészekre hagyom, a tapasztalat szerint szeretik az ilyen „csemegéket” – (hisz ebből élnek).

Én a szabadságom eltelte óta sehogy se haladok a munkával. Napi 8–12 óra teljesen értelmetlen robot után képtelen vagyok már dolgozni. Pár évvel ezelőtt még a jogosnak vélt megbecsülés hiánya gyötört, ma már sokkal elemibb és emberibb szükségletek: az időé és a szabadságé! Az öreg Farkas szerint is: „...a Teleki-tékában kedvesen lehet el-álmodni az alig kiállható, kedvtelen életet...”, s ha ez az álom-lehetősége nincs meg, nem lehet élni. A megélhetést az élet árán kell megvásárolni. Lehet, hogy ez patetikus és szenvelgő, de így van, és nagyon szomorú.

Szeretettel üdvözöl: *Vekerdi Laci*

*

VEKERDI LÁSZLÓNAK[20]

[Pb.: Aszófő, 1959. november 21.]

Kedves Laci!

Nagyon örülök, hogy tervem ilyen hosszú levelet ugratott ki Belőled; egész kis Bolyai-esszé, el is teszem egy külön kis kartonba, tulajdonképpen ilyenféle „önkéntelen”, tájékoztató kis írásokban is fel lehetne építeni egész világokat, a forma szerénységével leplezve (vagy hangsúlyozva) tájékozottság és gondolatok gazdagságát.

Azzal, hogy a drámaterv nem támasztott kellemetlen érzéseket Benned, a megírás lényeges akadályát hárítottad el útjából: nem szeretek a más kertjébe taposni. Azóta kaptam más könyveket is: egyelőre matematikai homályok vannak inkább csak előttem; a nálam lévő mat. történetek véget érnek a 19. század elején – s nem ismerem eléggé az új diszciplínákat, amelyeknek Farkas és János (nem csak a nem euklideszi geometriában) úttörői voltak (pl. nem tudnám Hamilton és János komplex számteóriáját összehasonlítani). S nem merném azt mondani, hogy a drámához mindezt nem kell tudni.

Az embernek, persze, megvan a személyes kulcsa a témákhoz (az enyémet a kissé ironikus „Apai dicsőség” cím fejezhetné ki), de az nem akadálya annak, hogy végül a maguk mivoltában is ne lássa őket; ehhez segítség a Te leveled.

Nagyon nyomaszt, amit leveled végén életről és megélhetésről írsz. Mai állapotomban sajnos, csak önbizalom-adással tudhatlak támogatni: nemzeti s emberi érdeknek tartom, hogy olvass és gondolkozz, s eredményeidet valahogy tovább adhasd (sőt, mint egyetlen öreg tanítványod írom ezt), adhassuk.

Én magam valami furcsa, orbáncszerűen föl-föllobbanó rhinitistől[21] szenvedek; el sem tudom képzelni, mint szedtem össze ott keleten.

A közvéleménytől már nyugodtabban alszom.

Ölel s kézcsókját küldi

Laci bácsi

*

[20] Forrás: 1470. sz. levél. Vekerdi Lászlónak. In: Németh László élete levelekben. I. 1949–1961. Összegyűjt. és szerk.: Németh Ágnes. Bp., 2000. Osiris. pp. 677–678. (Osiris klasszikusok)

[21] Orrnyálkahártya-gyulladás.

VEKERDI LÁSZLÓTÓL[22]

[Budapest, 1960. március vége]

Kedves Laci Bácsi!

Először is nagyon szépen köszönöm a meghívást, mit tetszene szólni hozzá, ha a közeljövőben épp vasárnap, Koczogh Ákossal együtt mennénk le? (Így a Laci Bácsi ránk fordított ideje is „feleződik”.) A pontos időpont részemről még a féljegy megújításától is függ, és a nyakamba szakadt egyre több munkától, amit igyekszem lelkiismeretesen és jókedvvel csinálni. (Nem mindig megy, de csak átmenetileg török le.)

Találtam végre olyan könyvet, amiből jól lehet tájékozódni a XIX. [század] matematikájában. F. Klein: *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert* első kötete. (Egyetemi Könyvtár, Ea 1640/24.) Jelenleg nálam van, kb. 2–3 hét múlva adom vissza, tessék bevezetni a jövő hónapi könyvtervébe. (Ha van Laci bácsinak kölcsönzőjegye, szívesen kiveszem és leviszem, a magaméra azért nem vállalom, mert így is szörnyű harcokat vívok a könyvtárosokkal, hogy 4 kötetnél többet adjanak ki egyszerre. S már ez is kegyelem, mert a szabály 3.) El kell olvasni azért is, mert a Bolyai-kérdés egyik legjobb ismerője, a nem euklideszi geometriák tanának bevezetője (Cayley–Klein-modell), a századforduló egyik legnagyobb hatású matematikusa (1849–1925). A Hamilton-féle quaternio-elméletről is igen jó képet ad, a matematikai fizika kialakulásáról szóló fejezetei nagyszerűek. Azt hiszem, egyik megalkotója a Gauss-mítosznak, a B.-kal szemben így szükségképpen igazságtalan. Nála még Jánosnak nincs semmi jelentősége. – Melyiké provincializmus? a Magyaroké vagy a göttingai professzor Kleiné, aki – Gaussból önmagának készít „archetypust”, mint Thomas Mann Goethéből a Lottéban. Igaz, hogy Gauss felől is meg kellene nézni a B.-kat, s ehhez jól kellene ismerni Gausst. (Nem könnyű, s főleg nekem nagyon unalmas feladat. Ha van a matematikának nacionalitása, ez olyan tömény német, hogy az ember nehezen emészti.) – Úgy is lehetne mat.-történetet írni, hogy mindenkit kihagynánk, akinek a hiánya az egész fejlődésben nem okoz megmagyarázhatatlan hiátust. Gauss (persze csak egyes eredményei: a legkisebb négyzetek a diff. geometr. quadratikus formája – az elliptikus függvényektől és csoportelméleti megfontolásokról azt hiszem, Klein önmagából vetíti vissza őket G.-ba) nem lenne kihagyható, B. igen. De csak vagylagosan: vagy B. János, vagy Lobacsevszkij. Ue. a helyzet az integrál-differenciálszámításnál is: vagy Newton, vagy Leibniz, a koordinátageometriánál: vagy Fermat, vagy Descartes, a jeles-algebránál: vagy

[22] Forrás: 1516. sz. levél. Vekerdi Lászlótól. In: Németh László élete levelekben. I. 1949–1961. Összegyűjt. és szerk.: Németh Ágnes. Bp., 2000. Osiris. pp. 720–721. (Osiris klasszikusok)

Viète, vagy Stevin–Girard. Vajon a görög mat. Archytas, Eudoxos, Menaichmos, Archimedes sora nem csak ismereteink hiányossága miatt egyértelmű? Nem tudom. De a nyugati mat. történetét egyenesen a nagy felfedezések körüli veszekedésekre lehetne – mint vázra – felépíteni.

Akárhogy is, Gauss nem teremtett nem euklideszi ötleteiből rendszert: még kevésbé „abszolút geometriát". (Az ötlet persze felmerült benne is.) De épp az, hogy ezeket az ötleteket nemcsak hogy nem közölte, de még – egyébként annyira őszinte naplójának vagy íróasztalának se dolgozta ki, ő, aki olyan gondosan vigyázott, hogy semmije el ne vesszen, ő, aki ott is szívesen aratott, ahol nem vetett (1. Abel), épp az mutatja, hogy nem hitt benne. Jánosban épp ez a nagy. Gauss a mat. építészei, János a kertészei közé tartozik.

Viszontlátásig, szeretettel üdvözli

Vekerdi Laci

Bolyai János vallomásai[23]

Zaklatottság és megnyugvás – Bolyai kéziratos hagyatékának elemzéséhez

> „Ez a kézirati hagyaték sokban különbözik a szokásostól… A magános ember vallomásai ezek. Előre eltervezett rend nélkül keletkezett írások; papírra vetésükkel az egyedüllét börtönéből keresett szabadulást és kapcsolatot a világgal az onnan kiszorult rendkívüli tehetségű elme.”

Ebből a Kolumbusz tojása-szerűen egyszerű és új szempontból vizsgálja Benkő Samu Bolyai János *egész* kéziratos hagyatékát, először a Bolyai-kutatás évszázados történetében. Az eddigi életrajzírók inkább csak válogattak a gazdag kéziratos anyagban, s ki-ki a saját Bolyai János elképzeléséhez keresett (s talált) benne adatokat. Sokféle elsődleges, másodlagos és harmadlagos Bolyai-kép keletkezett a száz év alatt; nagyon különbözőek és nagyon különböző értékűek; Bedőházi „rosszfiú Jánosától” és Szily „félőrült vadzsenijétől” Dávid Lajos „koravén csodagyerekéig”, Alexits akadémikus „délceg forradalmáráig” és Tabéry „szarvasbikájáig”. A képek és torz képek tarka kavargásából megnyugtató pasztell-színekkel emelkedik ki Németh László romantika ellen lázadó racionalista-pozitivista gondolkodója és Sarlóska Ernő elegáns, européer osztrák katonatisztje.

A Bolyai-geometria sokkal hamarább megtalálta a helyét a matematika, majd – Tóth Imre 1953-ban megjelent Bolyai-cikkével s azóta közölt kontra-euklidészi tanulmányaival – a gondolkozás történetében, mint az alkotója; Bolyai Jánosról sokféle képet rajzoltak, de Benkő Samu most megjelent monográfiája[24] az első írás, amely a képek mögött az emberig férkőzött. S ezt igen határozottan hangsúlyozni kell, s nemcsak azért, hogy a könyv megérdemelt rangját elismerhessük. Azért is, vagy talán még inkább azért, mert Benkő Samu Bolyai Jánosában a sokféle Bolyai-kép szinte mindegyikéből (talán még a „szarvasbikából” is) megtalálható valami, de itt a részletek az egész kontextusába simulva saját szerepüket játsszák, nem a különcöt ábrázolják többé, hanem a különöst, s éppen így s csak így – sikerül, különösségében, az egyént a kor társadalmi és szellemi dinamikájába kapcsolni. Az eddigi

[23] Forrás: Vekerdi László: Benkő Samu: Bolyai János vallomásai. Zaklatottság és megnyugvás – Bolyai kéziratos hagyatékának elemzéséhez. In: Vekerdi László: Befejezetlen jelen. Bp., 1971. Magvető. pp. 486–490. (Elvek és utak) – Első közlés: Valóság 12 (1969) No. 4. pp. 110–112. – Benkő Samu: Bolyai János vallomásai (Bukarest, 1968) c. művéről.

[24] Benkő Samu: Bolyai János vallomásai. Bukarest, 1968. Irodalmi Kiadó. 275 p.

Bolyai János-képek – még a legrangosabbak is – maszkok, a Benkő Samué szellemi portré, amely a hitelesség (szavakban aligha megfogalmazható) élményét ébreszti az olvasóban.

Az első fejezettől (ahol Benkő Samu a kéziratok sorsáról számol be röviden) az utolsóig (amely Bolyai János filozófiáját az európai gondolkozás és a lokális társadalmi helyzet között keletkező – szikrák inkább, mint villámok fényében mutatja be) ez a hitelesség-élmény kísér és kísért, és nemcsak a kitűnően választott, eddig sehol nem publikált kéziratokból származó idézetek tömege miatt, hanem elsősorban a szempont miatt, amely a (nagy fáradtság árán rendbe szedett, s gyakran bajosan kibetűzhető) kéziratokban meglátta és megláttatta a társ híján a papirossal beszélgető rendkívüli tehetség (meg) roppant gyürkőzéseit.

> „Most is csak azt mondjuk – figyelmeztet Benkő az egyik idézet után – amiről már korábban is szóltunk: csak az képedjen el a sorok olvasásakor, akinek nem kellene számtalan önellentmondással szembenéznie, ha minden gondolatát leírná! Bolyai kéziratai a gondolatok tovagyűrűzését úgy őrizték meg, ahogy az összebonyolódott események tükrözésében éppen megfogalmazódtak."

A tömör önéletrajz-töredék idézése és az önéletrajzot kísérő (inkább a hangulatot, mint a szöveget magyarázó) rövid kommentár alapján Benkő mesterien bontja ki a kéziratokból a matematika szépsége és fensége körül gyűrűző gondolatok rétegét; megmutatja a matematikai szépség kizárólagossá növekedését Bolyai lelkében, megérteti, hogyan válik a matematika az ízlést és az igényt meghatározó normán túl *etikai erővé*, és János három nagy halálos fájdalmát gyógyulni segítő írás: a három nagy sebét, melyet Gauss furcsán tartózkodó elismerése, Lobacsevszkij párhuzamos felfedezése és atyjával való holtukig tartó mérkőzése ütött Bolyai János lelkén. Ez a három terület foglalkoztatja az eddigi Bolyai-irodalom nagyobb s komolyabb felét is, Benkő azonban nem az eddig szokásos „ki a hibás" vagy éppen a prioritás-kérdések felől közelít, s nem az apa-fiú vagy a szolgálati viszonyok elemzése felől, hanem belülről, az önnön vágyaival s normáival vívódó *Lélek* felől, s kívülről, koncentrikusan, a tudományos el- és megismerést különféle, marosvásárhelyi és európai társadalmi és akadémiai hierarchiák szerint elrendező *környezet* felől. S ebben az új perspektívában különös közelségbe kerül Marosvásárhely és Göttinga; a tekintélyelven alapuló tudományos feudalizmus zárja őket egy világba, s szigeteli el benne egymástól a távolságnál tökéletesebben a szereplőket. Benkő mesterien érzékelteti ennek a mindenütt jelenlevő s mindenütt uralkodó hierarchikus szemléletnek a világát s kapcsolatait; a Bolyai Farkas és Gauss között – inkább oda, mint ide – váltott levelekkel az alkalmi hírnökök szerepeltetésével, a Bolyai Farkasban élő Gauss-kép finom elemzésével, legfőképpen azonban azzal, ahogyan bemutatja, mint rombolódott le Bolyai Jánosban atyja Gauss-képe, s fejlődött ki helyébe szenvedélyes és szenvedéssel teljes gondolatok hosszú sorából az új reális Gauss-értékelés.

A nővel és a betegséggel való – Bolyai sorsában többszörösen rokon és összefonódó – vívódás rövid ábrázolása után Benkő a könyv talán legmeglepőbb részéhez érkezik: megmutatja, hogyan érthető meg Bolyai János sorsa és tragédiája a korabeli közép-kelet-európai történelemből. Helyesebben nem is ezt mutatja meg, sokkal finomabb és sokkal a témához illőbb utat választ: a kéziratok gondolat-gomolygásából bontja ki Erdély akkori történetéből azt, ami Bolyai János sorsában és gondolkozásában tükröződött. Ezekből a tükrözött részletekből értjük meg azután, hogyan lehetséges, hogy

> „...az erdélyi művelődési élet… felhalmozott annyi energiát, hogy pályájára röppentsen egy rendkívüli tehetséget, Bolyai Jánost. A következőkben azonban már tehetetlennek bizonyult, mert társadalmilag és tudományosan egyaránt készületlen volt a születő művek megértésére, befogadására és megbecsülésére.”

A fatálisan félreértett és magánossá váló, de korát mindig híven tükröző gondolkozás regisztrálta a bajt, s segíteni igyekezett. A saját kínján messze túl látó lélek magához méltó kereteket keresett s talált; a világ ésszerűsítését tűzte ki célul. Íme, az *Üdvtan* és a *Tökéletes közállomány* háttere. S ezután nem lehet majd – kiragadott példák alapján – elnézően vagy sejtelmesen mosolyogva tárgyalni erről a különös kéziratcsomóról, s nem lehet sajnálkozni és megbotránkozni sem miatta. Két világraszóló alkotás, az *Appendix* és a *Responsio* érthetetlenül közönyös fogadtatásával halálra sebzett rendkívüli tehetség keresett itt kiutat a kínzó pokolból, melynek lényegét végül is a társadalom elrendezésében ismerte fel, s gyógyszerét az elnyomott parasztság s az értelmiség urak és katonák elleni békés, erőszakmentes világforradalmában találta meg.

Benkő Samu avatott vezetése nyomán meglepődve veszi észre s hiszi el az olvasó, hogy Bolyai János Rousseau tanítványa volt, a romantika első nagy mesteréé, csak a természet, amely szerint az életet berendezni óhajtotta, nem az eredeti vad, hanem egy „okos, művelt második természeti állapot” volt. Az az állapot, ahol a jelent híven tükröző, a jövőt készítő, s itt reménytelenül magára maradott elme társakra találhatott volna.

> „Romantikus zaklatottság és sztoikus megnyugvás ellentétének egységéből rajzolódik ki Bolyai János szellemi arca. Magával ragadja a romantika sodrása, a korstílusé, mely a

> művészetben, irodalomban, tudományban, de még a közhasználati tárgyak megformálásában is a felfokozott életérzésnek, az érzelmek és a szenvedélyek lobogásának tárt utat, az alkotó tehetség szuverenitásának követelt elismerést, s elvárta, hogy a válaszút előtt álló társadalom a lángelme tanácsára hallgasson. De romantikus hevülete jéghegyekbe ütközik: az őt és művét körülfogó társadalmi közönybe. Ennek ellensúlyozására alakítja ki sztoikus életfilozófiáját, melynek előképéül nem annyira az antikvitás bölcselete, mint inkább a korábbi századok erdélyi kálvinista gondolkodása szolgált.”

„Zaklatottság és megnyugvás”. Az összefoglaló fejezet címe, a Bolyai-sors mottójaként, az olvasó emlékezetébe vésődik, felejthetetlenül. S Benkő Samu Bolyai Jánosa, Huizinga Erasmusához, Lucien Febvre Lutherehéz és Illyés Gyula Petőfijéhez hasonlóan, előbb-utóbb kilép a történelemből, s útitársunkká válik.

A Bolyai-kutatás változásai[25]

Azt hihetnők, hogy ha valahol, hát a Bolyaiak körül igazán mindent megtettünk, ami csak kellőnek s illőnek mondható. Évfordulói ünneplések, tanulmányok, monográfiák és kiadványok emlékeztetnek érdemeikre; társulatok, intézmények, iskolák őrzik – hol hosszú, hol rövid o-val – nevüket; bélyegek, színielőadások, tévéfilm népszerűsíti alakjukat. Akinek ennyi jó kevés… És íme, Sarlóska Ernő – akinél többet napjaink honi Bolyai-kutatásáért aligha fáradozott bárki – most mégis arra figyelmeztet, hogy a honi könyvtári adatszolgáltatás legújabb rendszeréből kimaradt Bolyai János neve. Jelentéktelen apróság, könnyen kiigazítható – úgy lehet véletlen – hiba, gondolhatná valaki. Csakhogy a hiba – figyelmeztet rá Sarlóska – nem áll meg a könyvtári adatszolgáltatásnál, kezd behatolni a tudománytörténet-írás gyakorlatába is. Ráadásul az ismertetett példa egyáltalában nem egyedüli és nem is első.

Már Dirk J. Struik is kurtán-furcsán bánt el magyarra is lefordított s amúgy méltán népszerű kis matematikatörténetében a Bolyaiakkal, Morris Kline 1972-ben megjelent vaskos, szakszerű és igen befolyásos könyve azonban egyszerűen Gauss közvetlen vagy közvetett hatására redukálja Bolyai János és Lobacsevszkij egész munkásságát. A tudománytörténet-írás Lobacsevszkij esetében hamarosan korrigálta Kline súlyos tévedését, ámde Bolyai Jánosról ez idáig senki el nem törölte Kline sötét gyanúját, hogy apja közvetítette hozzá göttingai diáktársának, a nagy Gaussnak zseniális és gondosan titkolt fölfedezését. Igaz, csak föl kellene lapozni a Bolyai–Gauss-levelezést, s nyomban kiderülne, hogy efféle „közvetítés" lehetetlen, mert Gauss nemcsak göttingai éveik alatt, de még 1804-ben is igazolandónak tartotta Euklidész párhuzamossági posztulátumát, nem pedig tagadására kívánt új geometriát fölépíteni, s nagyon megritkuló levelezésükben ezentúl Gauss egy szóval sem utal a témára egészen 1831-ig, amikor Bolyai Farkas elküldi neki fia kész munkáját nyomtatásban. De ki üti fel ezt a nagy alakú, pompázatos, láthatóan díszelgésre és tán már új korában is antikváriumi ritkaságnak készült kiadványt? Külföldön bizonyára senki, még a viszonylag igen jól tájékozott Jeremy Gray sem, aki 1979-ben a legrangosabb matematikatörténeti szakfolyóiratban megjelent fontos tanulmányában a „tulajdonképpeni" nem-euklideszi geometria egyik előkészítőjévé (!) „reinterpretálja" Bolyai Jánost, Gauss egyik „levelezőjévé", s együtt tárgyalja Schweikarttal, mint akinek az eredményein Gauss „egyaránt sokat javított". „Gauss ugyanis birtokában volt a térgörbület fogalmának, ami döntő a tárgy modern megfogalmazásának szempontjából."

25 Forrás: Vekerdi László: A Bolyai-kutatás változásai. = Természet Világa 112 (1981) No. 2. pp. 56–58.

Csakugyan döntő, ha valaki – mint Kline nyomán Gray – a differenciálgeometriai analízis felől vizsgálja a dolgot, csakhogy a nem-euklideszi geometria története ebből a megközelítésből egyszerűen nem vizsgálható. A differenciálgeometriának ugyanis már csupán a Bolyai–Lobacsevszkij-geometria *modelljei*ben jutott döntő szerep, nem pedig fölfedezésében, amint bárki könnyen meggyőződhet róla, ha átlapozza Weszely Tibor szép kicsi könyvét: „A Bolyai–Lobacsevszkij-geometria *modelljei*”-t. De hát a tudománytörténet-írás „racionális rekonstrukciók”-ra építő divatos modern irányát egyebek mellett éppen az jellemzi, hogy a modelleket következetesen (bár ritkán tudatosan) összetéveszti a történelemmel. Így „tudta ki” egy rendkívül jól dokumentált ragyogó monográfiában legutóbb a kvantumelmélet fölfedezéséből Thomas S. Kuhn Max Planckot, s miért ne sikerülhetne hasonló szegény Bolyai Jánossal, ha tán még nem is Jeremy Gray a „Kuhnja”?

Robbanásszerű kvantitatív és kvalitatív fejlődése után a tudománytörténet-írás napjainkra súlyos növekedési krízisbe került, ámde túl ezen, gyaníthatók már egy új fázis körvonalai, ahol majd megint újrarendeződnek és újraértékelődnek a dolgok. Planckot nem kell félteni: mintaszerű kritikai kiadások és gondos analitikus tanulmányok a Kuhn kavarta vihar után hatalmas mágnesként az új tudománytörténeti közegben is valódi irányokba fogják terelni a tanulmányreszelékeket. De a Bolyaiak esetében úgyszólván teljesen hiányoznak a használható kiadások, és nem dúskálhatunk gondos analitikus tanulmányokban sem. Ami ezen a téren számításba jöhet, az is majdnem mind határainkon kívül keletkezett. A honi Bolyai-kutatás erős oldala máig a Bolyai-filológia, egyéb téren – Sarlóska Ernő egyedüli kivételével – messzire kötelességei és (elméleti) lehetőségei mögött maradt. Így ha rövidesen nem változik a helyzet, könnyen előfordulhat, hogy Bolyai János a növekedési krízis elmúltával is megmarad „előkészítő” helyén Taurinus és Schweikart mellett, ahová a racionális rekonstrukciók – feltehetően múló – divatja „strukturálta át”. De mit tehet itt a honi tudománytörténet-írás? Ehhez mindenekelőtt vázolni kell – bármily durván –, hogy milyen és hogyan fejlődött.

A honi tudománytörténet-írás a múlt század végén az összegező nemzeti és egyetemes tudománytörténetek nagy periódusát mulasztotta el, a századfordulón-századelőn a megélénkülő tudománytörténeti filológiát, az utóbbi fél évszázadban az analitikus tudománytörténet-írás hatalmas hullámát. Az összegező nemzeti tudománytörténetek azóta – mindenekelőtt Gombocz Endre, Magyary-Kossa Gyula, Jakucs István, M. Zemplén Jolán, Dávid Lajos, Szénássy Barna, Szőkefalvi-Nagy Zoltán, Szabadváry Ferenc fáradozásainak köszönhetően – pótlódtak, olykor fényesen; születtek igen jó filológiai tanulmányok is, például Rapaics Raymund második világháború előtti monográfiái vagy Jelitai József munkái, s később Allodiatoris Irma, Bendefy László, Kádár Zoltán, Károlyi Zsigmond, Huszár György s még néhány, főleg a Magyar Orvostörténelmi Társaság rangos folyóirata köré tömörülő szerzők nélkülözhetetlen szaktudomány-történeti publikációi. Az új analitikus irányok jelentőségét azonban egyedül Rényi Alfréd értette meg; ő tette lehetővé s támogatta Szabó Árpád ma már klasszikus kutatásait a görög matematika kezdeteiről, ő segítette az infinitézimális számítás kialakulását firtató vizsgálódások – halálával végleg elakadt – kezdeteit. Ezenkívül művelte olykor néhány nagy „outsider" a modernebb irányokat: a fizikus Simonyi Károly és az író Benedek István. Éppen az ő Semmelweis-könyve mutatja különben legszebben, hogy mit veszített egy hasonló munka meg nem írásával a Bolyai-kutatás.

Pedig a Bolyaiak életét, korát és műveit tárgyaló modern monográfiának létrejöttek az idők során legszükségesebb előkészítő feltételei. Már Koncz József úgy összeállította Bolyai Farkas életrajzát, hogy ahhoz Benkő Samu kutatásaiig lényegében senki semmi újat nem tett, de Bolyai Farkas életrajza tekintetében még Bedőházi annyiszor ócsárolt könyve sem marad el Paul Stäckel, Dávid Lajos vagy Alexits akadémikus későbbi monográfiái mögött. Sőt Bedőházi még Bolyai Farkas matematikusi nagyságát is látja olyan jól, mint Stäckel, s majd csak Szénássy Barna jutott tovább, kiemelve Bolyai Farkas néhány mai matematikai szempontból releváns – főként sorelméleti és „halmazelméleti" – eredményét. A *Tentamen* helyét kora matematikájában azután Weszely Tibor vázolta, s hangsúlyozta jelentőségét a matematikai logika és a matematikai alapkutatások fejlődését előkészítő művek sorában. Végül pedig Benkő Samu gondos kutatásai föltárták Bolyai Farkas nevelői nagyságát és technikai géniuszát, s bemutatják a kort, melyben munkálkodnia adatott. Akad ugyan még kutatnivaló bőven (például barátsága Gauss-szal, kapcsolata a Magyar Tudós Társasággal, vagy Göttinga – Fogarasi Sámuel korabeli leírása alapján az eddigitől igencsak különbözőnek látszó – világa), mégis a keretek többé-kevésbé tisztázottak.

Bolyai János esetében úgyszólván napjainkig éppen egy ilyen elfogadható keret hiányzott leginkább. Benkő Samu megrendítően szép monográfiájáig csupa rendőrségi mozaikképekhez hasonló torzítások ismétlődtek Bolyai János szellemi arcvonásairól, Sarlóska Ernő úttörő tanulmányaiig egyszerűen nem lehetett elhelyezni Bolyai János alakját és észjárását a kor szokásvilágában és eszmerendszerében, Tóth Imre meghökkentően szellemes kutatásaiig pedig jóformán még azt se tudtuk, micsoda történetileg a nem-euklideszi geometria. Ők hárman – három különböző szempontból s roppant különböző módszerekkel – közelítették meg először hitelesen és érvényesen Bolyai János nagyon nehezen megközelíthető világát.

Benkő Samu a rengeteg és sokszor alig kibetűzhető kézirat alapján először is a különféle Bolyai János-torzképekkel számolt le; az „izgága", a „kötekedő", a „párbajhős", a „szarvasbika", a „gyűlölködő", a nagy felfedezése meg nem értését követően „elboruló" és az Üdvtan „fájdalmas eltévelyedéseibe" merülő vagy egyenesen „őrült" Jánosokkal. De mindezt nem úgy teszi, hogy az eddig pszichologizáló és mélypszichologizáló János-képekkel szembepszichologizál egy normális Jánost. Benkő Samu békében hagyja Bolyai János annyit hánytorgatott szegény „lelkét", és hagyja beszélni a szövegeket. S mert betűről betűre ismeri az egész anyagot, és mert nagyon jó történész, megszólalnak neki a szövegek. A többi már egyszerű, „csak" le kell kottázni, ez már „csak" írni tudás kérdése. Szerencsénkre Benkő Samu nemcsak szuverén történész, hanem nagy író is, a magyar nyelv szerelmes és féltékeny mestere, így aztán *Bolyai János vallomásai*ból úgy lép elénk a történészek-matematikusok-írók meghurcolta „szegény János", mint valami felejthetetlen regényhős, a maga életes valóságában. Benkő Samu a mesterien idézett és elemzett szövegekből elővarázsolta – a zaklatottság és megnyugvás nagy ritmusaiban lélegző – hőse hiteles arcvonásait.

S mintha varázsütésre: hirtelen maguktól megoldódnak a Bolyai-sorsra bogozott „problémák"; az idült „apa-fiú viszály", Bolyai János „Gauss-gyűlölete", „irigy vetélkedése" Lobacsevszkij 1840-es művével, matematikai géniuszának „Üdvtanra fecsérlése", „belezavarodása" magány okozta „gyanakvásaiba". Sejtette pedig már Alexits akadémikus, hogy olyan műveket, mint a *Raumläh*re, nem lehet zavarodott elmével írni, hiszen éppen ő vette észre – ez kis könyvének nagy érdeme –, hogy Bolyai János az élete utolsó éveiben írt *Raumlähré*ben fél évszázaddal később megszülető s nagyon nagy jövőjű matematikai diszciplína, a topológia alapjait rakta le. Sejtette, hogy Bolyai Jánost az ötvenes évek elejének merev szkémái szerint ítélte meg, amelyek csak egyféle „üdvöt" engedélyeztek, ami nem volt a Bolyaiéval összeegyeztethető. Benkő Samu ellenben valódi társadalmi és szellemi kereteket kanyarít hőse köré; látja az akkori Erdélyben – százados nagy munkák és áldozatok árán – összegyűlt energiákat, amik elegendőek voltak immár egy nagy géniusz felröppentéséhez, de pályán tartásához nem. Kora társadalmi és szellemi realitásába gyökerezteti Bolyai János tragédiáját, s az álproblémák így nyomban szertefoszlanak. Az Üdvtan is egyszeriben hazatalál a kor nagy társadalmi utópiáinak társaságában, nem mint egy bomlott és gyanakvásai üldözte elme különc terméke, hanem mint az *Appendix* szerzőjéhez méltó és mélyen az európai és kiváltképpen az erdélyi valóságban gyökerező nemes és lángeszű alkotás. Gáll Ernő azután szépen föl is vázolta az Üdvtan köré az egész erdélyi utópisztikus gondolkozás fejlődését.

Más szellemben és más eszközökkel, de ugyanígy a dokumentumok közvetlenségéből és áradó bőségéből közelít Bolyai János alakjához és sorsához Sarlóska Ernő. Sarlóska – évekkel megelőzve a mifelénk mostanság föllendülő Monarchia-kutatásokat – látja jól, hogy Bolyai János Bécsben egy tág horizontú világba jutott, amiből később se lépett ki soha. Merő anakronizmus őt Marosvásárhelyre bezárni. Mindvégig a szellemi Európa ama nagy polgáraihoz tartozik, akik Hölderlintől és Bolzanótól Dosztojevszkijen át Nietzschéig megismerték és vállalták a végsőkig gondolt gondolatok szigorú keménységét. Mert a gondolatok mögött látni kell a gondolkozót is! „Bolyai Jánost nem az elismerés kimaradása, hanem a reátörő gondolatok árja sodorja ki társadalmából. Nem a barikádokon kell keresni hozzá a mindent megmagyarázó tettet. A tizenkilencedik század nagy magányosai szolgáltatják a kulcsot sorsához, azok a sóhajok, melyek keseredetten először adnak számot a kalandról, mely arra vár, ki az ideák ingoványába téved."

A Bolyaiak – apa és fiú – nem holmi provinciális nyomorba süllyedt s kínjukban egymást tépő szerencsétlenek; alakjuk és sorsuk – gyönyörű levelekkel dokumentált harmóniájában – az európai gondolkozás főáramába tartozik, szervesen és kitéphetetlenül. Kihagyásuk az európai szellem egész történetét károsítja és hamisítja meg, hiszen bennük Descartes-hoz, Rembrandthoz, Galileihez, Spinozához, Newtonhoz, Leibnizhez, Pascalhoz, Kanthoz, Bolzanóhoz foghatóan revelálódik az újkori gondolkozás fő jellemvonása: a geometria sugalmazása. Senki hozzájuk foghatóan nem értette meg, hogy milyen felbecsülhetetlen Euklidész jelentősége Európa szellemi életében! Mert az: nem véletlen, hogy a könyvnyomtatás első évszázadaiban a Biblia után az Elemeket nyomtatták ki legtöbbször. Európa morálja sui generis geometriai morál, melynek tükrében radikálisan újra kellett gondolni az igazságok anatómiáját. S ennek során szükségképpen ki kellett derüljön, hogy az Igazságok Nagy Láncolata nem létezik, s a geometria igazsága előtt minden ember egyenlő. „A Bolyaiak nem csupán egy megoldásra váró feladatot örököltek szellemi múltunkból, de egy hitvilágot is. Ez kap hangot a Tentamen bevezető soraiban: »A mathesis tiszta forrásából merített igazság… segítségével behatóbban ismerjük meg a belső és külső világot, úgy hogy napfényre kerül a világban élő igazság, és megszületik az erény.« A »mathesis universalis« ígérete ragyog fel a jövőbe tekintő szem előtt…" S ezt az ígéretet követte azután élte utolsó percéig az Üdvtan sorait rovó Bolyai János. Csak innét érthető meg a Bolyaiak szándéka, sorsa, munkája, pátosza: nem egyszerűen ilyen vagy olyan matematikusok ők, de az újkori gondolkozás megkerülhetetlen sarkkövei. „Az idő többféleképpen is érleli a maga gyümölcseit. Bolyai János merengése a jövőről az Üdvtanban bontogat új vágyakat – a sóvárgó szív a matematikán túl feszíti kíváncsiságát, és az

»emberiség« szolgálatára kíván lenni. Az embert kifelejteni az ilyen-olyan megállapítás mögött, csak a »tudomány vívmányaira« szegezni tekintetünket – elégtelen.”

Sarlóska Ernő (jóformán még idehaza is ismeretlen) kutatásaival szép összhangban éppen ezt a matematikából fakadó matematikán túli követelményt realizálja Tóth Imre – szerencsére világszerte egyre jobban ismert és elismert – munkássága, egész nem-euklideszi tudományfilozófiája. Senki Tóth Imréhez foghatóan nem ismeri a nem-euklideszi geometriák matematikai, történeti, filológiai és filozófiai rejtélyeit; e nélkül a mindenre kiterjedő alapos ismeret nélkül el sem lett volna képzelhető nagy fölfedezése, hogy a „kontraeuklidészi” lehetőség – Arisztotelészből bőségesen dokumentálhatóan – jókor fölbukkan a görög geometriában. Ez a fölfedezés meghozta számára a megérdemelt szakmai világhírt, neki azonban csupán kiindulásul szolgált, ahonnét, egyre magasabb kilátókba emelkedik. Először is „rehabilitálta” végre Euklidészt, hiszen a párhuzamossági posztulátum tudatos választásával a nagy alexandriai a paralellák egyik lehetséges megoldását teremtette meg. S nem csak a görög geometria történetét kell ennek a felismerésének fényében újragondolni; észre kell venni azt is, hogy az újkor eleji Európa Euklidész-imádatában eme lényegében morális – hisz logikailag meg nem indokolható – döntés izgalma munkál. Arisztotelésznél ez a döntés még nem teremtő: szabadon maradt a választás a két lehetőség között. Hanem most transzcendálódik a morális döntés, s metafizikai szükségszerűség jellegét ölti a párhuzamossági posztulátum.

Ez az a hatalmas fal, amivel Gauss nem merte ütköztetni a maga matematikai fölismerését: „antieuklidészi formájában a nem-euklideszi geometria szükségképpen a geometriai fikció logikai szörnyetegének látszott.” Ámde Bolyai János nem a nem-euklideszi geometriát fedezte fel. Neki a nem-euklideszi geometria ingyen ajándékként adódott, miután fölfedezte, szó szerint megteremtette az abszolút geometriát, azt a Harmadikat, ahonnét a Másik kettő kibonthatta a maga külön és önmagában megtámadhatatlan igazságát. Hanem ezáltal a geometriai igazság, egyáltalán az igazság radikálisan és végleg relativizálódott: mindig csak egy meghatározott axiómarendszerre vonatkoztatva lehet ezentúl értelme. „A régi görög geométerek, Saccheri, Lambert, Taurinus nem a nem-euklideszi geometria előkészítői, hanem egy antieuklideszi rendszer építői, melynek csupán azt a szerepet szánták, hogy igazolja az euklideszi geometria egyetlenségét. A geometriai igazságok és univerzumok szimultaneitásának a fogalma tökéletes novum, soha azelőtt nem létezett idea, amely csakis a nem-euklideszi geometria megalapozásával jöhetett létre. Ennek az ideának nincsenek elődjei… Robbanásszerű kifejlődése nem holmi lassú kumuláció eredménye.”

Így értendők Bolyai János híres 1823-as szavai: „Semmiből egy ujj más világot teremtettem.” De Bolyai János – és ez tán a dologban a legkülönösebb – új világát nem a semmiből teremtette, „hanem egy már meglévő világból. A nem-euklideszi geometria az eukleidészi világ belsejében keletkezett. A semmiből könnyű világot teremteni, mert az ürességre vonatkoztatva a világ konkrét struktúrája semmi lehetetlent nem tartalmaz. Ámde nagyon nehéz egy már adott világból létrehozni geometriai objektumok eme világra vonatkoztatva lehetetlen univerzumát úgy, hogy a tagadott világ is igaz és valódiként őrződjék meg.” Éppen ezt tette Bolyai János, éppen ez fölfedezésének beláthatatlan filozófiai eredménye: az önmaga tudására ébredt gondolat szükségképpen ellentétes világok és igazságok koegzisztentiáját és kölcsönös tolerálását követeli meg. Nem szűnt meg hát a geometria sugalmazása, de a geometria és etika hagyományos viszonya megfordult: nem az etikát kellett többé *more geometrico* megalapozni, hanem a geometriát – *more ethico* – szabad választásra fölépíteni.

„Az idő többféleképpen is érleli a maga gyümölcseit.” A Benkő Samu – Sarlóska Ernő – Tóth Imre vázolta tágas távlatokban immár elférne a Bolyaiakról szóló teljes monográfia. Kiadóinknak vajon nem elsősorban ezt kellene-e serkenteni, s csak ezután a maguk korában érdemes, de napjainkra reménytelenül elavult művek díszes újrakiadásával bíbelődni? És vajon mikor fognak, mikor lehet végre hozzákezdeni a Bolyai-iratok réges-rég esedékes – és Fráter Jánosné mintaszerű katalógusában részben már előkészített – kritikai kiadásához? S a lassacskán honunkban is megszerveződő tudománytörténeti kutatások vezetői vajon mikor fogják növekvő presztízsüket arra is hasznosítani, hogy segítsék az értelmes Bolyai-tanulmányokat a rangos nemzetközi folyóiratokban megjelentetni? Vagy netán történetírásunk honi fórumain? Szónoki kérdések ezek, jól tudom. De súlyos mulasztásaink kicsi pótlásaképpen kiadhatná legalább valamelyik könyvkiadónk Sarlóska Ernő nagyon nehezen megtalálható Bolyai-tanulmányait.[26]

[26] Sarlóska Ernő néhány fontos írása: *(– a szerk. kieg.)*
Bolyai János házassága aköztudatban és a dokumentumok. Bp., 1961. 14 p. (A Magyar Tudományos Akadémia Könyvtárának Közleményei 23.)
Bolyai Farkas, ahogy egy diákja emlékezetében élt. = Magyar Tudomány 8 (1963) No. 2. pp. 141–146.
Bolyai János – a katona. Bp., 1965. Akadémiai. pp. 341–387., 33 képmell. (A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai és Fizikai Tudományok Osztályának Közleményei 15/4.)
Bolyai János híre. = Valóság 11 (1968) No. 3. pp. 80–92.
A 150 éves „Bolyai”. Társszerző: Gazda István. = Természet Világa 104 (1973) pp. 482–484.
A Tér Tudománya – közkézen. = Valóság 17 (1974) No. 12. pp. 90–97.
A mathesis az a gyertya Bolyai Farkas eszmevilága = Tiszatáj 29 (1975) No. 2. pp. 42–47.
Az utópista Bolyai Farkas. Társszerző: Gazda István. = Világosság 18 (1977) No. 7. pp. 443–445.
A két Bolyai – az idő sodrában. In: Dávid Lajos: A két Bolyai élete és munkássága. 2. bőv. kiad. Bp., 1979. Gondolat. pp. 359–380.
Göttinga a magyarok szemével. = Honismeret 7 (1979) No. 4. pp. 43–45.
A könyvek könyve. (Euklides: Elemek.) = Természet Világa 115 (1984) No. 5. pp. 239–240.

A teljesség igényével. A harmadik lépés[27]

Weszely Tibor művéről

Weszely Tibor könyve[28] nem egyszerűen egyike a Bolyaiakról írt új könyveknek, a Bolyaiakról írt *jó* könyveknek, bár az is, kétségkívül. Az, mert Stäckelhez méltó alapossággal ügyel szöveg és kommentálás követelményeire, Sarlóska Ernőhöz fogható éberséggel a körülményekre; Benkő Samut követi a történeti és emberi vonatkozások summázásában; Tóth Imrét és Toró Tibort a matematika- illetve természetfilozófiai összefüggések ismertetésében. Persze csak röviden szól az utóbbiakról, hiszen a címnek megfelelően, Bolyai János *matematikai* munkásságát mutatja be, és éppen ez a könyv nagy újsága, éppen ezáltal különbözik alapvetően az eddigi Bolyai-monográfiáktól és -tanulmányoktól. De hiszen – mondhatná valaki – éppen ezeket a matematikai tényeket ismertük eddig is a legpontosabban, hiszen már Stäckel páratlan szakértelemmel tisztázta az *Appendix* s a kéziratos feljegyzések és töredékek matematikai és matematika-történeti jelentését és jelentőségét, már Schlesinger Lajos és R. Bonola pontosan elhelyezte az *Appendix*et a 19. századi matematika nagy vonulatában, s aztán Kürschák József, Dávid Lajos, Alexits György, Szász Pál, Szénássy Barna, Kárteszi Ferenc, Neumann Mária, Salló Ervin kommentárjai és tanulmányai sorra hasznosan segítettek megérteni – különböző szempontokból átvilágítva – a súlyos kicsi könyvet. Ha a matematikai töredékekhez Stäckel óta tényleg nem is igen nyúlt senki, azt hihettük, hogy az *Appendix* matematikáját legalább maradéktalanul megértettük. S bizonyára így is volt ez, de tán épp az volt a baj, hogy nagyon is megértettük: maradéktalanul. A szó kétféle értelmében is.

Az első, szó szerinti értelemben úgy, hogy nemigen éreztük szükségét hozzáolvasni az *Appendix*hez a „maradékokat”: Bolyai János kéziratos följegyzéseit és töredékeit. Weszely most mindezeket gondosan figyelembe veszi, s Bolyai János *egész* matematikai munkásságának hátterében hirtelen az *Appendix* is másként látszik: eltolódnak eddigi hangsúlyok, színeződnek és új értelmet nyernek centrális részletek. Előtérbe kerül például – illetve még inkább előtérbe kerül, hisz már Stäckel és utána Dávid Lajos kellően hangsúlyozta – a k paraméter és – de ez már Weszely érdeme – nyomban szembetűnik *görbületi* paraméter jellege. Ismételten és találóan hangsúlyozza Weszely Bolyai János nagy fölismerését, „hogy a

[27] Forrás: Vekerdi László: A teljesség igényével. A harmadik lépés. = Természet Világa 113 (1982) No. 9. pp. 400–401. (Weszely Tibor művéről)

[28] Weszely Tibor: Bolyai János matematikai munkássága. Bukarest, 1981. Kriterion. 380 p., 8 t.

nem-euklideszi tér felületeinek megvan a maguk sajátos belső geometriája”. Weszely Bolyai Jánosa éppen ezt a belső geometriát határozza meg a *k* paraméterrel, melynek viselkedésével könnyen osztályozhatja a nem-euklideszi tér állandó görbületű felületeit: „a gömbön az elliptikus, a paraszférán az euklideszi (parabolikus), a hiperszférán (amely osztályba tartozik a hiperbolikus sík is) az S-rendszer (a hiperbolikus geometria) érvényes”. A *k* minden adott véges értéke meghatároz egy nem-euklideszi geometriát, így itt mintegy természetes mértékegységnek tekinthető, és akár el is hagyható a képletekből. Így jár el csakugyan Lobacsevszkij; „nála sehol nem szerepel explicit alakban a *k* görbületi paraméter”. Bolyai kezében ellenben a *k* paraméter valóságos szonda, melynek központi szerep jut az Appendix fölépítésében: a hiperbolikus sík egész bonyolult belső geometriájának kidolgozásában és – az akkortájt szokatlanul tisztán (atyjától tanultan) alkalmazott határátmenet segítségével – az S-rendszer ∑-rendszerhez való viszonyának meghatározásában. Valóságos varázskulcs Weszely kezében a felületek belső geometriája, melynek segítségével sorra nyitja az *Appendix* nem mindig könnyen nyitható zárait. A felületek belső geometriája felől nézve azután a komplex számok természetét firtató *Responsio* is nyomban az *Appendix* természetes és szerves folytatásaként jelentkezik, és gyönyörű fény derül rá, miért szerepel az imaginárius egység annyiszor az S-rendszer képleteiben: „»a *szférikus* (gömb) felületek paraméterei *valósak*, a *hiperszférikus* felületeké pedig *képzetesek*.«” Vagy amint a *Toldalék* részletesebbben kifejti: „»a gömbi trigonometria képletei, melyek az említett *Appendix*ben Euklidész XI. axiómájától függetlenül vannak bebizonyítva, a [hiperbolikus] sík trigonometriai képleteivel megegyeznek, ha (az alább majd bemutatott módon) a gömbi háromszög oldalait valósaknak, az egyenes vonalúét pedig képzetesnek tekintjük, úgy, hogy ami a trigonometriai képleteket illeti a [hiperbolikus] sík képzetes gömbnek tekinthető.«” És a képzetes gömb sugara *k/i*. És mivel $k \to \infty$ esetben a ∑-rendszert kapjuk, a *k* meghatározásával dönteni lehetne a két rendszer között, „ha sikerül az általa levezetett hiperbolikus geometriai képletek felhasználásával egy olyan összefüggéshez jutni, amelyből a *k* értéke pontosan meghatározható”. Ám a gömbi és a hiperbolikus trigonometria képleteinek formai azonossága mutatja, hogy ilyesmi nem sikerülhet. „»A trigonometria segítségével tehát – idézi Weszely Bolyai Jánosnak ebből a szempontból alapvető töredékét – nem megy: annak minden alkalmazásánál csak megegyezéseket kapunk a határozatlan rendszerben; a rendszer meghatározása sohasem következik be. Ezzel a *k* meghatározatlan volta ki van mutatva.«” Azaz „Bolyai János a XI. axióma bebizonyíthatatlanságát arra alapozta, hogy *a nem euklideszi trigonometria alkalmazása nem vezet ellentmondásra*.”

Weszely Bolyai Jánosa rendkívüli gondot fordít az ellentéttelenség vizsgálatára. Az összegyűjtött és elrendezett följegyzései és töredékei mutatják, hogy milyen messzire – s milyen messzire saját kora elé! – jutott ezen a nagyon nehéz és jellegzetesen mai területen. Jól látja Weszely és nyomatékkal hangsúlyozza az F-felület óriási jelentőségét ebből a szempontból: „Az F-felület az euklideszi geometriának S-rendszerbeli modellje". A *modell* fogalma és alkalmazása Bolyai János művében jelent meg, ő teremtette meg az ellentétmentességi vizsgálatok máig használatos, centrális módszerét. „Bolyai még azt is észrevette, hogy itt, a teljes megoldás érdekében, a fordított tételre is szükség van; vagyis hogy létezzen egy olyan euklideszi térbeli felület, amelyen a hiperbolikus síkgeometria tételei érvényesek." És szinte megjövendölte a *Responsio* 9. §-ában ezt az évekkel későbben fölfedezett modellt: „»a [hiperbolikus] sík egy képzetes sugarú gömbnek tekinthető«". S azt is tudta tisztán, „hogy a síkbeli ellentmondástalansággal még nincs eldöntve a térbeli ellentmondásmentesség kérdése".

Erről a magaslatról érthetők meg csak Lobacsevszkij munkájához fűzött észrevételei. A tudománytörténet-írás eddigi gyakorlatával ellentétben Weszely Bolyai Jánosnak a *Geometriai vizsgálatok*hoz írt észrevételeiben és korrekcióiban nem a (jogos) „sértődöttsége" miatt „féltékeny" vagy éppen „irigy" géniusz szőrszálhasogatásait látja, nem restelli gondosan újraszámolni a kifogásokat, s nem kis meglepődéssel kell észlelnie, hogy Bolyainak minden esetben igaza volt, mikor azt állította, hogy – egyébként szívesen és nagyszerűen elismert – szellemi vetélytársa hibázott. S ezzel nem csupán Bolyai emberi s matematikusi hírnevét tisztázta. Fényesen igazolta azt is, hogy sohasem felesleges és hiábavaló véglegesen elintézni vélt kérdések újragondolása. A maradéktalan megértés elégedettsége épp a megértést gátolja.

Efféle végleges megértettségbe zárta be a történetírás az *Appendix*et is, maradéktalanul. Bolyai János nagy fölfedezéséül a párhuzamosak kétezer esztendős problémájának megoldását tekintették, a nem-euklideszi geometria – Gauss-szal és Lobacsevszkijjel egyidejű – kidolgozását. Nem alaptalanul, hiszen munkássága ezt is tartalmazza. Ámde Weszely Tibor könyve kiszabadította Bolyait a paralellák börtönéből, s megmutatta azt a mérhetetlenül tágasabb teret, amit lángelméje túl a paralellákon a matematikai gondolkozás egész világába nyitott. A paralellák inkább csak ablak volt, amelyen keresztül bepillantott ebbe a csodálatos új világba, a modern matematika világába. Az eddigi matematikatörténet-írás Bolyai János könyvét többnyire e felől a kétezer éves „ablak" felől vizsgálta, Weszely radikálisan fordított a nézőponton: az ő Bolyai Jánosa határozottan a jövő, napjaink matematikája felé tekint. S így látszik csak igazán, mennyire az az *Appendix*, aminek Bolyai nevezte: *Scientia spatii…* És csak ebből az új nézőpontból derül ki igazából a kicsi könyv mérhetetlen nagysága. De kiderül az is, hogy semmi értelme többé prioritási vitáknak, vádaskodásoknak, elhallgatásoknak, a három szellemóriás indulhatott közös alapokról, jutni ellenben mindenképp egészen máshová jutott. Hanem ezáltal új feladatok egész sora merül fel. A 19. századi matematika történeti kutatása épp napjainkban élénkül meg hallatlanul, épp most mélyül el, s a kibontakozó új képből nem hiányozhatnék Bolyai János (valódi jelentősége és jelentése szerinti) matematikai munkássága. Weszely Tibor új Bolyai Jánosa. Igazán nagy történetíráshoz illően Weszely könyve nem annyira lezár, mint inkább megnyit kérdéseket; kérdéseket, melyek útbaigazíthatnak a múlt roppant bajosan áttekinthető terepén. Ebben az értelemben írta Tóth Imre Benkő Samu Bolyai-könyvéről, hogy Stäckelé után a második lépés. Weszelyé a harmadik.

Újragondolni vagy megérteni[29]

Bolyai János a matematikában és a történetírásban

Szokásunkká válik lassan a Bolyai-kutatás elmarasztalása. Legutóbb például Nagy Ferenc közölt elmaradásaink felszámolását sürgető lelkes tanulmányt a miskolci *Napjaink* hasábjain. Gondosan dokumentált írásában joggal figyelmeztet arra a mérhetetlen veszteségre, ami a Bolyai-kutatást János jó néhány levelének – nincsen rá enyhébb szó – galád megsemmisítésével érte még a múlt században, nem ok nélkül háborog Szily Kálmán János iránti értetlensége miatt sem, és ugyanígy felemlegethette volna a Bolyai-láda jól ismert „utaztatását" Marosvásárhely-Budapest-Marosvásárhely között, vagy a *Tentamen* és a *Gauss-Bolyai-levelezés* díszes köteteivel eleddig elakadt Bolyai-kiadást. Van tehát mit pótolni elég: bizonyára nem ok nélkül hangsúlyozza Nagy Ferenc:

> „Eljött az ideje, hogy Bolyai alakját, egész életművét kritikával teljesen megtisztítsuk, és végre az őt megillető helyre állítsuk… Elejétől kezdve újra át kell gondoljuk az egész Bolyai-kérdést."

De hát mikor, s miért jön el valaminek az ideje? Az embernek óhatatlanul eszébe jut a fáradhatatlan Schmidt Ferenc, akinek érdemeit ugyan már Stäckel elismerte nagy könyve néki ajánlásával, de aztán (egy lelkes kis temesvári kutatócsoporttól eltekintve) úgy elfelejtődött, hogy legutóbb Szénássy Barna – Fejér Lipót hagyatékát rendezgetve – mint ismeretlen adatokra hívhatta föl a figyelmét a Bolyai János ügyében folytatott kiterjedt levelezésére. A Szénássy által közölt néhány részlet kellőképpen igazolja a Schmidt-dosszié alapvető fontosságát a Bolyai-kérdés szempontjából, de egyúttal mutatja azt is, hogy bizony a derék Bolyai-kutató építész ügyében is akad jóvátenni való bőven. És ki emlegeti ma már szegény Szabó Pétert, aki pedig mindőnket hálára kötelezett gyöngybetűs másolataival. Egyedül Fráter Jánosné szól tán róla az őt megillető szakértő szeretettel, A *Bolyai-gyűjtemény* katalógusának rövid bevezetőjében. Különben maga ez a katalógus is, a Magyar Tudományos Akadémia könyvtárának kézirattárában található Bolyai-iratok gondos lajstromozásával, hallatlanul értékes munkaeszköz, sőt, annál is több; amit viszont egyedül Benkő Samu nyugtázott kellően a *Bolyai János vallomásai* második kiadásában. Értékéhez képest azonban, úgy látszik, Benkő

[29] Forrás: Vekerdi László: Újragondolni vagy megérteni. Bolyai János a matematikában és a történetírásban. = Vár ucca tizenhét 5 (1997) No. 2. pp. 28–33. – *Korábban megjelent:* Vekerdi László: Bolyai János a matematikában és a történetírásban. In: Bolyai-emlékfüzet. Bolyai János halálának 125. évfordulóján. A Kilátó különszáma. Összeáll. és szerk.: Staar Gyula. Bp., 1985. TIT Budapesti Szervezete. pp. 35–43.

Samu könyve se eléggé ismert és elismert, hiszen ebben a remek monográfiában Benkő a marosvásárhelyi kéziratok rendezése és tüzetes elemzése alapján igazán „az őt megillető helyre állította” emberként is a nagy matematikust. Egyébként már Dávid Lajos kis népszerűsítő könyve igen hasznos szerepet töltött be ebből a szempontból a maga idejében: igen szépen megmutatta Jánosban az embert, a szenvedésekben s az őt ért méltánytalanságokban is megőrzött emberi nagyságot. Általában: a meglehetősen terebélyes Bolyai-irodalom nemcsak csúcsaiban, de tán átlagában is sokkalta értékesebb, mintsem hisszük, illetve állítjuk. Koncz József nehezen hozzáférhető kollégiumtörténete például egyenesen reprintelést érdemelne,[30] s még Bedőházi annyit ócsárolt „Élet- és jellemrajz”-a sem nélkülözi a használható részleteket, s nem is csupán Farkas tekintetében. Végtére Jánost úgy is lehetett látni, ahogyan ez a századvégi marosvásárhelyi kollégiumi fizikaprofesszor látta: magára maradott megkeseredettnek, kötekedő különcnek. A századvég polgári pozitív progresszionizmusában talán csakis így lehetett látni őt, elátkozott zseniként, mint ahogyan öt-hat évtizeddel később Alexits professzor meg a romantikus forradalmár-képtől képtelen szabadulni. De mindketten felismerték Bolyai Jánosban az IGAZSÁG kérlelhetetlen szolgálóját, a GONDOLKOZÁS rettenthetetlen bajnokát, s ez tévedéseik fölé emeli rekonstrukcióikat; akár azt is mondhatnók, beépíthetővé Benkő Samu nagy szintézisébe. Persze Benkő Bolyai-képe sem holmi végső kinyilatkoztatás; nyilván viseli ez is – mint minden történeti konstrukció – a kor vonásait, adott esetben szépen tükrözi a hatvanas évek óvatos bizakodásait.

Ma bizonyára tragikusabb és szomorúbb Bolyai-arc tekintene reánk ugyanazokból a kéziratokból, hiszen a történelem nem valami véglegesen elkészíthető panoptikum, hanem inkább a jelen bajosan definiálható viszonya a múlttal, amely könnyed flörttől mélységes szerelemig nagyon különböző szinteken realizálódhatik, de mindig csak viszony formájában valósulhat meg. Éppen ezért kell minden kornak újragondolnia a történelem releváns – vagy neki fontos – részleteit, és éppen ezért játszhat a történetírásban olyan fontos szerepet, hogy mikor minek jön el az ideje.

E tekintetben Bolyai János szerencsésen és igazán ragyogó esélyekkel startolt, vagy startolhatott volna. A múlt század utolsó harmada a matematikának s a matematikatörténet-írásnak egyaránt nagy kora volt, s a két diszciplína méghozzá nem is vált el egymástól olyan áthidalhatatlanul, mint ma. A matematikatörténet szinte része volt az élő matematikának, s a nem-euklideszi geometria még ezen belül is nap mint nap izgalmas, új felfedezésekre inspirált. Gauss görbült felületeket tárgyaló differenciálgeometriája, a Riemann-geometria, a

[30] 2006-ban megjelent Marosvásárhelyen *(– a szerk. megj.)*

nem-euklideszi geometria konzisztenciáját vizsgáló különféle modellek – mint a Beltrami-, a Cayley–Klein-, a Poincaré-modell – és ezek hatása az alapkutatások egészére, a kor pezsgő matematikai életének fontos fejezeteit képezték, érthető hát a szakmai érdeklődés a közvetlen előzmények, s a biográfikus az elődök iránt. A nagy Gauss, a matematikusok koronázatlan királya, halála után különben is tán még elevenebben hatott, mint életében, s munkásságával és személyével összefüggő minden részlet figyelmet, sőt föltűnést keltett. A nem-euklideszi geometriák története ezen a két szálon a kor aktív matematikai kutatásainak szerves részeként jelentkezett. Szakmai szempontból ez – a közvetlen kutatások serkentésén túl – azzal az óriási haszonnal is járt, hogy előkészítette az axiómarendszerek merőben új szemléletét, ami azután később beláthatatlan következményekre vezetett a matematikai alapkutatásoktól a fizika alapfogalmainak újrafogalmazásán át a kozmológiáig, ahogyan az Neumann Mária, Salló Ervin és Toró Tibor 1974-ben megjelent könyvéből szépen megérthető. Történeti szempontból azonban megvolt ennek a múlt század végi modern szakmai szemléletnek a hátránya is: túlságosan a kész művekre terelte a figyelmet, s azokból is az éppen akkor folyó kutatások szempontjából fontos részeket hangsúlyozta. Szükségképpen a paralellák története került előtérbe így, s e téren – legalábbis az elgondolás szintjén – vitathatatlan Gauss prioritása. A paralellák története csakugyan Euklidésztől Gaussig tartott, s ami utána következett, az már egy merőben „ujj más világ” volt. De ezt a múlt században csak két ember értette meg: Bolyai János és David Hilbert, őket azonban generációk választották el egymástól, s Hilbert nem Bolyai felől közeledett az axiómarendszerek problematikájához. Ma már közhely, hogy a nem-euklideszi geometriák kidolgozása – Bolyai, Lobacsevszkij és Riemann műve, mert Gauss csak a paralellák mentén csak a kidolgozás küszöbéig jutott – az axiómarendszerek vizsgálatának egész mai problematikáját készítette elő; még a nem cantori halmazok bemutatását is rendszerint a nem-euklideszi geometriák példájával szokás kezdeni. De húsz-huszonöt évvel ezelőtt eretnekségnek tűnt fel az a sokkal szerényebb állítás is, hogy Bolyai az „abszolúte igaz” geometria jelentőségének hangsúlyozásával s a kétféle rendszer, az S és a $\sum$ rendszer belőle való származtatásával, tehát műve egész felépítésével voltaképpen a törzs-axiómarendszer gondolatát sejtette meg. Milyen fölénnyel húzta ki, még egy szegény ismeretterjesztő munkából is a lektor, legjelesebb Bolyai-szakértőnk! Hogyan róhatnánk föl tehát múlt század végi matematikusainknak, hogy nem ismerték föl Bolyai János – és Farkas, hiszen a maga módján ő is ebben a lében főtt – különleges jelentőségét? Nem kérhetjük számon rajtuk Weszely Tibor tudását, aki az ellentmondás-mentességi vizsgálatok kiemelésével és elemzésével világosan megmutatta Bolyai János úttörő szerepét a matematikai logikai modellmódszer megteremtésiben, és tisztázta az Appendix paralellákon messzi túli jelentőségét. A múlt század végi matematikusok még csak a párhuzamos vonalak ősi kérdésének egyik megoldóját látták Bolyaiban; érthető, ha a szakmai részleteken túl, történelmi szempontból, elsősorban prioritási kérdésekre koncentráltak. S itt a megjelenés dátuma döntött, kivéve persze Gausst, akinek minden szava több, mint nyomtatásnak számított, vissza s előre egyaránt. A matematikatörténet-írás – Kline kilós kötete a tanú – máig nyomozza s megtalálni véli a szálakat, melyek a nagy Gausstól Lobacsevszkijhez s a Bolyaiakhoz vezethettek; még Gauss saját szavai se akadályozták, hogy ti. nem-euklideszi sejtéseit mélyen magába zárta, senkinek az ég egy világon nem szólt róla egy szót sem, félvén a szakma reagálásától. S ha nem így jár el a nemzetközi matematikatörténet-írás, mit tehetett volna ellenében a honi akkor? Még ha olyan szinten állott volna is, mint amilyenre napjainkra – jórészt éppen a Bolyai-kutatáson fölnőtt – honi s romániai magyar matematikatörténészek emelték? Szerencsére viszont a nemzetközi matematikatörténet-írásban a Bolyaiakat akkor sokkal jobban „jegyezték", mint ma, s tán annál is jobban, mint az akkori honi matematikában. Jól ismert, hisz számtalanszor említtetik Boncompagni herceg levele, melyben felhívta a Magyar Tudományos Akadémia figyelmét az itthon biz' meglehetősen elfeledett Bolyaiakra, és gyakran emlegetjük azt is, hogy kezdetben külföldi matematikusok – Hoüel, Frischauf, Battaglini, Engel, Halsted és mindenekelőtt Stäckel – sokkal többet tettek a Bolyaiak meg- és elismertetéséért a honiaknál. A kiegyezés utáni gazdasági és szellemi újrakezdés állapotában ez tán természetes is; Szénássy Barna Schmidt-dossziét bemutató tanulmánya viszont egyebek közt éppen azért elsőrendűen fontos, mert pontosan dokumentálja a külföldi érdeklődés eleven és szakszerű honi hátterét. Ahhoz pedig, hogy a Bolyai-kérdésben kezdeményezőként léphessen fel, a honi matematikának előbb meg kellett erősödni s nemzetközi tekintélyt kellett szereznie; s mihelyt ez megtörtént, meg is tette; egyebek közt a Bolyai-díj is mutatja, valamint a *Tentamen* és a *Gauss-Bolyai-levelezés* technikai és szakmai szempontból egyaránt kifogástalan kiadása. Arról már nem a honi matematika tehet, hogy közben az őrült világ a világháborúk kora felé rohant.

Azt azonban aligha várhatjuk a múlt századi s jelen századelői Bolyai-kutatástól, se a hontól, se a külfölditől, hogy túllépett volna saját kora kortársain. A matematika és a természettudományok minden diadala – s volt belőlük elég – a századvégi pozitivizmus harcos metafizika-ellenességét látszott igazolni, s ha Bolyai János mély filozófiai gondolatai történetesen rendezettebb formában kerülnek vezető akadémikusaink szeme elé, tán még jobban megzavarja őket. Hiszen a Bolyainál mégiscsak sokkal kevésbé filozófiába merészkedő Fregét is micsoda értetlenség nyomasztotta! Ki tudja, mi lett volna egész matematikafilozófiájából, ha az ifjú Russell fel nem fedezi nehézkes gondolataiban a jövő csíráit?[31] S Bolyainak sajnos nem akadt Russellje. Vezető akadémikusainknak – köztük Szilynek – tán még kapóra is jött a tökéletlen Bolyai Gergely fecsegése János összeférhetetlen, kötekedő, magának való, a bolondságig különc természetéről: íme, a magyarázat az őket csak elborzasztani képes filozofikus töredékekre. Tudománytörténeti műveltség, sőt érzék hiányában pedig afféle nemzeti kiadás gondolata, mint amilyen a Favaro-féle Galilei- vagy az Adam Tannery-féle Descartes-kiadás volt, még csak föl sem merülhetett. „Tudománytörténet-írás" alatt szellemi vezetőink már akkor is évfordulói és egyéb alkalmi megemlékezéseket értettek, nagy embereink kötelező és lélekemelő „kultusz"-ával tetézve; s ezen túl legföljebb némi németes eszme- és kultúrtörténetet, ahogyan például Moritz Cantor vaskos matematikatörténetében jelentkezett. De el ne ítéljük őket nagyon, akkor még külföldön is többnyire ez volt a divat, s a Favaro- vagy Tannery-féle szövegkiadói lelkesedés és globalitás-igény igazán kivételes volt. A kor matematikatörténet-írásának máig elismerten élvonalában haladó Paul Stäckel e tekintetben cseppet sem különbözött az általunk oly könnyen vaskalapos reakciósként elkönyvelt Szily Kálmántól. Az ő „Bolyai kérdés"-ük a két Bolyai paralellák történetében elfoglalt helyzetének a lehető legpontosabb tisztázása volt: egy nagy eszmetörténeti folyamat részeinek, szinte eszközeinek tekintették őket; életrajzi adataik, levelezésük, de még egyéb természetű matematikai munkásságuk iránt is csak annyiban érdeklődtek, amennyiben segítette vagy gátolta az eszme kibontakozását Ebből a szempontból Stäckel összeállítása és elemzése valóságos remeklés, és felül aligha múlható; kár, hogy a népszerűsítések többnyire csak a nevezetes temesvári sorokat idézik belőle, a kutatásra meg inkább csak az Appendix első német nyelvű elveszett fogalmazványának a keresését hagyta örökül, amit „az 1825. év folyamán vagy legkésőbben 1826 elején" adott át János „régi tanítójának Wolter von Eckwehr akkori századosnak". Szénássy Barna sok évtizedes fáradozásai nyomán sikerült aztán legutóbb Weszely Tibornak megtalálnia az átadás tényét és időpontját kétségkívül igazoló Bolyai-kéziratot.

A maga nemében Stäckel monográfiája (amiben Szénássy joggal hangsúlyozza magyar munkatársai közreműködését) tán túlságosan is tökéletes és sima volt, a kutatás nem tudhatott eredményesen belekapaszkodni s folytatni. A tudománytörténet-írás egész szellemének kellett megváltozni ahhoz, hogy a Bolyai-kérdést új oldalról lehessen megközelíteni. Nagyon bonyolult folyamat ez a változás, s még főbb vonásaiban sem tisztázott. Jelen szempontunkból azonban megelégedhetünk annyival, hogy a tudománytörténet-írás a húszas-harmincas évek során valamiképpen fellazult, kezdte mindinkább elveszíteni eszme-és

31 Vö.: Bertrand Russell: Filozófiai fejlődésem. Ford.: Fehér Ferenc. Jegyz.: Bence György. Bp., 1968. Gondolat – Kossuth. 301 p. (Gondolkodók) *(– a szerk. megj.)*

kultúrtörténeti magabiztosságát, egyre inkább beengedni kényszerült különféle filozófiai, pszichológiai, szociológiai, társadalomtörténeti szempontokat. Az ötvenes és hatvanas évek fordulójára a sokféle vállalkozás egy új paradigmává sűrűsödött, amit legszínvonalasabban Koyré történetírása képviselt, s jórészt ez is teremtett meg.

A Bolyai-kutatásra azonban nem maga a Koyré-paradigma, mint inkább összetevői hatottak. Egy erős és jellegzetes fenomenológiai irány jelentkezett Bukarestben Tóth Imrével, ha nem is – mint Koyrénál – husserli, hanem hegeli alapon. Tóth Imre a szellem fenomenológiájának hegeli homályaiból kiemelte s matematikai logikai precizitásig tisztította a tagadás funkcióját, s az így kapott fenomenológiai alkotásmodellel azután megvizsgálta a párhuzamossági posztulátummal generálható logikai lehetőségeket. A nem-euklideszi geometria felfedezése végső soron a lehetőségek közti választástól függött. Reid, Saccheri, Lambert, Taurinus – s amit Tóth Imre bravúros nyomozással igazolt, már Arisztotelész is – az alternatíva mellett döntött: vagy az euklideszi párhuzamossági posztulátummal vagy a tagadásával generálható geometria lehet csak igaz, s ők empirikus és etikai meggyőződésüknek megfelelően az euklideszi geometriát választották. De nemcsak efféle alternatív döntés lehetséges. A gondolkozás univerzumában a tagadás olyan paradoxonná is transzformálható, melyben egy állítás és ellentéte egyaránt érvényes – azaz igaz következményekkel – illeszthetők egy tőlük függetlenül igaz állításrendszerhez. Tulajdonképpen ezzel az ismeretelméleti felfedezéssel született meg a nem-euklideszi geometria; amíg ez a fölismerés nem tisztázódott, addig csak kontra-euklideszi feltevésről és tételekről beszélhetünk, mint Saccherinél vagy Arisztotelésznél. De ez a kontra-euklideszi geometria nem tekinthető a nem-euklideszi elődjének, mert a gondolkozás merőben más világába tartozik. Ebben a világban az arisztotelészi logika ontológiai státuszt nyert, következésképpen az euklideszi párhuzamossági posztulátum igazsága etikai igazságként jelentkezett. Meg kellett fosztani az arisztotelészi logikát ontológiai státuszától ahhoz, hogy el lehessen jutni a felismeréshez: létezik ellentmondásmentes geometria az euklideszi párhuzamossági posztulátum igaz vagy hamis voltától függetlenül is, és ehhez az „abszolúte igaz" geometriához az euklideszi posztulátum és tagadás egyaránt konzisztensen hozzátehető.

> „A két ellentétes geometriai rendszer egyidejű létezése csupán a formális logika ontológiai interpretációjával összeegyezhetetlen. Külön-külön mindkét geometriai rendszer engedelmeskedik a formális logika törvényeinek: az euklideszi geometriában a nem euklideszi, a nem-euklideszben az euklideszi tételek mind szigorúan igazolhatóan hamisak. Az, ami ezeknek a törvényeknek nem engedelmeskedik, az a matematika

> szelleme összességében, mint mindkét geometriát magába foglaló fogalmi keret. Ez mint afféle *univers du discours* egymásnak formálisan ellentmondó tételeket fog tartalmazni.”

A paralella-probléma tehát transzformálódott, metamatematikai jelleget öltött.

> „Nem az a kérdés immár, hogy áll-é vagy se geometriai alakzatok egy konkrét tulajdonsága, hanem az, hogy bebizonyítható-é vagy se egy senki által kétségbe nem vont kétségbevonhatatlan igazság más, már fönnállónak fölismert igazságokból. Nem az a kérdés, hogy egy bizonyos állításhoz az igaz vagy a hamis logikai értéket kell-é hozzárendelni, hanem az, hogy az igaz állítást *axiómának* vagy *tételnek* kell-é tekinteni. Más tudományokban nem fordultak elő hasonló problémák. Az ilyen metateoretikus problémák létezése sajátságos episztemológiai jelenség, amely a matematikát minden más tudománytól lényegesen megkülönbözteti. A paralella-probléma történeti jelentősége alig átlátható: olyan utat nyitott, mely később a modern metamatematika kifejlődéséhez vezetett.”

Éppen ez a fejlődés, a nem-euklideszi geometria episztemológiai jelentősége akadályozta viszont, méghozzá messze a szűkebb szakmai körökön túl, a nem-euklideszi geometria elfogadását. A nem-euklideszi geometria a darwinizmushoz hasonló szenvedélyes ellenkezést váltott ki, ami még akkor sem szűnt meg teljesen, mikor Beltrami, Cayley, Klein, Poincaré munkája nyomán világossá és könnyen beláthatóvá vált az euklideszi és nem-euklideszi geometriák egymásra vonatkoztatott relatív konzisztenciája. Tóth Imre részletesen követi, a reneszánsz előzményekből kiindulva, a nem-euklideszi geometriák ellen a viktoriánus Angliában folytatott logikai és teológiai küzdelmet, s föltárja ideológiai-társadalmi hátterét. Eredetileg a nem-euklideszi geometria mellett síkraszálló Cliffordot – kora legelső matematikusainak egyikét, aki épp ezen a területen is szép eredményekre jutott –:

> „sem matematikai célok motiválták, hanem politikaiak. Nonkomformista volt, republikánus, radikális, a darwini evolúcióelmélet lelkes híve. A nem euklideszi geometriában az emberi lényeg szakadatlan fejlődésének egyik reményét látta. Minden intézményes egyház nyílt ellenfele volt, és az új geometriában a lelki és társadalmi emancipáció eszközét ismerte fel. Éppen az új geometria remélt emancipatórikus szerepe miatt vállalkozott népszerűsítésére. A nem-euklideszi geometria legfontosabb következményeinek egyikéül éppen azt tekintette, hogy bizonyítékul szolgál az örök igazság dogmája ellen”.

Magyarországon persze másképpen húzódtak az ideológiai és politikai frontvonalak, mint a viktoriánus Angliában, de Brassai Sámuel jól ismert nem-euklideszi geometria elleni pamflettjének föltűnően kedvező fogadtatása önmagában is mutatja, hogy valami nagy lelkesedés az új geometria s honi megalkotója iránt nem élhetett vezető tudományos köreinkben. Ezt a nyílt és rejtett ellenszenvet is figyelembe kell venni – figyelmeztetett rá ismételten Sarlóska Ernő – a honi „Bolyai-kultusz" kialakulásának megítélésénél.

Sarlóska Ernő hosszú filozófiai és filozófiatörténeti munkásság után kezdett Bolyai-kutatással foglalkozni, az akadémiai könyvtár könyvtárosaként. A könyvtár kézirattárában őrzött gazdag kéziratos anyag gondos tanulmányozása során jutott arra a meggyőződésre, hogy Bolyai János szokásos megítélése téves, kivált ami a műve megalkotása szempontjából oly fontos ifjúi éveit s katonai szolgálatát illeti. Szemléltetően vázolja Sarlóska az egész mentalitástörténeti klímát, ami Jánost a Császári Hadmérnöki Akadémián s fiatal mérnökkari tisztként körülvette; egy nagy, racionális, jóindulatú és emberséges rendszer működését kanyarítja a gondolataival viaskodó János köré, amely védte inkább, mintsem gátolta a kereteibe szükségképpen nehezen beilleszkedő lángelmét. Sarlóska tehát a konfliktust nem a fiatal tiszt s környezete közt lokalizálja, hanem hőse lelkében: finom transzformációval mintegy „internalizálja", befelé vetíti a kicsinyes körülményekkel s a szolgálati szabályzattal való összeütközéseket. Sarlóska – páratlan filozófiai és művelődéstörténeti erudícióval – az „Ergreifenheit" állapotát vázolja Jánosa lelkében, a „megragadottság" örvényét, amelybe a lángészt a nagy gondolat gravitációja vonzotta. És természetesen a legteljesebb mértékben „fölmenti" a dicséretével (és segítségével) oly föltűnően fukarkodó Gausst.

Holott a kérdés tán nem is az, hogy hibázott-e Gauss vagy sem; sokkal inkább az a kérdés, hogy milyen szenvedést és kárt okozott a szűkkeblű levél Bolyai lelkében. S ez pontosan lemérhető a lembergi folyamodványtervezetben található elemzésekben. A János főhercegnek Olmützből elküldött kérvényben Bolyai János már enyhít a legnyersebb részeken, de a tervezetben még durván fogalmaz.

> „Az a tény – írja például –, hogy az egyébként igen logikus és következetes Gauss úgy elfeledkezik magáról és annyira nem tud uralkodni fékezhetetlen becsvágyán, hogy sem magát egyidejűnek feltüntetni (legalábbis az apa és a fia szemében) nem képes, sem ezt másféle mint végeredményben önmagukat destruáló (és nevetségbe fulladó) okokkal alátámasztani nem tudja, s így voltaképpen teljesen összezavarodik és magán segíteni képtelen; ez a tény bízvást a legeklatánsabb elégtételnek tekinthető, amely többet mond, mint bármely elképzelhető szavakba foglalt dicséret."

A lembergi folyamodványtervezetnek – joggal hangsúlyozza Sarlóska – megvannak a maga filológiai és értelmezési problémái: a kézirathoz jelen formájában még láthatóan máshonnét keveredett egy lap. Ámde azt mindenképpen demonstrálja, hogy mennyire megrendítette s elkeserítette Gauss levele Jánost, fölkavarta és új irányokba sodorta gondolkozását. Vagy éppen megfordítva; János kavargó gondolatai ragadták magukkal örvényükbe a levelet? Sarlóska az utóbbi lehetőséget választja:

> „Bolyai Jánost nem az elismerés kimaradása, hanem reá törő gondolatok árja sodorja ki társadalmából. Nem a barikádokon kell keresni hozzá a mindent megmagyarázó tettet. A tizenkilencedik század nagy magányosai szolgáltatják a kulcsot sorsához, azok a sóhajok, melyek keseredetten először adnak számot a kalandról, mely arra vár, ki az ideák ingoványába téved"

De része lehetett a „kisodródásban" a gondolatok árján kívül a társadalomnak is jócskán, amint azt Benkő Samu monográfiája, a Bolyai János vallomásai mutatja. A kéziratok szétszóródott papírhalmazának rendbe rakása s kibetűzése közben Benkő megértette az irdatlan jegyzettömeg keletkezésének feltételét: egy végtelen magára maradt nagy lélek társalkodott itt egyetlen beszélgetőtársával, a papírral. A nagy mű terve egész gondolatvilágát nyűgözte, a jegyzeteken azonban csupán ötleteit és készülődéseit rögzítette, sebtében, ahogyan eszébe tolultak. Ezt az ötletszerűséget és sebtében odavetettséget tükrözi a följegyzések rendszertelensége és olykor kuszasága, nem azt, hogy írójuk az ideák ingoványába tévedt. Ellenkezőleg, mindenütt, még a láthatóan zaklatott helyeken is, kivételes következetességről és a gondolkozás szigorú fegyelméről tanúskodnak a följegyzések, amikből Benkő bőven idéz. Az idézetekből s értelmezésükből azután az addig ismerttől lényegesen különböző Bolyai-kép kerekedik ki. Racionálisabb. Magánya ellenére is kora nagy gondjaival együtt élő. A felvilágosodás jó örököse, aki szomorú egyéni s kollektív tapasztalatai ellenére sem veszítette el bizodalmát az emberekben s a fejlődésben. Keserű, de nem megkeseredett lélek. Reális rezignáltsággal nézte az életet és saját munkálkodását, de nem reményét vesztetten.

> „Az *Üdvtan*-tól, a közszolgálat romantikus céljain túlmenően, azt várta, hogy értő közönséget sorakoztathat fel gondolatai mögé."

S ha magányos volt is – mert az volt –, semmiképpen sem nevezhető ideái gubancába csavarodott, valóságtól elszakadt gondolkozónak.

> „Az *Üdvtan* tételeit már-már grafomániás buzgalommal fogalmazó Bolyai tragédiájában valóságos viszonyok, közelebbről az éretlen társadalmi viszonyok tükröződnek.”

Ezekre válasz gondolkozása, ahogyan egyrészt a fantasztikumok birodalmát ostromolja, másrészt józan sztoicizmussal szemléli a létezés lehetőségeit. Benkő Bolyaija lángelméjével kiemelkedik, de gondolkozása alaprétegeivel mélyen a honi fejlődésbe simul.

> „Az erdélyi szellemi életben, különösen a protestáns kollégiumok tájain, az élet bajainak elviselésére már évszázadok óta a sztoicizmus filozófiáját használták gyógyírul. Nemzedékek kapaszkodtak az emberi észbe, s a kelet-európai fejlődés megmerevült feudális kereti között az élet egyetlen örömét a gondolkozásban keresték.”

Az erdélyi művelődéstörténet jó ismerőjeként Benkő Samu belülről érti meg Bolyait, s keserveiről sem feledkezve meg s gyöngeségeit sem szépítgetve olyan embert állít elibénk, aki:

> „az *Üdvtan* fejezetein töprengve, élete végéig megőrizte a gondolkozás örömét, és munkája azzal a reménységgel töltötte el, hogy részese a humánum jövőt formáló cselekedeteinek. A maga nyomorúságán úgy akart segíteni, hogy hadat üzent az általános nyomorúságnak és embertelenségnek.”

Eleitől újra kellene gondolnunk csakugyan az egész Bolyai-kérdést? Nem inkább annak jött el az ideje, hogy megértsük és megfogadjuk végre Bolyainak, Benkő Samu Bolyaijának az üzenetét?

Bolyai János új világa[32]

„Mert az ember még nem válik kortárssá azzal, hogy
használni tudja a technikai-anyagi értékeket.”
(Bretter György: Műveltség és filozófia)

Százötven évvel ezelőtt, 1823. november 3-án küldte apjának Marosvásárhelyre Bolyai János a híres levelét, melyben bejelentette, „hogy semmiből egy ujj más világot” teremtett. Egy levelet ünnepel tehát az ország, illetve egy levél végén közölt néhány sort; s joggal, mert az elmélet, amire ez a pár szó utal, fordulópont nemcsak a matematika, hanem az egész gondolkozás történetében. Mégis ügyeljünk az ünnepléssel, mert „a tudomány ünnepélyes szertartásait – figyelmeztetett Halász Gábor nagyszerű értelemkereső esszéi egyikében – néha komédiává fokozza le együgyű papja”. Ne próbáljuk tehát az ünnep s jubileum ürügyén néhány oldal elolvasása árán megérteni, mi a „korszakalkotó” az ifjú mérnökkari tiszt fölfedezésében. Áldjuk inkább a sorsot, a jó szerencsét, az osztrák ármádia vezetőinek megértő lazaságát, az apa matematikai versenyre ingerlő óvásait, az ifjú tiszt tisztán látó állhatatosságát – ki-ki hite és meggyőződése szerint –, hogy a nagy gondolat kifejtésében nem állott meg (annyi elődjéhez s kortársához hasonlóan, a nagy Gausst is beleértve) egy két ellentét vagy részeredmény szenzációs földerítésénél, hanem teljes, formai-metodikai szempontból is tökéletes rendszert teremtett. Szó szerint új világot, a gondolkozás évezredek óta gyarapodó univerzumában.

* * *

A nem euklideszi geometriák, de tán az egész matematika fejlődésén persze valószínűleg mit sem változtatott volna, ha Bolyai János sohasem dolgozza ki ragyogó ötleteit; megtette volna helyette más, mint ahogy néhány igen fontos, de inkább formai-logikai különbségtől eltekintve meg is tette tőle függetlenül – s vele egy időben – Kazányban a zseniális Lobacsevszkij. A matematika különleges, nyitott jelrendszerként való értelmezése és az axiómákkal teremthető struktúrák vizsgálata, a modern gondolkozás nagy szemléletváltása Bolyai János nélkül bizonyosan késett volna néhány évet; de Riemann, Peirce, Hilbert és

[32] Forrás: Vekerdi László: Bolyai János új világa. In: Vekerdi László: Tudás és tudomány. Bp., 1994. Typotex. pp. 156–158. – Először az Élet és Irodalom 17 (1973) november 3-i számában jelent meg.

Frege után sokat semmi esetre sem. A matematika és a gondolkozás Bolyai János nélkül is haladt volna a maga útján, az ifjú tiszt nem annyira megelőzte korát, mint inkább kifejezte; kortársai közül legtökéletesebben. A korukat évtizedekkel megelőző lángelmékről szóló meséket rendszerint a koruktól évszázaddal elmaradt elmék találják ki, önigazolásképpen.

De ha – tételezzük fel – a matematikán nem is változtatna semmit Bolyai János hiánya, mi mérhetetlenül elszegényednénk miatta. Hisz Bolyai János azáltal, hogy a kor aktuális nagy problémáival viaskodott, azáltal, hogy megoldotta őket, hozzáigazította a középkelet-európai helyi időt – késlekedni szerető s hajlandó honfitársai ellenére – a világidőhöz. A román kori művészet általános képén nem sokat változtatna, ha a jáki és a zsámbéki templom, a feldebrői freskó, a Szent László herma vagy akár az egész magyar provincia hiányzana belőle. A mi középkorunk azonban üres lenne és értelmetlen, s tétován kereshetnénk helyünket a tovatűnő időben. És Bolyai János kimondhatatlanul többet tett a középkori mestereknél is. Hiszen ő nem egy általános stílusáramlat nagyszerű helyi variánsát teremtette meg, hanem magát az új matematikai stílust, az új gondolkozást. Kétségkívül, létre jött volna nélküle is. Ám azáltal, hogy éppen ő, s éppen itt teremtette meg, belépési jogot szerzett hazájának a modern tudományos gondolkozás világába. Más kérdés, miként, s mire használtuk a jogot.

Illetőleg éppen hogy ez a kérdés.

* * *

Benkő Samu „Bolyai János vallomásai” című, alapvető s forrásértékű monográfiájában föltárta azokat a kulturális, gazdasági és társadalmi körülményeket, melyek elengedhetetlen minimális feltételként szolgáltak, hogy egy ekkora változást megvalósító alkotás, mint Bolyai remeke, létrejöhessen. Egyértelműen látszik az elemzésből, hogy a feltételek, még ha egyenként kétségkívül szegényes és kezdetleges viszonyokra utalnak is, összességükben egyáltalában nem csekélyek. Sok évszázados helytállás, nehéz sors alatt nyögve is előre igyekezet kellett ahhoz, hogy egy ilyen lángelme végül is elindulhasson pályáján. S azonkívül, persze, szerencsés konstelláció. S mindez csak a pályára juttatáshoz és az első fényes körökhöz volt elég. A gondolkozás egéből visszajuttatott jeleket – hogy az űrrakéta-hasonlatnál maradjunk – a földi központ nem tudta földolgozni és értelmezni. Még Eötvös Józsefet is, aki pedig kora – ha ugyan nem százada – legműveltebb magyarja volt, egy külföldi matematika-történész figyelmeztette Bolyaira, „meg lévén győződve – írta Eötvös 1869-ben fiának –, hogy ily lángész irományai közt sok becses jegyzet lesz, azért fordulnak hozzám, hogy az irományokra kezemet tegyem, s érdemes részét vagy az akadémiánál adjam ki, vagy nekik engedjem át kiadás végett. És azon ember soha nem volt akadémikus, Erdélyben félbolondnak tartatott, s míg Gauss vele éveken át levelezett, Ausztriában mint genie-hadnagy penzionálhatott; s ha örülünk, hogy nagy matematikust adtunk a világnak: lehet-e nagyobb bizonysága barbarizmusunknak?" Ne Eötvös – önmagukban is roppant jellemző – tárgyi tévedéseit nézzük most, hanem jogos fölháborodását, s azt, hogy Bolyai János sok becses jegyzete bizony máig kiadatlanul hever, s Benkő Samu áldozatkész, nagy munkája nélkül jóformán még cáfolni se tudnánk azokat a tekintélyes akadémikus tanulmányokat, melyek szerint az Üdvtan szerzője nem is csak „félig", hanem egészen – „bolond". Ez azonban végül is csak egyik, mondhatnánk „személyes" magyar oldala Bolyai János tragédiájának. A másik, ami miatt a Bolyai-ügy a honi szférából messzire kiemelkedik, s általános érvényűvé nőve a Galilei-pörrel válik összehasonlíthatóvá, a honi hasznosítás kérdése. Bolyai nagyságrendű csillag persze évszázadonként egy-kettő ha akad, de ki számolta meg, hogy éppen ma hány nehéz sorsú nép küldi – s milyen áldozatok s küzdelmek árán – a maga kisebb rakétáit a tudomány nemzetközi egére? S bizonyos, hogy hazájuk, de a világ szempontjából is, nem közömbös, miként dolgozzák föl jelzéseiket. Elemi kötelességünk tehát, hogy mi, akik már ismerhetjük, az ő érdekükben is föltárjuk – Eötvös szavával – saját barbarizmusunkat.

* * *

De vajon ismerjük, s elismerjük-e? Bolyai János sorsa nem ünneplésre, hanem önnön magunk megismerésére és bírálatára késztet. Csak „zaklatottság" árán engedi – esetleg – a „megnyugvást".

Mint magas kilátóról[33]

Megmondotta volt rég a Gyémánteszű – ahogyan Sütő András nevezte Bretter Györgyöt –, hogy általában „előbb van az elmélet, s csak utána a hipotézis; mint egy adott tárgyhoz tapadó elmélet”. Mármost Bolyai János matematikai munkásságában ez idáig inkább csak a „hipotézist” vizsgálták; Weszely Tibor monográfiája ellenben az elméletből indul ki, azaz Bolyai *egész* matematikáját a tér abszolút igaz új tudománya felől tekinti és ezáltal kiszabadítja végre hősét a „paralellék” hagyományosan köréje húzott bűvköréből. Ezután nehéz lesz már Bolyai Jánost a nem euklideszi geometriák egyik fölfedezőjeként ünnepelni: bajos lesz el nem ismerni, hogy bizony mást és sokkal többet tett ő ennél.

Az abszolút geometria (azaz a párhuzamossági axióma választásától független maradékrendszer), valamint a (nem euklideszi *S*-rendszert specifikáló és viszonyát az euklideszi rendszerhez meghatározó) *k*-paraméter fontosságát persze már Stäckel (akinek érdemeit Weszely mindig kellően – olykor tán még inkább – elismeri) látta jól; az *F*-felület és az *L*-vonalak fundamentális matematikatörténeti és filozófiai jelentőségét pedig széles távlatokra nyílóan fölismerte Tóth Imre. Weszely ellenben az ő munkájukra építve és figyelembe véve Bolyai *Appendixen* kívüli matematikai munkásságát is, azt a merőben új *nézőpontot* fedezi fel, ahonnét Bolyai János, mint valami magas kilátóról, egyszerre és egységesen át tudta tekinteni lehetséges térbeli vonatkozások és struktúrák egy egész összefüggő rendszerét. Kiváltképp jól tetten érhető ez az új szemlélet a komplex számok természetét föltáró *Responsio*-ban; Weszely a munka rendkívül gondos elemzésével nem csupán arra figyelmeztet, „hogy Bolyai már az *Appendix* megjelenése előtti években tisztán látta a komplex számoknak az általa felfedezett *S*-rendszerben érvényre jutó szerepét”, hanem látja azt is, hogy Bolyai elemek és műveletek elvonatkoztatásával és általánosításával olyan gondolatokra jut, „melyekben lehetetlen, hogy ne érezzük századunk algebrájának egyik jellemvonását”. Nem csoda, hogy nem értették meg, hiszen ő lényegében már absztrakt matematikai „struktúrákat” vett észre (és bővített) ott, ahol a többiek még csak számokat, pontokat, egyeneseket, görbéket, felületeket láttak, és a legnagyobbak – Gauss, Lobacsevszkij, Riemann – is legföljebb „állandó görbületű terek”-et. Félre ne értsük valahogy! Senki nem állítja, legkevésbé Weszely, hogy Bolyai János valamiféle matematikai „szupersztár” volna, a legnagyobbaknál is nagyobb. Egyszerűen másképpen látott, egyebek

33 Forrás: Vekerdi László: Mint magas kilátóról. = A Hét [Bukarest], 1982. No. 13. (márc. 26.) p. 11.

közt épp hátrányai – elszigeteltsége, képzésének fogyatékosságai – miatt. S megtanulta – hasonlóan más „perifériás” géniuszokhoz – hasznosítani hátrányait! Gyönyörű az, ahogyan Weszely minuciózusan végigköveti, hogy ez a magánosságra kárhoztatott lángelme miként vett észre távoli vetélytársa – egyébként készséggel méltányolt – művében néhány rejtett, pici, ám joggal „szarvasként” jellemezhető hibát, amin még napjaink képzett matematikusai is átsiklanak! S ahogyan Weszely újra meg újra visszatér a komplex analízis Bolyai által fölismert jelentőségére a *tér* új geometriájában! Mintha Bolyai János látta volna már, hogy a komplexben valahogyan elsimulnak a valósban oly súlyos gondok egy- s többdimenzió különbségeiben, mintha már akkor érezte volna, „hogy R^1 kivételes dimenzió, R^3 a tipikus, és R^2 a kettő valamilyen. hibridizációja”. De túl ne feszítsük valahogy a „modernizációt”; mondjuk meg, hogy az utóbbi idézet nem Bolyaitól vagy Weszelytől való: S. G. Krantz írja recenziójában Walter Rudin 1980-ban megjelent könyvéről. Különben miért ne feszítenénk túl? Bolyai gondolatai – mint általában igazán nagy matematika – elbírnak bármilyen modernizációt. Weszely Tibor szigorúan szép könyve egyebek közt épp arra figyelmeztet, hogy ez idáig túlságosan „szerényen” közelítettünk Bolyai matematikájához.

Változók és konstansok a Bolyai-kutatásban[34]

„Rajzolt, rótt, metszett vonások.
Karcok, vonalak.
A síkba vetült tér eleven képletei.
Térgörbület. Mértani rácsok.
Ködlepte lápon a tekintet
lépőkövei.
Ókút homálya.
Tér s idő tengermélye…”[35]

Más, szakszerűbb és derűsebb mottót szántam eredetileg ide, kettőt is. Az egyiket Tóth Imre *Bécstől Temesvárig: Bolyai János útja a nemeuklideszi forradalom felé* című könyvéből,[36] a másikat pedig Benkő *Samu Bolyai János vallomásai*nak negyedik, *Függelékkel* bővített kiadásából.[37] Az utóbbi könyv első Függelékéből *(Az Üdvtan etikája)* két mondatot is kiírtam magamnak: „A szabadság az értelmes létezés tenyészete, ahol a munkának és gondolkodásnak nincs ember támasztotta akadálya.” És: „A *jó* éppen úgy, mint az igaz, csak egyféle lehet: egy embernek csak az lehet jó, ami helyes belátás szerint másnak is jó.” Tóth Imrétől pedig: „De a geometria szubjektuma számára legalább az igazság és a lét unicitásának tétele az abszolút bizonyosság Szilárd Vára marad; még akkor is az marad, ha E és non-E igazsága eldöntetlen, s emiatt a szubjektum bizonytalanságban lebeg: az igazság a szabadság határa.” Mottóul, akár az utolsó félmondat is, milyen szép, és Benkőével mennyire összecsengő lett volna!

De kínálkozik Tóth Imre könyvéből azonban egy másik, hosszabb idézet is: „…a kétezer éves geometriai háború – a polémia, mely individuális emberi szubjektumok között folyt az euklideszi igazság győzelméért – azzal a geometriai végítélettel fejeződött be, hogy mindkét állítás, E is, és non-E is *ex aequo* megkapta a győztesnek járó koszorút, és ezzel a voltaképpeni nem-euklideszi geometria világra jött.

A negáció művelete hozta világra, »a negatívnak roppant hatalma; […] a tiszta énnek energiája«. A szubjektum ugyanis – és csak a szubjektum – rendelkezik a negáció képességével.”

Vagy ugyanerről másképpen: „A nemlétből a létbe való átmenet a szó abszolút értelmében vett teremtés. *Negáció, teremtés és szabadság* a geometriai történelem

[34] Forrás: Vekerdi László: Változók és konstansok a Bolyai-kutatásban a bicentenárium tükrében. = Természet Világa 134 (2003) I. Különszám. pp. 137–140.

[35] Buda Ferenc: Tollvonás, ceruzanyom. Árvaföld. Bp., 2000. Kairosz Kiadó.

[36] Bp., 2002. Typotex.

[37] A Mundus Magyar Egyetemi Kiadó és a kolozsvári Kriterion Könyvkiadó Rt. közös kiadása 2002-ben.

transzcendens szubjektumának szentháromságát jelöli, s a három alak csupán a három hiposztázis a logikai, az ontológiai és az etikai-politikai tartományban. Ez már nem az arisztotelészi szabadság, amely addig áll fenn, amíg nincs kényszer, *sed virtus est quod ex fortitudine animi oritur* (Spinoza, *Tractatus politicus*). Az a szabadság, amely a nem-euklideszi világot teremtette, a fennálló kényszere ellenében bontakozott ki: az euklideszi világ geometriai kényszere ellenében és az ellentmondás-mentesség érinthetetlennek látszó axiómájának logikai kényszere ellenében."

Ám ekkor rögtön ide kívánkozik Surányi László *Tóth Imréről* szóló (és ugyanebben a Typotex-kötetben megjelent) kongeniális kommentárjából: „»Az ellentmondás a tér parazitája«, mondja Tábor Béla. »Nem sugároz teret magából, csak elszív teret más létezőktől«" – idézi Tábort Surányi. „A feladat első lépéseként olyan tágabb teret kell teremteni, ahol az egymásnak ellentmondó rendszerek és a bennük alakot öltő (»metageometriai«) alapállítások szabadon megjeleníthetők. Mert »a tér: mozgás a *Másik felé*«, folytatja Tábor Béla…[38] Tóth így fogalmaz: »A Másik nem kerülhető meg«, ugyanakkor a nem-euklideszi geometria megteremtése előtt »a róla való tudás rejtélyes módon, de kiirthatatlanul van meg a tudatban, mégpedig saját nemlétezésének és a saját hamisságának a tudata formájában« (IG 395). A Másik *létezésének és igazságának* kell tehát teret teremteni, egyszersmind a Másik létének és igazságának tudatát kell megteremteni önmagunkban… Szabadon kell tehát engednünk magunkban, teret kell teremtenünk ennek a »másik«, »párhuzamosan létező« rendszernek. Mindez azonban már nemcsak geometriai feladat."[39]

Erre a „Másikra" vonatkozó „nem-arisztotelészi" szabadságra (is) utalt volna az idézett szövegben Tóth Imre, Spinozára hivatkozva? Vagy *Palimpszeszt*[40] Spinozájának *Geometria more ethicója* inkább mégis a Szentháromszögség szigorúan euklideszi teológiája melletti állásfoglalásként értelmezhető? „Spinoza: Valaki, akinek nincsen igaz ideája Istenről, ugyanúgy gondolhatja róla azt is, hogy csaló, mint azt, hogy nem csaló. Hasonlóan, ugyanilyen könnyen felteheti valaki, akinek nincs igaz ideája a háromszögről, hogy a szögeinek összege nem egyenlő két derékszöggel, éppúgy, mint ennek az ellenkezőjét, éspedig hogy egyenlő két derékszöggel, éppúgy, mint ennek az ellenkezőjét, éspedig hogy egyenlő két derékszöggel. De ha azután, miután magunkévá tettük Isten ideáját, szemügyre vesszük a háromszög ideáját, akkor kénytelenek leszünk azt állítani, hogy szögeinek összege egyenlő két derékszöggel."

[38] Lásd bővebben: Tábor Béla: Személyiség és logosz. Bevezető és kommentárok a valóság őstörténetéhez. Vál. és sajtó alá rend.: Tábor Ádám Bp., 2003. Balassi. 299 p. (Lélegzet könyvek 8.) *(– a szerk. kieg.)*

[39] Vö. Tóth Imre – Surányi László: Bolyai János útja a nemeuklideszi forradalom felé. Bp., 2002. Typotex.

[40] Tóth Imre: Szavak egy háromszög előtt. Bp., 2001. Typotex.

Spinoza ezen kívül még tízszer szólal meg a *Palimpszesztben*, ugyanezen értelemben. De a *Palimpszeszt* 750 körüli szereplőjének összesen jó pár ezernyi megszólalásában a jelentés nem mindig azonos az értelemmel; a „szavak egy háromszög előtt” túllebbennek a (tényleges vagy képzelt, helyesebben valós vagy képzetes) valóságon, hogy az összkép szürreális valóságában tanúskodjanak „a Szellemnek arról a lassú és keserves munkájáról, amelynek célja, hogy tudatára ébredjen saját szabadságának.”

A könyv keletkezésének és kifejlődésének hosszú történetét az *Utószó* meséli el. Megkomponálásának a gondolata 1975-ben ötlött fel, az École Normale Supérieure-ben tartott előadásai végén, mikor Tóth Imre, a csökkenő érdeklődés láttán elkeseredve elkezdte felolvasni, előre megszabott sorrend és rendszer nélkül, az idézeteket. „A hallgatóság szeme hirtelen tágra nyílt, éreztem, mint szegzi rám fellobbantott tekintetét, és amikor a néhány perces felolvasásom véget ért, hangos tapsvihar közepette, robbanásszerű kacagás tört ki a résztvevőkből.” Azonnal észrevette akkor, „hogy ez a lelkes fogadtatás nem magyarázható mással, mint azzal a rejtett politikai tartalommal, amelyet a nem-euklideszi eszme történelmi kibontakozása hordoz magában”, mert ez „az emberi szabadság öntudatra ébredésének szellemi folyamata volt.” Azért kellett az új és szokatlan szövegstratégia, „hogy érzékelhetővé és láthatóvá tegye a nem-euklideszi fejlődés mögött meghúzódó politikai dimenziót.”

Azt a dimenziót, amit Benkő Samu az *Üdvtan* etikájaként fogalmazott meg: „A szabadság az értelmes létezés tenyészete, ahol a munkának és gondolkodásnak nincs ember támasztotta akadálya.” S kiírta hozzá a Kéziratok-ból: „Jó tehát teljes szabadságot engedni kinek-kinek… S csak ostoba fő, vakság vagy az orráig-látás és cudar, rideg, hitvány, gyáva, rosszul-értett politika kapkodhatik még tovább is az eddigi *nemesi* jogok hiábavaló oltalmazásán: midőn minél tovább késik a bosszú: annál keservesebb, siralmasabb lesz.” Szerepel a *Palimpszesztben* is egy hasonló értelmű bejegyzés. „Bolyai János: Csak azon néhány egyszerű szó, hitem szerént oly súlyos és a zsarnokokra nézve méltán oly félelmes: hogy mint egy utolsó ítéleti trombitaszóra a titkos-gonoszságuk s bűn-súlyok szövétneke öntudatjában *mindig* reszkető koronás fejek hallatára rögtön elcsüggedve halálsárgává lesznek. Szüntelen nagyobb, kisebb, de általános forradalom van a Földön mindaddig, míg az emberiség csak egy tagja keblét is a boldogtalanság mintája tölti.”

A két tudós türelmes kutatómunkája itt személyükben is összeér. „Annak a néhány papírlapnak a szövege – írja Tóth Imre az *Utószóban* –, amit akkor Párizsban olvastam fel, egy évre rá, 1976-ban jelent meg nyomtatásban, éspedig magyar nyelven, a Hollandiai Mikes Kelemen Kör emlékkönyvében, *A Szentháromszög negatív teológiája* címen, és itt úgy volt prezentálva, mint egy *Szimpiciális szövegkollázs bidimenzionális szótérben*. Az iromány régi barátomnak, Benkő Samunak szerettem volna dedikálni, akivel az ötvenes évek elején együtt dolgozgattunk a Bolyai-hagyaték hatalmas szénakazlában. De tudomásom volt róla, hogy a román biztonsági szervek – a Securitate – gyakran érdeklődött Samu iránt, és el akartam kerülni, hogy egy teljesen fölösleges beszélgetésre invitálják azért, hogy milyen alapon érzi egy hazaáruló szökevény feljogosítva magát arra, hogy neki ajánljon egy nyilvánvalóan rejtjelezett írást. Ennélfogva, hogy félreértés ne essék, kriptikus szövegemet a következő egyértelmű deklarációval vezettem be: *Benkő Samunak nem ajánlom*."

Az anekdota oldalnyi elemzéseknél pontosabban mutatja, miként válik Benkő Samu és Tóth Imre plutarkhoszi párhuzamos életrajzokba kívánkozó, ellentétes, ám nem ellentmondó pályaképében a Bolyai-kutatás maga is a kényszerekkel szemben kivívandó szabadság nehéz megvalósulási folyamatának részévé; vagy Spinozával szólva virtussá, amely „ex fortitudine animi oritur".

Egyben azt is példázza a több évtizedes forráskutatásokra alapozott két életmű, egyebek közt éppen a maga eltérő mivoltában, hogy a Bolyai-kutatás – rossz szó, de nem találok jobbat – „beérkezett". Külön és értelmes diszciplínává nemesedett, ahonnét – remélhetőleg végleg – kiszorultak a jó (és a rossz) szándékú dilettánsok. A Bolyai-kutatás szakma lett, hasonlóan a Galilei, Kepler, Newton, Boyle, Darwin és egyéb „iparok"-hoz. Meglehet ez a Bicentenárium legfőbb tanulsága? Ahogyan például Ács Tibor könyve: *Bolyai János a bécsi hadmérnöki akadémián*[41] gazdagon és szakértelemmel válogatott képek, fakszimilék, dokumentumok tömege által segítve nem elbeszéli, hanem a szó eredeti értelmében demonstrálja, miként élt és tanult, hogyan haladt a katonai ranglétrán Bolyai János az akadémián. Ezen túlmenően (hangsúlyozva Sarlóska Ernő úttörő szerepét) bemutatja a francia mintára született, és a korban tán még az École Polytechnique-nél is modernebb intézmény szerepét és jelentőségét a honi műszaki műveltség terjedésében, az akadémia (a katonai célt tekintve meglepően) liberális szellemiségét, a tankönyvekkel (köztük a matematikaiakkal) dokumentálható racionalitását, a feljebbvalók, a tanárok, a főigazgató János főherceg felelősségteljes gondoskodását a növendékek előre meneteléről. Megismerjük az iskola tanítási módszerét, az analitikus módszert, „amit az utasítások és az akadémiai alapszabály írt elő".

Megismerjük a módszer lehetőségeit és előnyeit, hatását az ésszerű, logikus gondolkozás fejlődésére, ami előfeltétele a katonaságnál létfontosságú gyors és célszerű döntéseknek. „János már az első időkben azt tapasztalta, hogy az oktatás során a több bizonyítási mód közül általában a legegyszerűbbet és a legérthetőbbet választják ki. A tanárok gondosan kerülik azt, hogy a növendékeket az adott tárgyról keletkezett sok nézettel terheljék,

[41] Bp., 2002. Zrinyi Miklós Nemzetvédelmi Egyetem Egyetemi Kiadó.

mivel a társai közt feltűnően különböző képességűek keveredtek egymással. Az akadémia tanárai arra törekedtek, hogy az oktatással elérjék azt a kívánt célt, amely nyilvánvalóan nem abból állt, hogy a növendékeket kész tudósokként bocsássák el, hanem csupán annyira képezzék ki őket, hogy »*azok – minden további segítség nélkül – önképzés útján azzá válhassanak*«. Ennél nagyobb lehetőség Bolyai Jánosnak nem kellett, mert az akadémia semmi korlátot nem állított a tudóssá válási folyamata elé. Sőt, alapszabálya előírta a tanári kar számára annak elősegítését."

Az oktatás általános elvei után következik a tantárgyak részletes ismertetése, évfolyamonként és egy-egy „Főtantárgy" köré csoportosítva, János megőrzött tankönyveinek és az előadásokon készült jegyzeteinek bemutatásával és elemzésével. Fontos életrajzi részleteken túl (az elemi mechanikával foglalkozó füzetének egyik oldalán maradt fenn például „A Parallelarum Theoria"), mindenekelőtt azért nagyon tanulságosak ezek a tantárgy- és tankönyv bemutatások, mert meggyőznek, hogy a tanulásra fordított idő s munka nem volt elvesztegetett a „Parallelák" szempontjából. Vega műve második kötetének VIII. táblázatát nézegetve például nyomban szembetűnhet a gömbháromszögtan alapos – és világos – tárgyalása, aminek jó hasznát láthatta később János az *Appendix* ábráinál. De még a *Befestigungskunst* sem volt fő célja szempontjából érdektelen, amit Sébastian Vauban nyomán tárgyaltak Bécsben. „Gyakorlati tapasztalataira és hatalmas elméleti tudására támaszkodva (Vauban) tudományos elméleti módszerrel tárta fel a matematikai és geometriai szabályokra épülő várháború törvényszerűségeit, dolgozta ki a várostrom és várvédelem eljárásait. Ezért Jánost a parallelák történelmi előzményeinek megismerése, geometriai rendszerének, a térelmélete felépítése szempontjából érdekelte Vauban munkássága, különösen pedig a vaubani párhuzamok, árokrendszerek elmélete és gyakorlata."

Részletesen elmagyarázza Ács Tibor, hogy milyen alapos geometriai és hadtörténeti ismeretekre tehettek szert a VII. osztályos tanulók Vauban munkásságának a tanulmányozásából. De még az építészet és a taktika tantárgy se volt érdektelen Bolyai János fejlődése szempontjából, amint azt megőrzött jegyzetei tanúsítják. Ács Tibor azt sem mulasztja el, hogy felhívja a figyelmet magának Bécsnek a hatására: „Bolyai János utolsó bécsi éve a szorgalmas tanulás és az elmélyült kutatás mellett, mivel, mint mérnökkari kadetnek évi 180 forint, vagyis havi 15 forint illetménye volt, lehetővé tette számára a rendszeres színházba járást. Óriási élményt jelentett számára az európai nagyváros és birodalmi főváros, Bécs eleven és érdekes színházi és zenei élete, amiről önéletírásában így vallott: »*Kadetságom alatt minden elmerülésem s ragadtatásom mellett a tani tárgyaimba: mikor csak szerét tehettem, a gyönyörű bécsi színházakban pontosan megjelenni el nem* *múlattam, jelesen az operákban s balettekben; s oly gyönyört leltem azokban: hogy Bécset semmiért sem sajnáltam úgy ott (el-) hagyni, mint azon ritka színházokért*.«”

Ács Tibor azt is valószínűsíti, hogy milyen darabokat láthatott János; azonban ezt, valamint a rövid áttekintést a hadmérnöki pályán töltött (cseppet sem ilyen derűs) évtizedről (1823–1833) nem itt kell ismertetni; az összehasonlítás keserű kérdéseket kelt, várjuk meg a kötet ígért részletes folytatását. Elégedjünk meg itt annyival, hogy Ács Tibor könyve nyomán új színnel gazdagodott a „Szentháromszög” hermeneutikája. (Nem kellene-e a *Palimpszeszt* következő kiadásába bevenni János főherceget vagy legalább Vaubant?)

Van egyébként is valami „varázsfuvolás” a nem-euklideszi geometria történetében. Valami aufklärista misztika, ahol a fennkölt szüntelenül a „Szöktetés a szerájból” commedia dell’artés „sültrealizmusával” ölelkezik. Talán épp azért is maradhat örökre ifjú, és matematikai meg fizikai tudásunk bővülésével ezért késztethet újra meg újra Bolyai János – akár egy odavetett kéziratos mondatával – elődként való felismerésre későbbi nagy eredményekhez és elméletekhez. És ezért nem szűnhet meg a nem-euklideszi geometria euklideszi modelljeinek a keresése és bírálata, ami – meglehet immár rég túl az „ellentmondás-mentességen” – lehet, hogy valóban „elavult”, ám mindenképpen divatjamúlt kérdésén.

Az pedig igazán „varázsfuvolás” csoda, ahogyan egy marosvásárhelyi matematika-professzor, Kiss Elemér a Teleki–Bolyai Könyvtárban őrzött kéziratokban felfedezte Bolyai János, később mások (köztük Gauss, J. H. Jeans, D. H. Lehrmer, Erdős Pál) nevével összefonódott, számelméleti és algebrai bizonyításait. Szakmai körökben hamar világhírre szert tett kutatásait Kiss Elemér angol nyelven is összefoglalta,[42] felfedezései történetét és matematikai lényegét pedig elmesélte Staar Gyulának,[43] „A Bolyai-kép új színei”): „s mi rácsodálkozhattunk Bolyai János eddig nem ismert – kidolgozott vagy töredékes – értékes algebrai és számelméleti feljegyzéseire, gondolataira.” Egy fiatal szegedi matematikus, Szabó Péter Gábor pedig Kiss Elemér inspirációját követve, Bolyai Farkas számelméleti vonatkozású kéziratos hagyatékát nézte át, s talált János vizsgálataival konform tételeket. Erről azonban ő maga számol be emlékszámunkban.

A fentebb említett kérdések úgyszólván mindegyikét érinti Weszely Tibor összefoglalója: *Bolyai János. Az első 200 év.*[44] Ahogyan Tóth Imre, Benkő Samu, Ács Tibor, Kiss Elemér esetében, itt is évtizedes kutatások és releváns monográfiák előzik meg az összegezést. Csak ezzel a gazdag szakmai tudással a birtokában sikerülhetett Weszelynek alig

[42] Mathematical gems from the Bolyai chests. János Bolyai's discoveries in number theory and algebra as recently deciphered from his manuscripts by Elemér Kiss. Akadémiai Kiadó – Typotex, 1999. 200 p.; Notes on János Bolyai’s Researches in Number Theory. = Historia Mathematica 26 (1999) No. 1. pp. 68–76.

[43] Matematikusok és teremtett világuk. Bp. 2002. Vince Kiadó. pp. 298–319.

[44] Matematikusok és teremtett világuk. In: Bolyai János. Az első 200 év. Bp., 2002. Vince Kiadó. pp. 298–319.

kétszáz oldalon hiánytalanul bemutatni Bolyai János életét, matematikai munkásságát az Appendixtől a Későn észlelt számelméleti kutatásokig, Filozófiai és társadalmi nézeteit, a Bolyai-kultusz történetét, s néhány szépirodalmi vonatkozást.

A legfontosabb rész kétségkívül a matematika. Pedagógiai, de ami jelen szempontból még sokkal fontosabb tudománytörténeti remekelés, ahogyan az Appendix lényegre törően tömör paragrafusai elé felvázolja az egész problématörténeti hátteret, Euklidésztől a *Parallelarum Theoriá*n át a Temesvári levél új világáig, mögé pedig (az Appendix kezdeti fogadtatásának az ismertetése után) azt, „ami az *Appendix*ből kimaradt": az Appendix gondolatainak továbbfejlesztését a kéziratokban. „Mivel János arra törekedett, hogy az *Appendix* szövege minél rövidebb legyen, így az is előfordult, hogy ennek megírásánál tudatosan hagyott ki már kész, vagy éppen akkor vizsgált eredményeket. Ő maga hangsúlyozta, hogy az *Appendix* csak egy részét tartalmazza azoknak a vizsgálatoknak, amelyek őt az 1830-as évek körül foglalkoztatták. Nem vette be művébe például a komplex számokra vonatkozó elgondolásait, annak ellenére, hogy felismerte a képzetes mennyiségeknek az ő új geometriájában megnyilvánuló jelentőségét. Az *Appendixben* nem tért ki azokra a kutatásokra sem, amelyeket a hiperbolikus térbeli tetraéderek köbtartalmának meghatározása érdekében végzett, vagy amelyek az *S-rendszer* ellentmondás-mentességére vonatkoznak. Akkor azonban még eltökélt szándéka volt, hogy ezeket az eredményeket később közölni fogja… Sőt főműve utolsó mondataiban is visszatér a kérdésre: »Hátra volna végül a tárgy minden vonatkozásban való lezárása érdekében annak bizonyítása, hogy valamely feltevés nélkül nem lehet eldönteni, hogy $\sum$ vagy pedig *S* (és melyik) teljesül. Ezt azonban kedvezőbb alkalomra halasztjuk.« Sajnos, ez a »kedvezőbb alkalom« nem következett be, de kéziratai közül egynéhány megőrizte erre vonatkozó meglátásait."

A két idézet egymáshoz montírozása valamiféle „palimpszeszt", az utóbbi ugyanis Weszely Tibor régebbi könyvéből, a *Bolyai János matematikai munkásságából*[45] származik. Ez a könyv (egyik) aranyfedezete a mostaninak. Az ottani részletes vizsgálataiból fűz csokorba Weszely itt néhányat, egyebek közt a Lobacsevszkij művéhez János által írt *Észrevételekről*. (Az elhíresült „szarvashiba".)

Az ellentmondás-mentességi vizsgálatok kézirataiból is átjön az új könyvbe a lényeg; még nyomatékosabban hangsúlyozva, „hogy egyetemes matematikatörténetünk folyamán a modell fogalmával legelőször Bolyai remekművében találkozunk." De legérdekesebb tán az a töredék, amelyik Bolyai János bizonytalanságait tükrözi: „»Az új geometria alapvonalainak latin kiadásában a szerzőnek még az a reménye volt, hogy kimutatja… (itt Bolyai minden

[45] Bukarest, 1981. Kriterion Könyvkiadó.

valószínűség szerint az *S-rendszerre* gondolhatott) lehetetlenségét. A későbbi vizsgálatoknál azonban kitűnt, hogy akár az euklideszi rendszer mellett való döntésre, akár az eldöntetlenül maradásra van lehetőség, és hogy (ameddig a dolog eldöntetlen) még az eldönthetetlenséget sem bizonyíthatjuk be a priori, úgy a döntés további kísérletei oly kincsásóra emlékeztetnek…

A 11. axióma vagy bebizonyítható vagy sem. Bizonyíthatatlansága azonban nem bizonyítható be, és a bebizonyíthatóságát is csak magával a bizonyítás effektív elvégzésével lehetne kimutatni.«”

Weszely természetesen a modellmódszer felfedezésének a bizonyítékaként idézi a töredéket, és kiegészíti egy explicitebb idézettel, Jánosnak az Appendix 1837 körüli német átdolgozásához írt lapszéli jegyzeteiből. A könyv legremekebb néhány oldala az, ahogyan itt Weszely precíziós tömörséggel ismerteti az egész modellmódszer-problematikát, el egészen Hilbertig és Gödel eldönthetetlenségi tételéig: „mely szerint egyetlen axiómarendszer ellentmondástalansági bizonyítása sem formalizálható az illető axiómarendszerben. Tehát azonnal észrevehető, hogy a modellmódszer is csak relatív ellentmondás-mentességet bizonyít; vagyis az egyik rendszer ellentmondás-mentességét visszavezeti egy másik rendszer ellentmondástalanságára.”

Amint Bolyai ∑ igazát az *S-rendszerbeli F* felületén. Bolyai nyilvánvalóan nem a Gödel-tételt sejtette meg; mi sem állhat távolabb Weszely Tibortól, a komoly matematikaprofesszortól, mint ilyesmit állítani. De mi játszadozzunk a palimpszesztelés szabadságával, és lapozzunk vissza a 74. oldalra: „Talán nem lépjük át a reális megítélés korlátait, amikor azt állítjuk, hogy Bolyai János sajátos esetként már észrevette azt, amit egy évszázaddal később Gödel a híres tételében általánosan kimondott.” Még ha nem is a ∑ *S-beli F-felületen* való „modellezhetőségével” kapcsolatban, hanem amikor „1825 februárjában azzal állott elő apjánál, hogy a párhuzamossági kérdés, amelyen ő éveken át töprengett és fáradozott, valójában eldönthetetlen probléma, és így minden addigi bizonyítási kísérlete hiábavaló volt…”

Az *F*-felület és az *L*-vonalak (Gauss elnevezésével paraszféra és paraciklus) óriási jelentőségének a kiemelése a nem-euklideszi és az abszolút geometriában Weszely könyvének jellegzetessége és egyik nagy érdeme. Nem jár töretlen utakon: Szénássy Barna *magnum opus*-át követi[46] „Az *Appendix* rövid kivonata”; megbízhatóság és teljesség tekintetében a legjobb közérthető összegezése a műnek. Így, aki közelebbről meg akar ismerkedni mondjuk az

$$X(x) = e^{x/k}$$

képlet keletkezésével és jelentésével, fellapozhatja Szénássy könyvének 174. és 175. oldalát, és maga is kiolvashatja a képletből, „hogy k az a távolság, amelyhez tartozó párhuzamos

[46] A magyarországi matematika története a 20. század elejéig. Bp., 1970. Akadémiai Kiadó.

paraciklusívek aránya e-vel egyenlő. Minden egyes rögzített k értékhez tartozik egy önmagában ellentmondás nélküli hiperbolikus geometria, a $k\rightarrow\infty$ határeset pedig az euklideszi rendszer.” Aki pedig még mélyebbre szeretne merülni az L-vonalak hiperbolikus szépségeiben, kézbe veheti Kárteszi professzor klasszikus Appendix-kiadását,[47] a bicentenárium – és a szegedi Polygon – jóvoltából pedig az *Appendix* eredeti szövegét, Rados Ignác magyar és Halsted angol fordításával.[48]

Azt azonban az *Appendix* rövid kivonatából is jól érzékelheti bárki, különösebb matematikai tudás nélkül is, hogy mennyire másféle geometriáról van itt szó, mint az euklideszi volt. Ahogyan például „a 4. §-ban bevezeti az *egyenlő hajlású szelő* fogalmát”, majd „igazolja a párhuzamosság *szimmetrikus* tulajdonságát”; vagy ahogyan az egyenlő hajlású szelővel kijelölt *izogonális megfeleltetés* (amely akár síkban, akár térben *tranzitív* vonatkozás) alapján „felveszi egy adott iránnyal párhuzamos térbeli egyenesek sokaságát”, és aztán „az egyik ilyen egyesen egy tetszőleges A pontot választva az A-val korrespondeáló (izogonális vonatkozásban álló) térbeli pontok halmazát F-nek nevezi.”

Vonatkozások, megfeleltetések, tulajdonságok, ponthalmazok, kétféle, irányított félegyesekre és paraciklusívekre vonatkozó párhuzamosság (jele III illetve II), izgalmas térbeli és síkbeli szerkesztések: az *Appendix* mégcsak nem is emlékeztet Euklidész monoton Quod erat demonstrandumaira. Talán nem túlságos túlzás azt állítani, hogy Euklidész az *F-felületen* lett igazi geometria. Addig inkább logika volt, amit különben Proklosz éppen ilyenként értékelt kommentárjaiban. A $\sum$ az F-felületen nem egyszerűen az euklideszi geometria „modellje”. Csak miután kiderült, hogy „van Másik”, vált az euklideszi rendszer geometriává: teljes értelmű és jogú részévé a *scientia spatii absolute verá*nak. Meglehet Felix Klein azért neheztelt Bolyaira, mert uniformis tulajdonságú *F-felületében* (a $\sum$-ban a sík és a gömb rendelkezik ezzel a tulajdonsággal) vagy a párhuzamos paraciklusívekkel határolt sávokból izogonális vonatkozású félegyenesekkel kivágott területek eltolhatóságában (a maga Gauss-énál alig kisebb lángeszével) felismerte Erlangeni Programjának valamiféle elődjét? Vagy legalább a felületek autochton belső geometriájának a megsejtőjét? „Axioms then become theorems about a particular geometry.”

Oláh-Gál Róbert érdekes életrajzi – többnyire levéltári eredetű – adatok, tények, levelek közlésével könnyített, nagyon nehéz kicsi könyvében az egyik tanulmány gondosan körüljárja A Bolyai–Lobacsevszkij-geometria modelleztetőségének a kérdését. A (háromnál több

[47] Bolyai János: Appendix, a tér tudománya. Szerkesztette, bevezetéssel, magyarázatokkal, kiegészítésekkel ellátta: Kárteszi Ferenc. Bp., 1977. Akadémiai. 210 p.

[48] Johanne Bolyai: Appendix, scientia spatii absolute vera. A térnek absolut igaz tudománya, a mely független Euklides (a priori soha be nem bizonyitható) XI. axiomájától. Szeged, 2002. SZTE Bolyai Intézet. 109 p. (Polygon Könyvtár)

dimenziós) euklideszi terekbe való beágyazhatóság és a globális modellkeresés nehézségeit részletezve a következőképpen összegez: „A hiperbolikus sík viszonylag egyszerű és plauzibilis felületmodelljének megtalálása sok új tulajdonság felismerésére szolgálhat. Ugyanis szabályos, minden pontban ugyanolyan tulajdonságú felületünk csak a gömb és a sík. Ez azt jelenti, hogy ha például gipszből készítünk egy gömböt és egy tokot, akkor ebben a tokban a gömb bármilyen irányban elforgatható. Ugyanígy a sík is. De más ilyen tulajdonságú felületünk nincs.

Matematikailag bizonyított tény, hogy bármilyen dimenziójú térben ilyen tulajdonsággal csak a sík és a gömb rendelkezik. Ezért volna érdekes elgondolni, hogy milyen volna egy teljes hiperbolikus sík”.

„A pszeudoszféra geodetikusairól” szóló tanulmányában kiszámítja és felrajzolja a pszeudoszféra párhuzamos körökre merőleges meridiángörbéin kívül is lehetséges geodetikusainak a formáját, azután a következőképpen összegezi kritikai okfejtését:

„A végtelen kiterjedésű Bolyai-síkgeometriának a véges felszínű pszeudoszférán való bemutatásakor mindig Kányádi Sándor *Űrsorompó* című csodálatos verse jut eszembe, amelyet Toró Tibor atomfizikusnak, jeles Bolyai-kutatónak ajánl:

amikor egyre szélesebb körben
kezdett elterjedni
hogy a végtelen egyenlő a határtalannal
s bizonyos alapigazságoknak
vélt axiómák posztulátumok
nélküli világ is lehetséges
s hogy egy ponton át számtalan olyan
egyenes húzható melyek a
köréje képzelt körön belüli
más egyenesekkel
párhuzamosnak mondhatók
s hogy a képzelet körét
akár a határtalannal egyenlő
végtelenbe is tágíthatjuk
közbiztonsági okokból
sorompóval zárták
le a végtelent
közönséges
fenyőfa-sorompóval”.[49]

[49] Oláh-Gál Róbert: Gondolatok Bolyai Jánostól és Bolyai Jánosról. Csíkszereda, 2002. Magister Kiadó.

A pszeudoszféra-modell kritikáját Oláh-Gál Róbert elküldte Simonyi professzornak, amikor *A magyarországi fizika kultúrtörténetének* „Eukleidész a pszeudoszférán” című fejezetében meglátta a pszeudoszférára rajzolt háromszöget. A második kiadás közli a modell időközben megkapott fényképét, a következő szövegaláírással nyugtázva Oláh-Gál Róbert kritikáját: „A marosvásárhelyi Bolyai Múzeum kisterme. Közepén áll a fából esztergályozott, feketére festett pszudoszféra-modell, a rárajzolt »egyenes vonalak« által kijelölt háromszöggel. Az egyeneseknek a geodetikus vonalak felelnek meg, vagyis olyan felületi görbék, amelyek főnormálisa miden pontban egybeesik a felületi normálissal (a távolság az ilyen görbe két pontja között a vonalon mérve – kellően leszűkített környezetben – minimális értékű). Az ábrázolással kapcsolatos problémákról az irodalomban található ábrák általánosan hibás voltáról Oláh-Gál Róbert cikkeiben találhatunk érdekes kritikai megjegyzéseket. Ő számítógép segítségével rajzolt a pszudoszférára fenti definíciónak megfelelő »egyeneseket«.

A fizikusok általában beérik a hozzávetőleges ábrával. Az egzakt megfogalmazással úgysem tudnánk mit kezdeni a négydimenziós, imaginárius elemeket is tartalmazó, vagy különösen a mai elméleti fizika akár 11 dimenziós absztrakt terei esetében, holott a fantáziát igencsak megmozgató, heurisztikus ábrákat tudnak (merészelnek?) készíteni a Nap tömege által meggörbített térről, a táguló világegyetemről, vagy jelenleg olyan struktúrákról, ahol az univerzum egyik részét különleges járatok (wormholes) kötik össze egy esetleg más struktúrájú univerzummal.”

„Szavak egy háromszög előtt” – more ethico.

De kapcsolhatók Bolyai (Toró Tibor nyomán) gyakran idézett sejtéséhez is: „A nehézkedés törvénye is szoros öszveköttetésben foljtatásban tetszik (mutatkozik) az Űr termetével, valójával (alkatával), miljségével; s (gondolom) az *egész természet* (világ) állapotával”.[50]

„Ködlepte lápon a tekintet
lépőkövei.”

„De mi az igazság…”

[50] A Nature 2003. február 27-i száma közli az első precíziós torziós inga kísérleteket a húrelméletek extra térdimenziós geometriájából következő eltérésnek kimutatására a gravitáció $1/r^2$-es törvényétől, 100 μm-es távolságon belül.

Bolyai János marosvásárhelyi kéziratai[51]

Fogalmazványok a Tanhoz, illetőleg az Üdvtanhoz

Amikor úgy háromszori elolvasás után elkezdtem írni a könyvről,[52] úgy gondoltam, hogy a legalkalmasabb forma tán a (nálunk is mindinkább divatossá váló) *Essay Review* lehetne. Címet is találni véltem hozzá: „A tökéletesség bűvöletében”. De aztán hamar rájöttem, hogy lenne ebben valami (különben mifelénk úgyszintén egyre divatosabbá váló) nagyképűség. Maradjunk hát az egyszerű, tisztes recenziónál. De ezt meg minek újat írni, mikor a lehető legtökéletesebb – több mint harminc esztendeje – megjelent Benkő Samu *Bolyai János vallomásai*ban. A könyv, persze, sokkal de sokkal több recenziónál, csak éppen ez is benne van, bőséges hivatkozásokkal és idézetekkel kísérten a most végre nyomtatásban megjelent kéziratokból. Aki a most megjelent forráskiadás elolvasására vagy használatára szánja el magát, azt ajánlom, hogy először olvassa el, illetve olvassa újra a *vallomásai*t. Könnyen megteheti, a könyv több kiadásban megjelent, a negyedik 2002-ben, a Mundus Magyar Egyetemi Kiadónál. Ez a kiadás *Függelék*ként fontos kiegészítéseket és adatokat tartalmaz a „recenzióhoz”, különben azonban őrzi az eredeti szöveget és beosztást. Ez a beosztás és a fejezetcímek már önmagukban segítik – jó recenzióhoz illően – az eligazodást a kéziratok nem mindig könnyen áttekinthető erdejében. Csak ezzel a vázlattal, illetve térképpel a kezünkben értjük meg valójában a 117. oldal tökéletességigényét vagy inkább himnuszát:

> „…Csak illőleg és tökélyen kifejtett s meggyőzőleg vérbe oltott *tan* lesz képes az embert a kísértettől, a gonosztól s némileg, nagyobb, kisebb mértékben *ön-ördögségétől* meg- s poklából kimenteni, -szabadítani, -váltani, s ön-angyaliságát benne mind inkább s határtalanul tisztulva s érve fejteni, s örök-életét mind mennyeibbé tenni. …A *tökélynek* ugyanis, össz-hangzásban szólva az előbbivel, azon ellenállhatatlan varázs-ereje, bűbája van: hogy azt elég csak *észre venni* arra: hogy azt rögtön megkedveljük, elhatározottan s tántoríthatatlanul, minden lehető régi nyűgöző békókat eldobva, általa mind többre-többre törekedjünk. Kivált a mai roppant s mind inkább terjedő s már csaknem általános fogékonyság mellett méltán nagy remény lehet: hogy a jó, tökélyes

---

51 Forrás: Vekerdi László: Bolyai János marosvásárhelyi kéziratai I. Fogalmazványok a Tanhoz, illetőleg az Üdvtanhoz. = Természet Világa 136 (2005) No. 12. pp. 548–550.

52 Bolyai János: Fogalmazványok a Tanhoz, illetőleg az Üdvtanhoz. Ambrus Hedvig Mária, Deé Nagy Anikó és Vakarcs Szilárd közreműködésével szerk. és bev. ell.: Benkő Samu. Kolozsvár, 2003. Erdélyi Múzeum-Egyesület. XLIV, 307 p. (Bolyai János marosvásárhelyi kéziratai 1.)

> és köz-üdvös azonnal el is ismertetik s fogadtatik. Az elmés embernek nem könnyen s ritkán kell a jó dolgot *kétszer* mondani, ajánlani: egy intés, egy szikra gyakran már elég a meggyúlt ész-láng által az üdv-temploma nem elhamvasztása-, hanem fölépítésére.”

II. József-i vagy inkább mozarti felvilágosodás Szent Ferenc üdvösségvallására oltva? Mindenesetre Németh László a maga minőségelvére alapozott üdvösségvallását mélységesen rokonnak érezhetné Bolyai János tökéletességkultuszával; s tán nem állhat messzi egymástól a „köz-üdvös”-ről vallott felfogásuk sem: „hogy *lényegesen* becses *csak* az: *mi* a *köz-* és *minden egyéni üdvet* némileg előmozdítja, vagyis a fő-, vég- és köz-célhoz *közelebb* viszen.”[53] A minőségszocializmus utópiája axiómatömören? A megvalósítás akadályait az *Emberi színjáték*tól az *Irgalom*ig felmérő Németh László és a *Tan* téziseit fogalmazó-rendszerező Bolyai János mintha hasonló, vagy akár egyazon malomban őrölne-őrlődne remény és valóság között. Meglehet épp azért becsülik-bírálják mindketten a történelmet, ahogyan Bolyai nevezi a „multan”-t, mert helyesen használva, de csak így megtaníthat rá, hogy a nélkülözhetetlen értékek őrzésével és akadályokká vált szervezetek-szerkezetek kiiktatásával hogyan lehet folytonosan megújulva közeledni „a fő-, vég- és köz-célhoz”.

> „A *fölebbi* értelemben tehát *mindenki*, mégpedig *szükségesképpen*, *conservativ* is, szabadelmű is. Avagy van-e ember: *ki* egy régi fenéhez vagy más üdült kórsághoz *csak azért is* ragaszkodjék, sőt ne kívánna attól lehetőleg megválni menekedni: mert dolga régi?! Semmivel sem jobb pedig az *értelmi* tévely, *bal*-hit, *ábránd, ábrány, puszta, üres – illő tárgy nélküli – képzelődés* a szellemre, üdvre, nézve, sőt még sokkal rosszabb: a fenénél.”[54]

Ilyen akadályozó régi erőként ismeri fel és elemzi Bolyai János a korabeli nemességet.

> „Különösen a magyar nemes ember a legnagyobb részint eddig alacsonobb volt azon kutyánál, melynek bőrére irott királyi adományjával ki tudja melyik elejének fönnhéjaz, pöffedez s undoritó- s sértőleg kérkedik; nagy része inkább akasztófát s ötven botot érdemelne, mint ó divatú s szellemű áldozatot.”[55]
>
> Márpedig „valamíg a föld népet embertelenül, ingyen sanyargató nemesek vagy urak lesznek: ama fő cél mind nehezebben s több szükséges vigyázattal erődik el, mivel ezeknek érdekökben van (fekszik): a régi megszokott, de nem érdemlett jótól meg nem

[53] Benkő műve p. 117.
[54] Uo. p. 118.
[55] Uo. pp. 38–39.

válni (abból ki nem heppenni, fittyenni), vagy abban megmaradni. A »divide et vinces (levius)« hadi fortély szerint tehát nincs más mód, mint egy *más* úton a szegény embert előbb lelketlen közelebbi hóhéraitól megmenteni.”[56]

De nem valamilyen véres leszámolás árán, bár ennek a lehetőségét sem zárja ki, olyannyira, hogy egy pompás kis dialógusban figyelmeztet megtörténhetőségének veszélyére, amelyet Benkő Samu a *Bolyai János vallomásai „A művészetek”* című fejezetében idéz annak az igazolására, „hogy Bolyai ez alkalommal, más nyilatkozataival ellentétben, a művészi forma biztosította racionális kifejezési lehetőséget veszi igénybe: »némi kis fogalomadás végett« nyúl a párbeszédes formához, hogy a valóságban felfedezett drámai feszültséget teljes lélektani mélységében ábrázolhassa.”[57] A kéziratkiadásban a párbeszéd természetesen a saját helyén, a „Tökélyes közállomány (constitutio) fogalma” című fejezetben szerepel.[58]

> „Így küzködik – fűzi Bolyai a két paraszt remek, Illyésre emlékeztető párbeszédéhez – tusakodik a szegény gyámoltalan föld népe; s itt vége lévén e párbeszédecskének, vagy az itt végződő párbeszédecskéből látszik, hogy a szegény al-nép okoskodik is ugyan, de mégse képes áthatni s kivergődni a mesterséges szövevényből (a föld-gömbét körülfogott, elboritott, -lepett hálóból); mi annál kevésbé csoda (csuda), hogy, mint látjuk, még a tanultak se tudtak eddig majd mire is menni, bármennyit vitáztak is ezen a tanban egyik legfontosb s köz-alkotványilag perse éppen legfontosb kérdés fölött, nyilván és alattomban (titkon). Pedig a megfejtés valóban egyszerű, és a tárgy, cél roppantságához képest könnyű: de *tan* kellett előbb olyan, milyennel {Isten jóvoltából, *természet*(e) vagy *szükség* szerinti, tehát *meg sem is vonható* kegyelméből, akaratjából} *már* bírunk (legelőbb hatósan jég-törő) *kezdetül*, és ezutáni igyekezetünk által *folytatandóul…*”[59]

Sok minden nyomban látszik már ebből a rövid idézetből is. Mindenekelőtt az, amit annyiszor hangsúlyoz Benkő Samu, hogy a Tan és az Üdvtan kézirathasábjai nem kész szöveget tartalmaznak, hanem egy életen át javított-tökéletesített tervezet, egy újra és újra végiggondolt gondolkozási és cselekvési program (?), modell (?) megfogalmazásait és variánsait. Ezek azonban a részletekre vonatkoznak; a lényeg vagy mondjuk inkább a kitűzött cél, illetőleg feladat nem változik: az emberiség erőszakmentes eljuttatása egy hozzá méltó második

[56] Uo. pp. 39–40.
[57] Benkő Samu: Bolyai János vallomásai. Bukarest, 1968. Irodalmi Kiadó. p. 216.
[58] Kéziratkiadás... pp. 28–29.
[59] Uo. pp. 29–32.

paradicsomi állapotba: a világosan és közérthetően megfogalmazott-megértetett közjó világába, az oda vezető út, egy többlépcsős, hosszú tanulási folyamat segítségével. Csakhogy ez megengedhetetlenül leegyszerűsített, durva összegezése egy rendkívüli gonddal és körülményesen vázolt fogalomnak és egy precízen előírt folyamatnak, amely maga is része és alkotója az elérendő célnak; e kettő elválaszthatatlanságának felismerése a Tan és az Üdvtan nagy újításainak egyike. Bolyai János pontos cél- és feladatismertetése megtalálható a 17–18. oldalon, közvetlenül a két paraszt dialógusa előtt. Az összeállítás (mint az egész könyvben) Benkő Samu páratlan szakértelmét és bámulatos ízlését dicséri, amint az is, ahogyan a szétszórt kéziratlapokból – magukból a kéziratokból választott címek alatt – összetartozó, önálló fejezeteket teremt. A jelen cél- (föladat-) kitűző fejezet teljes címe például:

> „Tökélyes közállomány (constitutio) fogalma vagy Tökélyes status-tan (statistica), politica vagy a természetes, bátorságos, állandó, egyszerű, eredeti, igaz (helyes) és igazi, igazságos, nemes, egyensúlyos (vagy súlyegyenes) köz-alkotványi rendszer annak valósítása és útja s módja föld-gömbünkön vagyis néhány óra alatt megtanulható tökélyes *magyar nyelv* és annak következtében, az által értelmi és erkölcsi egyet értés, az eddigi csaknem köz-gyűlölség helyett, köz-, nemcsak *fele*-, hanem *egész* baráti szeretetre ragadtatás eszközlése, valósítása, létesítése, vagyis tökélyes köz-társaság, respublica fölállítása, egyítése, egyesítése módja (minden respublicák respublicája) örökös béke, mennyei paradicsom s bármily s -mely nép fogalma szerénti vágyja
>
> Bolyai Bolyai Jánostól
>
> és átal*
>
> *Jelen irat csak úgy lévén, mint hirtelen, (erősen habarva) leírtam, s csak futva nézhetvén el, kireszelve teljességgel nincs; s erősen sok kitérés és hosszú körirat van benne; azonban akinek esze van: csakugyan erősen jól megértheti.
>
> E teljességgel nem kinyomtatandó, csak magunk vagy az én (magam) s annak vagy azoknak, kit vagy kiket beléavatandóknak találok, számára való.
>
> Az 1848. évi (Februar) Martius, …beli események után, bölcs módosítással, vigyázattal, ki is lehet már nyom(t)atni. (Bolyai János saját megjegyzései)”[60]

A következő, „A közjó elérésének igaz útjáról; rendszabályok önéletírással” című hosszú fejezet szerves folytatása az előbbinek; a gyermeknevelés – saját emlékeivel illusztrált – módszereitől az erőszakmentes rendszerváltás globális stratégiájának felvázolásán át a nő-

[60] Kéziratkiadás… p. 17.

férfi kapcsolat Tan-szerű elrendezéséig „az emberiséget eredeti ártatlansága, paradicsomi állapotjárai visszavitelének” érdekében.

Ezt a két részt Benkő Samu a *Bolyai János vallomásai*nak utolsó előtti, „Az elveszettnél szebb paradicsom” című fejezetében részletesen ismerteti, hozzávéve az itt később „Pénz-Tan” cím alatt közölt kéziratokból röviden a lényeget; elhelyezi Bolyai János gondolatait és terveit a kor, a tizennyolcadik század második felét és a tizenkilencedik első kétharmadát felölelő évszázad társadalom-, állam- és művelődésfilozófiai rendszereinek, etikai, nevelési, gazdasági teóriáinak és utópiáinak a világában, azokkal koherens és egyenlő értékű, de némely tekintetben, mint például a földművelés továbbra is centrális fontosságának vagy a közgazdaságtan és a statisztika alkalmazásának a kérdésében „a kelet-európai gazdasági fejlődés lemaradásának közvetlen gondolati tükröződéseként” a nyugatiaktól merőben más utat követő rendszer gyanánt.

> „Az élet furcsa paradoxona, hogy a szépműves Kemény Zsigmond társadalmi-politikai eszmerendszerét a gazdaságtan eredményeire alapozza, ellenben a geométer Bolyai János, aki egyébként »matematikai szigorral« igyekszik felépíteni a tudományok rendszerét, nem figyel fel arra a korábban már felismert tényre, hogy a társadalom mechanizmusa igazában csak a politikai gazdaságtan oldaláról közelíthető meg.”[61]

Ámde „a közgazdaságtan ignorálása” nem azt jelenti, hogy Bolyai János nem törődne az egyéni és a közösségi élet mindennapos és történelmi távlatú gazdasági vonatkozásaival. „Az elveszettnél szebb paradicsom” című fejezetben Benkő Samu a kéziratokból egybeválogatott hosszabb-rövidebb idézetekkel mutatja be, hogyan képzeli el a Tan és az Üdvtan szerzője – globális összefüggésekkel a szeme előtt és helyi viszonyokból kiindulva, a kor hasonló elképzeléseihez csatlakozva és bírálva-javítva azokat – „egy »rendszeresen« kidolgozott, »okos, művölt második természeti állapot«” csak nehéz munkával, jó Tan birtokában, világméretű művelődésre alapozott szervezettséggel és erőszakmentesen megteremthető világát. „Ebben a »második természeti állapotban« Bolyai János a magántulajdon helyébe a kollektív tulajdont állítja, a »föld«, a »műhelyek«, a »kereskedelem«” tekintetében egyaránt. Ez utóbbi esetében „csak az »illő cserét«” engedi meg. Az eddigi fölbirtokviszonyokat nemcsak igazságtalannak, hanem erkölcsileg károsnak minősíti, „mivel »az önzésre« s »szüvek elválasztására« folyvást alkalmul szolgálnak”. Éppen ezért kell „»az aljas s mindenkor önkárrali veszéllyel fenyegető önzésnek lehető és teljes elejét vevésére,

[61] Bolyai János vallomásai, pp. 239–240.

meggátlására a földet, a lakótelkeket... szóval a határt föl nem osztani, hanem az egész földet vizeivel és légköreivel együtt… az egész emberiség… közbirtokául hagyni«”.[62] Ez a magányos gondolkodó kézirataiban gyakran és terjedelmesen ír arról, hogy „az ember társas lény, s a humanizálódási folyamat valójában a tagadhatatlan »öncél« és a nélkülözhetetlen »közérdek« harmóniájának kereséséből és megtalálásából áll. A »közérdek« lassú felülkerekedése nélkül az ember még ma is nyers makkal táplálkoznék. Ezért a jövő társadalmában mindenki számára ajánlatos földművelő munka sem kívánja lerombolni mindazt, amit a közérdeket helyesen felfogó nemzedékek a társadalmi munkamegosztásban már megvalósítottak.[63]

Vezető pártellenfeleik meggazdagodását kölcsönösen kurkászó politikusaink, politológusaink, *mediamanjeink* (az egykor tisztességes – hisz Ady vagy Krúdy is élt vele – „újságíró” megnevezés ugyanis aligha illik rájuk) nyilvánvalóan nem olvasták a *Bolyai János vallomásai*t.

Magántulajdon, hatalom és közérdek viszonya centrális probléma Bolyai János közgazdaságtanában és statustanában. *Marosvásárhelyi kézirataiban* minduntalan visszatér rá, és ismételten tárgyalja a nevelés, a tanítás, a tanulás helyes módszereinek és elterjedésének a fontosságát, gyakran részletes ajánlásokkal-utasításokkal a megvalósítás tekintetében. Utóbbiak némelyike különösnek, netán megmosolyogtatónak látszhat; de a Tan egészében megvan a helyük, kivált ha figyelembe vesszük, hogy *a közjó elérésének igaz útjáról szóló rendszabályok* mindig *önéletírással* társulnak. Ezekre az önéletrajzi részletekre régóta felfigyelt a Bolyai-kutatás, de csak most, a kéziratok egészében derül ki valódi természetük: empirikus kontrollként szolgál(hat)nak egy teoretikusan felépített rendszerhez (?), utópiához (?), ábrándhoz (?). A Tan és az Üdvtan „műfaja” aligha meghatározható. A legtalálóbb szóra Benkő Samu lelt rá: „…*vallomásai*”.

A cím természetesen Rousseau-ra utal; de tán arra is, hogy a kor, a XVIII. század második felén és a XIX. század első kétharmadán átívelő „romantika, amellett hogy nagy energiát fordított a múlt feltárására és értelmezésére, programszerűen vállalta a jelen és a jövendő alakítását. A korstílus letéteményesei és követői önmagukat is az átalakulás részeseinek tartották. Shelley írja *A megszabadult Prómétheusz*hoz készített előszavában: »A költők éppen úgy, mint a filozófusok, festők, szobrászok és zenészek egyik értelemben teremtői és a másikban teremtményei koruknak«”.[64] Ez a „korjelleg” tükröződik a *Tan*ban és az *Üdvtan*ban, s általában a *Marosvásárhelyi kéziratok*ban. S ebben a tükörben mindegy, hogy

[62] Uo. pp. 229–230.
[63] Uo. pp. 231–232.
[64] Uo. p. 258.

mit ír a szerző teoretice a művészetekről, a műve úgy, ahogy van, töredékességével, fogalmazási és nyelvi próbálgatásaival-mérlegeléseivel, bizonytalanságaival együtt, sőt éppen így művészi alkotás, szépirodalom. A két paraszt pompás párbeszéde szervesen-szépen illik bele, amint a 110–111. oldalon az a két remek anekdota is, amely a nemzeti felsőbbrendűség érzését s hangoztatását gúnyolja ki. S a visszaélést a többnyire önérdeket leplező – ahogyan ma mondanánk – „nemzettudattal".

Arany János-i valamiképpen az anekdotákhoz fűzött kommentár is:

> „Az ily semmiségre perse legfölebb elmosolyodhatik az olvasó s halló, s csak azért hozám elő, hogy példával adjak alkalmat azon megjegyzésre, mi szerént ilyekkel sértvén a magyar a szászt (ki is, azt mondják, nem kevésbé tud a magyarról s fájdalom, tán érdemlettebbül, méltóbban, valóbbszínűleg, költeni), nem csoda, ha ez sem állhatta a magyart, miért s általjában illő nemes kristusilag emberszerető érzésből jó lesz fölhagyni az afféle gúny-gondolatokkal. Én valóban mindezek mellett s után a magyar nemzetet s nyelvet különösen szeretem, s éppen jovát kívánom eszközölni, mint az is bizonyítja: hogy tanomat *magyarul* írtam, s írom jelenit is: jeleltem ki némely árnyék jellem-vonalokat élénkecskén az azoktóli óvakodásra ezután. Egyéb aránt éppen nem akarok boldogító, idvezítő tervemmel csak a magyar nemzetre szorítkozni: *az egész emberi nem* általános boldogítása {mennyiben, mint (egy) eszköz: én is hatván a véghetetlen isteni tervben: úgy szólhatok}, s *az idvesség útja kijelelése* (melyet el is kezdettem, s naggyában, alapját állandólag megvetve, véghez is vittem) fekszik nekem szűvemen. Mi fölséges, édes nyug(od)almas, megnyugtató, csendesítő, kielégítő, bátorító érzés lesz: ha minden választékok leomolván (de csakis, nem sokára leolvadó, *jég-várak*), az igazi elme-világ- s lelkesülő melegtől leolvadván: az ember az embert embernek nézi?"[65]

Ahogyan a magántulajdon akadályozza s végül lehetetlenné teszi „az elveszettnél szebb paradicsom" megvalósíthatóságát, úgy gátolja s rombolja le a nemzet bármiféle kisajátítása, magántulajdonosítása a Bolyai János által alapkövetelménynek, abszolút axiómának tekintett egyenlőséget. Benkő Samu elsősorban „A történet-tan szelleme és becse" című fejezetben csoportosítja – nyelv- és őstörténeti feljegyzésekkel együtt – az erre vonatkozó kéziratlapokat, s az olvasó bámulva fedezheti fel bennük Fülep Lajos „Nemzeti öncélúság" című *Válasz-cikkének* és Szűcs Jenő nemzettanulmányainak az elődjét, sőt felismerheti akár a gazdasági

[65] Kéziratkiadás... pp. 110–111.

globalizáció esetleges jótékony hatásának a megsejtését is. A mintaszerűen rendezett szövegből idézeteket ki-ki kereshet magának; itt csak egyet másolok ki a Tanra és az Üdvtanra annyira jellemző „önéletírásos" igazolás-megvilágítás illusztrálása végett:

> „Részemről ugyan született magyar vagyok, vagyis magyarnak vagyok *születve*: azonban öt évig Bécsbeni neveltetésem- s katonai pályámnál fogva (s mint az austriai császárság tagja s alattvalója) hason joggal *német* is vagyok, és különben egyenlő körülmények között (*caeteris paribus*), sőt a *nélkül is*, bármily körülmények között is – kivévén, mennyiben *természetesen, valósággal (in concreto, absolute)* mint becsületes ember lehetőleg kötelességem szerint igyekszek cselekedni – éppen oly jó szűvem van a német vagy más nemzethez…"[66]

A téma hosszan folytatódik, egyebek közt megmutatva, hogy mennyire hiábavaló és félrevezető józan kritériumokat keresni a kizárólagos nemzethez tartozáshoz, de a lényeg tán összegezhető egyetlen mondatával:

> „Művelt, tehát becsületes, emberséges ember mindenkiben az embert (MOZESként az isten képét), *emberiséget* nézi s becsüli…"

Bécsi neveltetésére, s túl az „Ingenieur-Akadémiában" szerzett tapasztalatain általában Bécsre sokszor hivatkozik a kéziratokban Bolyai János. Ács Tibor több évtizedes kéziratos kutatásai alapján megírt monográfiáiban[67] Benkő Samuéhoz fogható szakértelemmel és precizitással mutatja be és elemzi azt a szellemi légkört, amely a matematikai, mérnöki, logikai és természettudományos szemléletformáláson keresztül és azon túl az érzékeny ifjú elmében és lélekben segítette megerősödni és megfogalmazódni azt a „művelt, tehát becsületes, emberséges" gondolkozást és világnézetet, melynek alapjait otthonról és apja mellől-tanításából vitte-hozta magával. Ez mind együtt a *Marosvásárhelyi kéziratok*ban megjelenő Tan és Üdvtan forrása és háttere. Meglehet, erre is utal a kéziratok elé írt

„AJÁNLÁS
Bolyai Farkas atyámnak"…

---

[66] Uo. pp. 153–154.

[67] Ács Tibor: Bolyai János a Bécsi Hadmérnöki Akadémián. Bp., 2002. Zrínyi Miklós Nemzetvédelmi Egyetemi Kiadó. 307 p.; Ács Tibor: Bolyai János új arca – a hadi mérnök. Sajtó alá rend.: Gazda István. Bp., 2004. Akadémiai Kiadó. 631 p., 4 t. (Magyar tudománytörténeti szemle könyvtára 30.)

Innen, és ezen a szellemi tájon át vezetnek kitérőkkel, kanyarokkal, ismétlésekkel, javításokkal, változatokkal, makacs geometriai-logikai következetességgel különbözőképpen kijelölt és elnevezett utak a cél, helyesebben a feladat különböző megfogalmazásaihoz, amelyek végül is mind az „élő, a körülmények szerént hajlékony, engedékeny s határtalanul tökélyesíthető, finomítható alkalmazású *törvények* szerinti köz-állam”,[68] a demokratikus respublica körülírásai és működési feltételeinek részletes meghatározásai. Egy államé, ahol „*mindenki*, mégpedig *szükségesképpen*, *conservativ* is, szabad-elmű is”. Az ilyen államok közt elkerülhetők a viszályok és a háborúk.

> „A végén nem az a fő-dolog, hogy ki mi nemzetbeli?, hanem hogy fő és lényeges dolog az, hogy ki *milyen*? s e tekintetben kétségen kívül bármely zsidót, törököt, pogányt, *ha* jó érzelmű, tiszta és becsületes szándokú ember, méltán inkább szeretünk s többre becsülünk egy aljas, gaz lelkületű s tettű magyarnál, mily is, fájdalom! nem csak egy találkozott.”[69]

A legutóbb idézett mondatot az magyarázza s emeli, hogy a „Kossuth Lajos országos kormányzó elnökhöz címzett beadvány”-ból származik; melyben 1849. június 15-én Bolyai János felkínálta a magyar kormánynak tanát s szolgálatait.

A Tan alapján szerveződő államok nemzeti ellentétektől mentesen könnyen egyesülhetnek; Bolyai János Magyarország és Erdély unióját is elsősorban ebből a szempontból, az egyesülés következtében megnövekedett lehetőségek és hatékonyság szempontjából üdvözölte: „az unió egy lépés az emberi nem egyesülése, tehát az Isten országa felé”.[70] Amit lépésenként, „minden respublicák respublicáinak” a szerveződésével egyszer majd elérhetőnek remél. Talán ezért is törődik annyit – hozzáértéssel és látható élvezettel – a Földgömb országainak és régióinak természetes és célszerű politikai-gazdasági geográfiai beosztásával? Ha világnyelven ír (és közöl), ma tán egy új szaktudomány megalapozói közt tartanák számon. Ha más nem, Lucien Febvre felfigyelt volna rá. De hol vannak ma már Lucien Febvre-ek? Pedig az Európai Unió jelen sorskérdésvitájához igencsak találhatna a *Marosvásárhelyi kéziratok*ban érvényes, ma is időszerű érveket. Ha ugyan egyáltalán tudna róla. Így a mi kincsünk és felelősségünk marad ez a remekül szerkesztett és kiadott kötet.

---

68 Kéziratkiadás... p. 75.
69 Uo. p. 234.
70 Uo. p. 220.

A Bolyai-gyűjtemény a Bolyai-kutatásban[71]

> „Kéziratos származékok gyűjteményeinek – összegezi a tekintélyes *Archives of the Scientific Revolution* című könyv recenziója –, eltérően a sok példányban nyomtatott vagy akár a kézzel írott könyvek táraitól, többnyire megvan a maguk hosszú időre terjedő saját története. Szerzők és örököseik kívánságai és stratégiái, az idő játékai, levéltárosok, apologéták, szerkesztők tevékenységei, háborúk, tűzvészek, áradások pusztításai mind rajta hagyhatják a nyomukat a kéziratos gyűjteményeken hármas feladat elé állítván a történészt az archívumban adatolt történet megértésével, magának a gyűjtemény történetének a rekonstruálásával és a kettő szétválasztásával."[72]

Ezen elvek szerint épül fel, és ezt a hármas feladatot oldja meg Fráter Jánosnénak *A Bolyai gyűjtemény* katalógusához írt Bevezetése, szervesen kiegészítve és feltárva az általa rendezett gyűjtemény úgyszintén ezen hármas elvhez igazodó belső rendjét és szerkezetét. Így a *Katalógus* több a szokásos levéltári-kézirattári katalógusoknál: tudománytörténeti archívumtörténet, évtizedekkel ennek a még ma is új műfajnak a megszületése előtt, sőt maguknak a tudománytörténeti archívumoknak a létrejötte és elterjedése előtt.[73]

Az akadémiai Bolyai-gyűjtemény kialakulását és fejlődését Fráterné a Bolyai-kéziratok egészének a történetében helyezi el.

> „Bolyai Farkas könyveit végrendeletében a marosvásárhelyi kollégium könyvtárának ajándékozta, és ennek következtében halála után természetes volt, hogy ide kerüljenek kéziratai is. Bolyai János iratait, melyeket halálakor a helybeli katonai parancsnokság lefoglalt, ugyancsak a kollégiumi könyvtárnak sikerült megszereznie. Így az autográf Bolyai-iratok legnagyobb részét ma is Marosvásárhelyen őrzik. Az Akadémiai Könyvtár Kézirattárának Bolyai-gyűjteménye – ebből következőleg – a marosvásárhelyihez képest

[71] Forrás: Vekerdi László: A Bolyai-gyűjtemény a Bolyai-kutatásban. In: Bolyai-emlékkönyv. Bolyai János születésének 200. évfordulójára. Szerk.: Kapitány Katalin, Németh Géza, Silberer Vera. Bp., 2004. Vince. pp. 367–388.; első megjelenés: Vekerdi László: A Bolyai-gyűjtemény a Bolyai-kutatásban. In: Örökségünk, élő múltunk. Gyűjtemények a Magyar Tudományos Akadémia Könyvtárában. Bp., 2001. MTAK. pp. 85–107. (A Magyar Tudományos Akadémia Közleményei)

[72] Archives of the Scientific Revolution. The Formation and Exchange of Idea sin Seventeenth-Century Europe. Ed. By Michael Hunter. Woodbridge, 1998. The Boydell Press. 216 p. Rec.: Lawrence M. Principe. = Annals of Science 56 (1999) No. 3. p. 322.

[73] Fráter Jánosné: A Bolyai-gyűjtemény (K 22-K 30). Bp. 1968. MTAK. 116 p., [8] t. (A Magyar Tudományos Akadémia Könyvtára Kézirattárának Katalógusai 4.) (A továbbiakban: Katalógus)
Fráter Jánosné szül. Porács Rózsa (Szerencs 1923. XI. 15. – Bp., 1994. XII. 21.) 1952 óta dolgozott az MTA Könyvtárában.

csak töredék lehet; mégis igen sok értékes anyagot tartalmaz, amely jelentős adalékokat szolgáltat a Bolyai-kutatás számára.”[74]

Bolyai Farkas élete végéig lazább-szorosabb kapcsolatban állott az Akadémiával; leveleket, véleményeket küldött, s rendre elküldte – dedikálva – megjelent műveit a Magyar Tudós Társaságnak.

„Bolyai Farkas akadémiai működését jelzik Toldy Ferenc titoknoknak írt levelei (K/148–150 és M. irod. lev. 4-rét 61/d), amelyekből látható, hogy rövidebb, hosszabb kihagyásokkal, de állandó az összeköttetés Marosvásárhely és az Akadémia között. Bolyai Farkas leveleiből realizálni lehet a kialakult kapcsolatot, a Tudós Társaság működése iránti érdeklődést és a szaktudósokkal, kortársaival való érintkezés óhaját. »Az arithmetica eleje« második kiadását 1846-ban küldi az Akadémiának »Méltóztassék a Tktes Úr kiosztani a mathesisi osztálybelieknek; én rég nem látván névkönyvet, nem tudom most kik és akárhányan legyenek, akik megnézésre méltatnák; méltóztassék néhány rendben tudósitani; én ingyen bekötve küldök, csak neveiket tudjam. T. T. Győri, Nagy Károly, D. Vállas, Bitnicz, Tárczi uréknak küldenék [...]«

Bolyai Farkas akadémiai levelező taggá választása szempontjából fontos dokumentum Döbrentei Gábor 1833. aug. 29-én Bolyai Farkasnak írt levele (K 23/21). Ez ugyanis olyan összefüggésekre világít rá, melyek ismeretében arra lehet következtetni, hogy Bolyai Farkas levelező tagsága Döbrentei Gábor közreműködésének volt köszönhető, és hogy rendes tagsági ajánlásában milyen szerepet játszott a latin nyelvű Tentamen megjelenése.

Bolyai Farkas 1833 augusztusában küldte meg a Tentamen I. kötetét az Akadémiának dedikálva. (A könyv ma is megvan. Könyvtári jelzete: 542.012.) Döbrentei Gábor titoknok, akihez a küldemények érkeztek, még augusztus 29-én válaszolt Bolyai Farkasnak:

»Könyvedet tehát nevedben a Társaságnak október 1-ső napján adom majd bé midőn héti üléseink megint kezdődnek, mert most a Társaságnak szeptember utolsó napjáig vacatioja van, engem kivéve mert én dolgozom mint a […] tudod mi.

Rád nézve is egyenesen irtam midőn kivántam, hogy mathesisi munkádat magyarul ird, mivel 3d vidéki rendes tagnak óhajtottalak majd 300 pengő forinttal, ami mellett már ezután deák munkád miatt nem szólhatok; fijadra a Kapitányra nézve is az a

[74] Katalógus p. 5.

barátságos észrevételem van, hogy ha magyarul adja ki munkáját lehet még helybeli tag itt 500 pengő forinttal, mely summa penziójához egykor jól járulna; lehet vidéki rendes tag 300 pengő forinttal.«

Döbrentei úgy vélte, hogy a »Tentamen« miatt nem vetheti fel a Tudós Társaságban Bolyai Farkas rendes tagságának ajánlását. 1835 szeptemberétől pedig Toldy Ferenc volt már a Társaság titoknoka, aki nyilván nem ismerte közelebbről Bolyai Farkast. A körülmények kedvezőtlen alakulása folytán többé nem került sor a rendes tagsági ügyre, bár az aktív kapcsolat továbbra is megmaradt Bolyai Farkas és az Akadémia között."[75]

„Ennek tanúbizonysága »Jelentése a Magyar Tudós Társaságnak Ormós József: Hermesz« c. munkájáról (K 23/46), és az Athenaeumi Figyelmezőbe szánt megjegyzése (K 23/48) a művek, feljegyzések csoportjában.

1836-ban az Akadémia megbízta Bolyai Farkast, mondjon véleményt Ormós József: Hermesz c. munkájáról, melyet azért küldött be szerzője, hogy az értekezésben előadott léghajó gyakorlati kivitelezését támogassa az Akadémia. [...] A bírálatból az derül ki, hogy Bolyai Farkas nem tartotta lehetetlennek a léghajó gyakorlati kipróbálását"

földön, előre megépített pályán haladó jármű mozgásának megkönnyítésére, „de az értekezésben kifejtett elgondoláshoz sok és lényeges változtatást javasolt." Mindenekelőtt tételesen összefoglalja a terv lényegét.

„I. A gondolat ez:
1. A' vitetendő sujat emelő által elenyésztetvén
2. Ekkor a' suj miatti súrlódás is elényészvén, csak kevés egyéb súrlódás, 's a' lég' ellene maradván, kicsi erővel haladni.
3. Az egésznek olly útat irni cél szerint eleibe, amelyből ki ne térhessen."

Lényegében az egész *Hermeszből* ezt az – általa megformált – gondolatot tartotta csak meg Bolyai Farkas; egyébként pedig az „ajánlott kivitel" részletesen megvizsgált „nehézségeit" annyi és az eredeti tervtől annyira eltérő „könnyítéssel" javasolta korrigálni, hogy Ormós irrealisztikus

[75] Katalógus pp. 7–8. Vö. Szénássy Barna: Bolyai Farkas. Bp. 1975. Akadémiai. p. 41. és (hivatkozás) p. 50. Szénássy Barna a Katalógusból idézi Döbrentei levelének „Rád nézve is [...]" kezdetű passzusát, kiemelve a nyelvművelésnek a korai Tudós Társaságban betöltött központi szerepét: „Ezért volt Bolyai Farkas beválasztásának döntő indítéka szépirodalmi munkássága és a magyar nyelvű aritmetika, ezért pártolta őt a magyar nyelv nagytekintélyű akadémikusa Döbrentei Gábor." Végül a matematikatörténész a Katalóguséval azonos következtetésre jut, jeléül használhatóságának.

járgányából az „emelőn” kívül (meleg levegő helyett az is a hatékonyabb hidrogénnel töltve) semmi sem maradt. A „könnyítésekkel” megjavított-újjáalakított *Hermesz* sokkal realisztikusabb konstrukció az eredetinél. Bolyai Farkas

> „részletes útmutatást adott a kivitelezés módjára, de feltehető, hogy a lelkesedés lázában elkerülte figyelmét, hogy az eredményességre való tekintettel nyújtson-e anyagi támogatást az Akadémia a feltaláló számára: »Olvastatik Bolyai Farkas lev. Tag véleménye Ormós József: Hermes c. munkája felől, melyben mivel hogy kereken sem javalás, sem rosszalás kimondva nincsen, s igy azt az elébbi, a munkáról már beadott véleménnyel összehasonlitani nem lehet, harmadik birálatra Bitnicz Lajos r. tagnak adatik ki egy hónapra.«”[76]

Közli Fráterné a hivatkozott iratok Régi Akadémiai Levéltárban (RAL) megadott jelzetek, s így a Hermesz-vélemény Bolyai Farkas technikai érzékenységének, találékonyságának és tudásának illusztrálásán túl bepillantást enged a korai Akadémia – ahogyan ma mondanánk – innovációs ügyintézésébe.

A több szempontból igen érdekes Hermesz-véleményről máig a *Katalógus* bevezetésében olvashatunk legtöbbet s legokosabbat; s ugyanez elmondható Farkasnak az Athenaeumi Figyelmezőbe szánt megjegyzéséről.

> „Az 1835-ben kiadott magyar könyvek közül az akadémiai jutalmat Nagy Károly *Arithmetika* c. munkájának ítélték. Nagy Károly hazai hírnevéhez nagyban hozzájárult a jutalom. Egyre több munkájáról került ismertetés a korabeli lapokba. Az 1835-ben jutalmazott *Arithmetika* második része *Elemi algebra. Számírás közönséges jegyekkel* címen 1837-ben jelent meg, melyet Vállas Antal ismertetett az athenaeumi *Figyelmező az Egyetemes Literatúra Körében* hasábjain még ebben az évben (102–104. p.). [...] A könyvismertetés végén Vállas Antal ajánlja a közönségnek Nagy Károly művét, mert »az olvasó csakhamar észreveendi, mely végtelen nagy különbség van e jeles munka, s azon elemi s legnagyobb részint elavult bevezetések közt, melyekkel bennünket Dugonics, Pethe s utánok mások is, megajándékoztak«.
>
> Bolyai Farkast sérthette ez a megjegyzés, mert válaszcikkében csaknem tételről tételre bizonyítja be Vállas Antalnak, hogy a Nagy Károly művében tárgyalt matematikai kérdésekkel ő már az 1830-ban megjelent *Az Arithmetica elejében,* majd később a *Tentamen*ben foglalkozott, és tisztázta a Vállas Antal által dicsért tételeket.

[76] Katalógus p. 8.

Tulajdonképpen ez a tartalma Bolyai Farkas cikkének, [...] de a cikk sohasem jelent meg a Figyelmezőben."[77]

Bolyai Farkas Vállas *recenziójának* bírálatában *Az Arithmetica elejének* megfelelő részeiből idézve roppant szemléletesen demonstrálja, hogy

„az a' munka, melynek legszebb oldalainak, néhány *locus communis* hozatik elé, nem állana, a' mint iratik, végtelen különbséggel a' Dugonics, Pethe azutáni mások próbatételeiknél, melyek közül némelyekben éppen azon locus communisok megvannak"

A *Tentamenben* pedig a Nagy Károlynál dicsért részek „ezen könyvnek csekélyebb helyei közé" tartoznak. A példák kifejtése után végül megjegyzi:

„Nem teheti mindazáltal erre nézve Ref. hogy hibául ne tegye ki Magyarnak, hogy nem magyarul írt; 's ha oly alakban adta ki, melyen a' mái időkben életre nem jöhet sok főtörése' szüleményeinek temetését békével nézze el, azzal a' reménnyel, hogy diák halottja valaha salakjából megtisztulva támad fel."[78]

Nagy Károly 1835-ös könyvének akadémiai jutalmazására Alexits professzor is kitért, először 1952-ben megjelent, majd 1977-ben újra kiadott Bolyai János-könyvében.[79] Idéz Bolyai Farkas Gaussnak 1836. okt. 3-án írt leveléből; az új kiadásban az idézet hivatkozásában feltünteti Benkő Samu időközben megjelent (s a Gyűjteményt jelentős mértékben hasznosító) Téka-kötetét.[80] A kérdéses rész Benkő Samu kiadásában, B. Fejér Gizella fordításában:

„Hogy mint áll nálunk a Matematika, ez mutatja: egy most magyarul megjelent munka az Aritmetika és Algebra alapelemeiről elnyerte a Tudós Társaság kétszáz aranyos díját, pedig egyéb érdeme nincs e munkának, mint hogy Bécsben szépen és helyesen nyomták; híján van a legcsekélyebb eredetiségnek, semmit se tisztáz, nyoma sincs tömörségnek, tartalma csekély. S nemcsak középszerű, de rossz [...]".

77 Katalógus pp. 8–9. „A kéziratot Bod Péternek küldte meg – aki akkor Bécsben tartózkodott – azzal a megjegyzéssel, hogy juttassa el Toldy Ferencnek kinyomtatás végett »Többet írtam volt – olvassuk a levélben – de a többit elhagytam; ennyit pedig minden kímélni kívánó természetem mellett is, kinyilatkoztatni kötelesnek éreztem magamat, hogyha lehet, az uralkodni kezdett fattyú fény ne hátráltassa még tovább is hazánkban a kimívelődés teknősbékai késősségét.«"

78 Magyar Tudományos Akadémia Könyvtárának Kézirattára és Régi Könyvek Gyűjteménye (a továbbiakban: MTAKK) K 23/48.

79 Alexits György: Bolyai János világa. Bp. 1952. Második kiadás: Bp., 1977. Akadémiai. 167 p. (A továbbiakban: Alexits 1952 és Alexits 1977.)

80 Bolyai-levelek. Válogatta, a bevezető tanulmányt írta és a jegyzeteket összeállította: Benkő Samu. Bukarest, 1975. Kriterion. 314 p. (A továbbiakban: Bolyai-levelek.)

Gauss válaszából Alexits professzor a *Tentamen*re vonatkozó rövid értékelést közli, majd így folytatja:

> „Valósággal megdöbbentő, hogy a Tentamen mennyire ismeretlen maradt. A Tudós Társaság pl. 1844-ben a parallelák problémáját javasolta jutalomkérdésnek, holott a Tentamen és benne az Appendix egy példánya már 12 éve ott feküdt a Társaság könyvtárában! Az akkori magyar társadalom értelmisége nagyon is szükségét érezte ugyan a tudomány fejlesztésének, de csak *egy bizonyos mértékben adagolt* tudományt volt képes befogadni az egzakt tudományokból. Ennek következtében a nagybirtokosok támogatásából tengődő tudós világ képviselői, különösen az elhanyagolt matematika művelői, maguk sem emelkedtek túl a középszerűségen."[81]

Érdemes folytatni a Gausshoz írt levélből vett idézetet, mert szépen tükrözi B. F. felfogását és jellemét:

> „Nem szeretném, ha egy leendő matematikus ebből [ti. Nagy Károly könyvéből] tanulna, nincs egyetlen jó műszava, minden szolgai fordítás. Mégis örvendek neki, mert ezzel az első lépcsőfokra léptünk. Még egy század, és az elsőből ezredik lesz (vagy legalábbis lehet).
>
> Itt nekem már nincs mit remélnem; már az öröklét felragyogó sugaraiban állok, ahonnan sötét ponttá válik ez a mintegy az éjszakába világító Föld, s a semmibe vész a harmatcsepp idő. Az nyugtat meg, hogy bármily keveset, de annyit tettem, amennyit körülményeim között tehettem."[82]

Ma is változatlanul érvényes és időszerű Fráter Jánosné összegzése:

> „Bolyai Farkas akadémiai kapcsolata is kétoldalú volt. Mindkét oldalról szükséges megvizsgálni ennek nyomán létrejött tevékenységet [...] Mindenesetre ha akkor nem is érte el célját a cikk írója, most az Ormós »Hermeszéről« írt bírálattal együtt a kutatás rendelkezésére áll."[83]

---

[81] Alexits 1977. pp. 29–30. A Természet Világa 2002. évi szeptemberi számának 394. oldalán Prékopa András akadémikus figyelmeztetett rá, hogy a kitűzött jutalomkérdés a „képzetes mennyiségek tulajdonságairól" szólt. Mégsem javítom itt ki Alexits professzor tévedését, mert kivételesen szépen emeli ki a Tudós Társaság emblematikussá emelt „alapító Atyáinak" ez ügyben (is) tanúsított inkompetenciáját és felelőtlenségét. Olyan szépen, hogy nékem fel se tűnt a (különben könnyen indokolható) tévedése, pedig jelen cikk írásakor bőven forgattam Fekete Gézáné alapos összegezését Az Akadémia 1831–1858 között alapított jutalomtételei és előzményeiről (Bp. 1988), sőt lektoráltam is a könyvet. Így hát ha valaki, én követtem el a hibát, nem Alexits professzor.

[82] Bolyai-levelek pp. 188–189.

[83] Katalógus p. 9.

A *Katalógus* szerzője maga mutat példát B. F. könyvjegyzékének a közlésével és elemzésével. Erre a munkájára a *Katalógusban* is utal:

> „Bolyai Farkas személyi iratainak egyik legértékesebb darabja a könyvei sorsára vonatkozó végrendelete, és az ehhez készített könyvjegyzék (K 22/23–27). Nemcsak művelődéstörténeti vonatkozásainál fogva fontos okmány, hanem értékes tudománytörténeti dokumentum. Ebből a könyvtári »katalógusból« következtetni lehet arra, milyen könyvekből és milyen eszméket próbált a tanár átplántálni a 19. század elején – egy tekintélyes főiskolán – a tanulókba."[84]
>
> „Bolyai Farkas könyvtárának jellemző vonása – írja Fráterné a könyvjegyzéket publikáló és elemző tanulmányában[85] – az alkotó tudós kézikönyvtári és az aktív pedagógus gyakorlati segédkönyvtári jellege. Könyvtárában korának legkiemelkedőbb és a legújabb kutatási eredményeket tartalmazó művei vannak képviselve (Euler, Bernoulli, Montucla, Gauss, *Journal der Physik* stb.), olyanok, melyeket akkor Magyarországon csak a természettudományokat pártoló főurak engedhettek meg maguknak összegyűjteni. Ennek bizonyítására csak azt említjük meg, hogy a marosvásárhelyi Teleki-Tékában is csak egy kis része volt megtalálható azon könyveknek, melyeket Bolyai Farkas szükségesnek tartott megszerezni, és hogy az általunk fényképeken közölt művek is az Akadémia Könyvtárát alapító *Teleki-család* gyűjteményéből valók."
>
> Bolyai Farkas „könyveinek egy része szorosan összekapcsolódott tanári működésével is. Kutatásainak eredményeit matematikai könyveiben jelenítette meg. Az ismereteket a tanulók fejlettségi foka, a magasabb ismeretek elsajátítására való képesség kialakítása szerint rendszerezte. Az ábrák készítésébe hallgatóit is bevonta."[86]

Ez a *Tiszatáj*ban közölt gondos áttekintő tanulmány felsorolja Bolyai Farkasnak – a könyvjegyzékben különben szintén közölt – saját műveit, s kiemeli a *Tentamen* nemzetközi mércével mérve is kiemelkedő jelentőségét, ismerteti az I. kötet megküldését a Magyar Tudós Társaságnak, s a titkár, Döbrentei válaszát, hogy a könyv latin nyelve miatt immár nem ajánlhatja B. F.-t rendes tagnak. Azután visszatér a jegyzék elemzésére:

> „A könyvek második csoportját egyéb tankönyvek alkotják, melyek szinte kivétel nélkül latin és német nyelvűek. Bolyai Farkas tanári működésének első három évtizedében a közép- és felsőiskolákban még nem folyt magyar nyelven a tanítás. A magyar nyelvű

[84] Katalógus p. 9.
[85] Fráter Jánosné: Bolyai Farkas könyvtára. = MTA III. Osztályának Közleményei 19 (1969) pp. 271–294.
[86] Fráter Jánosné: Bolyai Farkas könyvtára. = Tiszatáj 29 (1975) No. 2. pp. 48–52.

tankönyvírás csak lassan bontakozott ki. A magyar szerzők többsége is latin nyelven jelentette meg természettudományi és matematikai munkáit. Bolyai Farkas könyvei között szép számmal szerepelnek magyar szerzők tankönyvei:”[87]

„A felsorolt tudósok között találkozunk katolikus szerzők (Horváth, Makó, Radics) könyveivel, amiből arra következtethetünk, hogy műveiket használták protestáns főiskolákon is.

A matematika, fizika és kémia tanítása magas szintű volt a marosvásárhelyi főiskolán. A mércét Bolyai Farkas professzor emelte magasra azzal, hogy olyan szerzők műveit is használta az oktatásban, amilyen könyveket akkor a nyugati országok egyetemein, főiskoláin és akadémiáin használtak. Ilyenek például Euclides, Euler, Gren, Lavoisier, Lagrange, Lencker, Karsten, Lichtenberg, Vega művei.”[88]

Az *Osztályközleményekben* megjelent tanulmány[89] minden művet, ezeket is, pontosan azonosít. A maga korában még a művelt Nyugaton, még intézményekben is ritkaságszámba menő matematikai-természettudományos könyvtár, melyet B. F. – leveleiből és műveiből láthatóan – aktívan és értően használt, ez a mifelénk egyedülállóan gazdag és használt könyvtár – erre figyelmeztetnek Fráter Jánosné kutatásai és tanulmányai – nélkülözhetetlen szakmai és pedagógiai háttér gyanánt szolgált Bolyai János matematikai géniuszának a kibontakozásához. Fráterné tanulmányainak a tükrében érthető meg igazán Bolyai János gyakran idézett késői sóhaja, hogy bár maradt volna végig otthon, apja közelében. Bolyai János ez idáig ismeretlen számelméleti és algebrai jegyzeteit felfedező, megfejtő és rendszerező monográfiájában[90] Kiss Elemér a Bolyai-gyűjtemény katalógusára, Fráter Jánosnénak Bolyai Farkas könyvtáráról szóló

---

87 „például Rechenbuch Segesvári Professor Schustertől (Schuster Michael A.: Lehrbuch der Rechenkunst.) Compendium Geometriae Subterraneae. (Rausch Ferenc: Compendium Geometriae Subterreneae.) Horváth. Physica 2 darab. (Horváth János: Physica generalis quam in usum auditorum philisophiae conscripsit., Physica particularis, quam in usum auditorum philosophiae conscripsit.) Makó. Physica. (Makó Pál: Compendiaria physicae institutio, quam in usum auditorum philosophiae elucubratus est. 2 ptes.) Pankl. Physica 3 darab. (Pankl Máté: Compendium institutionum physicarum, quod in usum suorum auditorum conscripsit. Partes tres: I. de corpore abstracto, II. chemice, III. physice considerato.) Radics. Physica. (Radics Antal: Institutiones physicae in usum discipulorum conscriptae.) Physica (Mich. Szathmári) Vásárhelyi Professortól. (Szathmári Mihály: Physica contra juxta principia Neotericorum, in usum collegii Marosvásárheliensis concinnata.) Szász Károly: Első rangú egyenletek’ föl-oldása’ új módja. (E könyv mellett Bolyai János megjegyzését találjuk: »az ígéretnek meg-nem felelő, éppen kényelmetlen, hosszas«.) Abban az időben, amikor már magyar nyelven is tanítottak a marosvásárhelyi kollégiumban (1836-tól vezették be a magyar nyelvű oktatást), írta a két Szász Károly (idősebb és ifjabb) a Számtan. Algebra című könyvet, amelyet Bolyai Farkasnak ajánlottak.” B. F. 1830-ban először megjelent magyar nyelvű tankönyve, Az arithmetica eleje, tehát ebből a szempontból is úttörő volt, tartalmát és módszerét tekintve pedig toronymagasan állott Nagy Károlyé (és persze Szász Károlyéké) felett.

88 Tiszatáj 29 (1975) No. 2. pp. 49–51.

89 Lásd: Fráter Jánosné: Bolyai Farkas könyvtára. = MTA III. Osztályának Közleményei 19 (1969) pp. 271–294.

90 Kiss, Elemér: Mathematical gems from the Bolyai chests. János Bolyai’s discoveries in Number Theory and Algebra as recently deciphered from his manuscripts. Bp. 1999. Akadémiai – Typotex. 200 p.

tanulmányára, valamint Deé Nagy Anikó hasonló tárgyú munkájára[91] hivatkozva a következőképpen összegez:

> „Bolyai Farkas könyvtára az alkotó tudós referencia-könyvtárának és a gyakorló tanár kényelmesen kicsi könyvtárának a vonásait mutatja. Könyvtára korának legkiemelkedőbb és új eredményeit tartalmazó tudományos műveket foglal magában (Eulertől, Bernoullitól, Montuclatól, Gausstól, *Journal der Physik,* etc.); könyveket, melyeket akkor csak a természettudományokat pártoló főurak engedhettek meg maguknak összegyűjteni. Farkas olykor kikérte Gauss tanácsát könyvei kiválasztásában. Bolyai Farkas könyvtárának egész jellege arra utal, hogy a matematikus-tanár által nagy gonddal és jelentős anyagi áldozattal összegyűjtött állomány igencsak jelentős volt az időkben. Bolyai Farkas könyvei természetesen fiának, Jánosnak is rendelkezésére állottak, és ő csakugyan olvasta is azokat. Farkas 13 éves fiát Euklidész, Euler, Vega és Hauer műveivel vezette be a matematikába. 1818. szept. 10-én kelt levelében ezt javasolja Bécsben tanuló fiának: »Olvasd Karstent, Kästnert, Pasquichot, Eulert, La Croix Traité Élémentaire de Fonctions etc.« (K22/75)”[92]

A hivatkozott levél eredetije a Bolyai-gyűjteményben található, Benkő Samu közölte a *Bolyai-levelekben* (pp. 98–110.). Ez a levél, számos B. F. által fiának írt levéllel és levéltöredékkel együtt Szabó Péter hagyatékából került az Akadémia Könyvtárába; a *Katalógus* bevezetése pontosan elmondja, hogy hogyan. Ezek a levelek ma a Gyűjtemény felbecsülhetetlen értékű és az egész Bolyai-kutatásban megkerülhetetlen kincsei; a viszonylag nem túl sok matematikai fejtegetéssel telítetteket gondos feldolgozásban közölte Benkő Samu a *Bolyai-levelekben,* feltüntetve a már megjelent részletek bibliografikus adatait. De máig kiadatlanok az ugyancsak Szabó Péter hagyatékából származó levéltöredékek (K 22/86–128), s lényegében felhasználatlanok is. Pedig a *Katalógus* beszédes és kíváncsiságot felkeltő címekkel sorolja fel őket. Mikor akadnak kutatójukra?

Nem Szabó Péter hagyatékából kerültek a Gyűjteménybe Bolyai Farkas levelei Bodor Pálnak (K 22/40–73) és Bolyai Gergelynek (K 22/129–144), János B. F. második feleségétől született féltestvérének. A Bodor Pálnak írt levelekből számos – és gyakran idézett – szemelvényt közölt Schlesinger Lajos;[93] hét teljes levelet közölt Benkő Samu a *Bolyai-levelekben.* B. F. Bodor

[91] Deé Nagy Anikó: A két Bolyai könyvtára. A Teleki-Bolyai Könyvtárban őrzött Bolyai-könyvhagyaték. = Könyvtári Szemle [Bukarest], 1968. No. 1. pp. 19–25. Lásd: p. 14., 273. jegyzet.

[92] Kiss, E. id. mű p. 61. – Kiss Elemér nyomán indulva Szabó Péter Gábor Bolyai Farkas kéziratos hagyatékában számos számelméleti tételt talált, amely – igazolva Bolyai János utasításait – apát és fiát egyaránt – és együtt – foglalkoztatta.

[93] Szemelvények Bolyai Farkasnak Léczfalvi Bodor Pálhoz 1815-től 1825-ig írt leveleiből. Közli: Schlesinger

Pálnak írt leveleit Benkő a Gaussnak szólókhoz viszonyítja:

> „Hazai barátjával, Bodor Pállal mindvégig keresetlenebb hangon, a műgonddal kevesebbet törődve levelezett. Gyakran már a keltezés után jelzi, hogy sietve veti papírra mondandóját és egy szuszra zúdítja barátjára a kérések és panaszok özönét. Bodor emberséges ember volt, s noha maga is sok gonddal-bajjal küszködött, egész életében hűségesen segítette barátját és tartotta benne a lelket a csüggedés óráiban. Barátságuk kibírta a nehéz próbákat, s levélbeli emlékeit a Bolyai-hagyaték legszebb darabjaiként tartjuk számon.”[94]
>
> Bolyai Farkas „kisebbik fiának Gergelynek írt levelei, valamint az Antal öccsétől kapott 15 levél részletei számos megjegyzést tartalmaznak Bolyai Farkas egyéniségére, pszichikumára. A levelekben található gazdasági, anyagi vonatkozások, ha másodrendűek is a kutató számára, tükrözik az egykori professzor eléggé mostoha életkörülményeit.”[95]

A *Katalógus* megjelenése óta, az új tudománytörténet-írásban persze ezek a másodrendű szempontok is elsőrendűvé váltak, olykor egyenesen elsőbbrendűekké. S hogy milyen értékeket és meglepetéseket rejthetnek még a levelek, azt mutatják Bolyai János ötvenes évek vége felé öccsének, Gergelynek írt levelei, melyeket Benkő Samu válogatásának a végén közöl (54, 55, 56, 58, 59, 60. számú levél), a Gyűjtemény nyolc darabjából (K 23/84–91) hatot.

Ezekre a levelekre kitűnő szemmel már Alexits professzor felfigyelt, Bolyai János körülményeinek és állapotának jellemzőiként:

> „János 1857-ben a város végére, a katolikus temető melletti Kálvária-utcába költözött, ahol egy egészen kicsi házacskát bérelt. Itt élt egyedül, folytonosan betegeskedve. Ekkoriban már teljesen munkaképtelenné vált, 1858-tól kezdve semmit sem volt képes csinálni. Csak Gergelynek írt leveleket családi ügyekről és betegeskedéséről. A matematikai kutatás örömére visszapillantva, ezt írta 1857-ben: »[...] részesültem a menyország megismerésében is, – melyet minden szigorú életmódom mellett is semmi anyagi kincsért nem adnék – részesülhet minden épen teremtett egyén, ha szorgalmas és lelkesen ügyökszik magát kimüvölni.”[96]

Lajos. = Mathematikai és Physikai Lapok 11 (1902) pp. 197–230.

94 Bolyai-levelek pp. 12–13.

95 Katalógus p. 7.

96 Alexits 1952. p. 109., Bolyai-levelek p. 230. „A Gergelynek írt nyolc levél (K 23/84–91) azért jelentős, mert az első kettőben arról értesíti öccsét, hogyan teltek Bolyai Farkas utolsó napjai a harmadik szélütés óta. Pontosan beszámol arról, miként találta a földön szélütött apját, hogyan látogatta őt rendszeresen, és hogyan őrködtek a kollégium diákjai a volt professzor betegágya mellett. Kétségtelenül a leghitelesebb leírás ez Bolyai Farkas végnapjairól.

Egy gyűjtemény – akár kézirat, akár könyv – értékét önbecse határozza meg, de közhasznúságát a felhasználók teremtik meg, s Alexits akadémikus monográfiája mellett a *Bolyai-levelek* a legszebb bizonyíték, hogy e tekintetben a Gyűjtemény – és a *Katalógus* – milyen hasznos szerepet vállalt és tölt be; amit különben Benkő Samu a *Bolyai-levelekhez* írt Jegyzetekben (és az Akadémiai Könyvtár Kézirattárában a levelek kibetűzésével töltött hosszú órákkal) nyugtázott. A bevezetésben írt óhaja pedig ma is változatlanul érvényes:

> „Ha az olvasónak e válogatás lapozgatása közben hiányérzete támadna, e sorok írójával együtt bizakodjék benne, hogy előbb-utóbb csak elkészül a teljes Bolyai-levelezés kritikai kiadása.”[97]

A levelek tartalmazzák a domáldi Bolyai-birtok eladása alkalmával felmerült problémákat, Bolyai Farkas ingóságainak árvereztetésére vonatkozó utalásokat (K 23/86–87), és sok önéletrajzi adatot. Ezekből a levelekből tudjuk meg, hogy 1831-ben lembergi állomáshelyére történt utazása közben koleraba esett, emiatt Besztercén 9 napig feküdt, és elgyengülve folytatta útját (K 23/88). Nem lehet megilletődés nélkül olvasni 1858. aug. 8-án írt levelét, melyben betegségét panaszolja, és egyben alkotói képességét bizonygatja. Lábbaja ágyhoz kötötte, de szelleme friss és sokat dolgozik matematikai munkáin – írja: »mert úgy elfoglal- és ragadnak a mathesisi tárgyak és oly, mondhatom rengeteg süket- vagy eredménnyel, mint fiatal korom-, legjobb erőmben, sőt némileg még hatósban, minek oka persze az: hogy azóta készületem is mind gyarapodva a megfejtendő problemákat annál hatalmasb erővel támadhatom meg, és úgy, hogy már alkalmasint egy sincs azok közöl, még a legdesperáltabb is, melyet megfejteni képes ne lennék.«” (Bolyai-levelek pp. 261–262., Katalógus pp. 10–11. A Bolyai-leveleket betű szerint, a Katalógust mai átírásban, jelentéktelen változtatásokkal, ill. kiegészítésekkel közli.)

97 Bolyai-levelek p. 28. Benkő Samun kívül, illetve előtt nem sokan ismerték el a Gyűjtemény és főleg a Katalógus használatát s még kevésbé hasznát: bár azért olykor szinte szó szerinti átvételek találhatók belőle (lásd pl. fentebb). De tán terjed mégis a Gyűjtemény híre s értékelése amint egy újabban megjelent könyv is mutatja: János Bolyai. Der Mozart der Mathematik. Leben und Werk. Hrsg. Annemarie Maeger. Hamburg, 1999. A köszönetnyilvánításból láthatóan a szerkesztő, A. Maeger járt az MTA Kézirattárában és – a fakszimilékből láthatóan – gondosan tájékozódott (annál különösebb a címben – és csak ott – a hosszú „ó”; netán azt hivatott jelezni, hogy a Bolyai Jánosként a cím felett látható kép úgyszintén nem hiteles? Vagy mégis? A kép szeme, orra, álla mindenesetre Benkő Zsuzsanna, szája Farkas képére emlékeztet, a 18. oldalon). Közli a könyv, a Katalógusban található jelzet megadásával, Bolyai János javaslatát Ferenc József császárnak, melyben Üdvtana szellemében a közjó gyors előmozdítását célzó tervet tár elő (Johann Bolyais „Kaiserbrief”, pp. 107–126.). Csatolva megtalálható ugyanott az első és az utolsó oldal fakszimiléje (mindkettőt a Bolyai János – a katona is közölte), s a „Kaiserbrief” előtt ügyes válogatás található az Üdvtanból, Benkő Samu Bolyai János vallomásai (Bukarest, 1968) alapján. A könyv végén az Appendix fakszimiléje látható, és Bolyai János általi német fordítása-átdolgozása, az eltérések pontos megadásával. Ezen a már Stäckel által közölt Raumlehre-n kívül megtalálható a Responsio Stäckel fordításában, a temesvári levél („Entdecker-Brief” von J. Bolyai an seinen Vater), a Schmidt-biográfia s egyéb fontos részletek, úgyhogy a könyv egészében jó áttekintés Bolyai János általában (pontosabban „Stäckel-szinten”) ismert matematikájáról és – ez a könyvben az új – filozófiájáról. A két terület kapcsolatát Tóth Imre szakavatott Einführungja teremti meg: Von Wien bis Temeswar: Johann Bolyais Weg zur nichteuklidischen Revolution. (21–68). A – mint mindig – szellemes és Szellem-igéző Tóth Imre-írásból jelen összefüggésben elsősorban az a fontos, hogy többször és expressis verbis hivatkozik a „Bolyai János – a katoná”-ra, és ezzel a Gyűjteményre. Tóth Imre mindig nagyon megválogatottan citál és hivatkozik; mintha kezdene a Gyűjtemény „A Stäckel”-lel egyenlő citálási rangra emelkedni?

Bolyai János öccsének írt levelein kívül a legtöbb és legértékesebb reá vonatkozó tétel Szabó Péter hagyatékából került a „Gyűjteménybe”. Szabó Péter nevét számon tartja a Bolyai-kutatás, elsősorban a század elején közölt úttörő tanulmányai miatt.[98] Elsőként azonban s jószerivel máig egyedenként a *Katalógus* mutatja be azt az önzetlen s időt-fáradtságot nem kímélő munkát, melyet Szabó Péter Bolyai János kéziratainak s a reá vonatkozó katonai-hivatali adatoknak a felkutatásában és megőrzésében végzett. Ugyancsak a *Katalógus* tisztázza Szabó Péter apjának, Szabó Sámuelnek – akit az irodalom általában csak elmarasztal – a Bolyai-kutatások megindulásában a Bolyai Farkas felfedezésében betöltött szerepét:

> „Szabó Péter atyja, Szabó Sámuel, levelezésben állt Bolyai János elméletének elismertetésében nagy érdemeket szerzett külföldi és magyar kutatókkal, többek között Jules Hoüel-lel, Giuseppe Battaglinivel és Schmidt Ferenccel. (Leveleik megtalálhatók a Gyűjteményben: K 29/97, 112–118, 149–152.)
>
> A levelek írói valamennyien elsősorban adatokat kérnek Szabó Sámueltől a két Bolyai életéről és munkásságáról, életrajzuk megírását, leveleik összegyűjtését, az Appendix fordítását szorgalmazzák és azt az óhajt fejezik ki, hogy bárcsak a kollégiumban levő Bolyai-kéziratok kiadásra kerülnének.”[99]

Guillaume-Jules Hoüel a Gyűjteményben található első levelét 1867. aug. 27-én Thaonból írta Szabó Sámuelnek:

> „Ma reggel vettem M^r Schmidt levelét Temesvárról, aki jelzi az ön jelenlétét Párizsban, és közvetíti óhaját, hogy ajánlanék néhány személyt, aki agronómiával, közelebbről szőlészettel foglalkozik”

(a levelet eddig lemásolta Szabó Péter, aztán megjegyzi: „eleje és vége magántermészetű”. Majd folytatja a másolást:)

> „Nagy hálával tartozom önnek, uram, az értesülésekért amelyeket M. Schmidt közvetítésével kaptam öntől a két kiemelkedő geometráról, akik olyan nagy dicsőséget szereztek hazájának és akiknek a művei oly nagy tudományos jelentőségűek.”[100]

---

98 Katalógus p. 15. 6. sz. jegyzet. Továbbá Kiss Csongor: Bibliográfia. In: Bolyai. Biográfia-Bibliotéka-Bibliográfia. Szerk.: Nagy Ferenc. Bp. 2000. Better – Püski. pp. 351–396. A könyv tartalmazza reprintben Szabó legismertebb tanulmányát a Mathematikai és Physikai Lapok 1910-es évfolyamából: „Bolyai János ifjúsága 1802–1822.” pp. 101–132.

99 Katalógus pp. 11–12.

100 MTAKK K 29/112.

Szabó Sámuelt tehát a Bolyai-ügy fáradhatatlan előharcosa, Schmidt Ferenc „riasztotta". Schmidt Ferenc neve jól ismert volt a Bolyai-irodalomból, de igazi jelentőségét és szerepét csak nemrégiben tisztázta Szénássy Barna annak „a Bolyaiakra vonatkozó leveleket, újságkivágásokat, tanulmányokat" tartalmazó dossziénak az alapján, amely Fejér Lipót hagyatékának a rendezése közben került a szeme elé.[101]

> „Schmidt Ferenc mindig figyelemmel kísérte a természettudományok, valamint a matematika fejlődését, és Európa csaknem valamennyi országából kiválasztva egy-egy ismertebb tudóst, kért információkat az újabban megjelent szakkönyvekről [...] A kiadványokról tájékozódó levelezésében francia partnere 1864-től a bordeaux-i egyetem fiatal professzora, Hoüel volt, ez a kapcsolat döntő jelentőségűvé vált Schmidt tudományos tevékenységének alakulására. A későbbiekben ugyanis néhány külföldi matematikus (főként Hoüel, Battaglini, Engel és Stäckel) buzdítására – terhes mérnöki munkája mellett – fáradhatatlanul gyűjtötte a két Bolyaira vonatkozó adatokat, családtagjai bevonásával németre fordította a tőlük származó magyar nyelvű autográf iratokat, Bolyai Farkas magyarul megjelent könyveinek egyes részeit és önzetlenül, anyagi áldozatokat is vállalva, bocsátotta a fordításokat a magyarul nem tudó külföldi tudósok rendelkezésére."[102]

Így került „hálójába" Szabó Sámuel, akit ismételten „bombázott" adatokért, és folyamatosan tájékoztatott az ügyek állásáról.

> „Hoüel és Baltzer – írja Schmidt Temesvárról 1867. dec. 31-én Szabónak – rövidesen meg fognak jelentetni valamit Bolyai Appendixéből, valószínűleg a Bordeaux-i és a Lipcsei Akadémiák Memoire-aiban – ha a pesti [Akadémia] ennyire lusta nagyjai tiszteletében, a külföldnek kell a kezdeményezést magához ragadni, így talán egyszer majd az itthoniak is belátják, hogy a Bolyaiak nagy emberek voltak." (K 29/152).

A levél végén külön utóiratban ismétli meg Schmidt a legfontosabb kérdéseket (amelyek felől különben már előző leveleiben is érdeklődött):

---

101 Szénássy Barna: Adalékok a két Bolyai fölfedezésének történetéhez. = Matematikai Lapok 29 (1977–1981) No. 1–3. pp. 71–95. (A továbbiakban: Adalékok.) A Schmidt-dossziéban Hoüel 77 levele maradt meg. „Az általában 4–5 oldalas, sűrűn teleírt írások sok mindent elmondanak az európai matematikai életről, főként a Bolyai kérdésnek 1864. márc. 4-től 1882-ig (az utolsó levélnek hiányzik a pontos dátuma) történt alakulásáról" (p. 75.)

102 Adalékok pp. 72–73.

„Kéréseim összegezése:

Sok példány kelt el már a *Kurzer Grundriss*-ból?

Johann és Wofgang Bolyai portréi

Johann B.	Születési nap?	
uő.	Halálozási nap?	— sürgős
uő.	Biográfia?	

Gergely Bolyai címe?

Johann Bolyai – az ő írásairól hogyan döntött?

Üzlet mindezzel nem köthető, így hát legyen Tisztelt Uram meggyőződve, hogy én csupán arra a tiszteletre vagyok tekintettel, amely honfitársainkat joggal megilleti.”

A *Kurzer Grundriss*ra vonatkozó kérdés Schmidtnek a könyvről Grunert „Archiv für Mathematik”-jában közölt recenziójára vonatkozik: remélte, hogy ennek következtében megnő a könyv iránt a kereslet. „Ennek az annotációnak az alkalmából – írja – egy példányt beküldtem H^{r} Grunertnek ajándékképpen – kérek tehát ezért egyet in natura vissza.”

Néhány héttel előbb, 1867. nov. 13-án írt Szabó Sámuelnek Hoüel Bordeaux-ból, válaszolva utóbbinak még Párizsból írt levelére, megköszönve Bolyaiakra vonatkozó felvilágosításait és továbbiakat kérve.

„Véleményem szerint személyesen kellett ismernie az idősebb Bolyait és fiát Jánost. Nagyon megérné összegyűjteni róluk való emlékeit.

Arra is megkérném, hogy lenne szíves néhány szóban ismertetni városa Collegium Reformatorum-ának szervezetét, s hogy honnan ered a neve.

Kezemben volt a Tentamen egy példánya Bolyai saját kezű beírásával, melynek autenticitását ön tanúsítja. Mivel barátunk Schmidt megajándékozott egy másik, teljesebb példánnyal, az autográf bejegyzéssel ellátott példányt elküldtem Nápolyba Battaglini professzornak, aki intenzíven foglalkozik Lobacsevszkij munkásságával. De előzőleg fotografikus kópiát készíttettem a bejegyzésről. Lenne szíves nekem lefordítani ezt a két sort?” (K 29/113)

Ilyesféleképpen szövődött kezdetben az a kis kör, amely elindította és szívén viselte a Bolyaiak felfedezését, s melybe aztán Paul Stäckel és Szabó Péter bekapcsolódott, végül pedig az Akadémia is. A levelekben a kérdéseken és válaszokon kívül fontos és állandó téma az Appendix olasz és francia nyelvű megjelentetése, s visszatérő óhajként jelentkezik Hoüel részéről a Bolyaiak egyéb műveinek és kézirataink a kiadása.

> „A mi Társaságunk – írja Hoüel 1868. febr. 27-én – büszke lenne, ha hozzájárulhatna a két kiváló matematikus posztumusz műveinek a kiadásához. A könyvtárukban őrzött kéziratok minden bizonnyal fontos felfedezéseket rejtenek olyan tárgyakról, melyeket még senki sem tárgyalt, és amelyek a matematikai filozófia alapjainak lényeges részét képezik.” (K 29/115)

Az is a Hoüel–Szabó Sámuel levelezésből derül ki, hogy Schmidt nem hiába hívta fel a figyelmet a *Kurzer Grundriss*ra.

> „Schumacherrel folytatott levelezésében Gauss – írja Hoüel fentebb idézett nov. 13-i levelében – több ízben tárgyalja a parallelák elméletét. Lobacsevszkij művéről készített fordításomhoz közöltem ebből a levelezésből azokat a leveleket, melyek erre vonatkoznak. Gauss ezek egyikében sem idézi Bolyai Jánost, holott munkáját még a Lobacsevszkijé előtt kellett ismernie. Legalábbis ez tűnik ki W. Bolyai alábbi művének egyik passzusából, *Kurzer Grundriss eines Versuchs* u.s.f., ahol ez található (p. 44): Von *hiesingen* (nämlich Exemplaren der Untersuchungen, die in dem Tentamen veröffentlicht wurden) sind einige nach Wien, Berlin, Göttingen [...] noch dazumal hinausgeschickt worden: aus Göttingen schrieb der mathematische Riese, Welcher aus erhabenen Thürmen, von den Sternen bis auf die tiefe Gründe mit gleichem Auge sieht; dass er überrascht war, gethan zu sehen, was er begonnen hat, um es unter seinen Papieren zu hinterlassen. Ezek után nem értem, miért nem idézte Gauss Bolyai Jánost Lobacsevszkijnél preferáltabban, annál is inkább, mivel az *Appendix* messze felülmúlja (est de beaucoup supérieur) az orosz matematikus munkáját.”

Rövidesen azután Hoüel már a tetraéder köbösítése (K 29/114) és az imagináriusok elméletéről szóló értekezés (K 29/116) iránt érdeklődik, és ismét felajánlja a bordeaux-i Tudományos Társaság segítségét és jelzi készségét a publikálásukra, s egyéb kézirataikéra is. Közben Schmidt Ferenc levelei is sorjáztak Szabó Sámuelnél adatok és könyvek küldése iránt, ő pedig tette, amit tudott. Ismeretlen adatokért felkereste Bolyai Gergelyt; tőle származik számos máig újra meg újra használt adat Bolyai János életrajzához.[103]

> „Mindenesetre Szabó Sámuel nagy anyagot és sok adatot gyűjtött össze a Bolyaiakról, de mivel 1868-ban Kolozsvárra került tanárnak, az összegyűjtött anyag feledésbe merült. Halála után, 1905-ben fia, Szabó Péter fedezte fel az értékes autográf kéziratokat, melyek közül öt

[103] Katalógus p. 12.

Gauss levelet még ez évben a göttingai Gauss-Archívumnak ajándékozott. »Boldogult atyám, Szabó Sámuel hagyatékában ezeket a leveleket más, a Bolyaiakra vonatkozó írások között megtaláltam. Úgy látszik, hogy vagy Bolyai János iratai közül kerültek hozzá 1860 táján, vagy 1867 körül gyűjtötte össze, midőn a Bolyaiak életrajzához jegyzeteket készített: Ezek felhasználásával készült Schmidt Ferenc első Bolyai életrajza (Archiv der Mathematik und Physik. Grunert's Archiv 1868. XLVIII. 217–228 l.)«

Szabó Péter az atyja hagyatékában talált Bolyai-kéziratok tudományos feldolgozásával felbecsülhetetlen munkát végzett. Ekkor kezdett kutatásokat a nála levő anyagok kiegészítése céljából, és egymás után írta Bolyai-tanulmányait és tartotta akadémiai felolvasásait. [...] 1909-ben a bécsi cs. kir. hadi levéltárban kutatott Bolyai János adatai után, mikor az egyik aktacsomóban értékes dokumentumokra bukkant.[104] [...] A megtalált dokumentumok forrásértéke oly nagy volt, hogy részletes tartalmukat nem lehetett azonnal áttekinteni. Szabó Péter az Akadémia támogatását kérte a becses iratok átkölcsönzéséhez, tüzetesebb tanulmányozás céljából (RAL 554/1909). A Kriegsarchiv a kölcsönképpen megküldött iratokat később az Akadémiának ajándékozta, melyek tudományos értékben jelentősen gyarapították a Bolyai-gyűjtemény darabjait."[105]

---

[104] Katalógus pp. 11–12, 9. „Több más iratokkal együtt, itt találta meg:
1. Bolyai János folyamodványát János főherceghez eszméi kidolgozása céljából, háromévi szolgálatmentességért, az Appendixre vonatkozó fejtegetésekkel. Olmütz, 1832. aug. 8. (K 23/62).
2. Raumlehre, azaz az Appendix német nyelvű átdolgozását (K24/1).
3. Magyarázó ábrákat a Raumlehre szövegéhez (K 42/2).
4. Gauss, K. F. – Bolyai Farkasnak írt levelének másolatát 1832. márc. 6. Bolyai János jegyzeteivel megtoldva (K 24/4).
5. Az Appendix latin nyelvű különlenyomatát (K 24/3).
6. Greisinger, G. A. szakvéleményét Bolyai János: Raumlehre C. munkájáról (K 23/63)."

[105] Katalógus pp. 9–10. „A vonatkozó levélváltás RAL 599/1909 és 144/1910 sz. aktában található."

Szabó Péter a *Bolyai János ifjúságában maga* is felhasználta az adatok egy részét; tömören jellemezte ezek – és „a Gatti”[106] – alapján Bolyai János tanárait.

> „Tanárai közül Wolter von Eckwehr János századossal állott legszorosabb összeköttetésben. Wolter, a ki a mathematikát és geometriát tanította, (L. Bolyai János feljegyzéseit; Sräckel P. A nem-euklidikus geometria története stb. Math. és Termtud. Értesítő. 1900. XVIII. köt. 252. lap) éppen 1818 őszén került az intézethez. Irodalmi téren bár nem szerepelt, mégis annyira becsülte B. János az ő tudását, hogy Appendixének első fogalmazását 1825 vagy 1826-ban neki adta át. (L. Stäckel i. m. 252. 1.). Mint mérnök kiváló lehetett. Ezt mutatja az, hogy hosszabb időn át ő vezette a tiroli határszélen *Franzenfeste* építési munkálatait (Wolter v. Eckwehr János, 1791–1857. Szép katonai pályát futott meg, a melyen altábornagyságig emelkedvén, Krakkóban halt meg. A mérnök akadémiának 1842–1850. igazgatója volt. L. Gatti i. m. I. köt. 683. 1. Az itt említett többi adatokra nézve is l. u. ott.) Később is fennmaradt benső barátságról tesz bizonyságot *Jánoshoz* intézett levele. (Graz, 1831. november 2-ről.) E levelet újabb közleményem mellett fogom kiadni.”[107]

Erre azonban már nem került sor; Szabó Péter 1914-ben meghalt. Rövid életrajzát a Bolyai-kutatásban részt vállaló több tudóséval, köztük Szabó Sámueléval együtt Szénássy Barna ismertette.[108] Wolter v. Eckwehr levelét (K 23/117) majd csak 1965-ben publikálja Sarlóska Ernő, fakszimilében és kommentárokkal megszakított nyomtatásban, *Bolyai János – a katona*

---

106 Friedrich Gatti (1839–1905): Geschichte der K. und K. Technischen Militär-Akademie. I. Geschichte der K. K. Ingenieur- und K. K. Genie-Akademie. Wien, 1901. II. Das K. K. Bombardier-Corps, Die K. K. Artillerie-Hauptschule und die K. K. Artillerie-Akademie. Wien, 1905. A könyv rengeteg hasznos adata máig nélkülözhetetlen, de nagy tekintélyével számos, részint a Schmidt-biográfiából átvett legendát szentesített B. J.-ról. Ezeknél is veszedelmesebb ugyancsak a korai biográfiákból átvett általánosítása: „Das Ende Bolyai’s entsprach nicht dem Anfange. Seine vorher so gewaltige Denk- und Arbeitskraft begann zu erschlaffen und [...]” etc. (I, 726.) Még a különben kivételesen tisztán látó Alexits akadémikus is így ír: „Jánosnak Marosvásárhelyre való visszatérése óta folytatott egyéb matematikai kutatásai nem vezettek sikerre. Tudjuk, hogy foglalkozott számelméleti kérdésekkel is, de ezekről csak egy-két érthetetlen jelekkel teleírt cédula és levélboríték belseje adhatna felvilágosítást, ha ki lehetne hámozni az odavetett jelek értelmét. De nem valószínű, hogy számelméleti kísérletei valamilyen értékes eredményt tartalmaznának, hiszen János mindig mély geometriai szemléletre támaszkodott, [...]” Alexits 1977. p. 149. Véleményéből idéz Kiss Elemér, Math. Gems P. 70., s rámutatott, hogy a legkiválóbb Bolyai-kutatóknak, Stäckeltől Szénássyn keresztül Weszely Tiborig ugyanez volt a nézete. Csak a kéziratok megfejtése után derült ki, hogy B. J. élete végéig milyen sikeresen birkózott a számelmélet legnehezebb kérdéseivel: megoldott például egy problémát, amit csak napjainkban sikerült megoldani Erdős Pálnak. „János Bolyai was fascinated by number theory. This is also supported by a characteristic feature of his writings, namely, that words of related meaning shower into the test as if poured from a comucopia, »Number theory display the most important, useful, significant, beutiful, interesting, and charming problems of not only integers, but of the whole of mathematics.« 1179/24, 1407/3).” Math. Gems p. 71.

107 Szabó Péter: Bolyai János ifjúsága. In: Bolyai. Biográfia-Biblioteka-Bibliográfia. Szerk.: Nagy Ferenc. Bp. 2000. Better – Püski. p. 153.

108 Adalékok p. 95.

című, forrásokat közlő és forrásértékű tanulmányában.[109] Maga Szabó Péter minden követ megmozgatott, hogy megtalálja a Wolternek átadott kéziratot. Egyebek közt érdeklődött egy Wolter v. Eckwehr leszármazott iránt Szekfű Gyulától, aki éppen a *Hofarchivban* dolgozott ideiglenes fogalmazógyakornokként. Szekfű válaszolt is hűségesen,[110] pontosan közölve a kért adatokat, de a kézirat, egy voltaképpeni „Ur-Raumlehre”, amely a Lobacsevszkijjel szembeni „prioritás” szempontjából lett volna tudománytörténeti jelentőségű, nem került elő. Azóta is többen keresték (egyebek közt ez is „Szabó Péter örökség”), Dávid Lajos lehetségesnek tartotta,[111] hogy lappang valahol, Szénássy Barna is kutatott utána Bécsben.[112] „Ez a kézirat azonban – fájdalom – elveszett, holott abban János szerint »... már az egésznek az alapja le van téve...«”[113]

Lobacsevszkij és Bolyai „egyidejűségének” különös késői elismeréseként az Akadémia III. Osztályának 1926. márc. 22-i zárt ülésen

> „Főtitkár Úr átszármaztatja az Akadémiához intézett ama latin nyelvű sürgöny másolatát, melyel az orosz *Kazan-i* egyetem rektora az ottani fiziko-matematikai egyesült nevében üdvözölte az Akadémiát, abból az alkalomból, hogy száz évvel ezelőtt *Bolyai János* és *Lobatscheffszky* fedezték fel a *nem-Euklides-i geometriát.*”[114]

A Kazányi Egyetem tehát „eldöntötte” a „prioritás” annyit vitatott kérdését; de Bolyai János gondolatainak a fejlődése, s ezzel elválaszthatatlan kapcsolatban sorsának alakulása szempontjából elsőrendű fontosságú lenne az elveszett kézirat ismerete. Épp ebben az összefüggésben kerül Sarlóska Ernő tanulmányában központi helyre Wolter von Eckwehr 1831-es grázi levele, amiben külön kiemeli a János kéziratára vonatkozó rövid néhány sort:

---

109 Sarlóska Ernő: Bolyai János – a katona. Bp., 1965. Akadémiai. pp. 341–387., 33 képmell. (A Magyar Tudományos Akadémia III. Osztályának Közleményei 15/4); vö.: Ács Tibor: Bolyai János a bécsi Hadmérnöki Akadémián. (Bp., 2002). Ács Kriegsarchivban folytatott kutatásaira alapuló könyve Bolyai János bécsi éveinek élethű bemutatásával és szemléletes dokumentálásával merőben másféle „katonát” állít Sarlóskájé mellé. A két kép kiegészíti egymást: végre világosan láthatjuk, a bécsi mérnökakadémiai évek (1818–1823) történetét és jelentőségét.

110 MTAKK K 29/182.

111 Dávid Lajos: A két Bolyai élete és munkássága. 2. bőv. kiad. Bp. 1979. Gondolat. pp. 151–152.

112 „Sajnos, ennek az értekezésnek nyoma veszett, lehet, hogy megsemmisült, de az sincs kizárva, hogy valamelyik katonai, esetleg Habsburg levéltár mélyén lappang.” Szénássy Barna: A két Bolyai életútja és a Tentamen tudományos jelentősége. = Matematikai Lapok 31 (1978–1983) No. 1–3. pp. 3–14. Szénássy Barnáról lásd Staar Gyula interjúját: A matematikatörténet szerény apostola. In: A megélt matematika. Beszélgetések. Bp. 1990. Gondolat. pp. 117–137.

113 Alexits 1977. p. 70.

114 Az MTA III. (Math és Term.tud.) osztályának jegyzőkönyvei. 1926. márc. 22-i ülés 12. pontja.

„Aztán egy mondat, – és »más semmi«!

»Rücksichtlich Ihres Werkes werden Sie Sich wohl nach dem Ausspruche des weltberühmten Gauss verhalten, und wenn Sie mich mit einem Exemplare desselben werden beehren wollen, wird es mich erfreuen.«

És búcsúzik is már az osztrák tiszt korrekt udvariassággal:

»Von meiner Familie einen herzlichen Dank für Ihre gütige Erinnerung, und ich habe die Ehre mit vieler Achtung zu verbleiben

Ihr Freund

Wolter

Ingenieur Hauptmann«"

Szabó Péternek a levél kéziratához csatolt megjegyzése szerint Wolter Gauss egykori szavaira céloz, mikor Bolyai Jánost az egyetlen ésszerű magatartásra készteti. Ugyanis Gauss ezt írta Farkasnak 1799. dec. 16-án: »Mach doch Deine Arbeit bald bekannt; gewiss wirst Du dafür den Dank nicht zwar des grossen Publikums [...] einernten [...], aber den Dank aller derer, deren Urtheil Dir allein wirklich schätzbar sein kann«.

Ám ha tényleg tudott is Wolter valamit Gaussnak érintkezéséről János apjával, akkor is mi mást jelent az emlékeztetés a »a világhírű Gauss« bölcsességére, mint azt, hogy az ember nemcsak halálában maradt magára, de olykor meglátásában is. Világos, hogy Wolter sohasem volt Bolyai János eszmetársa. [...] Nem kétséges, Wolter sohasem küzdött a »parallelák« problémájával. Sem sikerrel sem sikertelenül. Számára a matematika, akár a többi kortársa számára, az ilyen-olyan kérdés szellemes vagy kevésbé szellemes megoldását jelentette. A »parallelák« problémája, mihelyt nem a »bebizonyításáról« volt szó, épp oly idegen, értelmetlen feladat volt, akár a későbbi kérdés: »Was sind und was sollen die Zahlen?« És ez a dolog veleje: volt Bolyai János előtt még valaki, akit az »Erfindungskunst« óvatos regulái ellenére a lenyűgöző szenvedély sodrával ragadott magával egy matematikai kérdés?[115]

Ezt a magával-sodrást, ezt a parallelák problémája általi „megragadottságot" olvassa ki Sarlóska Ernő a dokumentumokból; ezt támasztják alá elemzésében Bolyai Jánosról, a katonáról feljebbvalói által időről időre beterjesztett (Szabó Péter által megtalált és összegyűjtött) hivatalos jelentések-jellemzések. Az így fölvázolt keretbe illeszti be azután Sarlóska az Olmützből 1832. aug. 8-án János főhercegnek, a K. u. K. Ingeniers-Corps

[115] Sarlóska: Bolyai János – a katona, pp. 354–355.

Generáldirektorának beterjesztett kérvényt, melyben Bolyai János háromévi szabadságot kér eszméi kidolgozására, és összeveti vele a kérvénynek még Lembergben készült, 1832. május 3-i keltezéssel ellátott fogalmazványát.

A kérvény és a fogalmazvány összehasonlításából Sarlóska fontos új következtetésekre jut János sorsára, lelki állapotára és Gausst illető érzelmeire vonatkozóan; a kérvény elbírálásából pedig a K. u. K. Ingeniers-Corps katonai-mérnöki racionalitásának és János főherceg emberséges vezetési elveinek a képét bontja ki. Jelen összefüggésben azonban az a lényeges, hogy a tanulmány, az egész Bolyai-kutatás egyik legeredetibb és leglényegesebb műve, a primér források tekintetében úgyszólván teljesen a Bolyai-gyűjteményre hagyatkozik:

> „Adatainkat a Magyar Tudományos Akadémia Kézirattárában őrzött Bolyai-gyűjteményből vettük. Bolyai János katonai pályafutására vonatkozó iratok részben eredetiek, részben Szabó Péter bécsi kutatásai alkalmával az eredetiekről készült másolatok és kivonatok.”[116]

Az eredetiek is Szabó Péter kutatásaiból, illetve ezek közvetlen következményeként kerültek az Akadémia Könyvtárába. Erre is emlékeztetve írta Sarlóska tanulmánya elé, hálája – hálánk – jeléül: „Emlékezésül Szabó Péterre”.

De Szabó Péter gazdag hagyatékán és közleményein túl közvetve, a kétkötetes „Stäckel”-en keresztül is meghatározóan hatott a Bolyai-kutatásra. Schmidt Ferenc halála után Szabó Péter „örökölte” a fáradhatatlan építésztől (a nem kevésbé fáradhatatlan) Paul Stäckelt. A Gyűjtemény őrzi Stäckel Szabó Péternek 1907 és 1914 között írt 24 levelét (K 29/153–176), amelyekben részint a küldött – Szabó Péter felfedezte – adatokat-iratokat köszöni meg, részint a Bolyaiakra vonatkozó további kérdésekkel áll elő. A Szabó Péter kutatásaiból és közleményeiből maga Szabó Péter által akkurátusan németre lefordított részletek aztán rendre beépültek Stäckel közleményeibe és végül az 1913-ban megjelent kétkötetes „Stäckel”-be,[117] amit aztán a Szerző – akárcsak Schmidt esetében és a neki szóló köszönet után – az előszóban röviden nyugtázott.[118]

---

116 Uo. p. 342. 7. jegyzet. Sarlóska Ernő (Aknasugatag, 1897. jan. 15. – Bp., 1989. febr. 3.). 1958. II. 17-től az MTA Könyvtára alkalmazza. Sarlóska Ernő a Gyűjteményből és Gyűjtemény hatására vált Bolyai-kutatóvá; kivételes filozófiai tudását és filológiai képzettségét a Könyvtárba lépése óta a Bolyai-dokumentumok szóra bírására fordította.

117 Adalékok p. 88: Stäckel Schmidt Ferencnek 1898. jan. 24-én írt „levélből kivehető, hogy lényegében már akkor kész volt a két kötetes »Stäckel« (csak 1913-ban került ki a nyomdából: Wolfgang und Johann Bolyai geometrische Untersuchungen. I–II. Leipzig–Berlin). A későbbi évek során ennek az értékes munkának az anyaga lényegében csupán a Szabó Péter által fölfedezett adatokkal lett teljesebbé.”

118 Bolyai Farkas és Bolyai János geometriai vizsgálatai. A Magyar Tudományos Akadémia támogatásával kiadta, életrajzzal és magyarázattal ellátta Stackel Pál. Magyarra fordította Rados Ignác. Első rész. A két Bolyai élete és művei. Bp. 1914. MTA. p. X.: „Fölvilágosításaikért, közléseikért és adataikért még sok másnak hálával tartozom. Első helyen említem közülök Szabó Péter budapesti tanár urat, ki a birtokában levő fontos okiratokat a legnagyobb készséggel bocsátotta rendelkezésemre és kinyomtatásukra is megadta

Leveleiben azonban nagylelkűbbnek mutatkozik.

> „Szerencsés véletlen – írja Stäckel 1907. június 29-i levelében –, hogy egészen eredeti szándékom ellenére ilyen komiszul (arg) húzódik a két Bolyairól régóta előkészített könyvem megjelenése, ugyanis csak az új anyag alapján lesz definitív biográfia adható.”

Ebben a levélben köszöni meg egyebek közt az értesítést Farkas fiának írt leveleinek a felfedezésről:

> „ezek a levelek János szeme előtt kellett legyenek önéletrajzi feljegyzéseinek a leírásakor, melyeket azután németre fordított. Ezek a fordítások különálló lapokon vannak, és könnyen lehetséges, hogy egy ilyen lap elveszett, ami a legegyszerűbb magyarázat lehet az 1820. ápr. 4-i levélben az Ön által észlelt hiányra. A többi irat is igen értékesnek látszik János életrajza szempontjából, és szeretném Önt megkérni, hogy ezeket az iratokat megjelentethessem.”

1907. dec. 11-i levélben azután – értesülvén, hogy a levelek megjelenés alatt állanak – azt kéri, hogy az 1908 áprilisában tartandó római matematikai kongresszus történeti szekciójában a Bolyaiakról felkért előadóként felhasználhassa a leveleket, mert úgy érzi, hogy az Appendix keletkezése körüli kérdések egy részére éppen ezek adhatnak választ.

> „Ezen körülmények közepette egyenesen vissza kellene vonnom az előadásomat, ha nem lennék abban a helyzetben, hogy az Ön birtokában levő értékes anyagot figyelembe vehetem! [...] Mindenekelőtt tehát azt szeretném tudni, hogy 1) a levelek mely részei vonatkoznak a *parallelék elméletére* és hogyan hangzanak, 2) mit árulnak el a levelek az *Appendix* megfogalmazásáról, 3) a B. J. által a levelekből készített fordításokból, amelyeket fáradtsággal gyűjtöttem össze egyes céduláiból, mennyiben találtam rá a Helyesre (das Richtige) és a *helyes összefüggésre.*” (K 29/156)

Szabó Péter – úgy látszik – egyedül csak a Wolter von Eckwehrnek átadott kézirat után érdeklődött Stäckeltől.

---

az engedélyt; hálára köteleztek még a következő urak [..]” A magyar matematika-történetírás – ahogyan Staar Gyula találóan nevezte – szerény apostola tulajdonképpen szerényen fogalmazott: „Anélkül, hogy a legkevésbé is kisebbíteni óhajtanám Stäckelnek a Bolyai ügyben szerzett komoly érdemeit, e helyen mégis igazságot kell szolgáltatnom a hazai matematikusoknak a kétkötetes Stäckel-mű létrejöttében végzett munkájukért.” Adalékok pp. 90–91.

> „Ami egyébként az 1825/26-os feljegyzést illeti – válaszolja Stäckel 1909. május 28-án – Herr Prof. U. v. Dantscher Grazban megbízásomból érdeklődött a leszármazottaknál, azonban sajnos bármiféle eredmény nélkül, és így nyilvánvalóan attól kell tartani, hogy ez a fontos dokumentum elveszett.” (K 19/158)

Stäckel levelei s tán még sokkal inkább Hoüel-éi messze a Bolyai-kutatás keretein túl a kibontakozó tudománytörténet-írás szempontjából is elsőrendően fontos dokumentumok. Kiadásuk, már csak a tudománytörténet-írás története iránti nemrégiben ébredt és gyorsan fokozódó érdeklődés miatt is, igencsak kívánatos lenne. És persze változatlanul időszerű a Bolyai-kéziratok kritikai kiadása. Ezekre máig érvényes Weszely Tibor másfél évtizeddel ezelőtti megjegyzése:

> „Manapság újból sok szó esik a kézirataikról. Az egyik fő téma az, hogy még mindig jócskán vannak feldolgozatlan Bolyai kéziratok. Jánosnál főleg a matematikai tárgyúak jönnek számításba. Ezek jó részét már Stäckel feldolgozta. Mint érdekes tényt megemlítem, hogy a feldolgozott kéziratok közül nagyon kevés található meg a marosvásárhelyi Teleki–Bolyai, valamint a Magyar Tudományos Akadémia könyvtárában. (Ez az a két hely, ahol a Bolyai-kéziratokat őrzik.) Nem megalapozatlan az a feltevés, miszerint Stäckel, mivel nem tudott huzamosabb ideig Marosvásárhelyen tartózkodni, feldolgozás céljából több kéziratot magával vitt, melyek többé nem kerültek vissza eredeti helyükre. De ez természetesen nem csak Stäckellel történhetett meg.”[119]

A kéziratok sorsának is megvan a maga – jórészt még tisztázásra váró – története. A Bolyai-kéziratok és az Akadémia – mendemondákkal körüllengett – kapcsolatát viszont Fráter Jánosné tisztázta.

> „Az Akadémia matematikus tagjai közül Hunyadi Jenő jelentette az 1868. jún. 15-i akadémiai kisgyűlésben, hogy a bordeaux-i akadémia kiadványában értekezés jelent meg Bolyai János Appendixéről. Ennek nyomán hívja fel az Akadémia figyelmét, hogy a két tudós hagyatékát a marosvásárhelyi kollégiumtól kérje kölcsön az Akadémia átvizsgálás végett.
>
> A RAL-ban lévő iratok alapján pontosan követni lehet a felküldött iratok sorsát. Eleinte úgy tűnt, hogy a magyar matematikusok megfeledkeztek a hagyatékról. Két külföldi

[119] Weszely Tibor: Bolyai János emlékezete. In: Bolyai-emlékfüzet. Bolyai János halálának 125. évfordulóján. A Kilátó különszáma. Szerk.: Staar Gyula. Bp. 1985. TIT. pp. 7–18.

> tudós: Boncompagni Balthasar és Hoüel Jules ugyanazon év és szinte egy napon (1871. júl. 7. és 9. ld. RAL 688/1871) írt levelének sürgetésére – és Pauler Tivadar közbenjárására – az Akadémia bizottságot alakította a hagyaték átvizsgálására."[120]

A részleteket Szénássy Barna ismertette az *Adalékokban,* a Schmidt-dossziéban talált Hoüel-levelek alapján. Innét tudjuk meg, hogy Boncompagni herceg Hoüel kérésére írt Eötvös Józsefnek a Bolyai-hagyaték feldolgozásának az ügyében, amiről aztán ő beszámolt fiának írt híres és gyakran (szinte kötelességszerűen) idézett levelében.[121] Eötvös válaszolt Boncompagninak, ő pedig (egyes konvencionális részek elhagyásával) lemásolta és „elküldte a választ Hoüel címére. Ilyen kerülő úton szerzünk tudomást Eötvös sorairól:"[122] Szénássy közli Eötvös sorait, azután hozzáteszi.

> „Eötvös Józsefben valóban az ügyért lelkesedő, annak fontosságát átérző egyén vette pártfogásába a dolgok irányítását. Ha a halál 1871. febr. 2-án nem vet véget az életének, akkor bizonyára gyorsabban haladt és kedvezőbben alakult volna a Bolyai-hagyaték földolgozása."

Számos érdekes részletet közöl Szénássy Hoüel Schmidt Ferencnek írt leveleiből, melyekben a francia matematikatörténész felhánytorgatja a földolgozás lehetőségének megvizsgálására kiküldött Bizottság – számára – érthetetlen huzavonáját:

> „Határozottan kezdem hinni, hogy a geográfusok tévedtek, mikor Erdélyt Európába rajzolták; inkább Afrika, vagy Bokhara közepén van, és egy Livingstonra, vagy Vámbéryre lenne szükség, hogy fölfedezze [Célzás Livinsgton afrikai és Vámbéry Ármin közép-ázsiai felfedező útjára]. Bizonyos, hogy ha a Bolyai-iratok Japánban vagy Ausztráliában lettek volna, akkor Ön már régen megkapta volna azokat. De végül is az a lényeg, hogy a kezébe kerüljenek [...]"[123]

Szénássy megérti és méltányolja Hoüel jóféle türelmetlenségét, de menti a Bizottságot is:[124]

---

120 Katalógus p. 13.

121 Lásd pl. Dávid Lajos: A két Bolyai, 1979. pp. 361–362., ahol („A két Bolyai – az idő sodrában" c. tanulmányában) Sarlóska Ernő idézi: „A magyar társadalom figyelmét idegenek hívják fel Bolyai Jánosra. 1869 júliusában Eötvös József így ad hírt a fiának, Lorándnak: »A napokban levelet kaptam a római akadémia matematikus osztálya elnökétől, melynek örültem és elszomorodtam egyszerre, s melynek tartalmáról most sem tudom, büszkék legyünk-e rá vagy piruljunk [...]«"

122 Adalékok p. 81.

123 Adalékok p. 82.

124 Szénássy Barna véleményével egyezik Fráter Jánosnéé: „A kiküldött bizottság azonnal megkezdte a munkát, de csak lassan haladhatott. Az előzetes marosvásárhelyi rendezés ellenére az elég nagyhalmazú iratok tartalmának pontos meghatározása nehézségekbe ütközött." Katalógus p. 13.

„Bolyai-iratok átnézésének vontatottan haladó munkája indítja [Hoüel-t] olykor egy-egy sürgető mondatra; hol elismerőleg, hol elmarasztalólag olvassuk Kőnig Gyula nevét: sokat kesereg a Bolyai-hagyaték Kőnig által irányított feldolgozásának lassú haladásán. Ezen a téren talán igazságtalanok a megjegyzései: a feladat rendkívül fáradtságosnak és sok időt igénybe vevő munkának bizonyult."

A lassúságot azonban részben maga a bizottsági mechanizmus is okozhatta. A Bizottság 1872. március közepén írt jelentésében ugyan kiadhatónak ítélt a kéziratokból is úgy 15–20 ívnyit, egy kötetben az Appendixszel; az Akadémia 1874. évi költségvetésében meg is található az erre előirányzott összeg, de amikor

„az osztálynak jelentést kellett adni a költségvetésben előirányzott tételek állásáról, a jegyzőkönyv szerint: »Bolyai munkájának elkészülte bizonytalan, miután ez oly természetű, hogy rögtönözni nem lehet és sokszor tetemes anyag feldolgozása után sincs közölhető eredmény. Kőnig Gyula úr ezen felül betegeskedik is«. A III. osztály ezt »Tudomásul veszi«."

Ezzel a Bolyai-kéziratok kiadásának az ügye egyelőre lekerült az Akadémia napirendjéről.

A Bolyai-hagyaték iratait – saját kérésére – az Akadémia Schmidt Ferencre bízta átnézés és rendezés végett. Nem ismerjük az erről készített jelentését; annyi azonban bizonyos, hogy az irományok közt ő találta meg[125] Bolyai János atyjának írt fontos levelét, amelyben értesíti őt arról, hogy „semmiből egy ujj más világot teremtettem". Ezt a levelet Szily Kálmán ismertette az Akadémia összes ülésében 1887-ben.

A Bolyai-kéziratok átvizsgálása tehát nem vezetett konkrét eredményre és felhasználatlan maradt egészen 1894-ig. Ekkor érkezett meg ugyanis az Akadémiához a marosvásárhelyi ev. Ref. kollégium igazgatóságának a Bolyai-hagyatékot visszakérő, és az átvizsgálás eredményéről tájékoztatást váró levele. A III. osztály határozata az alábbi volt:

„A szintén már hosszú idő előtt beadott jelentések (Kőnig Gyula és Schmidt Ferenc részéről) értelmében ezen iratokban kiadásra alkalmas anyag nem találtatván, az osztály részéről nem forog fenn nehézség azirránt, hogy ezen iratok jogos birtokosuknak visszaadassanak."[126]

---

125 Pontosabban fia, Márton (1865–1928) budapesti gimnáziumi tanár bukkant rá a levélre. Adalékok p 72.

126 Katalógus p. 14. Itt maradtak azonban a Scientia Spatii valahonnét – nyilván Marosvásárhelyről – idekerült 26 oldalas példányai, melyek még 1831 tavaszán láttak napvilágot a kollégium nyomdájában Weszely Tibor: Bolyai János matematikai munkássága. Bukarest, 1981. Kriterion. p. 22., egy esztendővel azelőtt, hogy a Tentamen első kötetében a mű Appendix-ként megjelent. Egy példányban azonban Fráter Jánosné felfedezett egy 27. oldalt is, a „standard" Scientia Spatii-étől némileg eltérő végződéssel: „omnes, Ax XI Eucl. Demonstrandi necessario irritos fuisse): at muneris ratio huic amplius vacare haud permittens, alii occasioni

Ezekből a kiadásokra alkalmatlannak talált iratokból adta azután ki – minő szerencse, hogy hiánytalanul visszaküldték a kéziratokat Marosvásárhelyre! – Benkő Samu *Bolyai János vallomásai* címmel a 19. századi európai gondolkozás egyik eredeti és jellegzetes változatát, fedezte fel bennük Weszely Tibor a *Scientia Spatii* tömör paragrafusait folytató és kiegészítő tételeket és megfontolásokat, s ezekből hámozta ki Kiss Elemér a kor egyik nagy és jövőbelátó számelméleti kutatóját és algebristáját.

Guillaume-Jules Hoüel bizonyára örömmel látná a Bolyai-kéziratokra vonatkozó sejtésének ilyen fényes igazolódását, és örömmel rajzolná át tudománytörténeti térképén Erdélyt – (Benkő Samu, Weszely Tibor, Kiss Elemér Erdélyét) Európába.

---

reservare jubet." Ennek a 27. oldalnak az üres hátlapjára Fráter Jánosné 1965. dec. 6-án rávezette a véleményét, hogy („Kikutatandó mihez tartozó szöveg.)" Alatta olvasható Rozsondai Bélánénak, a Kézirattár mai vezetőjének a bejegyzése: „Már ki volt nyomva a kötetke, és a 27. lappal végződött. [...] A régi befejezésnek ez az egy 27. lapja valahogy megőrződött." Aztán 95. IV. 14. dátummal: „A kérdés nincs lezárva." Ez a 27. oldal, a hátlapján található levéltárosi bejegyzésekkel képezi a Püski Bolyai reprint kötet két befejező oldalát, tán mintegy figyelmeztetés gyanánt, hogy a nyomtatott termékek reprintje után végre csakugyan ideje lenne már a kéziratok kritikai kiadásának. Ez azonban, úgy látszik, még ma is „bizonytalan, miután ez olyan természetű, hogy rögtönözni nem lehet", az azonban ma már szerencsére nem állítható, hogy „tetemes anyag feldolgozása után sincs közölhető eredmény". Csak persze modern filológiai-tudománytörténeti-matematikusi hozzáértés szükségeltetik a feldolgozáshoz. Mindenesetre a Püski Bolyai legfontosabb historiográfiai hozadéka (a szakszerű bibliográfia mellett) ez a 27. oldal.

A kéziratok szétszóródott papírhalmának rendberakása[127]

Benkő Samu könyvéről

A kéziratok szétszóródott papírhalmazának rendberakása s kibetűzése közben Benkő megértette az irdatlan jegyzettömeg keletkezésének feltételét: egy végleg magára maradt nagy lélek társalkodott itt egyetlen beszélgető társával, a papírral. A nagy mű terve egész gondolatvilágát nyűgözte, a jegyzetekben azonban csupán ötleteit és készülődéseit rögzítette, sebtében, ahogyan eszébe tolultak. Ezt az ötletszerűséget és sebtében odavetettséget tükrözi a följegyzések rendszertelensége és olykori kuszasága, nem azt, hogy írójuk az ideák ingoványába tévedt. Ellenkezőleg, mindenütt, még a láthatóan zaklatott helyeken is, kivételes következetességről és a gondolkodás szigorú fegyelméről tanúskodnak a följegyzések, amikből Benkő bőven idéz.

Az idézetekből s értelmezésükből azután az addig ismerttől lényegesen különböző Bolyai-kép kerekedik ki. Racionálisabb. Magánya ellenére is kora nagy gondjaival együtt élő. A felvilágosodás jó örököse, aki szigorú egyéni s kollektív tapasztalatai ellenére sem veszítette el bizodalmát az emberekben s a fejlődésben. Keserű, de nem megkeseredett lélek. Reális rezignáltsággal nézte az életet és saját munkálkodását, de nem reményét vesztetten. Az „*Üdvtan*-tól, a közszolgálat romantikus céljain túlmenően, azt várta, hogy értő közönséget sorakoztat fel a gondolatai mögé.” S ha magányos is volt – mert az volt –, semmiképpen sem nevezhető ideái gubancába csavarodott, valóságtól elszakadt gondolkodónak.

„Az *Üdvtan* tételeit már-már grafomániás buzgalommal fogalmazó Bolyai tragédiájában valóságos viszonyok, közelebbről az éretlen társadalmi viszonyok tükröződnek.” Ezekre válasz gondolkozása, ahogyan egyrészt a fantasztikumok birodalmát ostromolja, másrészt józan sztoicizmussal szemléli a létezés lehetőségeit.

Benkő Bolyaija lángelméjével kiemelkedik, de gondolkozása alaprétegeivel mélyen a honi fejlődésbe simul. „Az erdélyi szellemi életben, különösen a protestáns kollégiumok tájain, az élet bajainak elviselésére, már évszázadok óta a sztoicizmus filozófiáját használták gyógyírul. Nemzedékek kapaszkodtak az emberi észbe, s a kelet-európai fejlődés megmerevült feudális keretei között az élet egyetlen örömét a gondolkozásban keresték.” Az erdélyi művelődéstörténet jó ismerőjeként Benkő Samu belülről érti meg Bolyait, s keserveiről sem feledkezve meg s gyöngeségeit sem szépítgetve olyan embert állít elibénk, aki „az *Üdvtan*

[127] Forrás: Vekerdi László: A kézairatok [sic!] szétszóródott papírhalmazának rendberakása. Benkő Samu Bolyai-könyvéről, 1985. = Irodalomismeret 13 (2003) No. 4. p. 54.

fejezetein töprengve, élete végéig megőrizte a gondolkodás örömét, és munkája azzal a reménységgel töltötte el, hogy részese a humánum jövőt formáló cselekedeteinek. A maga nyomorúságain úgy akart segíteni, hogy hadat üzent az általános nyomorúságnak és embertelenségnek.”

Eleitől újra kellene gondolnunk csakugyan az egész Bolyai-kérdést? Nem inkább annak jött el az ideje, hogy megértsük és megfogadjuk végre Bolyainak, Benkő Samu Bolyaijának üzenetét?

Az Akadémiának háza vagyon

A természettudományok és a matematika az Akadémiai Könyvtárban[1]

Miért nincsen Teleki Könyvtár?

Már hogyne lenne, mondhatná valaki, hiszen még az ezernyolcszázhatvanas és hetvenes évek nagy naplózási-szakbeosztási rohamában külön pecséttel tüntették föl a könyvekben (de sajnos a helyrajzi naplókban, az „inventárokban” nem) a Teleki-gyűjteményből való származást! Fáradságos munkával s a Telekiek megmaradt könyvjegyzékei segítségével csakugyan megismerhető lenne ma is az állomány; úgy vagy ahhoz hasonlóan, ahogyan a „koronaőr” Teleki József (1738–1796) könyvtára Csanak Dóra rekonstrukciójából.[2] Föltárható lenne tehát lappangásából az egykori Teleki-könyvtár, csakhogy épp az erre fordítandó munka nagysága mutatja, hogy Teleki Könyvtár, olyan értelemben, ahogyan mondjuk Széchényi Könyvtár, sohasem létezett. A Magyar Tudós Társaság első elnökének nemes adománya nem vált tervszerűen bővített és szervesen gyarapodó országos könyvtár magvává, Széchényi Ferenc alapításával ellentétben.

A különbség okai persze többé-kevésbé ismertek. A Telekiek könyvtárának nem volt olyan jellegzetes és viszonylag könnyen folytatható „profilja”, mint Széchényi Ferencének a hungaricumok gyűjtése; illetve az induló Akadémián azok a szakok, amikben a Telekiek könyvtára legerősebb volt – s ide tartoztak a természettudományok s a matematika is – viszonylag nem sokat nyomtak a latban. Azután meg túlságosan is nagy falatnak bizonyult valahogyan a könyvtár a korai Akadémiának: ezernyi szervezési-elhelyezkedési gondja közepette nem bírta lenyelni s megemészteni. S különben is, a könyvtárfejlesztést az Akadémia egészen a felszabadulás utáni újjászervezéséig sohasem tekintette elsőrendű feladatának. Kiterjedt cserekapcsolatai – közismerten s olykor hangsúlyozottan – sem a könyvállomány gyarapodását kívánták szolgálni, hanem „hírünket a világban”. Azon az egy

1 Forrás: Vekerdi László: A természettudományok és a matematika az Akadémiai Könyvtárban. In: Fejezetek a 150 éves Akadémiai Könyvtár történetéből. Bp., 1976. MTAK. pp. 26–36. A Magyar Tudományos Akadémia Könyvtárának közleményei. Új sorozat 2 (77); ua.: Magyar Tudomány 83 (1976) No. 9. pp. 552–562.

2 F. Csanak Dóra: Teleki József könyvtára. In: Irodalom és felvilágosodás. Szerk.: Szauder József, Tarnai Andor. Bp., 1974. Akadémiai. pp. 401–443.

területen pedig, ahol legalábbis a XX. század elejéig úgy-ahogy következetes beszerzés nyomai láthatók, az Akadémia meddő és reménytelen versenybe keveredett a Nemzeti Múzeummal; ez az egy terület ugyanis épp a hungaricumok gyűjtése volt. Azt talán nem is kell külön hangsúlyozni, hogy az Akadémia főkönyvtárnokai – egészen Ferenczi Zoltánig, aki 1925-ben lépett a könyvtár élére – nem voltak se könyvtárosok, se bibliográfusok; tekintélyes akadémikusok voltak, saját kutatási, szervezési és tudománypolitikai föladataikba nyakig bonyolódott tudósok.[3] Egyikük-másikuk ugyan roppant sok időt s energiát pocsékolt könyvtári ügyek intézésére is, az állomány gondos és tervszerű gyarapításával azonban egyikük se törődött. Márpedig a természettudomány s matematika könyvtárunkban elfoglalt helye szempontjából ez a fontos.

Annál is inkább, mert a Teleki-könyvtárban ezek a tudományok nemcsak kellőképpen s az Akadémia megalapítását megelőző kor legjobb nemzetközi színvonalának megfelelően vannak reprezentálva, hanem olyan formában is, ami csekély fáradsággal s nem nagy költséggel kiegészíthető és folytatható lett volna. A Teleki-gyűjtemény elsőrendű természettudományos-matematikai könyvtár magjául szolgálhatott volna, pontosan úgy, ahogyan Széchényi Ferenc könyvtára páratlan értékű hungaricum-könyvtár alapja lett. S a közvéleménnyel ellentétben a jubileumi Akadémia-történet előmunkálatai közben egyértelműen kiderült[4] az sem igaz, hogy az induló Tudós Társaságban, illetve az újrainduló Akadémián nem fektettek volna kellő súlyt a természettudományokra. Ellenkezőleg, nagyon is fontosnak ítélték meghonosításukat s mívelésüket; csak enyhén szólva szerencsétlenül fogtak hozzá. Ennek a szerencsétlen hozzákezdésnek egyik része volt a könyvek – s általában a tudományos irodalom szerepének elfogult megítélése is. A matematika és a természettudományok könyvtárunkbéli helyzetének szempontjából tehát alapkérdés, hogy miért nincsen Teleki Könyvtár. A válaszhoz mindenekelőtt azt kell látni, hogy milyen mértékben s értékben voltak képviselve e szakok a Telekiek gyűjteményében?

Teleki József természettudományos és matematikai könyvei

Csanak Dóra említett tanulmányából pontosan látható, milyen – s milyen nagy! – szerepet szánt Teleki József értő gonddal válogatott könyvtáraiban – a marosvásárhelyiben s pestiben

---

3 Fráter Jánosné: A Magyar Tudományos Akadémia Állandó Bizottságai 1854–1949. Bp., 1974. Akadémiai. pp. 17–31. és passim. (A Magyar Tudományos Akadémia Könyvtárának Kiadványai 70.)

4 Vekerdi László: Az Akadémia szerepe a természettudományok és a matematika meghonosításában és fejlődésében. Kézirat.

egyaránt matematikának s természettudományoknak. A marosvásárhelyi könyvtár 2497 kötetéből 136 fizika, 91 matematika, 135 „Medici” (állat- s növénytani műveket is rejtő) szakjelzéssel került felsorolásra, de igen sok ide tartozó művet találunk a filozófia-logika-metafizika szak 152 fölsorolt kötetében is, legalább 50–60-at. Akad egyértelműen ide sorolható mű a többi szakban is bőven, olykor igen sok, mint pl. a „Miscellanea” szakban az Acta Eruditorum közel száz évfolyama! Úgyhogy legalább 500–600 kötettel kell számolnunk, ami az egész állománynak 20–25 százaléka. A pesti könyvtár 3231 kötetében, elsősorban a „Hungarica” szak erős megnövekedése (1005 kötet) miatt, a fizika-matematika szak (271 kötet) számszerű szaporodása ellenére is viszonylag visszaszorul; erősen csökken a „Medici” szak könyveinek száma (48), viszont a históriával egybesorolt „Geographia” szakban (együtt 458 kötet) sok ide tartozó mű található. Tartalmaz ide sorolható, illetve ma egyértelműen ide sorolt műveket a filozófia (89 kötet) és a teológia (229 kötet) szak is; úgyhogy végeredményben legalább 400–450 kötettel számolhatunk. A marosvásárhelyi könyvtárban jelentkező egynegyedes arányhoz képest ez az egy nyolcad így is felére esés; Csanak Dóra a könyvgyűjtő Teleki József portréjának vázolásával szépen megmagyarázta a változás jellegét s okát is. Itt is kell azonban néhány szót szólani a két könyvtár válogatásáról.

A fiatal Teleki József ezt mutat ja a marosvásárhelyi katalógus ugyanis nemcsak kitűnően tájékozott kora modern elméleti tudományaiban (ami különben olyan mesterekkel és barátokkal a háta megett mint Daniel és Johann Bernoulli, La Condamine, Clairaut, d'Alembert, Montucla stb. igazán nem meglepő), hanem arra is ügyelt, hogy a kor eszmei-elméleti irodalmának lehetőleg teljes spektruma mellett összegyűjtse az itthon gyakorlatilag legszükségesebb műveket is. A tudomány nagy általános fejlődési tendenciáit kiváló érzékkel egyezteti a honi fejlődés igényeivel. így jelennek meg könyvtárában a földművelés, kertészet, erdőgazdaság modern módszereit, elveit s lehetőségeit tárgyaló művek (Oeconomie generale de la campagne, Haushaltung und Landwissenschaft, Musaeum rusticum, Syntagma de rebus rusticis, Theorie et pratique du jardinage, Manuel d'agriculture, Gründliche Versuche und Erfahrungen der Holzsaat, Forst Handbuch, Angliai méheskert Szamosi György fordításában stb.) meg – a jellegzetes közép- és kelet-európai „bányász-aufklérizmus” képviselőiként – a bányaművelés és fémföldolgozás kézikönyvei, mint például Christoph Traugott Delius Einleitung zur Bergbaukunst-ja (Bécs 1773) vagy Alvaro Alonso Barba Probir- und Schmelzkunst-ja (Bécs 1719). De ide sorolhatók a korszerű természettudományos oktatás és tanulás céljaira szolgáló kézikönyvek is, elsősorban Mussenbroek és s'Gravesande XVIII. század-szerte roppant népszerű munkái, valamint az általános természettudományos műveltséget terjesztő könyvek, mint például Voltaire newtoniánizmust bemutató remeke.

Mindezek a kifejezetten pedagógiai művekkel, Locke több kiadásban és nyelven meglevő munkáival és a lockeiánus empirizmust sugalló könyvekkel együtt, a felvilágosodás centrális nagy praktikus vállalkozására, az „Erziehung des Menschengeschlechtes”-re utalnak. A nagy cél, igaz, utópisztikusnak bizonyult; ámde a természettudományos – vagy mondjuk általánosabban racionális észjárás elterjedését hatalmasan segítette így is. És ez alapvető szerepet játszott a tudományfejlődés új, nagy XIX. századi hullámának megindulásában.

A pesti könyvtár épp ebből a (felvilágosodáskori értelemben) „prakticista” szempontból egészíti ki igen szerencsésen a marosvásárhelyit, s nem is csupán említett mezőgazdasági-, technikai- s tankönyvekkel, hanem az „emberré-nevelődés” (s nem nevelés!) olyan jellegzetes alkotásaival, mint Rousseau művei s a bőven képviselt utazási irodalom. És jórészt ide tartozik a századvég nagy társas-tudományos divatja, az elektromos kísérletek tana is, ami ebben a viszonylag kis pesti könyvtárban olyan pompásan képviselve van, hogy az még nagy szakkönyvtárakban is párját ritkítaná. Hasonlóképpen jelentkezett a marosvásárhelyi könyvtárban a századközép centrális nagy tudományos élménye, a mikroszkopizálás; méghozzá az új könyvek mellett olyan alapvető forrással, mint Leeuwenhoek Arcana Naturae-ja.

A XVIII. század végén, a XIX. század legelején elképzelni sem lehetett volna tehát ideálisabb könyvtárat önálló kutatómunka megindításához. A természettudományok azonban épp ekkor rohamosan fejlődtek haladt-é ezzel a fejlődéssel s hogyan a Telekiek könyvtára? Milyen szintet képviselt a Tudós Társaságnak juttatott Teleki-alapítvány és a többi kisebb adomány,[5] s milyen lehetőségeket teremtett aktív természettudományos és matematikai kutatómunka megindításához, tájékoztatásához és önkontrolljához?

„Országok rongya! könyvtár a neved.”

Teleki László nemcsak hogy nem értett apjához foghatóan természettudományokhoz, de valószínűleg jelentőségüket se ismerte fel atyjával ellentétben a közművelődés és így az államok életében. Igaz, 1810-es tervezetében,[6] ami később igen erősen hatott a Tudós Társaság első szervezetére, a hat szak közül kettőben is juttat – s méghozzá elég jelentős – helyet természettudományoknak s matematikának. Csakhogy a kontextus, amiben föllépnek, egyértelműen a német „Natur- und Heimatkunde” és a „politikai államisme” gondolatvilágára

[5] F. Csanak Dóra: Az Akadémiai Könyvtár története a szabadságharcig. Bp., 1959. Akadémiai. 29 p. (A Magyar Tudományos Akadémia Könyvtárának Kiadványai. 14.)

[6] Über die Einriehtung einer gelehrten Gesellschaft in Ungarn. Unmassgehliclie Meinung des Gr. Ladislaus Teleki. Pesth, 1810. Trattrier. 107 p.

utal, s ez már egy generációval régebben, a derék Schwartner fénykorában is kiegészítésre szorult volna, ha ugyan nem számított mindenestül elavultnak. S ami a legfontosabb: ez az „államjogászi természetfelfogás”, ellentétben a felvilágosodás természetjogi államfelfogásával, erősen lebecsülte az önálló természettudományos és matematikai kutatást, s így persze az ilyesmit tartalmazó könyveket is. 1800 utáni kiadási évvel úgyszólván nem találunk értékes új természettudományos és matematikai könyvet Teleki László könyvtárában. Ámde régi könyvekből feltehetőleg egész könyvtárak megvásárlásával – most is sok értékes, József könyvjegyzékeiben még nem szereplő mű került a gyűjteménybe; a matematika szak 314 kötete közé például Maupertuis három könyve, Olbers és Bode egy-egy könyve; a fizika, természethistória és kémia szak 1122 kötete közé például Aldrovandi egy műve s még néhány ritka régi könyv. Az Enciclopédie teljes példányát is ő vásárolta meg, s néhány régi magyar természetfilozófiai művet.

Teleki László XIX. század eleji vásárlásaival tehát a könyvtár XVIII. századi jellege erősödött, s gazdagodott ezenkívül még régebbi művekben. Teleki József régi könyveket ritkán vásárolt, s akkor is kifejezett céllal, mint például Barrow már akkoriban is klasszikusnak számító, s híresen nehéz geometriai előadásait, feltehetően nagy barátai tanácsára, a newtoniánus matematikai-fizikai fejlődés kontextusa végett. Utódainál azonban, s a kor könyvgyűjtő arisztokratáinál általában, ezt a tudomány fejlődésére figyelő funkcionális jelleget bibliofil, nemegyszer egyenesen sznobisztikus szempontok váltották fel; megnőtt a régi és híres kiadások „önbecse”, tárgyuktól és tartalmuktól függetlenül.

Teleki László vásárlásainál kifejezettebben vonatkozik ez a bibliofil-jelleg a többi induláskor ajándékozott gyűjteményre, Batthyány Gusztáv rohonci és Kázmér kisbéri könyvtárára, s a Kresznerics-féle gyűjteményre, hogy csak a természettudományos szempontból is fontosakat említsük. De még ez az anyag is, még Batthyány Gusztáv annyit böcsmérelt könyvtára is sokkal de sokkal többet ért, tisztán tudományos szempontból is annál, amire az induló és szerveződő Társaság tagjai és korifeusai becsülték; a Teleki-könyvtárral együtt pedig még akkor az ezernyolcszázharmincas-negyvenes években is könnyen és nem nagy költséggel korszerűsíthető állományt képezett. Miért nem becsülték hát az induló Társaság vezetői s miért nem próbálták használható könyvtárrá korszerűsíteni? Pedig azokban az első években szerteágazó és lázas kutatómunkába kezdtek. Csakhogy ehhez a kutatótevékenységhez nem nagyon kellett könyvtár.

A Tudós Társaság pokoli munkabírású titoknoka és első könyvtárőre, a – sajnos – fáradhatatlan Toldy Ferenc 1844 őszén körülvezette Vörösmarty Mihályt az éppen megnyitott könyvtárban. Eme látogatás élményeit összegezi és általánosítja a „Gondolatok a könyvtárban”. A megfogalmazás s a szavak hatalmas sodrása persze utánozhatatlanul vörösmartys, de a gondolatok nem különösebben eredetiek, nagyon sok rendes tag kollégája oszthatta, kivált a IV. és a VI., a természettudományi és a matematikai osztályokban. „Az írt betűket a sápadt levél / Halotti képe kárhoztatja el”, vallották akkoriban nagyon sokan. A Társaság vezető matematikusát, Vállas Antalt például olyannyira nem érdekelték sajátjain kívül a könyvek, hogy a komplex számokra vonatkozó kutatásaiban még a legfontosabb irodalmat sem kísérte figyelemmel,[7] beleértve a két Bolyai e tekintetben is alapvető vizsgálatait, amik olvasatlanul hevertek a beküldött ajándékok közt a Társaság könyvhalmazában. Pedig Vállas Antal nem volt akármilyen elme, s ha valaki, hát ő tisztán látta a matematika és a technika fontosságát a modern társadalmakban, s derekasan harcolt is a korszerű technikai képzésért tervekkel, tettekkel.[8] „Mi dolgunk a világon? küzdeni / Erőnk szerint a legnemesbekért.” Ez volt a cél, s akkoriban a „legnemesbeket” nem a könyvekben keresték. „Ment-e / A könyvek által a világ elébb?” gyötörte a kétely a legjobbakat. S nemcsak mifelénk. Világjelenség volt a könyv kritikája, olyasmi, mint a közelmúltban a McLuhanizmus. Ez volt az a kor, a XIX. század közepe, amelyik Galileit a „Természet könyve” mondás tudatos félreértésével könyveket megvető „vadzsenivé” retusálta, holott Galilei annyira ízig-vérig író volt, hogy még alapvető kísérleteit is gyakran az olvasóra sandítva eszelte ki úgyannyira, hogy megvalósítását a sikerült leírás után – már szükségesnek sem tartotta. S igazi humanistaként könyvei megjelenéséért nyugalmát, biztonságát, akár életét is hajlandó volt föláldozni. S hasonlóképpen Baconból, aki valósággal babonásan tisztelte az írott betűt, modern értelemben „kísérletező” tudóst faragtak; írásait és szándékait alaposan félremagyarázva az „induktív kutatási módszer” atyját tisztelték az előkelő angol késő reneszánsz mágusban! S ez az induktív elfogultság nemcsak a tudományok történetét hamisította meg s írta át saját szája íze szerint, hanem az írott könyvek megvetését is sugallta a „Természet Nagy Könyve” és a Soha Még Le Nem írt Alkotások istenítésével. A pozitivista zseninek nem volt szüksége könyvek mankójára; maga, tisztán géniuszával, fedezett föl s teremtett új világokat. „Lelkünk a szárny, mely ég felé viszen”. A könyv inkább akadály: „Miért e lom? hogy mint juh a gyepen / Legeljünk rajta? s léha tudománytól / Zabáltan elhenyéljük a napot?” Általános jelenség volt ez a könyvet gyanúsan tekintő induktív nyüzsgés, Vörösmarty egy egész kor tudományos létélményét fejezte ki, legragyogóbban az egész világirodalomban. Nem volt a Tudós Társaság szemlélete egy lépéssel sem elmaradva a

[7] Az úgynevezett képzetes gyökök természetéről. BAL 170/1840. A’ Kerekes jutalomfeltétele ügyében. HAL 120/1848.

[8] Szentgyörgyi Mária: Célkitűzések és reformtörekvések a Magyar Tudományos Akadémián 1831–1935. Bp., 1973. MTAK. pp. 13–28. (A Magyar Tudományos Akadémia Könyvtárának Kiadványai 69.)

világtól, csak éppen alapítása s véle a könyvtáré történt szerencsétlen tudománytörténeti konstellációban. S ami tán még súlyosabban esik latba: míg más nemzetek tudománya hamar kiheverte az egeket ostromló vadzsenialitás könyvtárellenes hangulatát, minálunk negyvennyolc tündöklése „Lángolt a gondos ész, a szív remélt” és bukása s utána a kegyetlen terror – „Most tél van és csend és hó és halál” hosszú időre konzerválta, s a hatvanas években egyenesen újraszülte a reformkor érzelemvilágát, jellegzetes tudományszemléletével együtt. Sőt: a feladatukhoz csodálatosan visszafiatalodott koros tudósokkal együtt. Így lett az ő s hűséges tanítványaik szerepe a kezdés mezébe burkolt konzerválás; azaz a természettudományos kutatásokban az induktív módszer korai romantikus fázisának rögzítése. „Vesd tűzbe a fóliánsokat” hirdeti reprezentáns költőjével egy egész – s hozzá kivételesen művelt – tudósnemzedék, s nemcsak hirdeti, hanem Petényi Salamon remekművének szomorú sorsa mutatja[9] meg is valósítja. Ez a hangulat tartott azután, a többé-kevésbé nyílt könyvellenességgel együtt, lényegében egész a századfordulóig; az Akadémia vezető berkeiben pedig még tovább, egészen a felszabadulás utáni újjászervezésig.

„Fröhlich dolgozószobájában áll az idő”

Így aztán erről a hosszú periódusról természettudományos és matematikai könyvbeszerzés tekintetében bizony nem sok jót mondhatunk. S nem is elsősorban az anyagiak hiánya miatt. Hiszen csak abból a pénzből is, amit az újjászerveződő Akadémia az ezernyolcszázhatvanas-hetvenes évek fordulóján egy szélhámos – vagy őrült? „experimentátor” fizikai laboratóriumának megalapozására és felszerelésére kidobott, a könyvtár – az akkori olcsó könyvárak mellett – még mindig szinte teljesen korszerűsíthető lett volna.[10] S amint Fráter Jánosné a könyvtár ügyirataiból földerítette,[11] az új palotába költözés után a szervezés és a vezetés, de részben még a használhatóság is, kielégítette a nagy kutatókönyvtártól várható követelményeket. Rekonstruálja a tanulmány a hetvenes évek első felének kölcsönzéseit is: a 85 részletesen elemzett nevezetesebb kölcsönzőből mindössze 14 matematikus, illetve

[9] Petényi Salamon páratlan értékű állattani kéziratát – a magyar Brehmet – az osztály vezetői (szántszándékkal? véletlenül?) „elvesztették”; úttörő paleontológiai vizsgálatait példátlan becsmérlő előszóval adták ki; őt magát életében – hiába kérte – minimális segélyben sem részesítették. De még ábrái rajzoltatási költségét se vállalták (RAL 80/1838). Bezzeg az osztály hatalmas rendes tagja, Frivaldszky Imre nemcsak segélyt kapott balkáni utazásaihoz (RAL 122/1842) hanem az Akadémia fizette – értékben Petényiével semmiképpen sem összemérhető – dolgozatainak ábráit is (RAL 202/1846).

[10] Mathematikai és Természettudományi Közlemények. Vol. 4. (1865–66) pp. VII–XIV.; uo. Vol. 5. (1867) pp. VII–XII.; uo. Vol. 7. (1869) pp. III–V.; Akadémiai Értesítő, 1870. pp. 93–94.

[11] Fráter Jánosné: Részletek az Akadémiai Könyvtár történetéből 1865–1875. Bp., 1965. MTAK. 59 p., 13 t. (Magyar Tudományos Akadémia Könyvtárának Közleményei 45.)

természettudós; igaz, ők az új Akadémia vezető vagy jövendő vezető egyéniségei. Az inventárok vaskos kötetei azonban nem sok jótékony nyomát őrzik Szabó József, Frivaldszky Imre, Than Károly, Eötvös Loránd, Szily Kálmán, Fröhlich Izidor egész Akadémiánk életében döntő szereplésének.

A köteles- és ajándékpéldányként beáramló könyvek tengerében mégis kiemelkedik néhány jól elkülöníthető értékes „sziget”. Mindenekelőtt Helmholtz-Kirchoff-Bunsen neve említendő; a „heidelbergi szentháromság” művei majdnem minden kiadásban és gyakran sok példányban szerepelnek, a hozzájuk tartozó „tudománytörténeti vonzáskörrel” (J. R. Mayer, E. Dühring, J. Tyndall, C. Neumann, G. Wiedemann, F. Kohlrausch, a „Thomson-Tait” stb.) együtt. Szily egy időben igen intenzív „mechanikus hőelméleti” érdeklődésére[12] utal a sok századközepi termodinamikai mű, amik közt azonban csak néhány fontos található, elsősorban Clausius könyvei (akinél Zürichben Szily – persze kötelező heidelbergi évének letöltésén kívül – tanult) és Moritz Stransky „Grundzüge zur Analyse der Molecularbewegung”-ja (Brünn 1867). Maxwell alapvető könyve a hőmozgásról azonban hiányzik.

Majdnem találóbb lenne „azonban” helyett „természetesent” írni, annyira jellegzetes a legfontosabb nevek s könyvek hiánya, ami a fizika század végén kezdődő hatalmas föllendülésével egyre szembeötlőbbé válik. A bécsiekből persze meglehetősen teljes a gyűjtemény, s így elkerülhetetlenül megvannak köztük a legnagyobbak is, Boltzmann és Mach, bár legtöbb művük meglepően későn, csak a két világháború után került be az inventárokba. Nyugatabbról azonban csak elvétve kerül be a fizika nagy forradalmi változásában szereplő szerző műve. A fénytant például számos mű képviseli, de ezek között hiába keressük Maxwell könyvét az elektromágneses fényelméletről. Nem csoda, mert Fröhlich Izidor, aki a hetvenes évektől foglalta el az elméleti fizikai katedrát, és lassacskán az Akadémián is igen jelentős posztra jutott, élete végéig (1931) nem „hitt” az elektromágneses fényelméletben. „Fröhlich fél évszázados professzorságának ideje alatt írja róla Marx György a fizika eljut az elektromágneses tér megismerésétől a relativitáselméleten és az atomelméleten át a kvantummechanikáig. Fröhlich dolgozószobájában azonban áll az idő. A fényt tanulmányozza, de hiába szól odakünn a rádió, ő még mindig nem veszi tudomásul, hogy a fény az elektromágneses tér hullámzása.”[13] És – ez a dologban a legszörnyűbb – Fröhlich egyáltalában nem volt holmi tehetségtelen obskurantista. Elsőrendűen képzett fizikus volt és kivételesen ügyes kísérletező, akárcsak mestere és barátja Eötvös Loránd. Kiválóan

---

12 Lásd pl. Szily Kálmán: A hőelméletben előforduló mennyiségek dynamikai jelentéséről. = Műegyetemi Lapok 1 (1876) No. 6. pp. 156–179.

13 Marx György: Az elméleti fizika száz esztendeje a pesti egyetemen. = Fizikai Szemle 20 (1970) No. 4. pp. 116–123.

értett a nyers kísérleti adatok matematikai elemzéséhez, e tekintetben a heidelbergiek legjobbjaival vetekedhetett. Csak éppen nem tudott tájékozódni a gyorsan fejlődő eszmék forgatagában. Nem tudott elfogulatlan szemmel olvasni. Az „induktív kutatási módszer" jegyében született s szellemével átitatott dolgozatokat és könyveket volt hajlandó csupán meglátni. És méghozzá saját kutatási területén volt a legvakabb. Még Paul Drude kitűnő „Lehrbuch der Optik"-ját (Leipzig, 1900) is azért becsülte s hozatta meg a könyvtárba, mert gondosan elkülönítve tárgyalja a fény fenomenológikus hullámelméletét az elektromágneses „hipotézistől". Így hozatta meg É. Verdet könyvének német átdolgozását (Vorlesungen über die Wellentheorie des Lichtes, Braunschweig, 1881–1883), mely az elektromágneses fényelmélet előtti utolsó pillanatban, a szerző 1865/66-ban tartott egyetemi előadásai formájában rögzíti az induktív experimentalista szempontokat kínos fantáziátlansággal kielégítő fenomenológikus hullámelméletet. Még a XX. század elején is Verdet már megjelenése pillanatában reménytelenül elavult könyvét használta Fröhlich egyetemi előadásain vezérfonal gyanánt, ezt vásároltatta meg a nála doktorálókkal s szakdolgozatot írókkal, ezt a steril leíró-matematikai apparátust alkalmazta kutatásaiban, és ezt követelte meg kitűnően képzett és nálunk szokatlanul népes és szorgalmas iskolájától is. Külön tragédia, hogy a századvég-századelő erősen individualista tudós-egyéniségei közt éppen Fröhlich volt a nagy iskolateremtő. S valósággal rossz tréfának tűnhet, hogy az inventár vaskos természettani kötetében hiába keressük H. A. Lorentz, Einstein, Planck, Bohr, Rutherford, Marié Curie, Sommerfeld, de Broglie, Schrödinger, Heisenberg, Born, Dirac s a fizika nagy forradalmának megannyi nevét, de megtaláljuk Jolly professzor könyvét, azét a Jollyét, aki azzal írta be nevét a tudomány történetébe, hogy a hozzá forduló ifjú Max Plancknak azt tanácsolta, hagyja ott a fizikát ha valami igazán újat akar, mert a fizika immár olyan tökéletes, hogy nemigen akad benne fölfedeznivaló.

A tudomány nagy köztársasága

Fröhlich példája extrém eset; a matematikában például – ahol az enyhe „göttingenitisz" sohasem okozott akkora pusztítást, mint a fizikában az erős heidelbergi „induktivitisz" – egészen a XX. század elejéig látszik a könyvbeszerzés területén is a tájékozódni képes értelem nyoma. Gauss, Cauchy, Bolzano, Martin Ohm, Riemann, Lejeune-Dirichlet, Weierstrass, Grassmann, von Staudt, C. Jordan, Chasles, Dedekind, Otto Hölder, Veronese, Hermite, Kronecker művei sorra jelennek meg az inventárban, s olykor meglepő teljességben.

Megtalálhatók a kor divatos és rangos kézikönyvszerzői (Ernesto Pascal, Aug. Föppl, R. Fricke, J. Coolidge, J. A. Grunert, A. Macfarlane, Du Bois-Reymond, „Appel-Goursat") is, és kiváló, ha nem is különösebben gazdag matematikatörténeti válogatás (Moritz Cantor, H. G. Zeuthen, Max Simon, H. Suter) egészíti ki a remek érzékkel és kellő teljességben begyűjtött recens anyagot, folytatva, illetve feleleveníve mintegy a könyvtáralapító Teleki József szempontjait s szellemét. Ha nem tudnánk, a szerzőkből is könnyen kitalálható lenne, hogy ez elsősorban Kőnig Gyula érdeme. Az ő nyitott és markáns tudósegyénisége áll egészen a kilencszázas évek elejéig a matematikai beszerzések megett. Visszavonulása után, a tízes évektől kezdve ezt a területet is elárasztják a jellegtelen és értéktelen nyomdatermékek, a tudományos fércművek, ismeretterjesztő erőlködések, „A csalhatatlan önszámító"-k, „Az önszámolás művészete"-szerű alkotások. Értékes anyag most már itt is legföljebb a cserében ha található. A csere őrzi annyira-amennyire a tudomány nagy, nemzetek feletti áramának éltető szellemét.

A cserekapcsolatok az Akadémiai Könyvtár történetének külön megírandó fontos fejezetét képezik. Lényegesek a természettudományos és matematikai anyag szempontjából is, bár ezen a területen az Akadémiánál „csereerősebb" intézmények és társaságok (Nemzeti Múzeum Növény- és Állattárai, Földtani Társaság majd Intézet, Természettudományi Társulat, Mathematikai és Physikai Társaság, az ó-gyallai és herényi csillagdák, egy-egy nemzetközi hírnévre és jelentőségre szert tett egyetemi tanszék, a mezőgazdasági kísérletügyi hálózat stb.) erősen „rontották" az Akadémia esélyeit. Azután meg a jól menő csere rengeteg levelezéssel, törődéssel, aprómunkával jár, s az Akadémiai Könyvtár kevés és így munkával állandóan túlterhelt tisztviselője közt bizony egy sem akadt, akinek pont a természettudományos-matematikai csere lett volna szívügye. Még tán az egész más érdeklődési és kutatási körű Hellebrant Árpád tett ezért is legtöbbet; az ő kiemelkedő szakértelmét s ügybuzgalmát azonban – életkörülményei szerencsétlen alakulása miatt – sohasem becsülték kellően, s vezető posztra a könyvtárban sose jutott.[14] Egyébként is szívvel-lélekkel bibliográfus volt; valósággal sziszifuszi munkával igyekezett például hiánytalanul begyűjteni a század végén s a század elején szó szerint gombamód szaporodó periodikus nyomdatermékek csupán elvben „köteles" példányait (micsoda anyag lehetne reklamáló levelezése a magyar vidék ellentétekkel gyötört polgárosodásának történetéhez!),[15] annak azonban alig akad nyoma fogalmazványai közt, hogy a természettudományos cserét sürgette

[14] Vértesy Miklós: Hellebrant Árpád 1855–1925. = A Könyvtáros 8 (1958) No. 9. pp. 653–655.

[15] K804: 51, 55, 70, 97, 115, 127, 140, 159, 160, 167, 178, 181, 185, 189, 190, 200, 201, 209, 216, 306/1902, hogy csak egyetlen év „termését" regisztráljuk. Az Akadémia ügyészének, Dr. Fejérpataky Kálmánnak láthatóan Hellebrant kötelespéldány-reklamációi okoztak legtöbb bosszúságot.

volna, vagy új kapcsolatokat igyekezett volna teremteni. Heller Ágost, a századvégi – tehát a „természettudományos” – korszak főkönyvtárnoka fizikus volt – akárcsak Eötvös és Szily – és hozzá tudománytörténész, mégpedig nemzetközileg elismert.[16] De összehasonlíthatatlanul több időt és energiát fordított mondjuk az Elischer-féle Goethe-gyűjtemény fölállítására és ügyeinek adminisztrálására, mint természettudományos és matematikai cserére és beszerzésre együttvéve! Szily Kálmánt pedig, amikor átvette a főkönyvtárnokságot, már egyáltalában nem érdekelte a természettudomány. Nem mondhatni, hogy nem törődött a könyvtárral, de többnyire csip-csup hivatali ügyek és intrikák kötötték le legendás munkaerejét.[17] Ami ezen felül maradt, azt teljes egészében öregkora nagy szerelmére, a nyelvészetre – helyesebben a nyelvészkedésre – áldozta. Ilyen körülmények között a természettudományoknak inkább csak az jutott, ami jött magától. A kutatás XIX. századi jellege és társadalmi helyzete miatt azonban ez sem volt egészen jelentéktelen.

A XIX. században ugyanis a természettudósok s matematikusok java, közéjük számítva a nem különösebben híres vagy kiemelkedő szerény kutatómunkásokat is, még rendületlenül hitt a tudomány világjobbító hivatásában, bízott a tudomány nagy, nemzetek feletti respublikájában. Az oktalan Habsburg-terror is hazánkra irányította a figyelmet, úgyhogy az Akadémia újraindulásával számos természettudományos társaság jelentkezett cserére, köztük olyan nevezetesek, mint a washingtoni Smithsonian Institution[18] 1850-ben és a pétervári Orosz Birodalmi Földrajzi Társaság[19] 1857-ben. A csere azután a matematikai-természettudományos szakokban is állandóan növekedett,[20] kivált a századfordulón, miután a Berichte kiadásával az Akadémia – megint elsősorban Kőnig Gyula sürgetése s munkája nyomán – végre reális csereértékű nemzetközi folyóiratot teremtett; úgyhogy például 1908-ra újból számosat lemondhattak[21] az addig megrendelésre hozatott[22] fontos folyóiratokból.

---

16 Fröhlich Izidor: Heller Ágost emlékezete. = Természettudományi Közlöny 36 (1904) Pótfüz. pp. 146–162.

17 Csak mutatványként a jellemző halmazból 1904 VII. 29.-én radegundi nyaralásából írt levele: „Most kapom Hellebranttól a levelet! Ez az öreg totyakos Horn az, a ki egy szót sem tud magyarul s a ki miatt Thaly egyszer oly nagy skandalumot csinált. Régen megérett a pensióra; még jó, hogy engedetlenségével ő maga adott okot rá.” RAL 365/1904.

18 RAL 65/1850.

19 Sz. Garai Judit – Újhelyi Gabriella: A Magyar Tudományos Akadémia Könyvtára orosz és szovjet cserekapcsolatainak vázlatos története. = Magyar Könyvszemle 83 (1967) No. 4. pp. 325–334.

20 Pl. a Greenwich-i Royal Observatory a közleményeit (K 804: 21/1905); a Johns Hopkins Press az American Journal of Mathematics-ot és az American Chemical Journal-t (K 804: 27/1905) ajánlja fel, ill. küldi, a Missouri Botanical Garden cserét ajánl (K 804: 52/1902), az Allegheny Observatory saját közleményein kívül egész duplumlistát küld K 804: 40/1902, és így tovább.

21 K 805: 232/1907. Mathematische Ánnalen, Journal für die Reine und Angewandte Mathematik, Astronomische Nachrichten, Zeitschrift für Mathematik, und Physik, Annales de Chimie et l'hysique, Comptes Rendus Hebdomidaires des Séances de l'Académie des Sciences, Journal des Savants, Journal des Mathématiques Pures et Appliqués, Journal of the Chemical Soeiety, Journal of the Statistical Soeiety.

22 Már 1865-ben 26 fontos természettudományos és matematikai folyóiratot javasoltak megrendelésre (K 801: 2/1865). Közülük 7 a fenti lemondó jegyzékben is szerepel.

Ezeknek a nagy nemzetközi folyóiratoknak a többségét azután máig cserébe kapja a Könyvtár. De kapott már akkor cserébe periodikákon kívül értékes sorozatokat és forráskiadásokat is; így került könyvtárunkba Galilei műveinek monumentális Favaro-féle Nemzeti Kiadása[23] és a holland akadémiai Huygens-kiadás.[24]

Az első világháború alatt a csere természettudományos-matematikai téren is erősen visszaesett, s csak a húszas években kezdett újra emelkedni. Ekkor jelentkezett cserepartnerként a Szovjet-Külföldi Kulturális Kapcsolatok Társasága, s a két világháború közti periódusban a Szovjetunió – amint már Sz. Garai Judit és Újhelyi Gabriella elemző tanulmánya és Szentgyörgyi Mária reform-monográfiája kellően föltárta a könyvtár egyik legjelentősebb cserepartnerévé növekedett. Matematikai-természettudományi szempontból pedig – az inventárok egyértelmű tanúsága szerint – számszerűen és érték tekintetében egyaránt a legjelentősebbé.

„Nagyvonalú sokoldalúság ... új kutatási ágazatok”

Az Akadémia felszabadulás utáni újjászervezése a könyvtárban is merőben új követelményeket és lehetőségeket teremtett. Létre kellett hozni a rohamosan bővülő kutatóintézeti hálózat és a tömeges tudósképzés igényeit kielégítő könyvtári bázist, mégpedig a fejlődés világtrendjeinek megfelelően az eddig erősen elhanyagolt természettudományos és matematikai területen is. A természettudományok hihetetlenül gyors haladását s a beszerzés elmúlt század alatti elhanyagoltságát tekintve ez bizony óriási feladat volt. A föladat megoldására „szerzeményezési osztályt” állítottak fel, s megszervezésével és vezetésével megbízták Komjáthy Aladárt (1894–1963). Az ő munkája következtében a könyvtár állománya rövidesen teljesen átalakult. „Mi jellemezte Komjáthy Aladár könyvtárépítő munkáját? Egyrészt írta Kenéz Ernő Komjáthyról szóló (szakszerűség tekintetében is mintaszerű) nekrológjában – a nagyvonalú sokoldalúság: szükség volt erre abban az időben, amikor a háborús évek izoláltsága után végre mód nyílt arra, hogy a magyar tudósok felmérhessék a tudomány helyzetét a nagyvilágban. Másrészt biztos érzék a kutatás azon területeinek felismerésére, melyeken valami új van keletkezőben, amelyeken egy-egy zseniális kezdeményezés nyomán teljesen új kutatási ágazatok fejlődtek ki. E kutatási

---

23 K 802: 95 243/1898. Az áldatlan raktározási helyzet és a könyvköltöztetés veszélyeire jó példa, hogy ennek a roppant értékes forráskiadványnak három kötete (17., 18. és 19.) rekatalogizáláskor nem került be az új katalógusba, a régiből viszont kikerült az egész sorozat és a közben külső raktárba szállított sorozatból a három kötet valahogy külön kerülve lappangott a többi újrabeszállítása után sokáig.

24 K 802: 428/1899.

területek szakirodalmának erőteljes beszerzésével alkalmassá tette a több évtizeden át alig fejlesztett könyvállományt arra, hogy nemcsak a jelen, hanem többször a később meginduló magyar kutatásoknak is első könyvtári bázisa legyen. A tudományok belső fejlődési tendenciáinak mély ismerete tette őt képessé arra, hogy közvetve az akadémiai kutatóintézeti hálózat távlati könyvtári szükségleteiről is gondoskodjék olyan területeken is, ahol a kutatóintézet még csak tervezési stádiumban volt: elég itt csak a kibernetika, az izotópkutatások, a lélektan, a szociológia stb. terén végzett állományfejlesztési tevékenységére gondolni.”[25]

Ezeken az alapokon fejlődve a könyvtár a hatvanas évek elejére közepére természettudományos-matematikai szempontból is korszerű, a leglényegesebb műveket mind tartalmazó állománnyá változott. Komjáthynak még arra is volt gondja, hogy a mulasztásokból visszamenőleg pótolja, ami leginkább szemet szúrt. A hatvanas években azután – már csak a kutatóintézeti hálózat saját könyvtári bázisának időközbeni kiépülése miatt is – megint új föladatok s gondok jelentkeztek. A gombamód keletkező új kutatási ágak és tudományok mellett hihetetlen mértékű könyvinfláció is nehezítette – de persze egyre erősebben követelte is – a gyors és biztos tájékozódást. A könyvárak gyorsuló emelkedése, a hivatali közöny és a Parkinson-effektus pedig (AKV, országos profilirozási törekvések, krónikus raktár- és munkahelyhiány stb.) sikeresen akadályozta a beszerzést. A tudósok számának exponenciális emelkedése, a kialakult intézetek és kutatócsoportok többé-kevésbé kifejezett „lerögzülése” néhány jól definiált kutatási téma mellé, s az ezeken kívül eső fejlődés figyelmen kívül hagyása, új trendek időleges és globális elutasítása (pl. lemeztektonika, modern antropológia, filozófiai hermeneutika, a matematikai nyelvészet kivételével az egész mai nyelvtudomány, az ún. „strukturalizmus” stb.) mind olyan gondot képviselt, amire a könyvtárnak is figyelnie kellett, ha nem akarta megismételni a Fröhlich Izidor korában elkövetett hibákat, s el akarta kerülni a szűklátókörűség súlyos következményeit.

A beszerzés a megnőtt követelményekre nagyvonalú sokoldalúsággal és teljes nyitottsággal válaszolt, s a honi könyvtári helyzet és igények figyelembevételével hűen követte a tudomány nagy fejlődésvonalait. Ezeket a humanóriák területén kialakított elveket igyekezett azután alkalmazni messzire elkerülve mindenféle divatos „kétkultúrás” műveltségmodellt – a természettudományos és matematikai könyvbeszerzés is; a szaporodó és méregdrága reprintkiadások megvásárlásával s a releváns tudománytörténeti-tudományfilozófiai irodalom javának gyűjtésével meghosszabbítva a tudományok nagy

[25] Kenéz Ernő: Komjáthy Aladár 1894–1963. = Magyar Könyvszemle 80 (1964) No. 2. pp. 176–177.

fejlődési trendjeit a múlt irányába is. így napjainkra összeköttetés teremtődött Teleki József pompás XVIII. századi könyvtárához; könyvtárunknak ma már szerves annál nagyobb baj, hogy komisz raktározási viszonyok miatt mégsem használható része a Teleki-gyűjtemény. Az Akadémiai Könyvtár ma újra a Teleki Józseféhez hasonló funkcionális egész; minden tekintetben alkalmas az aktív kutatómunka támogatására, tájékoztatására és önkontrolljára.[26] Kicsi igyekezettel s nem kevés szerencsével! – a kutatás folyton változó világának s a tudományfejlődés szerteágazó problematikájának valóságos „Teleki Könyvtára" lehetne!

[26] Rózsa György: A társadalomtudományi kutatás és a tudományszervezés tájékoztatási problémái. Bp., 1965. Akadémiai. 174 p.

Matematika a Magyar Tudományos Akadémia működésének első száz évében[27]

Matematika a reformkori Akadémián

„Mi az oka, hogy némely Nemzetek a' Tudományokban és Szép Mesterségekben más Nemzetek felett felylyebb emelkedtenek?" – kérdezi Tóth Pál a Tudományos Gyűjtemény második, 1818. évi folyamának IX. kötetében, s azonnal meg is felel rá: „Hogy valamely Nemzet a' Tudományokban és szép Mesterségekben felylyebb felylyebb mehessen, azt tsak az Igazgató erő viheti véghez. Minden Országokban, 's Társaságokban, a' hol a' Tudósók betsben tartanak, a' nagy Elmék megjutalmaztatak, a' jutalmak, mint a' Cadmus' kigyójának a' fogai, több Tudósokat szereznek".[28]

Ezt a közhangulatot, s a Marczibányi-intézetben meghonosodott jutalmazási elvet fogadta el az induló Tudós Társaság, mikor a '30-as évek elején, hosszú előkészületek s alapszabály-alkotások után megkezdette tényleges működését. Az ország értelmisége is úgy tekintett rá, mint tevékenységét elbíráló s jutalmazó szervre, s az Akadémia is ezt tekintette a tagok elsőrendű feladatának. Így például Tittel Pál 1831. június 19-én beterjesztette „A' Mathesisnek akármelly ágazattyából kijött Magyar Könyvek Lajstomá"-t, melyben 27 címet sorolt fel, válogatás nélkül, a szerző (Bolyai Farkas) feltüntetése nélkül bevett *Az Aritmethica elejé*től (M. Vásárhely, 1830) Varga Márton *A' Gyönyörű természet tudományá*ig (N. Várad, 1808). Szerepelnek a felsorolásban kalendáriumok, hadtudományi munkák, csíziók, földrajzi művek is; nagyobb részük fordítás.[29] (...)

Az igazi tragédia azonban a matematikában zajlott le, jóvátehetetlenül. A matematikai osztály tagjai – kivált Vállas Antal és Győry Sándor – hatalmas buzgalommal láttak neki azonnal könyvértékelői, pályakérdés-készítői és elbírálói, jutalomkiosztói és tehetségkeresői tisztüknek. A hatalmas buzgalom azonban nem társult megfelelő szakmai hozzáértéssel és kritikusi kompetenciával. Ítéleteik felületesek, s többnyire személyes kapcsolataik, illetve társadalmi összeköttetések által irányítottak. Így például Vállas Antal a *Figyelmező* 1837. április 4-i számában valósággal extatikus elragadtatás hangján ismertette Nagy Károly „(m. t.

27 Forrás: Részletek Vekerdi László: A Tudománynak háza vagyon. Reáliák a régi Akadémia terveiben és működésében (Piliscsaba – Bp., 1996) című kötetéből, amely a Magyar Tudománytörténeti Intézet tudománytörténeti könyvsorozata első köteteként jelent meg. A teljes szöveget lásd: http://mek.oszk.hu/05400/05455/index.phtml

28 Tudományos Gyűjtemény 2 (1818) No. 9. p. 26.

29 Régi Akadémiai Levéltár 79:1831. (Régi Akadémiai Levéltár *a továbbiakban:* RAL)

társ. Amer. phil. t. rendes tag)" Bécsben 1837-ben megjelent *Elemi algebrá*ját. „Az olvasó csakhamar észre veendi – írja –, melly végtelen nagy különbség van e' jeles munka, 's azon elemi 's legnagyobb részint elavult bevezetések közt, mellyekkel bennünket Dugonics, Pethe, 's utánok mások is, megajándékoztak… 'S örvendeni kell minden igazi hazafinak, hogy nálunk, olly kevés ösztön és serkentés mellett is, támadnak férfiak, kik, bő és alapos tudományoknál fogva, hátra maradt hazájok' fiait egyszerre a' míveltebb nemzetek' tudományos titkaiba avatni képesek".[30]

Nem most történt először, hogy Vállas Antal szuperlatívuszokban szólt tagtársa matematikai munkásságáról. A *Tudománytár* 1836-os évfolyamában, a honi matematikai irodalom áttekintésében[31] már hosszasan és igen intenzíven dicsérte Nagy Károly aritmetikáját[32] sőt még egy másik tagtársának kiosztott dicséretébe is bevette a korábban már részletesen méltatott szerzőt.[33]

Vállas összefoglalásában persze ma már a méltatlanul kiosztott dicséretek is fülsértőek, az azonban még másfél évszázad távolából is fölháborító, hogy megemlíti felsorolásában Bolyai Farkas kicsi magyar nyelvű remekét, az 1830-ban Marosvásárhelyen kiadott *Az aritmetica elejé*t, sőt a *Tentamen*t is, anélkül hogy egyetlen elismerő vagy akárcsak tárgyilagosan ismertető szót is vesztegetne rájuk. Ezt a gyalázatos eljárást Bolyai Farkas szóra sem méltatta, ha ugyan egyáltalán tudott róla, bár tudhatott, mert a *Tudománytár* első évfolyamában, 1834-ben neki is megjelent egy kis értekezése a „Marosszéki lakodalmi szertartások"-ról.[34]

A maga nemében kitűnő kis értekezés, párját ritkítja tárgyilagosságával és szép magyar nyelvével abban a nyakatekert és fellengzős folyóiratban, de az mégiscsak feltűnő, hogy az elég sok – s már a maga idején elavult – matematikai cikk között pont a nagy matematikus korszerű és eredeti gondolatainak nem jutott hely. Még föltűnőbb azonban a műveit környező

30 Elemi arithmologia, arithmographia. Második rész: Elemi algebra. Számirás közönséges jegyekkel. Írta Nagy Károly (m. t. társ., amer. phil. t. rendes tag). Bécs, Rohrmann és Schwigerd, cs. k. udv. könyvárusoknál MDCCCXXXVII. XIV, 372 p. = Figyelmező 1 (1837) No. 13. (ápr. 4.) pp. 102–104.

31 Vállas Aantal: Magyar legujabb mathematica literatura, és visszatekintés a' régire. = Tudománytár 2 (1836) Vol. 12. pp. 143–172.

32 Vállas id. mű pp. 153–154.

33 Győry Sándor A' felsőbb analysis elemei című könyvének első füzetéről írva újból visszatér Nagy Károly dicséretére: „Ha mármost visszatekintünk e' füzetre, nem lehet nem örvendenünk egy felül, hogy honi literaturánk nem sokára olly munkával fog birni, mellyel pirulás nélkül a' mathematicai külfölddel szemközt állhatunk, mit eddig, Nagy K. munkáját kivéve, alig tehettünk;" (id. mű p. 171.)
Az Akadémia korai fázisában láthatóan a dicséret volt az uralkodó „elv" a tagok műveinek ismertetésében. Nagy Károly, nehezményezve Kalendáriumának Vállas általi bírálatát – lásd: Figyelmező 2 (1838) No. 2. (jan. 9.) pp. 17–28. – nyíltan meg is mondotta: „Elmellőzném itt, bármit mond V. A. felőle, mindenesetre alkalmatlan egy dolog, hogy olyasvalamit mi a' tagság kebléből kerül, ismét a' társaság kebeléhez tartozó tag rostálgatja." (Nagy Károly levele Toldy Ferenchez 1838. március 6. MTA Könyvtárának Kézirattára, M. Irod. Lev. 4-r. No. 84. p. 67.). Pedig Vállas bírálata dicsérő, s egyetlen aprócska kifogást említ csupán.

34 Bolyai Farkas: Marosszéki lakodalmi szertartások. = Tudománytár 1 (1834) Vol. 2. pp. 221–222.

csaknem teljes hallgatás akkor, amikor a Vállas Antalok, Nagy Károlyok és Győry Sándorok egekig magasztaltatnak. Nagyon is érthető volt tehát, hogy a nagy matematikus a Figyelmezőben megjelent Nagy Károly-magasztalás reá nézve sértő sorait már nem állhatta szó nélkül. Fráter Jánosné, a Bolyai-gyűjtemény gondosan összeállított katalógusához írt bevezető tanulmányában részletesen beszámolt Bolyai Farkas eme recenzióhoz írt megjegyzéséről, s megállapította, hogy a nagy matematikus „válaszcikkében csaknem tételről tételre bizonyítja be Vállas Antalnak, hogy a Nagy Károly művében tárgyalt matematikai kérdésekkel ő már az 1830-ban megjelent »Arithmetica elejé«-ben, majd később a Tentamenben foglalkozott és tisztázta a Vállas Antal által dicsért tételeket”.[35] De hiába mutatta meg Bolyai, hogy Nagy Károly egekig magasztalt tételeinek egy része már Dugonics, Pethe, s mások munkáiban is megtalálható, hiába figyelmeztet, hogy Nagy Károly gyakran csak úgy odavet valamit, holott – amint ő a Tentamenben szépen bebizonyította – „az előadása kényesecske”, a *Figyelmező* még csak nem is közölte gondosan megírt szép cikkét; sőt, Vállas valószínűleg megfontolásra sem méltatta, mert amikor évekkel később egy akadémiai osztályülésen szóba került a honi tudománytörténet fontossága, ő a matematikai tudományok részéről egyértelműen – és mint semmi korrekcióra nem szorulóra – hivatkozott a Tudománytárban megjelent, fentebb említett összefoglalásra.[36] Bizony, hiába figyelmeztette Bolyai, hogy „az igazsághoz hív felebaráti jó szív a' burjánok között is meglátja a'virágot”, s hiába remélte – meghatóan szép szemérmességgel kínálva lefordítását – „hogy deák halottja (t.i. a *Tentamen*) valaha salakjából megtisztulva magyarul támad fel”.[37]

Pedig nem kell hozzá különösebb szakértelem, hogy Bolyai Farkas szép cikkében ha mást nem, a szakmában járatos matematikust azonnal fölismerje valaki, s a Matematikai Osztály rendes tagjai – akik tömérdek papirosokat irkáltak teli első pillantásra értéktelen elmeszüleményekként lelepleződő „matematikai felfedezések” bírálataival – igazán szakíthattak volna kicsi időt, hogy legalább megvizsgálják Bolyai Farkas említett munkáit. A *Tentamen*-példány – melyet Bolyai Farkas küldött az Akadémiának – ma is megvan a Könyvtárban, s már csak a felajánlott magyar nyelvű átdolgozása miatt is meg kellett volna

35 Fráter Jánosné: A Bolyai-gyűjtemény (K22 – K30). Bp., 1968. MTA. p. 9. (A Magyar Tudományos Akadémia Könyvtára Kézirattárának Katalógusai 4.)

36 Akadémiai Levéltár, a III. Osztály jegyzőkönyvei, 1846. febr. 16.

37 Az Athenaumi Figyelmezőnek 102-k lapján kezdődő s 104-k lapján végződő könyv-birálatra. Fráter Jánosné id. mű p 30., K 23/48. Bolyai Farkas, miután pontról-pontra megmutatta, hogy a Nagy Károly könyvében egekig magasztalt tételek mind megtalálhatók már Dugonics, Pethe „s azutáni mások próbatételeiknél”, és sok, Nagy Károly által hanyagul kezelt tétel pontosan olvasható az Arithmetica eleje (1829) című könyvecskéjében vagy a Tentamen…-ben, mely „könyvnek csekélyebb helyei közé tartozik”, így végzi a recenziót, a Tentamen…-re célozva: „Nem teheti mindazáltal erre nézve Ref. hogy hibául ne tegye ki Magyarnak, hogy nem magyarul írt; 's ha oly alakba adta ki, melyben a' mái időkben életre nem jöhet sok főtörése' szüleményeinek temetését békével nézze el, azzal a' reménnyel, hogy diák halottja valaha salakjából megtisztulva magyarul támad fel.”

nézzék a t. rendes tagok. Ám ahogy a fizikában a Tarczy–Warga vonal, úgy a matematikában a Vállas–Győry vonal csak a saját vágyaival és tudásával összhangban tudta elképzelni a honi tudomány haladását. Ebben a felületesen tájékozódó, mélyebb matematikai műveltségre szert soha nem tevő, ámde a csalhatatlan ítélet igényével fellépő világban nyilvánvalóan nem fért el Bolyai Farkas mély matematikai képzettsége. Pedig roppant valószínű, hogy ha az Akadémián – folyóiratokban, évkönyvekben s pályázatokon – az utóbbi képviseli az alaphangot, még idejében s itthon kellő helyre kerülhetett volna Bolyai János világrengető fölfedezése is. S felesleges említeni, micsoda hatással lehetett volna ez a matematikai – de tán mindenféle – tudományok fejlődésére hazánkban. S tán még nem is csak a tudományokra.

Benkő Samu eligazító tanulmányainak egyikéből[38] ugyanis tisztán látjuk ma már, milyen erősen hatott még így, igen korlátozott körülményei közepette is Bolyai Farkas, az egyszerű marosvásárhelyi tanár a honi műszaki értelmiség felnövekedésére. Nem kell túlságosan nagy képzelőerő ahhoz, hogy belássuk, mit tehetett volna az Akadémia tekintélyével maga mögött szakmai s nevelői képességeinek megfelelő intézményben. S mindehhez még különösebb tőke sem igényeltetett volna, csupán egy kis „kompetencia” és lelkiismeret azokban, akikre a honi tudomány felvirágoztatása a matematika s a fizika terén bízatott.

Összehasonlításképpen képzeljük csak el, milyen pótolhatatlan kár érte volna a magyar tudományt, ha némi kételkedés és huzavona után Schedel nem áll teljes határozottsággal az ifjú Reguly Antal mellé, hanem – tegyük fel – Jerney János véleményére hallgat. Nyilvánvaló, ma nagy nehezen s igen kevés reménnyel formálhatnánk a legcsekélyebb jogot is a XIX. századi nyelvtudomány egyik fundamentális fölfedezéséhez, ami méghozzá a mi anyanyelvünk és őskultúránk kulcskérdése. S ez a veszély nagyon is reális volt, mert a Nyelvtudományi Osztály rendes tagjai ugyanúgy nem ismerték föl Reguly jelentőségét, mint a Matematikai Osztály mandarinjai a Bolyaiakét. Szerencsére Schedel, a fáradhatatlan és hihetetlen szorgalmú Titoknok még idejében tudott tájékozódni, mert ezen a területen neki magának is megvolt a kellő műveltsége és kompetenciája. A matematika és a fizika azonban nemigen érdekelte (még a csillagászat leginkább), s ahhoz még az ő hallatlan munkabírása is kevés volt, hogy ezen a területen is ellenőrizze a t. t. tagokat. Tán hozzá nem értését is érezve, épp ezzel a területtel alig törődött, pedig egyébként mindenbe beleszólt. Még a rajzolókat is ő kereste, s úgy, hogy minden a legolcsóbb s mégis jó legyen. Hol rajzoltak akkoriban ilyen minőségben 30 p. krajcárért növényeket s állatokat természet után? Schedel megtalálta a rajzolót.[39] De az írnok s az akadémiai szolga segélykérését is ő intézi, és ő bajlódik a később

[38] Benkő Samu: Bolyai Farkas, a tanár. In: Sorsformáló értelem. művelődéstörténeti dolgozatok. Bukarest, 1971. Kriterion. pp. 155–182.

[39] A rajzoló feljegyzése. RAL 202:1846

íróként híressé vált akadémiai írnok, Lauka Gusztáv gazdasági ügyeivel is. S mind átnézte azt a számtalan dilettáns kéziratot, felfedezést, találmányt, melynek szerzője a Tudós Társaságon keresztül vélte elérhetőnek a világhírnevet vagy legalábbis így kívánt „édes Hazájának" szolgálni! Szerencsére Schedel röviden és energikusan végzett a szélhámosok és hóbortosok beadványaival, s így mentette az induló Akadémiát nem egy hasonló intézmény szomorú sorsától, a dilettánsok általi elárasztástól. A Bolyaiak esetében azonban valahogy még ez is az Akadémia ellen fordult.

Schedel elődje, Döbrentei Gábor – akit ő 1835 őszén váltott föl a titoknokságban – ugyanis távolról sem volt a nagy titoknokhoz fogható munkabírású és áttekintésű ember (bár becsvágy tekintetében ő sem maradt el mögötte), s nem tudta olyan határozott irányba terelni az ügyeket, mint utóda. Így nagyobb teret engedett a matematikai és műszaki fantazmagóriáknak is; köztük részletesen megvizsgáltatta egy léghajó alkalmazásával működő, előre elkészített, rögzített úton haladó jármű, s egy léghajós hídpótlék tervét. A Matematikai Osztály rendes tagjai (Vállas, Győry, Bitnicz Lajos) közül elküldte a tervet véleményezésre Győrynek, de azontúl Bolyai Farkasnak is, akit ő még az Erdélyi Múzeum szerkesztése idejéből ismert s becsült, már csak azért is, mert a professzor volt Marosvásárhelyt a folyóirat leglelkesebb terjesztője.[40] Győry kerek perec bolondságnak minősítette a tervet, szerzőjét pedig tudatlan fantasztának. Bolyai Farkas ellenben észrevette az ötletben rejlő pici reális csírát, s kibontotta belőle egy léghajóval működő „repülővasút" tervét. Az eredeti tervből csupán annyit tartott meg, hogy a szerelvényt a súrlódás csökkentése végett meg kell szabadítani a súlyától – erre szolgál a léghajó – ezentúl azonban mindent megváltoztatott. Kidolgozta – s az eredeti tervvel ellentétben pontosan kiszámolta – az emelő erő, illetve a léghajó nagyságát, gazdaságos és roppant reális pályát gondolt ki a javasolt földbe mélyesztett út helyett, s végül roppant szellemes, igazi „gördülőcsapágyas" megoldást talált a jármű futására a síneken. Megjegyzi, hogy szél híján „lehetne gőz machinával a' madarak' elé repülési módját is próbálni", vagy lehetne legalábbis lóval húzatni a vonatot. S miután teljesítette a feladatot – mellyel megbízatott – azzal végzi, hogy: „Magam is akartam valami mathesisi értekezövést felküldeni az Évkönyvbe: de betegeskedés 's sok egyéb baj miatt még nem tehettem; reménylem azt is, 's egyebeket is küldhetek, ezután."[41]

A pör Bolyai János (korát sok tekintetben egy-másfél évszázaddal megelőző) új világának föl nem ismeréséért a fátumra tartozik, badarság lenne felelősségre vonni érte nemcsak az Akadémia közepes tehetségű és közepesnél is gyengébb képzettségű mandarinjait,

---

[40] Benkő Samu: Az első erdélyi magyar folyóirat. In: Sorsformáló értelem, pp. 216–230.

[41] Fráter Jánosné id. mű K 23/46; az eset leírása és a kézirattári hivatkozások a 8. lapon.

de még a nagy Gausst is, hisz láthatóan ő sem értette meg Bolyai új eszméinek jelentését és jelentőségét, különben hogyan is hihette volna, hogy a lángeszű fiatal matematikus ugyanazt fedezte fel, mint ő?[42] S különben is, amint Benkő Samu írja: „Bolyai János túltette magát a tekintélyeken, s a maga hivatás eszménye szerint élt és alkotott”.[43] Bolyai Farkas ellenben – ez is Benkő Samu könyvéből látható legszebben – sok tekintetben kora gyermeke volt, kortársaival többé-kevésbé azonos eszmerendszer szerint gondolkozott, s ha tán a *Tentamen*ben nem is, *Az arithmetica elejé*ben közepes matematikusok is föl kellett volna ismerjék a kor matematikai igényeire színvonalasan, közérthetően és nem utolsó sorban pompás, pontos magyar nyelven válaszoló remeket. Ha másért nem, állandóan hangoztatott nyelv-szolgálatuk miatt a legnagyobb érdeklődéssel kellett volna fogadják Bolyai Farkast. Neki meg láthatóan egy kicsi biztatás kellett volna csak, s az Akadémia ma tán matematikai – s úgylehet technikai – remekművek sorával gazdagabb.

De nem kértek tőle semmit. Talán meg sem tudták különböztetni merész és mégis reális tervét azoktól a badarságoktól, amiket ugyancsak 1835-ben Farkas Ferenc hites ügyvéd ajánlott fel a t. t. Társaságnak azzal, hogy a sok csudából hármat a rendelkezésükre bocsájt, ha évente legalább azt az összeget megkapja, mint a rendes tagok.[44]

Megint, mint az elébb: a kompetencia teljes hiánya azokban, akik a dolgok elbírálására vállalkoztak. S ugyanezt látjuk, bárhová nézünk a t. tudós társaság matematikai és természettudományi osztályaiban az első két évtizedben.

Az Akadémia az egyetemi kutatás kialakulásának és fellendülésének korában

Az egyetemek fejlődése következtében megélénkült tudományos tevékenység természetesen igyekezett megteremteni a maga publikációs bázisát. Than is nyomatékosan figyelmeztetett akadémiai székfoglalójában a „speciális szak-folyóiratok” szükségességére, mint amik gyorsan és hatásosan közlik a szakma honi eredményeit, és ismertetik – szélesebb körnek szólóan – a leghíresebb külhoni tudományos eszméket és irányokat. Az utóbbi feladatot

[42] Bolyai Jánost máig mint a nem-euklideszi geometria egyik felfedezőjét tartja számon a gondolkozás története, holott ez csak egyik – Gauss-szal és Lobacsevszkijjel közös – része új világának. Bolyai az axiomatikus struktúrák vizsgálatára kigondolt módszereivel (ahogyan pl. megszerkeszti az euklideszi geometria modelljét az új geometria F-felületén, vagy ahogyan a törzs-axiómarendszerből kifejti az abszolút geometriát) sokkal messzebb nézett – s nem csak a matematikai – jövőbe. Helyét a gondolkozás történetében megkeresni is csak napjainkban kezdette el két (alapeszméket tisztázó) monográfia, Benkő Samué (Bolyai János vallomásai. Bukarest, 1968) és Tóth Imréé („Ahile”. Paradoxele eleate în fenomenologia spiritului. Bukarest, 1969).

[43] Benkő Samu: Bolyai János vallomásai. Bukarest, 1968. Irodalmi Kiadó. p. 259.

[44] RAL 58:1835

szolgálta már akkoriban néhány folyóirat; az 1869-ben megindult *Természettudományi Közlöny*, a *Magyar Mérnök és Építész-Egylet Közlönye*, de részben a *Földtani Közlöny* is, és ugyanígy az 1873-ban induló – s ebből a szempontból nem csupán honi viszonylatban kiemelkedő – *Földrajzi Közlemények*, s mindenekelőtt az *Orvosi Hetilap*. Megvolt a lehetőség – részben a már említett folyóiratokban – honi eredmények közlésére is. Ez a lehetőség azonban – a fentebb említett folyóiratoktól eltekintve – szigorúan egy-egy intézményre, egy-egy munkahelyi és személyi keretek szerint határolt csoportra vonatkozott. Így a *Természetrajzi Füzetek*, a Magyar Nemzeti Múzeum rangos folyóirata, az Ásvány-, Növény- és Állattár különféle rendű és rangú őreinek s legszűkebb körű honi és külföldi ismerőseinek hazánk ásványaira, flórájára és faunájára vonatkozó dolgozatait közölte, s szerzői és tudományos profilja tekintetében egyaránt erősen elkülönült az egyetemektől. A kolozsvári *Orvos-Természettudományi Értesítő* az ottani orvos-természettudományi társulat természettudományi estélyein tartott előadásokból nőtt ki, miután az Erdélyi Múzeum-Egylet 1878-ban alakult természettudományi szakosztálya a társulathoz csatlakozott. A társulat is, az *Értesítő* is a kolozsvári professzorok alkotása volt; nem csupán közlési lehetőségként szolgált, hanem az Egyetem szellemi klímájának megteremtésére is. Az *Értesítő* az egyetemi tanárok és közvetlen tanítványaik tudományos dolgozatait, valamint ismeretterjesztő előadásait közölte, többnyire az illető intézetek közleményeként.

A professzorok között számos kiváló orvos, természettudós és matematikus volt, nem egy közülük akadémikus; s így a kolozsvári *Értesítő*ben megjelent tanulmányok gyakran bekerültek később – teljes terjedelmükben vagy lényegük szerint – az Akadémia kiadványaiba. Annál is inkább, mert a vizsgálatok egy része az Akadémia támogatásával folyt, s erre a támogatásra erősen reá is szorult az egyetem, mert akadtak ott természettudományi kísérleti tanszékek, melyeknek egész fölszerelése egy fekete tábla volt, s évi átalányukból épp csak a kréta árát fedezhették. A szűkös viszonyok ellenére néhány intézetben színvonalas és igen intenzív tudományos munka folyt, *az Orvos-Természettudományi-Értesítő*ben pedig az egyetemi kutatás viszonyainak megfelelő, kellő kritikával szerkesztett és gyors publikációs fórumot teremtettek, mely jellege és szerkezete tekintetében – de tán megindulásával is – erősen hatott az Akadémia *Mathematikai és Természettudományi Értesítő*jének formájára és profiljára. A Kolozsvári Egyetem egyébként a *Magyar Növénytani Lapok* (1877–1884) és a *Vegytani Lapok* megindításával is úttörő, és mintaként szolgált a hazai természettudományos folyóirat-szerkesztésben, s mindhárom folyóirattal az egyetem Than-féle értelemben vett kutatóműhely jellegét demonstrálta.

Minta s műhelyként egyaránt lényeges a rövid élete ellenére is igen erős hatású – s épp az Akadémia publikációs politikájára nagy hatású – *Műegyetemi Lapok* szerepe. A lap szerkesztői a ’70-es évek közepén fölismerték s betölteni igyekeztek azt a publikációs hézagot, ami elsősorban épp a Műegyetem megnövekedett föladata és megváltozott szakmai struktúrája miatt keletkezett. „A m. t. akadémia ugyanis – írják »Bevezetőül« a szerkesztők (Hunyady Jenő, Kőnig Gyula, Kruspér István, Szily Kálmán, Sztoczek József és Wartha Vincze; önmagában is igen jelentős névsor a dualizmus-kori Akadémia történetében!) – bő alkalmat nyújt kisebb-nagyobb önálló vizsgálatok folytatására és végleges kiadására; a természettudományok népszerűsítésére szánt folyóiratok elterjedése olyan, mint azt néhány évvel ezelőtt még remélni sem mertük, vannak végre virágzó szaklapjaink, melyek részletesen foglalkoznak a technikai tudományok gyakorlati oldalával.

Olyan szakközlöny azonban hiányzik, mely akár a tanügy, akár a tiszta tudomány, akár végre ennek alkalmazása érdekében a mindezek alapját képező elméleti tudományokkal foglalkozik. Az e téren meglevő és nem szegényes élet sehol sem nyilvánul. Ez indította az alulírottakat arra, hogy a *Műegyetemi Lapok* kiadására egyesültek; erős meggyőződésük lévén, hogy ily szaklapra nemcsak szükségünk van, hanem ami nálunk nem jár mindig együtt, közönsége is lesz.

E folyóirat nem lesz oly értekezések gyűjteménye, melyeket többé-kevésbé a véletlen hoz össze; hanem úgy kívánjuk azt szerkeszteni, hogy a hazai tudományos élet hű és részletes képét adja, egyszersmind gonddal kíséri az általános tudományos fejlődést, így mindkettőnek hírlapja és közvetítője lehessen”.[45]

Kettős feladatának a folyóirat úgyszólván első számától kezdve az utolsóig maradéktalanul megfelelt. Gyorsan, készségesen és változatlanul közölte honi tudósok értekezéseit, s ha a bennük foglaltakkal nem értett egyet, azt nem átírással, hanem (szükség esetén szúrós) szerkesztői megjegyzésekkel vagy vitacikkel fejezte ki, nyitva hagyva persze a válasz lehetőségét.[46] A lap ezáltal mintegy „preventív szűrést” teremtett, mert minden olvasója meggondolta, hogy szerzőként Szily tanár pennája elé merje-e bocsátani szellemi termékét.

45 Műegyetemi Lapok 1 (1876) pp. 1–2.

46 Pl. mindjárt az első számok egyikében közölték Hermann Emil selmeci Bányász- és Erdészakadémiai tanár tanulmányát „a testek fajhőjéről és valódi hőfoghatóságáról”, amit a szerző megfelelő magyar fórum híján a Poggendorff-féle Annalok-ban közölt. Lásd: Műegyetemi Lapok 1 (1876) pp. 84–86. A nálunk is roppant nagy tekintélynek örvendő német szaklapban való megjelenés nem akadályozta meg Szilyt, hogy néhány találó megjegyzéssel reá ne mutasson a dolgozat gyenge pontjaira, s mikor a következő számban Hermann védekezni próbált, Szily részletesen, szellemesen s főként közérthetően úgy kiegészítette a szerző védekezését, hogy az többé meg se szólalhatott. Lásd: Szily Kálmán: Lehet-e a melegített vízgőz belső munkája negatív? = Műegyetemi Lapok 1 (1867) pp. 118–120.

A „szűrés" másik, talán még nehezebb feladatát a válogatás képviselte: honnan s mit vegyenek be a lapba, hogy a szakmai megbízhatóság és tematikai érdekesség egyaránt garantáltassék? Magyar szerzők Poggendorff-féle *Annalok*ban megjelent cikkeiről rendszeresen referáltak, de hát ilyen természetesen nem sok akadt. Ott ült viszont a szerkesztők többsége az Akadémia ülésein; vagy mint előadó, vagy mint hallgató, s így ha néhányuknak megtetszett egy-egy előadás, azon frissiben leközölhették. Így kerültek át a III. Osztály üléseiről a 70-es évek második felében a legértékesebb előadások a *Műegyetemi Lapok*ba, jól áttekinthető és értelmes együttest formálva abból az anyagból, ami bizony az *Akadémia Értesítő*jében csak nagy türelemmel megfejthető adathalmazként temetődött el. Így rögtön az első számban olvashatjuk Eötvös Loránd új módszerét „a cappillaritási tünemények tanulmányozására",[47] mely az Akadémia 1876. január 10-i ülésén hangzott el, a harmadik (márciusi) számban Lengyel Béla 1876. március 6-án bemutatott fontos dolgozatát,[48] melyben azt bizonyította be, hogy a hidrogén színképe alacsony nyomáson is csak „az ismeretes három vonalból áll", s a Plücker és Wüllner által leírt sokvonalú színkép nem a hidrogéntől, hanem „szénköneny-szennyezéstől" származik; az ötödik számban találjuk Krenner József 1876. április 3-án tartott akadémiai előadását „Az ehrenfriedersdorfi Plinian"-ról és így tovább.

Természetesen a műegyetemi professzorok dolgozatai gyakran előbb megjelentek a Lapok-ban, s csak azután kerültek bemutatásra az Akadémián, máskor meg itt, s nem az Akadémia lassú kiadványaiban jelentek meg jobban kidolgozott, végleges formában, így például Szily Kálmán híres és a magyar elméleti fizika szempontjából (nem föltétlenül jó irányba) döntő termodinamikai vizsgálatai a *Műegyetemi Lapok* hasábjain találhatók leggondosabban s legérthetőbben formába öntve. Mindehhez hozzávéve a friss – és többnyire fogékonyan reagáló – ismertetéseket az új irányokról, a remek recenziókat, a szellemes feladatokat s megoldásokat, könnyű megérteni, hogy a *Műegyetemi Lapok* rövid élete ellenére sem múlott el nyomtalanul: hagyományai más-más s egymást kiegészítő halmazát két fontos folyóirat is folytatta, a *Mathematikai és Természettudományi Értesítő* és később a *Mathematikai és Physikai Lapok*.

A *Mathematikai és Természettudományi Értesítő* megindulása (1882) előtt az Akadémia ezen a fontos területen folyóiratot egyáltalán nem adott ki. A *Közlemények* ritkán és szabálytalan időközökben megjelenő monográfia-szerű füzetei a hazai viszonyokra vonatkozó, megbízatások alapján végzett vizsgálatokról számoltak be. Az Akadémia *Évkönyvei*ben csak elvétve jelent meg egy-egy általánosabb érdeklődésre számítható,

[47] Eötvös Loránd: Új módszer a capillaritási tünemények tanulmányozására. = Műegyetemi Lapok 1 (1876) pp. 2–13.
[48] Lengyel Béla: A köneny színképéről. = Műegyetemi Lapok 1 (1876) pp. 65–81.

többnyire az összes ülésen elhangzott előadás: az ülések többségének az anyaga elveszett az Akadémia (jól-rosszul vezetett jegyzőkönyvei alapján) lerövidítve szerkesztett *Értesítő*jében. Igaz ugyan, hogy indított a III. Osztály 1867-ben két, kötetlen időközben megjelenő füzetekből álló sorozatot *Értekezések a Természettudományok Köréből*, illetve *Értekezések a Mathematikai Tudományok Köréből* címmel, azonban ezek a füzetek egyrészt nagy késéssel jelentek meg, másrészt a válogatásukban – kivált a lényegesen nagyobb publikálási nyomásnak kitett természettudományi sorozatban – nem föltétlenül tudományos szempontok érvényesültek.

A kolozsvári *Értesítő* és a *Műegyetemi Lapok* azonban versenyre kényszerítette az Akadémiát, s a ’70-es évek végétől állandóan visszatérő gondként szerepel egy „ütőképes" matematikai és természettudományos folyóirat megteremtése, amely gyorsan, pontosan és a lehető legszélesebb spektrumban ismertetné a hazai kutatásokat, mégpedig mindjárt német nyelven is, hogy a külföldi publikációs-kapcsolat kérdése megoldódjék. Az első célt szolgálta több mint hatvan éven keresztül – egész a német megszállásig – megszakítás nélkül a *Mathematikai és Természettudományi Értesítő*, a másodikat a *Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn*,[49] mely a századvégre s századfordulóra eső fénykor után lassan hanyatlott, s a 30-as években megszűnt.

A *Berichte* átlag mintegy kétharmad-háromnegyed részben a *Mathematikai és Természettudományi Értesítő*ben már megjelent cikkeket vette át, s csak a fennmaradó kis részben válogatott az ország rohamosan szaporodó szakfolyóirataiból, elsősorban azokból, melyeket az Akadémia segélyezett: a *Természetrajzi Füzetek*ből, a *Mathematikai és Physikai Lapok*ból és a *Természettudományi Közlöny Pótfüzetei*ből. S mivel a *Mathematikai és Természettudományi Értesítő* az Akadémián elhangzott, illetve bemutatott dolgozatokat közölte, lényegében a *Berichte* is a III. Osztály munkálkodásáról számolt be. S hogy a századvégén és a századfordulón mégis nagyjából hűen tükrözte az egész magyar természettudományt, az elsősorban a honi kutatás erős egyetem-centrikusságából, német típusú „iskolásságából" következett,[50] mely mintegy a maga szolgálatába állította az

[49] A Berichte első kötete 1884 februárjában jelent meg, s a kiadóbizottság – Fröhlich, Eötvös, Kőnig, Than, Szabó – szerint a külföldi szakkörök elég kedvezően fogadták. Csakhogy ez „korántsem a vállalat nagy kelendőségének eredménye – jelentik –, hanem első sorban annak a kifolyása, hogy a külföldi intézetek és tagok az Akadémia részéről, illetve a kir. Természettud. Társulat részéről ingyenpéldányokkal láttatnak el." RAL 969:1884.
Az Osztály magyar nyelvű kiadványainak nagy részét is ingyen küldték szét; a Közlemények 500 példányából – amennyiben az összes periodikus kiadványok nyomattattak – a ’70-es évek végén ingyen szolgáltatik ki: a bizottsági tagoknak 15, a hazai (85) és külföldi (55) intézeteknek 140, a szerzőnek 25, a hírlapoknak 15, a főtitkári hivatalnak 15. Maradt elárusításra 290. Utóbbiakból „bizonyos népszerűbb munkák, vagy olyanok, a melyek iskolai használatra alkalmasak, elkelnek; ellenben a szorosan vett speciál munkák nem kelendők". RAL 1093:1880.

[50] A modern szociológiai inspirációjú tudománytörténet-írás újból erősen eltúlozza a múlt századi német

Akadémiát. Az első nagy iskolateremtő-generáció minden jelentősebb képviselője ugyanis akadémikus volt, s ez egyáltalában nem csak annyit jelentett, hogy tudományos érdemei elismeréséül „járt” neki az akadémikusság. Az üléseken történő bemutatás, majd az ezt követő publikálás által a III. Osztály egyben az iskolateremtés és iskolabővítés leghatékonyabb eszközévé vált. Tekintélyes – és viszonylag kicsiny iskola fölött uralkodó – akadémikusok időnként panaszkodtak is, hogy a III. Osztály ülései lassanként „iskolásgyerekek” bemutatkozójává változnak; jobb lenne ezeknek – vélte Szily Kálmán – elébb egyszerűbb helyeken, például a Természettudományi Társulat szakosztályainak ülésein fellépni.

Csakhogy a társulatok – talán a Földrajzi Társulat meg a Mathematikai és Physikai Társulat fénykorát kivéve – nem versenyezhettek sem hírnév, sem publikációs lehetőség tekintetében a III. Osztállyal, s így azután a bemutatási mechanizmus következtében a *Mathematikai és Természettudományi Értesítő* hasábjain az első világháborúig a honi tudomány csaknem minden nagy nevével találkozunk néhány ifjúkori zsenge vagy remekmű formájában, a Than-tanítvány Lengyel Bélától és a Margó-tanítvány Entz Gézától Nobel-díjasainkig.

Az akadémiai kutatás főbb irányai a dualizmus korában

Az új generáció két kiemelkedő, mindenki mást elhomályosító géniusza Eötvös Loránd és Kőnig Gyula volt. Véletlen körülmények következtében (amik között nyilván a közönség örök matematika-utálata s Eötvös daliás termete is szerepelt) a köztudatban Eötvös neve sokkal elevenebben él, mint Kőnigé; a valóságban azonban teljesen egyenrangú a hatásuk a honi tudomány fejlődésére, ha lehet a Kőnigé egy fokkal tán még nagyobb. S ami fő, az egyik a másik nélkül teljességgel elképzelhetetlen.

„iskolák” tudományfejlesztő jelentőségét. (Ben-David, J.: The scientist’s role in society. Englewood Cliffs 1971. pp. 108–138.) Mert ha igaz is, amint Ben-David állítja, hogy a század közepétől kezdve a német egyetemeken „research started to become a regular career, and scientists in a number of fields started to develop into much more closely knit networks than ever before”, voltak ennek a folyamatnak káros következményei is. Az „oktatás” gyakran teljesen másodrendűvé vált a „buvárlat” mellett, a professzor az előadásokat leginkább saját dicsőségére és szórakozására tartotta; saját kutatásairól számolt be, mintegy hálót vetett ki szavakból, képletekből és kísérletekből, mellyel befoghatta a fogékony elméket a saját munkájába, „iskolát” formálhatott belőlük. Az iskola azután osztódással szaporodott, újabb professzorok kerültek ki belőle, akik a szellemi öröklődés törvényei szerint „mendelezve” létrehozták az anyaiskola eredeti tulajdonságainak összes lehetséges kombinációit, s különbözhettek ezek mégannyira az „első nemzedéktől”, a gyakorlott szem azonnal fölismerte bennük az eredetükre utaló jellegzetességeket. Az utódiskolák persze össze is veszhettek a szüleikkel, az öröklődés törvényein azonban ez mit sem változtatott, mert az iskolaképződés többnyire eleve kizárta az erőteljes „kereszteződést”, vagy pláne a „mutációt”, így aztán szerencsés esetben egy-egy irány gyors kiteljesedése következett be, máskor azonban – s nagyon valószínű, hogy minden legenda ellenére ez történt a híres német iskolák többségében – csak a beltenyészet sivár unalma öröklődött nemzedékről-nemzedékre.

Mindketten Heidelberg és Berlin neveltjei s lelkes csodálói voltak életük végeztéig, s mindketten olyan széles tudományos és társadalmi mezőben működtek, amilyenről egy heidelbergi vagy berlini professzor se mindig álmodhatott. Bunsen, Kirchhoff, Helmholtz, Weierstrass, Kronecker bámulatára nevelték a magyar diákokat akkor is, mikor – maguk sem vették tán észre – egyik-másik munkájuk vagy szemléletük némely vonása tán túlhaladta már az imádott mestereket. A tökéletes experimentális és matematikai szigorúság volt az ideáljuk, a pongyolaságot még akkor se tűrték, ha netán zsenialitást rejtett. Az ő ötletgazdagságuk és kivételes munkabírásuk persze állta a legnagyobb szigort is, de követőik elől gyakran elzárhatta a friss utak vad szépségeit, vagy esetleg arra csábította őket, hogy ötletek híján üresjáratú szigorúságokat alkossanak. Amit kivált az öregedő és rettentően elfoglalt Eötvös már nem mindig tudott megkülönböztetni a releváns szigorúságtól. (...)

Ebből a szempontból Kőnig volt a szerencsésebb: az ő tanítványai – vagy inkább tanítványainak tanítványai – nemcsak lépést tartottak a matematika legmodernebb irányaival, hanem sok területen egyenesen úttörő szerep jutott nekik.

Kőnig is Heidelbergben vált az egyetemi típusú kutatás lelkes hívévé, s ő is ugyanolyan eréllyel képviselte egész életében, mint Eötvös. Ő is Helmholtzot választotta eszményképül; az ő tudományos világképét is a helmholtzi „energetikai kauzalisztika” determinálta. Heidelbergen kívül ő is járt másutt is; mikor oda került, már hallgatott Bécsben s Berlinben, s aztán még egy szemesztert töltött a berlini egyetemen. Berlinben Weierstrasst és Kroneckert hallgatta, de Heidelbergben doktorált Leo Königsbergernél. Mindhárman a XIX. századi klasszikus matematika legklasszikusabb képviselőihez tartoztak. Weierstrass az analízis kérlelhetetlen szigorúságú aritmetikai megalapozását ültette el – tanítványain s tanítványai tanítványain keresztül – matematikusok egymást követő nemzedékeinek elméjében, s legjobbjaikkal megérttette, hogy ezen az alapon milyen nehéz eljárásokká bonyolíthatók viszonylag egyszerűnek vélt matematikai fogalmak, mint például a függvények folytonossága és differenciálhatósága, vagy akár maga a függvény fogalma is. A weierstrassi szigor újra exkluzív, egész embert – s életet – követelő foglalkozássá „Euklidesizálta” a matematikát, ahová nem vezet „királyi út”, s amihez nem elég egy kis tanulás meg a jó vitézi rezolúció, mint még Vállas Antal, Győry Sándor, Vész János Ármin és Petzval Ottó idejében.

A másik nagy berlini, Leopold Kronecker az algebrának s a számelméletnek szolgált azzal, amivel Weierstrass az analízisnek: szigorúan „aritmetizálta” őket. Rájuk is fért, mert mindkettő – de kivált az algebra – kezdett a század közepén erősen elkócosodni; különféle intuitív megfontolásokat, analógiákat, geometriai érveléseket, sőt ábrákat alkalmazni. Kronecker azután alaposan exorcizálta őket. Száműzött mindent, ami nem volt egyértelműen összefüggésbe hozható az egész számokkal, illetve (valamilyen alkalmasan választott axiómarendszer közvetítésével) a közönséges egész számok mintájára teremtett algebrai „egészekkel”. Az algebra az egyenletpolinomok viselkedésének vizsgálatára redukálódott az algebrai egészek és algebrai mennyiségek tartományában.

Leo Königsberger nem volt a két óriáshoz hasonlítható matematikai géniusz, de hatalmas matematikai műveltsége volt, és kitűnően ismerte a kortárs-kutatás fontosabb fejődési vonalait, s mint egy roppant tekintélyes matematikai folyóirat szerkesztője, nem kevésbé hatott az irányukra. Königsbergert a bécsi matematikai iskolához hasonlóan – amely a század utolsó negyedében a kor legkiválóbb matematikai műhelyeihez tartozott – erősen foglalkoztatták a differenciálegyenlet-rendszerek és a variációszámítás összefüggései, s Heidelbergben az irány egyik centrumát teremtette meg.

Kőnig nemcsak rangosan képviselte hazánkban mindhárom klasszikus irányt, hanem fundamentális felfedezésekkel is gazdagította. Kivált az algebra és számelmélet körébe vágó alkotásai fontosak, melyeket össze is foglalt *Az algebrai mennyiségek általános elméletének alapvonalai* című, 1903-ban megjelent művében. A könyvet a III. Osztály már a következő évben akadémiai nagydíjra terjesztette föl, s a bíráló bizottság (Fröhlich Izidor elnöklete alatt Lipthay Sándor, Kövesligethy Radó, Kürschák József és Rados Ignác) jelentéséből jól megérthető ma is a mű jelentősége, és megismerhető jellege: „Mindjárt az első fejezetben a *holoid és orhoid tartományok* finom fogalomalkotásaival találkozunk. Kőnig a számelmélet, algebra, függvénytan és geometria számos tárgyalásában ismétlődő gondolatmenetnek mintegy logikai tartalmát abstrahálván, a holoid és orthoid tartományokkal oly fogalomkört teremtett, mely egyrészt számot vet avval a követeléssel, hogy a tartományban az ismétléseket lehetőleg kerüljük, másrészt pedig az algebra és a geometria közötti ellentét megszüntetésével e két tudományágat magasabb egységbe foglalja és ily módon egységes fejlesztésükre új messzeterjedő kilátást nyújt.”[51]

[51] „Nem kevésbé értékes – folytatja a jelentés – és alkalmazásai tekintetében messzeható segédeszköznek bizonyult a resultans fogalmának azon szerencsés általánosítása, melyet Kőnig fedezett fel és resolvens formának nevezett. E fogalomalkotás nemcsak az eliminatio-elméletnek, hanem egyszersmind az algebrai mennyiségek arithmetikai elméletének felépítésére is új, az eddiginél tetemesen messzebb vezető utat mutatott. Az eliminatio-elméletben Kőnignek sikerült még ama kivételes eseteket is elintéznie, melyek Kronecker híres Festschrift-je után is mint nyílt kérdések fennmaradtak. Továbbá a resolvensforma felhasználásával a szerző a függvényrendszer függvénydeterminánsával kapcsolatos kérdéseket tisztán algebrai úton tárgyalhatta. Hasonlóképpen a resolvens forma segítségével történik annak a legáltalánosabb lineár diophantikus egyenletrendszernek megoldása, melyben mind az együtthatók, mind pedig az ismeretlenek n határozatlannak formái. A diophantikus egyenletrendszerek elméletének alkalmazásai: az osztórendszerek aequivalentia-kérdéseinek végleges elintézése, és az egész algebrai mennyiségek elméletének eddig még csak meg sem közelített általánosságú kifejtése.” Lásd: Jelentés az 1904. évi nagydíjról és a Marczibányi mellékjutalomról. RAL 296:1904 és Akadémiai Értesítő 15 (1904) pp. 312–314.

Szénássy Barna Kőnig-monográfiájában néhány fogalom meggyőző megfeleltetésével megmutatta, hogy Kőnig fogalomalkotása lényegében a mai absztrakt algebra struktúráinak felel meg.[52] A mai matematikus és a matematikatörténész helyesen és szükségképpen a mai struktúráinkat ismeri föl Kőnig úttörő művében. A kortársak – s köztük maga Kőnig – azonban nem így látták: nekik épp az új diszciplína körvonalazása hiányzott még, az a Steinitz-i tett, mely – 1910-ben – a sok különféle matematikai képződményt egy absztrakt struktúra típusaiként interpretálta, s a matematikát a különféle mennyiségek elméletéből a struktúrák tudományává változtatta. Ebben a művében Kőnig sem lépte át a forradalmi határt, itt ő is – akár a fizikában Eötvös – megmaradt a klasszikus matematika nagy képviselőjének.

Kőnig azonban ekkor már elindult az új, forradalmi fejlődés útján,[53] mely széttörni készült a klasszikus matematika paradigmáit; a századelő Akadémiáján viszont a mindig is meglévő „klasszikus" szellem mindinkább kezdett „konzervatívvá" merevedni.

Az Akadémia szerepe a századelő természettudományos kutatásaiban

A XX. század elején jelentkező nemzedék[54] már képzettsége tekintetében is különbözött az előzőektől. A különféle középiskolákban többnyire jó, néhol – mint például a Fasori Evangélikus Főgimnáziumban – kiváló matematikai-természettudományos alaptudásra tehetett szert, aki akart. Matematika és fizika esetében külön is segítette a tanulást a *Középiskolai Mathematikai és Physikai Lapok*, mely kiváló cikkeivel – amiket gyakran írtak a szakma leghíresebb honi képviselői – és főleg ragyogóan válogatott példáival idejekorán

[52] „Tárgyát tekintve a munka – írja – főleg absztrakt algebra és algebrai számelmélet. Absztrakt algebra még e szónak mai értelmében is: a rendkívül széles látókörű, az elvont fogalomalkotások iránt vonzódó matematikus világviszonylatban is úttörőnek tekinthető alkotása, éspedig abban a korban, midőn e diszciplínának a módszere még nem forrott ki, a tárgyköre még nem határolódott el." Lásd: Szénássy Barna: Kőnig Gyula 1849–1913. Bp., 1965. Akadémiai. p. 109. (A múlt magyar tudósai)

[53] A heidelbergi nemzetközi matematikus kongresszuson elkövetett szerencsés „tévedése" folytán a halmazelmélet ún. Russell-féle paradoxának mélyértelmű – és a későbbiekben igen nagy hatású – újrafogalmazásához jutott, ami azután a matematika logikai alapjainak vizsgálatára, s egy fontos, már halála után megjelent könyv megírására késztette. Az Akadémia ekkor már késve követte az eszmék iramát, s legnagyobb osztálytitkárának nehéz posztumusz művét jóformán csak fia, Kőnig Dénes értékelte igazán. Az Akadémia Kőnigben elsősorban az „alapítót" látta s becsülte, ami persze szintén igaz volt. Ahogyan Eötvös megfogalmazta: „Világra szóló tudományos munkásságával, tanítói buzgóságával és termékenyítő erejével valóban ő rakta le az alapot, melyen hazánkban a matematikának erős vára épülhetett." Lásd: Mathematikai és Physikai Lapok 22 (1913) pp. 427–428. Kőnig Dénes: Kőnig Gyula utolsó művéről. = Mathematikai és Physikai Lapok 23 (1914) pp. 291–302.

[54] Horváth Zoltán „második reformnemzedéke" (Horváth, Z.: Die Jahrhundertwende in Ungarn. Geschichte der zweiten Reformgeneration 1896–1914. Bp. 1966) egyebek között abban is különbözött az „elsőtől", hogy természettudományosan többé-kevésbé képzett volt. „Es war ja die Zeit, in der der ungarische Hochschulunterricht, vor allem in der Medizin, europäisches Niveau erreichte. Versäumnisse von Jahrzehnten wurden aufgeholt, und Wissenschaftler wie Loránd Eötvös, István Apáthy, Mihály Lenhossék und Otto Herman errangen internationales Ansehen." (Lásd: p. 131.)

megszerettette a diákokkal a rendszeres szellemi munkát, és megismertette velük a matematikai-fizikai felfedezés örömét. S külön szervezett intézmény, az érettségizettek számára minden évben megrendezett tanulmányi verseny – Kürschák József nagy alkotása[55] – gondoskodott róla, hogy a kutatómunka szépségébe belekóstolt diákok közül kiválassza a legrátermettebbeket. Ezek azután nyugodtan mehettek a legjobb külföldi egyetemekre, a zürichi Technikai Főiskolára, Göttingenbe, Párizsba, megállták a helyüket ott is.

S itthon is gondoskodott róla egy maga nemében egyedülálló, nagyszerű intézmény, az Eötvös Kollégium, hogy akinek nincs pénze drága külhoni tanulásra – sőt még a mi egyetemeinkre se – az se vesszen el a tudomány számára.[56] (...)

Mit tehetett a kutatás növekvő költségeihez képest egyre szegényebbé váló Akadémia? Megpróbálta legalább „bemutatni" az ígéretes fiatal tudósok munkáit; azokét is, akiknek még csak a bemutató professzor ismerte a nevét, s azokét is, akik már a nagy nemzetközi folyóiratokban is publikáltak vagy éppen nevet szereztek maguknak.

Így például Fejér Lipót[57] Comptes Rendus-ben megjelent fontos tétele s híres doktori disszertációja után a *Mathematikai és Természettudományi Értesítő* egyre-másra közli az ifjú – s csakhamar az Akadémiába is beválasztott – mester összefoglaló cikkeit s újabb fölfedezéseit, továbbá tanítványai s követői – Fekete Mihály, Pólya György, Riesz Marcell, Szász Ottó – közleményeit is, melyek többnyire a zseniális új módszer különféle sorelméleti alkalmazásairól, illetve az általa megfogalmazhatóvá vált érdekes, új valósfüggvénytani problémákról szóltak. Fejér tétele ugyanis[58] nemcsak egy már évtizedek óta lezártnak hitt területet nyitott újra meg a kutatás számára, s tett messzemenő valós- és komplex

---

55 A Versenyek győztesei közt Fejér Lipóttól Szele Tiborig egy sor világhíres honi s külföldön élő magyar matematikust találunk; a pedagógiai műremek kvalitása jól megítélhető a versenypéldák összegyűjtött és általa kommentált kiadásából (Matematikai versenytételek. Szeged, 1929), melyet angolra lefordítva, Szegő Gábor előszavával kiadtak napjainkban egy előkelő sorozatban, mely a matematikaoktatás legsikerültebb műveit tartalmazza (Hungarian Problem Book. Based on the Eötvös competitions. New York, 1963).

56 Sokszor hangoztatták, hogy az Eötvös Kollégium mintájául a híres École normale supérieure és az angol college-rendszer szolgált. Legalább ilyen fontos azonban az is, hogy egy német egyetem centrikus légkör közepette Eötvös határozottan elfordult az akkor már érezhetően degenerálódó német mintától. S ami tán még fontosabb: a honi tudományfejlődés legfőbb trendjeibe illeszkedett. Két nagy nemzedék – egy „reform" és egy „konzervatív" – művelődéspolitikai tapasztalatait hasznosította a kollégium; két Eötvös, a névadó s a létesítő, eszméit fordította le a megvalósítás nyelvére. Az első reformnemzedék fennkölt liberalizmusa és széles körű európai tájékozódása, s a nagy gazdasági-technikai föllendülés nemzedékének kritikai realizmusa elegyült a Ménesi úti házban, s vált kitűnő tanárok és a nagyszerű könyvtár segítségével páratlan szellemi klímává.

57 Turán Pál: Fejér Lipót. = Matematikai Lapok 11 (1960) pp. 8–18.

58 Mely az $\underline{x}$ valós változó igen általános, véges számú helyen akár végtelenné is váló, Riemann-szerint integrálható $\underline{f(x)}$ függvényeinek trigonometriai függvények szerint végtelen sorba fejtett alakjáról, ún. „Fourier-soráról" mutatta meg, hogy ez a sor egyszerű eljárással még akkor is összegezhetővé alakítható, ha különben széttartó, és az így nyert összeg minden „rendesen" viselkedő $\underline{x}$ helyen magát a függvényt adja meg határérték gyanánt. Lásd: Fejér Lipót: A Fourier-féle sorról. = Mathematikai és Természettudományi Értesítő 24 (1906) pp. 292–297, 369–390.

függvénytani általánosításokat lehetővé,[59] nemcsak az approximáció elméletében és a függvények különlegesen viselkedő helyeinek vizsgálatában kezdett egészen új fejezetet,[60] hanem az egyszerű trigonometrikus függvények szerinti sorbafejtés „absolut summabilitásának" példájával fölkeltette az érdeklődést – mindezeken túl – ama egészen általános függvényrendszerek iránt is, melyek függvényei szerint minden Lebesgue-féle értelemben integrálható függvény sorbafejthető. S ez az a matematikai légkör, melyben Haar Alfréd ortogonális függvényrendszerekre vonatkozó vizsgálatai születtek,[61] s Riesz Frigyes, a híres Riesz–Fischer tétel segítségével fölépítette[62] valós függvényekre értelmezett lineáris operációkból a függvényterek általános elméletét, melynek azután centrális szerep jutott a kvantummechanika Neumann János-féle axiomatikus megalapozásában.[63]

A század eleji honi matematika másik nagy iránya Kőnig Gyula halmazelméleti vizsgálatai köré csoportosult, illetőleg ezt a forradalmi fejlődést az ő intenzív halmazelméleti kutatása határozta meg.

---

59 Riesz Marczell: A hatványsor összegezhetősége az összetartási körön. = Mathematikai és Természettudományi Értesítő 26 (1908) pp. 221–229.; uő.: Megadott Dirichlet-sor folytatásának analitikai előállítása. = Mathematikai és Természettudományi Értesítő 29 (1911) pp. 283–301.; Fekete Mihály: Vizsgálatok a Fourier-sorokról. = Mathematikai és Természettudományi Értesítő 34 (1916) pp. 759–786.; uő.: Vizsgálatok az absolut summabilis sorokról, alkalmazással a Dirichlet- és Fourier-sorokra. = Mathematikai és Természettudományi Értesítő 32 (1914) pp. 389–425. – Ebben a fontos cikkben általánosítja Fekete a Fejér-szerint absolut summabilis sorok fogalmát, melyek több szempontból az absolut convergens sorok általánosításainak tekinthetők, Dirichlet-sorokra számtani középértékek helyett Hölder-féle közepekkel. – Fekete Mihály: A széttartó végtelen sorok elméletéhez. = Mathematikai és Természettudományi Értesítő 29 (1911) pp. 719–726.

60 Fejér Lipót:: Bizonyos, a Fourier- és Laplace-féle sorokkal értelmezett középgörbékről és középfelületekről. = Mathematikai és Természettudományi Értesítő 32 (1914) pp. 462–486., uő.: A függvény szakadásának meghatározása Fourier-féle sorából. = Mathematikai és Természettudományi Értesítő 31 (1913) pp. 385–415.; uő.: A folytonos függvények Fourier-féle sorának singularitásairól. = Mathematikai és Természettudományi Értesítő 28 (1910) pp. 550–592.; uő.: Lebesgue-féle állandók és divergens Fourier-sorok. = Mathematikai és Természettudományi Értesítő 28 (1910) pp. 143–179.

61 Haar Alfréd: Egy orthogonális függvényrendszerről. = Mathematikai és Természettudományi Értesítő 32 (1914) pp. 60–68.

62 Riesz Frigyes: A lineár homogén integrálegyenletről. = Mathematikai és Természettudományi Értesítő 27 (1909) pp. 220–240., uő.: Lineáris függvényegyenletekről. = Mathematikai és Természettudományi Értesítő 35 (1917) pp. 544–579.; uő.: A lineáris operációk általános elméletének néhány alapvető fogalomalkotásáról. = Mathematikai és Természettudományi Értesítő 56 (1937) pp. 1–46.

63 Neumann János: A kvantummechanika matematikai megalapozása. = Magyar Fizikai Folyóirat 15 (1967) No. 3. pp. 271–318., kötetben: In: Kvantummechanika. Cikkgyűjtemény. Vál. és ford.: Györgyi Géza. Szerk.: Jánossy Lajos. Bp., 1971. Akadémiai. pp. 251–298.; Neumann János: A kvantummechanika valószínűségelméleti felépítése. = Magyar Fizikai Folyóirat 15 (1967) No. 5. pp. 481–502., kötetben: In: Kvantummechanika, pp. 299–310. – Az ortonormált függvényrendszerek fogalmának honi elterjedtségére utal, hogy Ortvay Rudolf már a '30-as évek elején egy kifejezetten népszerű előadásban hivatkozhatott rájuk, s hangsúlyozhatta fontosságukat a kvantummechanika fölépítésében. Lásd: Ortvay Rudolf: Bevezetés a kvantummechanikába. Előadás a középiskolai tanárok továbbképző tanfolyamán 1930 nyarán. In: Tass Antal – Wodetzky József (szerk.): Stella csillagászati egyesület almanachja 1931-re. Bp. 1931. Stella Csillagászati Egyesület. pp. 225–291.

Az 1904. évi heidelbergi nemzetközi matematikus kongresszuson Kőnig egy nagy érdeklődéssel várt előadásban bizonyítani vélte, hogy Cantor híres „continuum sejtése” megcáfolható. Bizonyításába azonban „hiba” csúszott be,[64] amit csak a nagy Hilbert vett észre. A „kudarcért” Kőnig „nemes bosszút” állt: igazában tán még fontosabb dolgot fedezett fel, mintha tényleg sikerült volna megcáfolnia a Cantor-féle kontinuum hipotézist. Megmutatta, hogy ha a continuum – a valós számok halmaza – jól rendezhető (minden részhalmazában megadható egy első, második stb. elem), akkor nemcsak a continuum hipotézis (a continuum számossága közvetlenül a természetes számok halmazának számossága után következő számosság) vezet szükségképpen ellentmondásra, hanem a continuum számossága maga is ellentmondásos fogalom, a continuum paradox-halmaz.[65]

Kőnig continuum-paradoxonával lényegesen mélyebbre ásott a halmazelmélet logikai alapjaiban a híres Burali–Forti- és Russell-féle antinómiáknál, s mélyebbre még Jules Richard francia matematikus rokon természetű antinómiájánál is. Kőnig ugyanis megmutatta, hogy a paradoxon bizonyos értelemben elkerülhetetlen: a continuum elemeinek definiálására szolgáló eljárások sohasem vezethetnek a *teljes* continuum fogalmára, ha a continuumot jól rendezett, s a transfinit számok, az „alefek” sorozatában valahol elhelyezhető halmazként definiáljuk.[66]

[64] Kitűnően ismerteti a vonatkozó irodalommal együtt Szénássy Barna: Kőnig Gyula, pp. 117–123.

[65] Ahhoz ugyanis, hogy a kontinuum egy elemét – egy valós számot – definiáljunk, meg kell adni egy eljárást, amely legfeljebb a természetes egész számok megszámlálhatóan végtelen sorozatára hivatkozik. Egy ilyen elemet „végesen értelmezett”-nek nevezünk. Könnyű belátni, hogy a végesen értelmezett elemek halmaza megszámlálhatóan végtelen halmazt alkot, mely így szükségképpen részhalmaza a (nem-megszámlálható) kontinuumnak. Mármost abból a halmazból, ami a kontinuumból e megszámlálhatóan véges részhalmazának eltávolítása után marad – azaz egy végesen értelmezhetetlen halmazból – válasszuk ki az első elemet. Ezt mindig megtehetjük, hisz a kontinuum jól rendezett. Ámde ezáltal ezt az elemet definiáltuk, végesen értelmeztük, holott ez az elem végesen értelmezhetetlen, hisz abba a halmazba tartozik, mely a kontinuumból a végesen értelmezhető elemek eltávolítása után maradt. Lásd: Kőnig Gyula: A halmazelmélet alapjai és a continuum problémája. = Mathematikai és Természettudományi Értesítő 23 (1905) pp. 410–415. – A Kőnig által meghonosított élénk halmazelméleti orientáció a század elején olyan csúcsokhoz vezetett, mint a sűrűsödési pont Riesz Frigyes általi bevezetése (1908), amivel Riesz a halmazelméleti topológia egyik megteremtője (Manheim, J. H.: The genesis of point set topology. Oxford, 1964. pp. 119–120.), de hatott Riesz fogalomalkotása – Kőnig fundamentális gondolatai mellett – Kürschák nagy eredményére, a struktúrabővítés – ma tán úgy mondhatnánk, hogy „topologikus” – elméletének kidolgozására is. Lásd: Kürschák József: Az abszolút érték fogalmának általánosítása. = Mathematikai és Természettudományi Értesítő 30 (1912) pp. 699–745. Kürschák módszere az egyik kiindulópontja az absztrakt testek aritmetikai elméletének, amit Alexander Ostrowski dolgozott ki. Lásd: Stachó Lajos: Kürschák József. In: Szőke Béla (szerk.): Műszaki nagyjaink. 3. köt. Fizikus és matematikus alkotó oktatók, főként a mérnökképzés tanárai sorából. Bp. 1967. Gépipari Tudományos Egyesület. pp. 241–282.

[66] Definiálhatjuk például a kontinuum $(a_1, a_2, \ldots) = a^{(d)}$ elemeit – egy-egy valós számot – a Cantor-féle diagonális eljárással; ennek azonban épp az a feltétele, hogy a definiált elem ne forduljon elő a természetes egész számokkal fölírt sorozatok egyikében sem. „Úgy látszik tehát, hogy $a^{(d)}$ definíciója, melyet véges számú jellel jellemezhetünk, önmagának ellentmond, és így – mint definíció – lehetetlen. Másrészt azonban ép annyira lehetetlen helytelennek tartani azt a közvetlen szemléletünkből merített »tényt«, hogy ezen diagonális módszerrel egy continuumelem tényleg képezhető. De éppen ez a rendkívül érdekes paradoxon vezet a halmazelméletben használandó logikai módszerek alapvető mélyítéséhez. A diagonális eljárás értelme világos és megtámadhatatlan; ellentmondás csak azon követelés által keletkezik, hogy ezt az értelmet véges definíció alakjában kelljen kifejezni. Ez a követelés nem teljesíthető.” Lásd: Kőnig Gyula: A halmazelmélet alapjai és a continuum problémája. Második közlés. = Mathematikai és Természettudományi Értesítő 24 (1906) pp. 343–348.

„A halmazelmélet alapjaiban oly tények formalizálásáról és törvényesítéséről van szó, melyeket öntudatunk belső szemlélete nyújt; úgy, hogy »tudományos gondolkozásunk« maga is tárgya tudományos gondolkozásunknak. Ez az összefüggés, mely a halmazelmélet közt egyrészt, és a logika meg ismeretelmélet közt másrészt fennáll, el nem kerülhető, és már az arithmetika elemeiben fellép”.[67]

Kőnig azután a paradoxon éles világításában egy halála után megjelent – kellően tán máig sem értékelt – műben vizsgálta meg a logikai érvelés matematikai fogalomalkotáshoz nélkülözhetetlen, formalizálható tulajdonságait. Ez a mű[68] az egyik legfontosabb eszmetörténeti láncszemként – Gottlob Frege *Begriffsschrift*je és Ludwig Wittgenstein *Tractatus*a között – voltaképpen már a Bécsi Kör[69] „nyelvi fordulat”-át készítette elő. A logikai pozitivizmus alapjaiba Kőnig gondolatai éppúgy beépültek, mint bécsi s prágai kollégáié.[70]

A század eleji – kivételesen gazdag – honi matematikai élet harmadik iránya, melyhez valami köze volt az Akadémiának – s itt csak ezekről szólhatunk – Geőcze Zoárd munkásságából bontakozott ki, illetőleg általa képviseltetett. Geőcze Zoárd Krúdy-regénybe illő alakját és matematikai jelentőségét Szénássy Barna dolgozatai[71] tárták föl, s azt is ő mutatta meg, hogyan nőtt ki a felszínmérés modern elmélete – elsősorban Radó Tibor kezében – Geőcze fundamentális, de nehézkes – és olykor alig követhető – módszereiből. Utóbbiak bonyolultságára jellemző, hogy a nagy Lebesgue – aki iránt Geőcze mérhetetlen hódolattal viseltetett – az új fogalmak és jelölések sokasága miatt végig sem olvasta a néki elküldött dolgozatát. Elég kár pedig, mert Geőcze a bonyolult jelölésekbe új és gazdag kifejtésre alkalmas fogalmak tömegét bújtatta; zseniális fogalomalkotó volt, aki évekkel létrejötte előtt megálmodta a differenciálható sokaságok modern elméletét.[72]

---

67 Uo.

68 Kőnig, J.: Neue Grundlagen der Logik, Arithmetik und Mengenlehre. Leipzig, 1914.

69 Vö.: Altrichter Ferenc „Bevezetés”-ét. In: A Bécsi Kör filozófiája. Bp. 1972., Gondolat.

70 Mangione, C.: La logica nel ventesimo secolo. In: Geymonat, L.: (szerk.): Storia del pensiero filosofico e scientifico. Vol. 6. Milano, 1972. pp. 469–682.

71 Szénássy Barna: Emlékbeszéd Geőcze Zoárd rendes tag felett. Bp., 1941. Szent István Akadémia. 30 p. (A Szent István Akadémia Emlékbeszédei. Vol. 3. No. 4.); uő.: Geőcze Zoárd. = Matematikai Lapok 10 (1959) pp. 26–38.; uő.: A magyarországi matematika története. Bp. 1970. Akadémiai. pp. 286–293.

72 Geőcze Zoárd: Adatok a z = f(x,y) fölület quadratúrájához. = Mathematikai és Természettudományi Értesítő 26 (1908) pp. 475–512.; uő.: A felszínmérés elméletéhez. = Mathematikai és Természettudományi Értesítő 31 (1913) pp. 306–318.; uő.: A zérus területű felületről. = Mathematikai és Természettudományi Értesítő 33 (1915) pp. 730–748.; uő.: A rectificabilis felületekről. = Mathematikai és Természettudományi Értesítő 34 (1916) pp. 337–354.; uő.: A felület területének Peano-féle mértékéről. = Mathematikai és Természettudományi Értesítő 35 (1917) pp. 325–360.

A honi matematika mérhetetlen vesztesége, hogy a Tomory-alapítványból kiírt nyílt pályázatra beküldött, s a bíráló bizottság (Rados, Fejér, Kürschák) javaslata alapján a megbízást elnyert művét „A halmazelmélet geometriai alkalmazásai”-ról[73] sohasem írhatta meg: 1916. november 26-án belehalt harctéren szerzett súlyos bajába.[74]

[73] Jelentés a Tomory-pályázatról. Akadémiai Levéltár, a III. Osztály iratai, 1914. március 25.

[74] „Családját – jelenti az osztályelnök – szerény anyagi viszonyok közt hagyta hátra. Geőcze az Osztály határozatából a 2000 K jutalom felét az Osztály költségvetése terhére már 1914. évi május hó 23-án előlegképpen felvette, a mikor ugyanez év október havában mint népfölkelő hadnagy bevonult, neje levélben késznek nyilatkozott az előleg visszatérítésére, ha férje elhalálozna. Ekkor az Osztály kijelentette, hogy a nem várt eshetőségre az Akadémia a legnagyobb méltányossággal lesz a hátramaradottak iránt, s ez álláspontját a levélíróval is közölte. Most e nem óhajtott szomorú körülmény bekövetkezett; osztálytitkár kéri, hogy értesíthesse s megnyugtathassa a családot az iránt, hogy az Osztály visszatérítési igényt nem támaszt, s visszatérítést el nem fogad.
Rados Gusztáv r. tag annál is inkább hozzájárul e kérelemhez, mert Geőcze az elmúlt két évben az Osztály Értesítőjében pályamunkájához tartozó több rendbeli értekezést közölt, melyekért mint tagnak, írói tiszteletdíj nem járt.” Akadémiai Levéltár, a III. Osztály jegyzőkönyvei. 1916. december 11.

Más könyvek körül

Neumann János, a számológép és az agy[1]

A Gondolat által kiadott kis könyv, *A számológép és az agy* (1964) Neumann János (1903–1957) utolsó, már halála után megjelent műve. Az írás annyira szervesen illeszkedik Neumann János sokoldalú és hihetetlenül gazdag munkásságába, hogy legjobb az ismertetést az utószóval kezdeni. Az utószó a *Bulletin of the American Mathematical Society* Neumann Jánost gyászoló különszáma alapján röviden összefoglalja a szerző életét és matematikai eredményeit. Idézzük a külön szám bevezetéséből S. Ulam (Neumann János tanítványa és barátja, egyike a ma élő legsokoldalúbb és legérdekesebb matematikusoknak) sorait:

> „John von Neumann – vagy ahogy nálunk (USA) hívták, Johnny – 1903. dec. 28-án született Budapesten… Budapest az első világháború körüli két évtizedben természettudományos tálentumok kivételesen gazdag táptalaja volt. Tudománytörténészekre vár, hogy feltárják és megmagyarázzák azokat a körülményeket, melyek annyi tündöklő tudós (a jelenkor matematikai és fizikai folyóiratai tele vannak nevükkel) felnövését katalizálták. Ebben a ragyogó tudós-konstellációban Johnny volt talán a legeslegfényesebb csillag, ő maga ezt a statisztikailag annyira valószínűtlen helyzetet több, közelebbről nem precizírozott tényező összjátékával magyarázta. Közép-Európa eme részében az egész társadalomra súlyos külső nyomás nehezedett, az emberekben pedig valami rettenetes belső bizonytalanság tudatalatti érzése feszült. Érezték, hogy szokatlanul kiválót kell produkálniuk, különben megsemmisülnek. Az első világháború összezúzta a fennálló gazdasági és társadalmi rendet. Budapest addig az Osztrák–Magyar Birodalom második fővárosa volt, most egy kicsiny ország első városa lett. Sok tudós előtt nyilvánvaló volt, hogy emigrálniuk kell, s más, kevésbé provinciális körülmények között keresni megélhetést.”

[1] Forrás: Vekerdi László: Neumann János, a számológép és az agy. = Kortárs 9 (1965) No. 7. pp. 1139–1142.

Neumann János – akinek tehetségét már fasori gimnazista korában észrevette s külön műveltette tanára, Rátz László – párhuzamosan járt budapesti, német és svájci egyetemekre, 1930-ban hívták meg először előadni a princetoni egyetemre, 1933-ban a híres princetoni *Institute for Advanced Study* professzora lett. Oppenheimer felkérésére 1943 végétől részt vett az atombomba előállításának munkálataiban, Los Alamosban. Az itt megoldásra váró hatalmas számítási problémáik (hosszú évek óta folytatott hidrodinamikai és robbanástani vizsgálatainak csak numerikusan megközelíthető megoldásaihoz hasonlóan) az elektronikus számológépekre irányították figyelmét. „A numerikus számítások elmélete vezette át az automaták elméleti problémáihoz, majd az automaták és a központi idegrendszer logikai struktúrájának a kapcsolatához.”

Neumann János munkásságában kezdettől fogva párosult a legabsztraktabb elméleti érdeklődés és a matematikai alkalmazások elvi lehetőségének a keresése. Már pályája elején egyszerre foglalkoztatja *Az általános halmazelmélet axiomatikus felépítése* (budapesti doktori értekezésének címe), a kvantummechanika matematikai megalapozásának a kérdése, a statisztikus mechanika egyik legfontosabb problémaköre, az ún. ergodelmélet és a társasjátékok matematikája. Utóbbi vizsgálatai vezették később a modern matematika egyik legfontosabb alkalmazásának, a játékelméletnek a kidolgozására. A felsorolt négy terület bármelyikén elért eredménye elég lenne egy-egy világhírhez, de az ő munkásságának ez az egész komplexum csak tört részét képezi. A modem analízis szigorú és extrém módon absztrakt eszközeit alkalmazva (a kvantummechanika máig felülmúlhatatlan formába öntését is ezek segítségével érte el) alapvető eredményeket ért el a mértékelméletben, topológiában, folytonos csoportok elméletében. (A matematika fokozatos szakosodásával mind egy-egy külön nagy ága a matematikáinak, egymástól legalább annyira különbözőek, mint pl. a medicinán belül a bőrgyógyászat és a szemészet.) Ő maga elméleti munkásságából a végtelen sok dimenziós terek lineáris operátorainak és operátor-csoportjainak a területén kapott eredményeit tartotta legtöbbre, ezek a munkái „majdnem olyan kézzelfogható egyszerűségűvé alakították át – írja Ulam – a végtelen sok dimenziós Hilbert teret, mint amilyen a közönséges véges euklideszi tér”.

Neumann ezeket az eredményeit éppen fizikai alkalmazhatóságuk miatt becsülte, s fizikai alkalmazások, nehéz áramlástani, statisztikus mechanikai és atommagfizikai problémák vezették a számológépek elméletéhez is. De az alkalmazásokban megint az elvek érdekelték, a nagy számológép automaták működésének elméleti alapjai, s alig jött létre nagyrészt az ő munkája alapján ezeknek az automatáknak az első kezdetleges elmélete, már alkalmazta a gondolkozás idegrendszeri folyamatának a magyarázatára, abban a reményben, hogy az idegrendszer mélyrehatóbb matematikai vizsgálata „hatással lesz arra is, ahogyan magának a matematikának e vizsgálódásban közrejátszó oldalait értelmezzük. Sőt, talán még a tulajdonképpeni matematikáról és logikáról alkotott képünk is módosulni fog”.

Íme, a tipikus Neumann János-i álláspont: az alkalmazások igénye vezet az elméleti alapok megértéséhez, a részterület áttekintése pedig az elmélet még átfogóbb tartományának a módosítását, tisztázódását eredményezi. A most referált könyv esetében a számológépek leírásaiból indul ki. Világosan, ritka érthetően írja le a számológépek két alaptípusát, az analógiás és digitális számológépeket s működésük alapelvét. „Egy analóg gépben minden számot valamely célszerűen megválasztott fizikai mennyiség ábrázol, melynek előírásszerű egységekben mért értéke egyenlő az illető számmal.” Az ilyen fizikai módon ábrázolt számokkal igen egyszerű az alapműveletek (összeadás, kivonás, szorzás, osztás) elvégzése. Az eredmény megint valamilyen folytonos fizikai mennyiség, pl. áramerősség, vagy egy tárcsa elfordulása stb. által ábrázolt szám. Ezzel szemben a digitális eljárásban minden szám úgy jelenik meg, mint a közönséges írásban vagy nyomtatásban, pl. egy tízes számrendszerű digitális gépben a 0-tól 9-ig terjedő számjegyek valamilyen sorozataként. (Ügyeljünk, ne tévesszük össze a számot a szám ábrázolására szolgáló számjegyekkel!) E számjegyek mindegyikét viszont valamilyen „jelölők” rendszere képviseli. A jelölők – akárcsak az analóg gépekben a számok – valamilyen fizikai berendezéssel valósíthatók meg.

„Ha egy jelölő tízféle alakban jelenhetik meg, akkor önmagában véve is elegendő egy tízes számrendszerben megadott szám képviseletére. De ha csak két különböző alakban képes mutatkozni, akkor olyan módon kell alkalmazni, hogy a tízes számrendszer minden számjegyének az ilyen kétértékű jelölők egy csoportja feleljen meg. Kétértékű jelölő lehet egy olyan áramlökés, mélynek egy előre kijelölt vezetéken való jelenléte vagy hiánya (a jelölő két értéke) szolgál információközlés céljára.” A továbbiakban a kétféle számológép, különösen a digitális, alapos leírása következik, amelytől azonban eltekintünk. Neumann János ugyanis – ez könyvének egyik legfontosabb tanulsága és lényege – nem azért ismerteti roppant gondosan és kivételesen érthetően a számológépek működését, mintha az idegrendszert a *jelenlegi* számoló automaták alapján képzelné modellezhetőnek.

Ellenkezőleg, a részletes ismertetés azt a célt szolgálja, hogy megmagyarázza a két automata berendezés, számológép és idegrendszer alapvető, elvi különbözőségét. Igaz ugyan, hogy az idegimpulzusok is „kétértékű jelölőkként foghatók fel a már korábban tárgyalt értelemben: az impulzus hiánya jelenti az egyik értéket, jelenléte pedig a másik értéket”. Már ebből a tényből várható, hogy természetes automatákban fontos szerepe kell legyen számszerű eljárásoknak, ill. számjegyékkel való számolásnak, akárcsak a digitális számoló automatákban. Továbbá az idegrendszer felépítésből következik, hogy az idegrendszer is, akárcsak a digitális gépek, az „és”, „vagy” és „nem” logikai szabályai szerint működik az idegingerület áttevődési helyein, a szinapszisokban. Tehát alapjában véve a természetes automata is „számol” a klasszikus arisztotelészi logika elvei alapján, de *ahogyan* számol, az a mód teljesen más valami, mint amit digitális vagy analógiás, vagy a két alaptípus keverésével előállított számológéppel modellezni tudunk. Először is ugyanazon feladat megoldására a kétféle automata, természetes és mesterséges roppant különböző számú aritmetikai és logikai lépést alkalmaz, ahogyan mondják, a két automata „aritmetikai” és „logikai mélysége” alapvetően különbözik.

Az agy sokkal kevesebb, viszont sokkal lassabban végbemenő lépésben éri el ugyanazt, mint a számológép. Ebből következik, hogy minél jobb – a maga nemében – a kétféle automata, annál inkább különbözik egymástól. „Így tehát azt várhatjuk, hogy egy hatékonyan megszervezett természetes automata (mint az emberi idegrendszer) minél több logikai (vagy információs) adat egyidejű felvételére és feldolgozására lesz berendezve, míg egy hatékonyan megszervezett nagy mesterséges automata (például egy nagy modern számológép) inkább egymás után látja majd el a teendőit, egyszerre csak egy dologgal, vagy legalábbis nem olyan sok dologgal foglalkozik. Röviden: a nagy és hatékony természetes automaták valószínűleg nagy fokban párhuzamos működésűek, míg a nagy és hatékony mesterséges automaták inkább soros működésre rendezhetők be.” Éppen e miatt az alapvetően soros működés miatt a számológépekben nagyon sok elemi lépést kell egymás után kapcsolni, a számológép „logikai mélysége” szükségképpen igen nagy, egyes esetekben 10^7 vagy még nagyobb. Ennyi lépésen keresztül egy olyan eleve bizonytalanul működő elemekből felépített számológép megbízhatósága, mint az idegrendszer, teljesen megsemmisülne. Az idegrendszer esetében ugyanis nem az elemek kapcsolásának meghatározott vagy legalábbis meghatározott sorrendben változó sorrendje biztosítja a feladat elvégzését – ez túlságosan merev, alkalmazkodásképtelen rendszert eredményezne –, hanem az azonos feladatra beállított elemek nagy száma. Az idegrendszer működése szükségképpen statisztikus, a rendszer megbízhatósága valószínűségszámítási fogalom.

De ezt nem úgy kell érteni – ez Neumann egyik legnagyobb felfedezése –, hogy az idegrendszer nagyszámú elemi számolás „átlagát” veszi, mint pl. háromszögelésnél a geodéta, s ezeket egyenlíti ki. Nem, az átlagolás maga is átlagolások átlagolásának az eredménye, s ezen az átlagolási hierarchián keresztül teljesen bizonytalanul működő elemekből tetszőleges pontossággal működő automatákat lehet felépíteni. Persze, nem mesterségesen, mert még a mai miniatűr elektrotechnika világában is egy ilyen automata óriási helyet foglalna el, összehasonlíthatatlanul nagyobbat, mint az állatok idegrendszere.

Ezt az eljárást ahhoz lehetne hasonlítani, ahogyan az analízisben a határérték fogalmat definiálják. S ahogyan ennek a fogalomnak a segítségével egy valós számot tetszőleges pontossággal meg lehet közelíteni valamely véges számú számjegyből álló kifejezéssel, az automaták elméletében is lehet valamely tetszőleges pontosságú megközelítő értékek sorozata helyett a sorozat határértékét tekinteni, s ezt mint valós számot valamely analóg számológép számskáláján beállítani. Neumann János sok példát említ az idegélettanból, aminek az alapján úgy gondolja, hogy a természetes automatákban a két elv, a digitális és analógiás, valóban kombinálódik. S méghozzá nemcsak az adatfeldolgozás, hanem mindjárt az érzékszervi érzékelés és az ingerületvezetés szintjén. Az idegrendszer a *diszkontinuus*, áramimpulzusokból álló *digitális adatokat* frekvenciamoduláláshoz hasonló eljárással folytonos információ változásokká alakítja át. Neumann által ennek a folyamatnak gépi modellezésére kidolgozott „impulzus-sűrűségi rendszer” a Neumann-féle automataelméletet a modern matematika másik óriásának, Norbert Wienernek valószínűségszámítási automatamodelljéhez kapcsolja.

Még további hasonlóság is van a két automataelmélet, Wieneré és Neumanné között. Éspedig az, hogy mindkét elméletben roppant fontos szerepe van A. Turing angol matematikus által a húszas-harmincas években bevezetett absztrakt gép fogalmának. A Turing-gép olyan előírás, amely adott elemek valamilyen együtteséhez más elemek együttesét rendeli hozzá. A hozzárendelés módja közömbös, a Turing-gépet teljesen definiálják a kezdő és végső, bemenő és kimenő elemek. Mármost nyilvánvaló, hogy adott elemekből nagyon sokféleképpen lehet azonos végeredményre jutni, valamely konkrét gép működését nagyon sokféleképpen lehet adott feltételek szempontjából absztrakt módon megadni. „Turing vizsgálódásának fontos eredménye az, hogy ezen a módon az első gépet *bármely* más gép viselkedésének utánzására lehet késztetni. Az az utasítási struktúra, amelyet az első gép ilyen körülmények között követni kénytelen, teljesen eltérő lehet saját és reá jellemző utasításrendszerétől. Például sokkal komplexebb utasításokra terjedhet ki, s minden egyes ilyen másodlagos utasítás az első géptől sok művelet végrehajtását követelheti meg…

Általában bármi, amit az első gép bármilyen hosszú idő alatt és az összes lehetséges – tetszőleges mértékben bonyolult – utasításrendszerek vezérlése mellett el tudna végezni, ilyen körülmények között úgy végezhető el általa, mintha csak „elemi” akciókról, alapvető primitív, nem összetett utasítások végrehajtásáról volna szó.” Valószínűleg ezt az elvet alkalmazza az idegrendszer-automata is. S ennek következtében semmi sem biztosítja, hogy a nyelv, vagy akár a matematika, szükségképpen az idegrendszer struktúrájából és működéséből következne. „Szembe kell néznünk azzal, hogy a nyelv messzemenően történelmi esetlegesség… S mint ahogy a görög vagy a szanszkrit nyelv létezése történeti tény, nem pedig feltétlenül logikai szükségszerűség, ugyanúgy józanul feltételezhetjük, hogy a logika és matematika is történeti eredetű, és esetleges kifejezési formák… Meglehet, hogy amikor matematikai fejtegetésekkel foglalkozunk, akkor egy olyan másodlagos nyelvről tárgyalunk, amely ráépül a központi idegrendszer által tényleg használt elsődleges nyelvre. Így tehát a mi matematikánk külső formái nem feltétlenül relevánsak annak mérlegelésénél, hogy milyen matematikai vagy logikai nyelvet használ valójában a központi idegrendszer. A megbízhatósággal és a logikai meg az aritmetikai mélységgel kapcsolatos fentebbi ténymegállapítások mindenesetre amellett szólnak, hogy bármiféle nyelvrendszerrel van is dolgunk, ez okvetlenül jelentős mértékben eltér attól, amit tudatosan és kifejezetten matematikának szoktunk tartani."

Erre a nagyon fontos következtetésre célzott Neumann János, mikor könyve elején azt állította, hogy az automaták meg az idegrendszer működésének az összehasonlítása alapvető lehet magáról a matematikáról alkotott fogalmunk szempontjából is. Ezek a szavak ezenkívül segítenek az Ulam által felvetett kérdésre választ találni: legalább utalnak arra a szellemi klímára, ami a századforduló korában az Osztrák–Magyar Monarchia két fővárosában, Bécsben és Budapesten kivételes természettudósok felnövését kísérte. Ez a valósággal szemben alázatos filozófia volt Ludwig Boltzmann, Liese Meitner, Eötvös Loránd, Kőnig Gyula, Kürschák József tudományos munkásságának háttere, innen indult ki s emlékezett rá oly szívesen Erwin Schrödinger. Nagy kerülővel, nyakatekert skolasztikus analízis után hasonló eredményre jut egy másik nagy bécsi, Wittgenstein is.

Rényi Alfréd: Ars Mathematica[2]

Évente több száz tankönyv, monográfia, összefoglalás jelenik meg a világon a valószínűségszámítás tárgyköréből. Ezek közül úgy 40–50 jó vagy egyenesen kiváló. Az utóbbiakat kötelességszerűen ismertetik a referálásra specializálódott folyóiratok, arról azonban szó sem lehet, hogy a világ nagy szaklapjai is beszámoljanak róluk. Valamilyen okból egészen kiemelkedő kell legyen egy könyv ahhoz, hogy a tekintélyes, nagy matematikai folyóiratok recenzálják. Pedig a matematikusoknak éppolyan fontos az ilyen „nagybírálat" mint az íróknak; a maguk módján ők is „A dicsőség fegyencei", és reájuk is érvényes Komlós Aladár józan esszéjének megállapítása: „A népszerű író odaadná a diáklányok minden rajongását, ha tekintélyes kritikus egy jó szót írna róla egy komoly folyóiratban."

De hát van-e, volt-e valaha is népszerű matematikus? Hogyne, csak az utóbbi évszázadokból is egész csomót említhetnénk, Pascaltól Pólya Györgyig. S nemrégiben még közöttünk is élt, tanított s hatott egy nagy, népszerű matematikus: Rényi Alfréd. Egészen bizonyos, hogy az értelmes diáklányok mifelénk az ő szellemes dialógusaiból, káprázatos tv-előadásaiból, fantáziamozgató cikkeiből tanulták meg, hogy mi a matematika művészete. De szerencsére – szerencsénkre – Rényinek nem kellett választania népszerűség s elismerés között: még rövid életében kijutott neki mindkettőből. Halála (1970. február 1.) után megjelent két nagy könyvét – *Foundations of Probability* (San Francisco, 1970) és *Probability Theory* (Budapest, 1970) – pedig a legelőkelőbb matematikai folyóiratok egyike referálta (Bulletin of the American Mathematical Society, 1973. 2. sz.), már nem is elismeréssel, hanem leplezetlen lelkesedéssel „a tanító- s kutatóként egyaránt félreismerhetetlen Rényi-ízek" iránt.

A két szép Rényi-könyv persze csak a matematika nyelvében többé-kevésbé járatos olvasóknak tárja ki minden részletét (bár a *Foundations* sok fontos elvi-filozófiai megfogalmazása matematikai képzettség nélkül is érthető, már csak ezért is nagy kár, hogy még mindig nem jelent meg magyarul!), de a jelen válogatás részben legalábbis kárpótolja a szakmában teljességgel járatlan laikust is. A kis kötetből ugyanis bárki játszi könnyen megértheti a véletlen izgalmas törvényszerűségeinek elemeit, s nyomon követheti a nagy kalandot, amint az ember matematikai fogalmak segítségével vallatni kezdi a véletlent és a

[2] Forrás: Vekerdi László: Rényi Alfréd: Ars Mathematica. (Magvető, 1973) (Ism.) = Valóság 30 (1974) No. 1. pp. 98–99.

végtelent, A két folyamat ugyanis szervesen és elválaszthatatlanul összetartozik: a valószínűségszámítás elvi megalapozása – melynek ma tán legtökéletesebb formája, a feltételes valószínűségi mezők elmélete, épp Rényinek köszönhető – elképzelhetetlen anélkül a hosszú fejlődés nélkül, amit a görög gondolkozók indítottak el, mikor fölfedezték, hogy axiómák és logika szigorú kódrendszerében hogyan lehet következetesen és ellentmondás nélkül dolgozni olyan fogalmakkal, mint a „végtelen". A végtelen faggatása – a matematikai analízis – és a véletlen vallatása édestestvérek; Galilei a harmadik dialógusban egyszerre használja mind a kettőt, hogy megértesse Niccolininével, miféle grammatika szerint íródott „a természet könyvének nyelve". Mert a matematika az elgondolhatók világában – és csak ott – teljes bizonyossággal megfogalmazható, egyértelmű állításait modellként alkalmazhatja a létezőkre; megkeresheti mintegy a valóság matematikai megfelelőjét, szerkezeti hasonmását. Persze „nem cél arra törekedni, hogy a matematikai modell minden tekintetben hasonló legyen a valósághoz – ez egyébként nem is lehetséges. Elegendő, ha a modell híven írja le a valóságot minden olyan vonatkozásban, ami az adott feladatot illetően jelentőséggel bír." Csakhogy épp ez a nehéz: megtalálni, illetve megalkotni az alkalmas modellt. „Aki a matematikát sikerrel akarja alkalmazni a gyakorlatban, annak álmodónak kell lennie." S itt igen lényeges ponthoz érkeztünk Rényi filozófiájában: az alkalmazás elsődleges fontosságának és természetének fölismeréséhez. Mert nemcsak az a kérdés, hogy a gondolkodás szabad világában szövődő matematikai álmok miként illeszkedhetnek szinte bámulatra méltó pontossággal a valósághoz; legalább ilyen különös az is, hogy a valóság, vagy legalábbis jókora része, ezek nélkül a gondolati konstrukciók nélkül egyáltalában meg sem ismerhető. A matematika ontológiai és ismeretelméleti szinten egyaránt közvetítőként szerepel ember és valóság között. A matematika és a valóság viszonyát tisztázza az első dialógus, a matematikának a megismerésben betöltött funkcióját pedig a harmadik. S a történeti fejlődés „stílusát" megőrzően Platón, illetőleg Galilei szájába adott „ontológiai", illetve „ismeretelméleti" dialógus közé szervesen illeszkedik egy sajátosan „Rényi-ízű" és rettentően „modern" „alkalmazáselméleti" dialógus Arkhimédész nevében.

És ezen a ponton válnak az esszék az érdekességen és szellemes megfogalmazáson túl izgalmasan aktuálissá és égetően modernné. Rényi valószínűségszámítási gondolatai és fogalmai ugyanis igen erősen alkalmazáselméleti orientációjúak; hiszen az alkalmazáselmélet heurisztikából, modern logikából, jelelméleti és nyelvészeti studiumokból napjainkból kibontakozó körvonalait – Pólya György mellett – igen erősen formálta Rényi markáns egyénisége. A nagy tudósnak ezt az erősen korszerű arcát mutatja be e válogatás.

Az Arkhimédész-dialógusban Rényi a modellalkotás szellemes elemzésével megmutatta, hogyan válik az alkalmazás – egyedül releváns – összeköttetéssé gondolati rendszerek s a valóság között; két ragyogó kis esszé pedig azt magyarázza el, hogyan kell újrafogalmazni adott konkrét helyzeteket, illetve jelenségeket ahhoz, hogy érvényes és lehetőleg könnyen megoldható matematikai modell legyen reájuk alkalmazható. Azaz az alkalmazás ismeretelméleti aspektusának megértetése után ez a két esszé elmagyarázza a szemiológiait: a matematikai jelalkotás és kódolás törvényszerűségeit. És ez a nehezebb föladat, mert ez – mint minden kódolás – szükségképpen szakismereteket igényel. „Ugyanis bár beszélhetünk a matematikai gondolkodásmódról mint olyanról, ami a matematika minden fejezetében érvényesül, emellett azonban a matematika minden egyes ágának, fejezetének megvan a maga sajátos gondolkodásmódja. A valószínűségszámítást például csak az értheti meg igazán, aki hozzászokott ahhoz, hogy véletlenszerűen változó mennyiségekben, valószínűségi változókban gondolkodjék."

A Barkochba-játék és az információelmélet című esszét elolvasva – persze papírral-ceruzával a kézben – bárki megsejtheti, mit jelent „valószínűségi változókban gondolkodni"; a következő esszé – *Játék és matematika* – pedig csokorba köt egy csomó ragyogóan választott példát, hogyan lehet ezzel a nagyszerű alkalmazáselméleti „fogással", a valószínűségi változóval érdekesnél érdekesebb mindennapi helyzeteket lefordítani a matematika nyelvére. És itt, a lefordítás kérdésénél újból sarkalatos ponthoz érkeztünk Rényi filozófiájában.

„A matematikusok – idézi Rényi Goethét – olyanok, mint a franciák: mindent lefordítanak a saját nyelvükre, és akkor az már egészen mást jelent." És ez a jelentésváltozás – ez a dologban a hallatlanul érdekes és ezért áll a matematika kiakolbólíthatatlanul az alkalmazáselmélet centrumában – egyben a megoldást is „jelenti": a matematika (struktúrája miatt) egyedülállóan különleges jelrendszer, mert az értelmesen lefordított kérdések (a szabályt „erősítő" igen nehéz kivételektől eltekintve, amelyek egyikét J. V. Linnikkel együtt épp Rényinek sikerült jóformán még gyerekfejjel kiküszöbölnie) többnyire jóformán „önmaguktól" megoldódnak benne; lásd Edward D. Thorp Los Angeles-i matematikaprofesszor izgalmas „párbaját" a Las Vegas-i játékkaszinókkal.

A lefordítás és a nyelvalkotás, azaz a matematikai kód kidolgozása és a fogalmi jelek megteremtése azonban nehéz, évezredes, máig titokzatos és legföljebb itt-ott ha értett folyamat. Az egyértelmű modelleket itt fölváltják az analógiák és a metaforák; a matematikai alkotás az álmok paradoxonokkal terhes világában forr, amíg az eredmény ki nem lökődik a tudat világosságába. Erről is szól a kötetben egy játékos, mélységesen könnyed, tündérien komoly esszé; vagy tán inkább matematikai önvallomás: a *Levelek a valószínűségről*. Rényi itt Pascal Fermat-hoz írt elveszett leveleit „rekonstruálja”, hogy keletkezése pillanatában mutathassa be egy új matematikai kódrendszer, a valószínűségi változókban való gondolkozás funkcionálását. Történeti esszé tehát, s Rényi csakugyan féltő gonddal ügyel is egészen az apró részletekig a korhűségre; ám amíg a futárok kezére bízott levelek kiszámíthatatlan kallódásáért izgulunk vagy Montaigne közvetítésével töprengünk a fátum antik és új vakságain, észrevétlenül korunkba kanyarog velünk a mese, a modern gondolkozás nagy sorsfordulója diktálja a sorokat s a gondolatokat, míg megértjük, hogy a véletlen, a bizonytalanság a tudás lényegéhez tartozik és teljes biztonságot csak a nagy számok törvényeiben (s álmainkban) kereshetünk. És akkor egyszerre csak észrevesszük, hogy igazában tán rólunk szól a mese, a véletlen vasszigorú, ám egyáltalában nem csupán kauzális törvényei alá vetett esendő lényekről. Mert a *Levelek a valószínűségről* írója nagy tudós és művész volt, aki az ember érdekében vallatta a véletlent. *Ars Mathematicá*-jának pontosan megfogalmazott tíz dilemmája után fogadjuk el a könyv jellemzéseként ezt a pontatlan tizenegyediket.

Egy szenvedélyes kereső[3]

Lakatos Imre „Bizonyítások és cáfolatok” című munkájáról

Amikor Lakatos Imre itt recenzált munkája a *British Journal for the Philosophy of Science* hasábjain 1963–64-ben először megjelent, inkább csak szűkebb szakmai körökben keltett kisebb-nagyobb feltűnést, hogy aztán évek múltán azzá a minduntalan idézett és általánosan elismert forrásmunkává rukkoljon elő, aminek ma tudjuk. Az idő tájt persze még a folyóirat sem volt az a világszerte nagy respektusnak örvendő tudományfilozófiai és tudománytörténeti fórum, amivé később épp Lakatos szerkesztése alatt s folytán emelkedett. Akkoriban még inkább csak a késői Wittgenstein brit követői próbálták egyeztetni benne meredek nyelvi fejtörőiket Karl Popper szikár megcáfolhatósági tanával. Nyelvjátékok és falzifikácionizmus eme egyeztetgetése kétségkívül izgalmas szellemi torna lehetett, de a szigetország határain túl nem igen jutott. A folyóirat hatását és tekintélyét Lakatos növelte meg, ám egyúttal irányát is tökéletesen megváltoztatta. A modern tudományfilozófiák eme „lakatosi fordulata” különös és nem könnyen értelmezhető folyamat; annyi azonban sejthető, hogy Lakatos egész nagy hatású tudományfilozófiája – ha nem is mindig könnyen követhetően – itt recenzált új matematikaértelmezésével kezdődik. A Bizonyítások és cáfolatok tehát nem egyszerűen a matematika „belügye”; ellenkezőleg, központi és jellegzetes helyet foglal el korunk egész gondolkozásában.

Mátrai professzor ingerlő villanásokkal vázolt remek műhely-reflexióiban afféle minden hitek renegátjaként tartja számon Lakatost; aligha lehetne tömörebben s találóbban jellemezni – s dicsérni – ezt a született és szenvedélyes nagy keresőt. Mert mélységes megértés-igénye csakugyan mindig vonzotta Lakatost a szépen fölépített filozófiai rendszerekhez, ám nyomban visszahőkölt, mihelyst fölfedezte rajtuk az irracionalitás repedéseit. Lakatos Imre egyre tudatosabban, s egyre kötelezőbb erővel vállalta a racionalitás választásait. Ám ki tudja, nem őrzött-é meg végig racionális rekonstrukciói alján valamit vonzások és választások érzékeny dinamikájából, s nem éppen ez a „sfumato” varázsol-é titokzatos emberi mélységeket egyre keményebb kontúrokat öltő tudományfilozófiai és tudománytörténeti ábrázolásai mögé? Legértőbb recenzensei érzik is ezt jól, és magyarságára hivatkoznak; de hát az ő szóhasználatukban ez aligha jelent többet valami végképp ismeretlennél. Vagy mégis? Hisz

3 Forrás: Vekerdi László: Egy szenvedélyes kereső. Lakatos Imre: Bizonyítások és cáfolatok. (Gondolat Kiadó, 1981. 244 p.) (Ism.) = Világosság 25 (1984) No. 2. pp. 125–127.

nem épp az efféle gondolkozói magatartást vélte annyira Debrecenre – vagy inkább valami földhözragadtan földöntúli „debreceniségre” – jellemzőnek Julow Viktor, s nevezte „kálvinista ateizmus”-nak? De térjünk vissza szépen a *Bizonyítások és cáfolatok*-hoz.

Akár a híres Középiskolai Matematikai Versenyek, Lakatos könyve is jól meghatározott, ám cseppet sem triviális feladattal kezdődik: Találjuk ki, hogy a poliéderek c csúcsainak, $é$ éleinek és l lapjainak száma között van-é valami olyasféle összefüggés, mint a sokszögeknél, ahol mindig annyi a csúcs mint az él, $c = é$. A szabályos poliédereknél – amint Euler, s lényegében már Descartes felfedezte – van ilyen összefüggés: minden szabályos poliéder esetében $c – é + l = 2$. De vajon létezik-e *minden* (tehát nemcsak szabályos) poliéder esetében, és ha igen, erre az alakra hozható-é? Euler úgy sejtette, hogy igen. Nem lényegtelen a feladat kitűzése sem, de ezt most hagyjuk, mert Lakatos először a bizonyításra koncentrál. A Tanár – Lakatos képzelt szeminárium keretében megszemélyesíti a különféle szempontokat, illetve lépéseket – egy szabályos poliédert – kockát – nyit fel egyik lapjának eltávolításával ($c – é + l = 1$). Az így „síkba kényszerített” kinyitott poliéderen, azaz a csúcsok-élek-lapok összefüggését őrző poliéder-hálón mármost a $c – é + l = 1$ összeget megőrző két lépéssel, egy háromszögeléssel és a háromszögek egymás utáni eltávolításával addig halad, amíg az utolsó megmaradó háromszögben nyilvánvaló a $c – é + l = 1$ képlet érvényessége. Tehát a kezdetben eltávolított lapot újból hozzáadva igazolódott a sejtés, mely így Euler tétellé fontosodott. Csakhogy a három lépésből, a három „lemmá”-ból, amire a sejtést a bizonyításhoz fel kellett bontani, egyik sem megtámadhatatlan. Ha például a háromszögháló közepéből távolítok el először egy háromszöget, a $c – é + l = 1$ összeg nem őrződik meg, mert se a csúcsok, se az élek száma nem csökken, csak a lapoké. Az eredeti lemmát tehát ki kell igazítani úgy, hogy eleve gondosan előírja a lapok eltávolításának sorrendjét. Az ilyen lemmát-megtámadó példát Lakatos „helyi ellenpéldá”-nak nevezi. De megtámadható ellenpéldával maga a sejtés – azaz most már tétel – is: egy közepében kocka alakú lyukat rejtő kockán, egy „kockaodvas kockán” például $c – é + l = 4$! Még szerencse, hogy az ilyen kockaodvas kocka nem kényszeríthető síkhálóvá, s így ez a tételt cáfoló – ahogyan Lakatos nevezi, „globális” – ellenpélda legalább – veszett fejsze nyelét – a bizonyítást meghagyja. De mit ér egy bizonyítás tétel nélkül? Nagyon sokat, feltéve, hogy cáfolni lehet. Jelen esetben például olyan globális ellenpéldákkal, amelyekből hiányzik a síkba kényszeríthetetlenség kibúvója. Az ilyen cáfolatok ellen is lehet persze védekezni, megfelelőképpen definiálva a poliédert. Csakhogy az így körülhatárolt tétel egyáltalában nem az eredeti többé; végleg értelmét veszíti az euklidészi „quod erat demonstrandum”. És elveszítette a bizonyítás is ártatlan egyszerűségét: a felismerhetetlenségig megszigorodott. S méghozzá meg sem nyugodhatunk, hogy cáfolatainkkal reábukkantunk az egyedül üdvözítő útra: bizonyításelemzésünk eleve és szükségképpen bizonytalan, hiszen ki tudja, nem merülhetnek-é fel hirtelen más vidékekről más ellenpéldák, amikről még csak nem is álmodtunk! Olykor akár igen egyszerűék is, mint például jelen esetben a henger. Hogyan illeszthető be az egyszerű henger a poliéder-tétel bizonyításelemzésébe? Legfeljebb a háttérben rejtőző és eddig magától érthetőnek vélt lemmák fölszínre hozásával, körülményes nyelvi-logikai akrobatikával. De hol van és van-é ennek a folyamatnak vége?

„ALFA: Még mindig azt reméled, hogy végül tökéletesen szigorú bizonyításelemzést érsz el? Ha igen, mondd meg, miért nem a henger által »stimulált« új tételed megfogalmazásával kezdted! Ezt csak jelezted. Keservesen mulatságos lett volna a tétel terjedelmessége és esetlensége. És rögtön első új ellenpéldád után! Eredeti tételünket tételek sorozatával helyettesítetted – de csak elméletben. Mi a helyzet ennek a relativizálásnak a gyakorlatával? Az egyre excentrikusabb ellenpéldákkal egyre triviálisabb lemmák kerülnek szembe, egyre hosszabb és esetlenebb tételek »rossz végtelenjét« [*vicious infinity*] eredményezve. A kritika addig volt hasznos, míg úgy tűnt, hogy elvezet az igazsághoz, viszont bizonyosan zavaró, ha minden igazságot lerombol, és céltalanul hajszol minket a végtelenbe. Én gondolatban megszüntetem ezt a rossz végtelent – te nyelvi eszközökkel sohasem tartóztatod fel.

GAMMA: Hiszen én sohasem állítottam, hogy végtelenül sok ellenpéldának kell lennie. Egy bizonyos ponton elérhetjük az igazságot, és akkor véget ér a cáfolatok áradata. Persze, nem fogjuk tudni, mikor. Csak a cáfolatok meggyőzőek – a bizonyítások a pszichológiára tartoznak.

LAMBDA: Én még mindig bízom abban, hogy kigyúl a teljes bizonyosság fénye, ha a cáfolatok lassan elfogynak!

KAPPA: De vajon elfogynak-e? Mi van akkor, ha Isten olyannak teremtette a poliédereket, hogy minden rájuk vonatkozó igaz, egyetemes – emberi nyelven megfogalmazott – állítás végtelenül hosszú? Nem istenkáromló antropomorfizmus azt feltételezni, hogy (isteni) igaz tételek véges hosszúságúak?

Légy őszinte! Ezért vagy azért unod a cáfolatokat és az aprólékos ítéletalkotást. Miért nem teszed le a lantot és miért nem szállsz ki a játékból? Már lemondtál a »*Quod erat demonstrandum*«-ról. Miért nem mondasz le a »*Quod erat demonstratum*«-ról is? Csak Isten számára van igazság.

THÉTA (félre): A vallásos szkeptikus a tudomány legádázabb ellensége!”

Nagyon különös az igazi irónia természete: sohasem tudható, mikor csap át öniróniába. Lakatost éppen úgy hiba lenne a szeminárium Tanár-ával azonosítani, mint a *Párbeszédek* Galileijét Salviatival. Nem mintha KAPPA Lakatos véleményét képviselné ebben a tudományfilozófiai álláspontokat ütköztető vitában, nem mintha Lakatos vállalná KAPPA álláspontját. KAPPA Lakatos dialógusában sokkal inkább Simplicio szerepét játssza, csakhogy Simplicio nem az a jámbor tökfilkó, akinek a tudománytörténet-írás – VIII. Orbán pápa jó utódaként – rendületlenül képzeli; Simplicio sokkal inkább Galilei önnön ifjonti arisztoteliánizmusának kikacagása. A komor huszadik században persze nincsen többé efféle rabelais-i kacaj, de az irónia-önirónia játéka – s Boreczky Elemér még ezt a magyarra nagyon nehezen lefordítható lakatosi iróniát is pontosan közvetíti – azért nagyritkán fölcsillan ma is, hisz ki tudja, nem maradt-é végül is Lakatos Imrében egy cseppnyi a régi „hegeliánus dogmatizmusból”? De el ne túlozzuk valahogy az érvelést, mondjunk le hamar a »Quod erat demonstratum«-ról. Elégedjünk meg annyival, hogy „»a bizonyosságos sohasem érjük el«, »alapokat« sohasem találunk – de az »ész csele« a szigorúságban jelentkező minden gyarapodást a matematika tartalmának gyarapodásává változtat.” Az új kiadást sajtó alá rendező szerkesztők – John Worrall és Elie Zahar, Lakatos tanítványai – úgy vélik, hogy Lakatos „túlságosan lebecsüli” ezáltal a „szigorúságot”; nem is mulaszthatták el egy hosszú lábjegyzetben védelmükbe venni: „A matematikai »szigorúságra« irányuló törekvésnek – ez végül is kiderült – két, egymástól független célja volt, s ezek közül csak az egyik érhető el. E két cél: egyrészt, szigorúan helyes érvek vagy bizonyítások (amelyekben az igazság hibátlanul átkerül a premisszákból a következményekbe), másrészt, szigorúan igaz axiómák vagy végső alapelvek (amelyek azt a célt szolgálják, hogy az igazságot sajátos módon befecskendezzék a rendszerbe, s így az igazság szigorú bizonyításokon keresztül kerülne át a matematika egészébe). Az első cél elérhetőnek bizonyult (bizonyos feltételeket természetesen adottnak véve), míg a második nem.” Csakhogy az „ész csele” a matematika tartalmának növelésével sokkal többet ér, mint „az igazság hibátlan átkerülése a premisszákból a következményekbe”. A „szigorúság” ugyanis óhatatlanul csökkenti a matematikai tartalmat; példánknál maradva „az egyre növekvő szigorúság egyre kevesebb poliéderre alkalmazható”. *„Szükségünk volna valami ellensúlyra a szigorúság tartalmat szűkítő kényszerével szemben.”* Van is ilyen ellensúly, éspedig egy másik, egy merőben új bizonyítás. Azaz egy helyi, de nem globális ellenpélda esetén „a lemmát – vagy esetleg valamennyi lemmát – nem úgy próbáljuk kicserélni, hogy az adott bizonyításból a tartalom utolsó cseppjét is kifacsarjuk, hanem lehetőleg egy egészen más, átfogóbb, mélyebb bizonyítás kigondolásával.” Ezért lesz az eljárás neve bizonyítások és cáfolatok módszere. Az újabb bizonyítás azonban újabb feladat; s a feladatok bővülő körében semmi okunk többé megállani az eredeti tételnél. De hát nem „az volt a feladatunk, hogy feltárjuk $c - é + l = 2$ igazságának tartományát?" „Nem ez volt! – cáfolja hevesen Lakatos-DZÉTA –. A probléma az volt, hogy bármely létező poliéderre érvényesen megtaláljuk c, é és I összefüggését. Merő véletlen, hogy először olyan poliéderekkel ismerkedtünk meg, amelyek esetében $c - é + l = 2$. De ezeknek az »Euler-féle« poliédereknek a kritikus vizsgálata azt mutatta, hogy sokkal több nem Euler-féle poliéder van, mint Euler-féle. Miért nem keressük $c - é + l = -6$, $c - é + l = 28$, vagy $c - é + l = 0$ tartományát? Ezek nem ugyanolyan érdekesek?" Dehogynem, válaszolhatjuk nyugodtan, Lakatos későbbi tudományfilozófiájának ismeretében. Hiszen épp az ilyen feladatokból összetevődő „kutatóprogramok" viszik előbbre a tudományt. A *Bizonyítások és cáfolatok* írása idején azonban Lakatos még nem tudományfilozófiája terminusaiban fogalmazott. Elégedjünk meg hát mi is DZÉTA megállapításával: „A kritikai racionalizmus egyik legfőbb jellemzője, hogy a megoldás során az ember mindig kész megválni az eredeti problémától és felcserélni azt egy másikkal." Annál is inkább, mert „egy probléma sohasem a semmiből keletkezik, mindig kapcsolódik korábbi ismereteinkhez". A poliéder esetében például kiindulhatunk a sokszögből, ahol tudjuk, hogy $c = é$. „A poliéder egynél több sokszögből álló sokszögrendszer. De poliéderek esetében $c \neq é$. Az egy sokszögből álló rendszerekről a több sokszögből álló rendszerekre való átmenet mely pontján szakadt meg a $c = é$ összefüggés? Az adatgyűjtés helyett azt nyomozom, hogyan nőtt ki a probléma korábbi ismereteinkből, vagy melyik sejtés cáfolata szülte a problémát." Az ilyen „racionális találgatás" (a papposzi szintézis modern megfelelője) valóságos „bizonyító gondolatkísérlet" az „ellenőrző gondolatkísérlet"-ként jellemzett „naiv találgatással" szemben. Szükségképpen az utóbbival talált „naiv fogalmakra" épít, de átgyúrja, elnyeli, megemészti ezeket, mígnem a naiv fogalom nyomtalanul eltűnik, s „helyette minden bizonyítás kitermeli a rá jellemző, bizonyításból származó, fogalmakat... A régi probléma eltűnt, és újak keletkeztek. Kolumbusz után már nem kellene meglepődni, ha az ember nem azt a problémát oldja meg, amelynek megoldását elhatározta." Ilyesfajta cáfolatok-inspirálta máshová-jutás növeli végeláthatatlanul a matematika világát; az elméletek azután inkább már csak megmagyarázzák a cáfolatokat, s jobbik esetben, amíg az elmélet fejlődik, teremtik is. „Ha azt akarjátok, hogy a matematikának jelentése, tartalma legyen, le kell mondanotok a bizonyosságról. Ha bizonyosságot akartok, meg kell szabadulni a jelentéstől. A kettő együtt nem megy. *Az üres fecsegés cáfolhatatlan, a tartalmas állítások fogalomkitágítással megcáfolhatók.*" Ez végül is a kicsi könyv – és Lakatos – legfontosabb tanítása. És ez az, ami elválaszthatatlanul ide köti. Popper falzifikácionizmusán elevenen átsüt itt Bolyai János fogalom-kitágítása, holott neve nem fordul elő a rendkívüli gonddal összeállított lábjegyzetekben, hiszen ezek a poliéder-probléma fejlődéstörténetére vonatkoznak történeti háttér gyanánt. Vagy éppen a főszöveg vonatkozik a lábjegyzetekben közölt történetre racionálisan rekonstruált háttér gyanánt? Vagy mindkettő valami harmadikra vonatkozik, ami explicite ugyanúgy nem szerepel a könyvben mint Bolyai János, holott ugyanúgy jelen van? És ha ez a harmadik a Harmadik, azaz amint a – Sütő András szép szavával – „gyémánteszű” Bretter György mindig sejtette, a nyelv? Ha azt akarjátok, hogy... jelentése, tartalma legyen, le kell mondanotok a bizonyosságról.

A matematika élménye[4]

Philip J. Davis és Reuben Hersch könyvéről

Két évtizede jelent meg magyarul hasonló természetű könyv, Richard Courant és H. Robbins „Mi a matematika?” című műve.[5] A maga korában ugyancsak igen népszerű Courant–Robbins angolul először 1948-ban jelent meg, Davis és Hersh könyve 1981-ben, s így a két választ a matematika természetét firtató kérdésre 33 év választja el. Egy teljes emberöltő, ami alatt – ha hihetünk a két válasznak – a matematika teljesen átalakult. És nemcsak azért vagy helyesebben nem azért, mert időközben a matematika merőben új ágai születtek meg és cseperedtek fel, melyekből néhányat – nem-cantori halmazelmélet, nem-standard analízis, véges egyszerű csoportok osztályozása, számítógép-matematika – Davis és Hersh ügyesen be is mutat. Az inkább a lényeg, hogy a szemlélet változott meg, az a nézőpont, ahonnét a két könyv a matematikát s a matematika történetét nézi.

„A matematika definíciója – olvashatjuk a 31. oldalon – változik. Minden generáció és a generáció minden komoly matematikusa megfogalmaz egy, az ismereteivel egybehangzó definíciót.” A megfogalmazásra csakugyan sor is kerül a könyv utolsó fejezetében, habár a tulajdonképpeni definíció nem az eredeti kérdésre adott válaszként kerekedik ki; de így volt ez már Courant és Robbins könyvében is, hisz valójában ők sem a „Mi a matematika?” kérdésre feleltek, hanem inkább azt mutatták meg, hogy mit csinál a matematika. Éppen ez a nagy különbség Davis és Hersh nézőpontjához képest, akik elsősorban azt vizsgálják (találóan mutat rá „pszichológiai-pedagógiai aspektusukra” a magyar kiadáshoz írt Utóhang), hogy mit csinál a matematikus, mit csinálnak és hogyan a matematikusok, mit jelent matematikusnak lenni? Elsősorban, illetve első megközelítésben – válaszolják – azt jelenti, hogy az ember matematikát termel, mégpedig a matematikusi munka egyre javuló és egyre bővülő lehetőségei közepette, egyre változatosabb és bonyolultabb eszközökkel. Ezeket a szellemi-fogalmi és materiális eszközöket fogja majd vizsgálni a könyv, elébb azonban – Stanisław Ulam nyomán – nyomatékosan figyelmeztet napjaink hihetetlen matematikai termelékenységére: több mint 200 ezer új tétel kerül közlésre évente. S hogy ezt a dömpinget kellőképpen méltányolhassuk, emlékeztet a szerző a matematikusi munka hallatlan

---

[4] Forrás: Vekerdi László: A matematika élménye. Philip J. Davis és Reuben Hersch könyvéről. (Bp., 1984. Műszaki Könyvkiadó.) (Ism.) = Természet Világa 116 (1985) No. 4. pp. 186–187.

[5] A művet Vekerdi László fordította magyarra *(– a szerk. megj.)*

időigényességére: a tárggyal való hosszú meghitt foglalkozás, szorgalmas tanulás, mélyülő specializáció szükséges a tehetségen kívül ahhoz, hogy valaki eredményt érhessen el. És ez az eredmény többnyire nyomtalanul elsüllyed a publikációk iszonyatos tömegében, még olvasni is csak az a pár matematikus fogja, aki ugyanezen a területen specializálódott, megérteni pedig még ezek se mindig fogják. A legapróbb részletekig specializálódott matematika egyúttal igen nehéz is lett. Senki nem tudja ma már a matematikai termésnek még egy szűkebb átfogó területét sem áttekinteni, nemhogy aktívan részt venni benne. Courant és Robbins még vállalkozhattak rá, hogy bemutassák – éspedig autentikusan és érthetően – az akkori matematika jelentős részét, ilyesmiről többé szó sem lehet, a jelen könyv is csak szemelvények mozaikjára korlátozódik.

De ha ennyire szerteágazódott és szakmákra darabolódott a matematikusi munka, beszélhetünk-e akkor még és milyen értelemben matematikáról; beszélhetünk-e matematikáról többé-kevésbé jól körülírható vagy legalább nagyjából jellemezhető egységes tudomány gyanánt? Egy kis túlzással úgy is mondhatnók, hogy ma már nem annyira az a kérdés, hogy mi a matematika, hanem az, hogy van-e matematika? Nem ürült-e ki a fogalom, nem veszítette-e el a név ilyen általánosságban minden értelmét? A könyv persze nem veti fel ilyen nyíltan és durván a kérdést, hanem lassan közelíti meg, a modern tudományfilozófia elegáns kitérőin át, a befejező fejezetekben, ahol a matematikai bizonyosság és realitás bonyolult összefüggéseit kutatja, de csak azért közelít tán ilyen bonyolult filozófiai érveléseken át, hogy aztán annál határozottabban válaszolhasson: „Annak a tudománynak a létezése, melyet matematikának nevezünk, tény, nem kérdés."

Valószínűleg ezek a befejező fejezetek alkotják a könyv lényegét, az Utóhang is elsősorban ezekre reflektál. Lakatos Imre tudománytörténeti matematikafilozófiáját, a „Bizonyítások és cáfolatok" érvek kontextus-függőségét firtató dinamikáját veszik és alakítják át itt a szerzők (nem mindig erőszakmentesen) úgy, hogy beleférjen egy enyhén módosított popperi „Három Világ" metafizika kereteibe. Túlzó szimplifikációval azt mondhatjuk, hogy egyfajta „popperiánus realizmussal" megfejelt „kritikai konstruktivizmust találtak – és tálalnak – végül is a különféle matematikusi feladatok és vállalkozások eszmei alapja gyanánt. A körülményes és sok nem konvencionális nézetet hangoztató (lásd Utóhang) tudományfilozófiai kitérő után kerül sor a definícióra, amely ehhez képest meglepően megszokottként hangzik: „A matematika – írja – nem az időtlen, mindig létező, ideális realitás tudománya, de nem is sakkszerű játék, kitalált szimbólumokkal és formulákkal, hanem az emberi tudás része, amely alkalmas arra, hogy elérjen egy tudomány jellegű általános egyetértést, hogy reprodukálható eredményeket ragadjon meg ... Ez a tény nem többet és nem kevesebbet jelent, mint ideákra vonatkozó okfejtések és érvelések módjainak létezését, amelyek kényszerítők és meggyőző erejűek, »vitán felüliek, ha már felfogtuk«.” Nagyjából valószínűleg Courant is egyetértene ezzel. Euklidész pedig bizonyosan, legalábbis a matematika-történetírásnak kedves arisztoteliánus Euklidész. Dehát egyébként is megtanulhattuk már századunkban, hogy itt többnyire nem konvencionális utak vezetnek a legkonvencionálisabb célokhoz és eredményekhez.

Matematika esetében azonban ez a konvencionális, szinte már triviális definíció nem föltétlenül hátrány, ellenkezőleg, a könyv filozófiájának kellő tágasságát mutatja, amelybe beleférnek a legkülönfélébb megalapozási kísérletek, alkalmazások, „külső” és „belső” ügyek és feltételek. Igaza van az Utóhang-nak: csakugyan ez a dogmamentes látás és láttatni tudás a könyv legfőbb haszna és szépsége. Ahogyan például kellő megértéssel, sőt rokonszenvvel ismerteti az általa különben egyáltalában nem kedvelt formalista megalapozási irány nagyjait, Fregét és Hilbertet; de ahogyan általában szakmai és filozófiai jelentőségének megfelelően tárgyalja az egész nagy megalapozási mozgalmat, holott ő maga Lakatos Imre emberszabású matematikafilozófiája nyomán messzi túllát – túllátni vél, jelen szempontjukból mindegy – logicizmus, formalizmus és intuicionizmus egzakt, ám gyakran ezoterikus végletekre hajló elvonatkoztatásain és kényes elkülönülésein. Davis a huszadik század első felének matematikafilozófiájában uralkodó nagy megalapozási mozgalomból (egy régebbi kiváló szakkönyve is mutatja) csak az eldönthetetlenség témakörének kiemelkedését érzi igazán jelentősnek, jelen könyvük is ennek megfelelően elsősorban Skolem és kivált Gödel vonatkozó eredményeit értékeli. Nem titkolja hát szimpátiáját, de megértéssel és főleg megérthetően tárgyalja az egész nagy megalapozási mozgalmat, s ha tárgyalásmódja az Utóhangban kicsi kiegészítésre, illetve korrekcióra szorul, azt inkább a nézőpontok már említett különbsége magyarázza, mintsem a könyv esetleges hiányossága vagy tévedései. Mi több: a könyv szellős matematikafilozófiájába ezek a kiigazítások is jól beleférnek, már csak azért is, mert Davis és Hersh, akik Lakatos nyomán a matematikai munkát – nagyszerűségével együtt – esendő és folyton kiigazításra szoruló vállalkozásnak tartják, önmagukat sem vélik csalhatatlannak. Így cseppet sem kell csodálkoznunk, ha az a kép, amit nem matematikafilozófusként, hanem szakmatematikusként vázolnak a matematikusi munka természetéről, a matematika alkalmazhatóságáról és hasznáról „külügyeiről” és „belügyeiről”, az az eleven és színes kép nem föltétlenül kongruens a befejező filozófiai részben vázolttal, sőt olykor éppenséggel inkább az Utóhang korrekcióival cseng össze. Így például nyíltan vállalt „World-3” elkötelezettségük ellenére a szerzők cseppet sem érzéketlenek a matematika legkülönfélébb gyakorlati és társadalmi vonzatai és vonatkozásai iránt. S ha genuin és végül önmagukban érdekes matematikai témák generálásában – legalábbis a 19. század előtti korokban – nagyjából egyenlő jelentőséget tulajdonítanak is (egyébként modern tudománytörténeti divatoknak teljesen megfelelően) gazdasági, technikai, hadászati, csillagászati, fizikai feladatoknak és igényeknek egyfelől és misztikus, asztrológiai, vallásos, teológiai spekulációknak másfelől, a felvillantott „külső” kapcsolatok mozaikjából kikerekedő matematikamodell mindenképpen tartalmaz annyi konkrét vonást, hogy segítségükkel kézzelfogható közelségbe legyenek hozhatók a matematikusi munka „belső” aspektusai: absztrakció, általánosítás, formalizáció, matematikai struktúrák és objektumok szerkesztése, bizonyítás. S ha például a bizonyítás tárgyalásában egy egzakt formalizálhatóságra a szerzőknél (és Lakatosnál) nagyobb súlyt helyező matematikus, illetve filozófus joggal kifogásolhat is egy kis pszichologizálásra hajló felületességet, még neki is el kell ismernie, hogy a vázolt példánál – ami mellesleg történetileg is igen érdekes: a Pythagorasz-tétel bizonyításának kommentálása – aligha lenne szebben demonstrálható, hogy bár „a bizonyítás a matematikai hatalom, a tárgy elektromos feszültsége, amely a tételek statikus állításait megeleveníti”, szó sincs róla, hogy létezne „olyan biztos módszer, amely a bizonyításhoz elvezetne”. Efféle felismerésekből és szembesítésekből indult lényegében Lakatos vitája a formalizmussal, s az ő szellemében a szerzők a matematika számos belsőbb és legbelső területét pásztázzák át s példák sorában mutatják meg, hogyan érvényesül a (fentebb említett bizonyítás-paradoxon teremtő feszültségében csúcsosodó) *matematikai tapasztalás* olyan genuin matematikai fogalmak, folyamatok és témák kibontakoztatásában, mint a végtelen, a valószínűség, az algoritmikus és a logikai orientáció, a káosz és rend transzformációi, a véges egyszerű csoportok osztályozása, a prímszámtétel, a nem euklidészi geometria, a nem cantori halmazelmélet, a nem standard analízis, a Fourier-analízis. Erősen önkényes válogatás ez a modern matematika hatalmas spektrumából? Kétségtelenül, de bármiféle akárcsak megközelítőleg teljes áttekintés amúgy is elképzelhetetlen, s a választott fejezetek kitűnően demonstrálják a matematikai tapasztalás jelenlétét, jellegzetességeit és jelentőségét. A nem cantori halmazelmélet ismertetésében például Cantor alapvető fogalomalkotásaitól a heroikus axiomatizációs kísérletek kudarcán s Gödel ezekből kivezető merész modellszerkesztésén át elvezet az új eljárás küszöbére, amellyel tetszés szerint lehet – mint Bolyai János választásával az S és a Σ rendszer között – „kényszeríteni” a halmazelmélet kiválasztási axiómájának elhagyásával nyert törzs-axiómarendszert egyaránt ellentmondásmentes cantori és nem cantori utakra. Pontatlan bár, de találó hasonlatként elmondható, hogy még a „kényszerítés” is affélének tekinthető, mint Bolyai János esetében; azt kell bebizonyítani, hogy lehetséges halmaz-definíció, amellyel (mint a párhuzamos definícióval a Bolyaifélegyenesek esetében) olyan nem cantori (tehát nem megszerkeszthető) rendszerek szerkeszthetők, melyeknek egy megszerkeszthető részrendszerében érvényes a cantori halmazelmélet (mint Bolyai F-felületén az L-vonalakra az euklidészi geometria). A bizonyítás mindenesetre – ezt mutatják meg a szerzők – már nem Bolyait követi, hanem inkább a fordított utat, amely az euklidészi geometriában konstruálja meg a nem euklidészi geometria modelljét.

Amint a nem cantori halmazelmélet nehezen megmászható magaslatairól a cantori, úgy nyílik hirtelen új és tágabb kilátás a nem standard analízis tárgyalásából a klasszikus infinitézimálisszámításra Arkhimédésztől Newtonon és Leibnizen át Weierstrassig, vagy a Fourier-sorok bemutatásából a függvényfogalom – és alkalmazásainak – változásaira. Folytathatnók a példákat, de úgyis legfeljebb jelezhetnénk, miként „kényszerítik" a szerzők a legkülönfélébb eredetű, ám mindig az absztrakció, az általánosítás, a formalizáció, a bizonyítás és cáfolás szitáin megszűrt felismeréseket egyre szaporodó és bővülő struktúrákba, s miként „generálják" azután ezek a matematikai struktúrák és objektumok a matematikai tapasztalás újabb és újabb témáit és köreit. Ennek a szüntelen, esendő bár, de kiigazítható és így jelentés-teljes matematikai tapasztalásnak a közvetlen és eleven bemutatása a könyv igazi „élménye", amiért egymagában nagyon megérte lefordítani.

A fordítás (tán az egy cím kivételével) mindenütt pontos, jól követhető, eleven. Külön megdicsérendő a (mifelénk sajnos kivételesen) gyors munka: az eredeti 1981-ben jelent meg. Nem hagyható végül említetlenül, hogy a szerzők mindenütt következetesen „Lobacsevszkij-geometriá"-ról beszélnek; a fordítás egy tartózkodóan rövid jegyzetben megemlíti ugyan Bolyai János nevét, de inkább azt hangsúlyozta, hogy mennyire nem értették meg nagyságát hazájában még halálakor, 1860-ban sem. Úgy látszik azonban, hogy nemcsak akkor és nemcsak hazájában nem értették meg. És ezt nem csupán holmi „történeti precizitás" miatt kell megemlíteni, bár különben egy efféle matematikatörténet-filozófiai jellegű könyvben ez sem jelentéktelen. Az igazán különös azonban az, hogy az a módszer vagy ha tetszik „stílus", ahogyan Bolyai János megszerkeszti a Bolyai–Lobacsevszkij-geometriát, a tárgy minden más fölépítésénél alkalmasabban simulhatna a jelen könyv céljaihoz, hiszen Bolyai az „Appendix"-ben (először a matematika történetében) épp afféle struktúraátvilágító modellkonstrukciót valósított meg, amit a szerzők – joggal – olyan fontosnak ítélnek a matematikai tapasztalás fejlődésében.

Tóth Béla „Maróthi György” című könyvéhez[6]

„Rengeteg tervem van – mondotta a Hajdú-bihari Napló riporterének 1978-ban a 70 éves Tóth Béla. – Már megírtam azt a könyvet, amit életem fő művének tartok, a 25 íves Maróthi György-monográfiát. Hat évig dolgoztam rajta, a kézirat a kiadónál van.”

E mű igencsak a legjobb, legteljesebb és legtanulságosabb monográfia, amit ezidáig magyar tudósról írtak.

Nemcsak azért a legkitűnőbb, mert Tóth Béla mindent tud Maróthiról és mindenről tud, amit róla írtak; a könyv nem elsősorban ebben az értelemben teljes, hanem még inkább szemléletében: ahogyan Debrecen tudós tanárát a maga „habitusában” mutatja be, szűkebb s tágabb környezete által formáltan, s ahogyan aztán ő alakította és „strukturálta” maga körül a környezetét. Maróthi életén és munkásságán keresztül így a honi s az európai felvilágosodás karteziánusból newtoniánusba átmenő fontos fázisának teljes keresztmetszetét ismerhetjük meg. Ez a kivételes teljesség az ábrázolásban azonban soha nem csábítja a szerzőt tudomány- és művelődéstörténeti általánosságokra. Tóth Béla valódi mikro-historikusi szenvedéllyel – és készültséggel! – tárja fel a releváns részleteket, az ifjút körülvevő város anyagi valóságát és szellemi klímáját, a zürichi, berni, bázeli, groningeni nagy tanulmányutat és könyvvásárlásokat, a tudományos és emberi élményeket és kapcsolatokat, a külföldön kötött s aztán életen át tartó barátságokat. S aztán ahogyan ismerteti itthoni tanári és tudományos munkáját, a Kollégium egész oktatási rendszerének a korszerűsítését az énektanítástól a könyvtárig, a klasszika-filológiától a történelmen és geográfián át a reáliákig és a matematikáig, az mintája (lehetne) a részleteket az egészben látni és láttatni tudó időtlen nagy historiográfiának.

Tóth Béla könyvéből a magyar művelődés történetének egyik kulcsfigurája áll elibénk olyan teljességben és jelentőségben, ahogyan azt eddig még csak nem is sejtettük. Nehéz világ volt az is, pénz se jutott a szellem dolgaira több mint ma, de akkor a nagy tanár, a város és Kollégium, s az akkori (minket még egyenrangúnak tekintő) felvilágosult Európa talált megoldást a gondokra. Maróthi György életéből és Tóth Béla könyvéből – bizony volna mit tanulni ma. S tán nem is csak nekünk. Az mindenesetre a honi könyvkiadás, s lassan az egész magyar szellemi élet szégyene, hogy ez a remekmű máig kéziratban maradt.

---

[6] Forrás: Vekerdi László: [Ajánlás]. In: Tóth Béla: Maróthi György. Debrecen, 1994. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó. Fülszöveg.

A kör négyszögesítése[7]

Staar Gyula „Matematikusok és teremtett világuk" című kötetéről

„A könyv – írja Staar Gyula a *Bevezetés*ben – tizenhét interjú matematikusokkal. Tíz év terméséből válogattam és fűztem őket egységbe. Sokat dolgoztam és gyakran megszenvedtem egy-egy hosszabb beszélgetés nyomdakésszé formálásáért." Arról, hogy miért szerette, szűkszavúan szól: „Jó, ha nálunknál okosabb embereket kérdezhetünk, az ilyen beszélgetések különösképpen gazdagíthatják értelmünket." Az embernek – pláne a recenzensnek – azonban az az érzése, hogy Szerző a megszenvedést is szerette, amit a nyomdakésszé-formálás igényelt. Nem csak az egyes beszélgetéseké: egybeszerkesztésüké inkább értelmes és összefüggő egésszé. Meglehet, épp ez a megszenvedett szeretet segítette, hogy a tizenhét interjú egyetlen könyv szétválaszthatatlanul összetartozó tizenhét fejezetévé minősülhessen, tizenhét fejezetté, melyek mindegyike ugyanannak a teremtett világnak egyik vagy másik oldalát tárja fel, járja körül, világítja meg. Akár egy hömpölygő családregényben, a *Forsyte Sagá*ban, mondjuk, vagy *A Balogh család történeté*ben, fejezetről fejezetre tágul mind szélesebbre és színeződik új meg új színekkel a tizenhét főszereplő meg az általuk megidézett többi matematikus teremtette világ; élő vagy egykor – akár az antikvitásban – élt matematikusok világa, mígnem az olvasó – ha nem az első, hát a második vagy harmadik olvasásra – azt veszi észre, vagy észre se veszi, hogy szinte otthonosan kezd mozogni olyan ismeretlen témák körében, mint a Nagy Fermat-sejtés Andrew Wiles általi embertelenül nehéz bizonyítása, a diofantikus egyenletek, a kör négyszögesítése, a Naprendszer matematikai stabilitása, az extremális halmazok, a végtelen és a véges Abel-csoportok, a Bernstein-polinomok, a polinomokkal való megoldhatóság algebrai, geometriai és számítástechinka-elméleti kérdései, az approximációelmélet, a kombinatorikus valószínűségszámítás, az ergodicitás útvesztői, *„Die dreissig Jahre, Die Cevennenstreiter,/Die Stürmer der Bastille, und so weiter."*

Az idézetet nem egyszerűen az „és így tovább" afféle költői kikerekítéseképpen másoltam ide; azért elsősorban, amit Szerb Antal fűz hozzá *A világirodalom történeté*ben: „Számunkra Lenau költészete főképp azért érdekes, mert furcsa módon kihallatszik belőle Lenau magyarországi gyermekkora." Az a tizenhét főszereplőjével bemutatott matematikus-

[7] Forrás: Vekerdi László: A kör négyszögesítése. (Staar Gyula: Matematikusok és teremtett világuk. Vince Kiadó, 2002). (Ism.) = Forrás 35 (2003) No. 5. pp. 91–98.

család, melynek történetét Staar Gyula könyve elmeséli, nem csupa magyar matematikusokból áll, ami természetes, hiszen a matematika – akár a szabadság – nem szorítható határok közé. A matematikusokat – és nem egyszerűen csak a matematikát – határokon és korokon áthúzódó szálak kötik egymáshoz, sokszor szervesebben és erősebben mégoly szoros hazai kötődéseknél. Matematika és nemzeti önzés – legyen akár jószándékú – összeférhetetlenek. Megöli a matematikát, aki – akár mégoly tisztességes – nemzeti igényekkel közelít hozzá. Staar Gyula matematikus-családregényéhez magától érthetően hozzátartozik, hogy tizenhét főszereplőjéből kettő brit, egy amerikai, egy német, egy román, a magyar (származásúak)-ból öt régóta vagy tartósan Nyugaton él, egy pedig Japánt vallja választott hazájának. Mégis „furcsa módon kihallatszik belőle – okos(kodó) meghatározás helyett hadd idézzem újra Szerb Antalt – Lenau magyarországi gyermekkora". A legszebben tán a japán matematikuséból. Lehet, hogy épp ezért annyira részletes Staar Gyula könyvében a tizenhét főszereplő gyermekkorának és matematikussá-nevelődésének elmesélése-elbeszéltetése?

Látjuk – az ízléssel válogatott és jól reprodukált fényképeknek köszönhetően szó szerint látjuk – a Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnázium első matematika-tagozatos osztályát, melynek „osztályfőnöke, a földrajz-történelem szakos Komlós Gyula – olvasható a fényképhez tartozó aláírásban – osztályából csodálatos közösséget formált." Staar Gyula a nagy osztály mára világhíressé emelkedett két diákjával, Lovász Lászlóval és Laczkovich Miklóssal beszélgetve, s aztán alkalomadtán más fejezetekben is vissza-visszatérve rá, fel-felvillantja ezt az egykori közösséget, mígnem az olvasó természetesként éli át, hogy a tizenéves Lovász és Laczkovich lovagias Ki-Mit-Tud párviadalát szinte egy egész ország követhette a tévéernyők előtt feszült érdeklődéssel. Éppenséggel szolgálhatna példaként mai tévéknek (és tévénézőknek!); de minek rontsuk az összehasonlítással még tovább rosszkedvünk telét; elégedjünk meg annyival, hogy mai írói- és médiatrendekkel ellentétben Staar Gyula művészetének egyik vonzereje éppen valami platóni kedvteremtés: a jó és a szép megláttatni-tudása. Ahogyan például Győry Kálmán merőben másféle matematikai neveltetését bemutatja, az a Fazekas nagy osztályával összevetve valósággal plutarkhoszi párhuzamba kívánkozna:

„– Azért nem akármilyen lehetett az az ózdi gimnázium, ahonnan egy fiú évekig nyerte a KöMaL versenyét", tereli az iskolára a beszéd fonalát Staar Gyula, miután megismertük Győry Kálmán gyermekkorát, és beavattatását a *Középiskolai Matematikai Lapok* feladatmegoldó versenyébe matematikatanárnője, Farkas Gézáné és a matek-szakkör vezetőtanára, Hnisz László által.

„Manapság – feleli 2001-ben Győry Kálmán akadémikus, a Debreceni Egyetem rektora – nem sok jót hallhatunk Ózdról, ahol egy évszázadon keresztül virágzó kohászat működött. Korábban azonban kialakult ott egyfajta ipari, műszaki kultúra, mely a város szellemi életére, iskoláira is jótékonyan hatott. Mérnökök, technikusok, jó szakmunkások dolgoztak Ózdon, a vasmű törődött az alkalmazottaival. A József Attila Gimnázium több mint ötvenéves múltra tekint vissza. Az első igazgatók komolyan figyeltek arra, hogy jó tanári kart gyűjtsenek össze." A tanárok tömör jellemzése, az osztály általuk felébresztett munkakedvének szemléltetése, a közértelmesség helyi megteremtésének bemutatása után Staar visszatér a fő témára: „*Mikor határoztad el, hogy matematikus leszel?*" A válaszban újból értékelődik a „helyi KöMaL-felelős" matematikatanár szerepe; az egyetemre jutás nagy kalandjának elmondatásában pedig a csupa nagybetűs történelemé. Forrásértékű kis kortörténeti vázlat, ahogyan a beszélgetésben kibomlik, milyen kerülőkön át, hogyan, ki mindenkinek a segítsége kellett hozzá, hogy a kivételesen tehetséges diák bejuthasson, ha nem az ELTE-re, ahová kiváló felvételivel pályázott, hát a Debreceni Egyetemre. Nem kevésbé forrásértékű a válasz Staar Gyula jól célzott kérdésére: *„– Professzor úr, másként alakult volna a matematikusi pályád, ha a fővárosban, az Eötvös Loránd Tudományegyetemen végzel?*

– Ezen magam is sokat gondolkoztam. A számelmélet mellett mindenképpen kitartottam volna. Talán könnyebben elindulok a szakterületemen, ha Pesten tanulok, hiszen ott világhírű iskola, virágzó számelméleti élet volt. Meglehet, akkor nem a diofantikus, hanem az analitikus vagy a kombinatorikus számelmélet valamelyik ága vonzott volna magához, kiemelkedő alakjai, Turán Pál és Erdős Pál révén. Kis ország vagyunk, később hamar odataláltam, de kezdetben, néhány évig, egyedül küszködtem." S csak miután a küszködés előnyeit is megismertük, tér rá Staar Gyula a magosba ívelő és világkapcsolatokba szövődő matematikusi pálya ismertetésére.

„Főváros" és „vidék"? „Encore une question mal posée" – hallom szinte a hasonlíthatatlan Lucien Febvre morgását, aki nagy egyetértéssel nyugtázná Staar demonstrációját, miszerint a matematikusok teremtett világában, a „matematika-házában" elsősorban az eredmény, a világos érvelés s az ezeken alapuló kölcsönös megbecsülés számít; adott esetben egymás segítése és a szakmai szolidaritás. De Staar épp úgy nem vázol Platóni Paradicsomot, mint Lucien Febvre. Azt is bemutatja és elemzi, elsősorban tán épp azt elemzi, hogyan kell a matematikusoknak teremtett világukért megküzdeni, olykor keményen, nem kizárólag szakmai, hanem emberi és társadalmi szinteken, emberi és társadalmi, sőt politikai vonatkozásokban is. Úgyszólván mindegyik beszélgetésben felbukkan egy-egy szeme annak a hatalmas világhálónak, ami a matematika-házában szövődött „honpolgárai" és eredményeik védelmében. Staar Gyulát jó ízlése megóvja attól, hogy a *Social Construction of Knowledge* vagy a tán még divatosabb kontextualizmus valamelyik irányzatára hivatkozzék; pedig kevés könyv akad, amiből többet tudhatnánk meg a matematikai alkotás emberi, társadalmi, intézményi és történelmi feltételeiről, követelményeiről, körülményeiről és következményeiről, mint a *Matematikusok és teremtett világuk*-ból. Ahogyan például a tizenhét beszélgetésbe szétszórtan bemutatja Staar Gyula a *KöMaL* és feladatmegoldó versenyeinek szerves beépülését a honi matematikai nevelésbe; szerkesztők, professzorok, középiskolai tanárok (nem kizárólag matematikatanárok!) sok évtizedes szívós és kompetens munkájának köszönhetően, hogy aztán *Mindhalálig KöMaL* címmel a Lapok legendás szerkesztőjével, Bakos Tiborral készült utolsó beszélgetésben tételesen is megfogalmazza: „– *Az ilyen, az átlagnál többet adó, a tehetségekre odafigyelő tanárok adnak rangot az iskolának.*” És az ilyen iskolák, tegyük hozzá, az országnak.

De mi lesz, ha merőben másféle versenyek más értékei szerint tájékozódó országunkban elfogynak az ilyen szerkesztők, professzorok, tanárok és iskolák? A beszélgetésekbe Staar (szokott szelídségével enyhítetten) ismételten bele-beleszövi az aggodalmat. „*Nektek* – fogalmazza meg a kérdést állítás formájában Lovász Lászlónak – *kiváló gimnáziumi tanárotokon, Rábai Imrén kívül kéznél voltak olyan matematikusok, mint Reiman István, Hajnal András, Erdős Pál, Péter Rózsa, Rényi Alfréd, Turán Pál, Gallai Tibor... – teleírhatnám nevekkel ezt az oldalt. Ma matematikusaink nagy része nem a mi fiataljaink előmenetelét egyengeti.*

– Valóban, annak idején fantasztikus közegben nőhettünk fel. Ma azonban nemcsak a külföld vonzza el a matematikusokat, hanem sok egyéb teher is eltereli figyelmüket a középiskoláktól: szerződéses vállalások, pályázatok sora a fennmaradásért, az egyetemi oktatás átszervezésével, modernizálásával összefüggő tevékenységek. Néhány kivételtől eltekintve a mai fiatalok nem kapnak olyan figyelmet és szakmai kiszolgálást, mint mi. E tekintetben az aggodalmad jogos lehet.”

Totik Vilmossal, aki fél évig a Dél-Florida Egyetemen tanít, fél évig a szegedi JATE-n, Staar összehasonlíttatja a két matematikai oktatást. Az összehasonlítás szellemiek tekintetében – néhány amerikai él-egyetemtől eltekintve – általában még ma is a honiak javára dől el. Anyagiak tekintetében azonban a honi lehetőségek messzi elmaradnak a kintiektől.

– *A fiatal kutatót még visszatarthatná a pezsgő matematikai közélet.*

– Ami, sajnos, megszűnőben van.

– *Miért?*

– Több minden miatt. A hatvanas-hetvenes évek nagy matematikusai meghaltak, a maiak közül többen külföldön dolgoznak… De megváltozott a világunk is, eltolódtak az emberi értékek súlypontjai. Halódik magyar nyelvű szakmai folyóiratunk, a hajdan híres *Matematikai Lapok*, a legjobbak Schweitzer-versenyén is egyre kevesebben méretik meg magukat. Egyetemeinkre hármas-négyes szaktárgyi jegyekkel kerülnek be a hallgatók, képtelenség megtartani az oktatás egykori színvonalát. Ezzel együtt a tanárpályákra egyre kevesebben jelentkeznek. Ki jön el ma tanárnak? Mi lesz 20-30 év múlva, ha kifogynak a jó középiskolai tanáraink? A tanári pályának egykor presztízse volt, a hallgatókat világhírű matematikusok tanították egyetemeinken. Ma az egész oktatási rendszerünk a feje tetejére állt. Mindenféle programokat támogatnak, újabb és újabb szakok indítását pénzelik…. Ugyanabból a pénzből egyre többen igyekeznek markolni maguknak. A társadalom számára alapfontosságú tanárszakjaink pedig szép lassan kiürülnek. Nem tudom, miféle piac szabályozza majd például a matematika-fizika szakos tanáraink elfogyását."

Az idézet hosszúságával a diagnózis pontosságát és fontosságát kívánom jelezni; nem feledve, hogy a *Matematikusok és teremtett világuk* egészében nagyon is vidám könyv: a szabadon választott és jól végzett munka öröme, a kíváncsiság játékossága, a tudni vágyás izgalma, a nehézségekkel megbirkózó életkedv sugárzik belőle. A Totik-interjúnál maradva például megtudjuk, hogy „az egyetem előtti egy év katonaság is rengeteget segített, erős intellektuális ösztönzést adott.

– Ne mondd! Ezt tőled hallom először.

– Arra gondolok, hogy ott kiéheztettek a szellemi munkára. Hódmezővásárhelyen Füredi Zoltánnal, Tuza Zsolttal és még több más nagyon okos fiúval katonáskodtam együtt. Értelmes dolgokkal múlasztottuk az időt, rengeteget olvastunk, nyelveket tanultunk…"

A történet átvezet a Schweitzer-versenyek, az egyetemistáknak kiírt legnehezebb versenyeknek az ismertetéséhez, ahol Totik Vilmos többszörösen nyert, később pedig, professzor korában lelkes feladat-kitűzőként szerepelt. A Schweitzer-versenyekkel pedig eljut hőse fő kutatási területének, illetve néhány nevezetes eredményének az ismertetéséhez. A matematikusok matematikát-teremtő munkájának a bemutatása az interjúk úgy lehet legnehezebb ismeretterjesztői feladata; Staar bravúros megoldásainak legalább valamelyes érzékeltetésére érdemes megközelíteni próbálni legalább egynek a menetét.

A Schweitzer-versenyes feladatokkal Staar „fájdalommentesen" elvezeti a laikus olvasót Totik professzor speciális munkaterületéhez. Már az első fejezetben, a Lovász Lászlóval folytatott beszélgetésben megtanulhattuk a polinomokról, hogy ezekkel az egyszerű szerkezetű több tagú kifejezésekkel szerencsés esetben megoldhatók bonyolult számítási feladatok, vagy az eredmény ismeretében feltehető legalább a jogosultsága. Ott a számítógéppel történő kiszámíthatóság alapkérdéséhez vezettek a polinomok; itt adott véges intervallumon folytonos függvény tetszőleges megközelíthetőségéhez polinomokkal. „Tehát akárhogyan is adunk meg a függvény görbéje körül egy sávot, mindig találhatunk olyan polinomot, amelynek görbéje ebben a sávban halad.” Ez a felismerés még az analízis 19. századi nagymesterétől, Weierstrasstól származik. Azt, hogy lehet ilyen polinomot szerkeszteni, Bernstein mutatta meg 1912-ben. Fokozta a Bernstein-polinomok használhatóságát a megközelítés „alakmegőrző tulajdonsága. Ha a függvény konvex, akkor a Bernstein-polinomja is konvex lesz.” Ha a függvény „sima”, azaz, ha a független változó kis mozgatására a függvény is kicsit változik, ilyen lesz megközelítése is. „Adott kérdés: mennyire közel lesz a függvényhez az *n*-edik Bernstein-polinomja? Az approximáció feladata, hogy a függvény tulajdonságaiból leírja, mennyire közelítheti meg őt az adott polinom. A huszadik század eleje óta ennek elméletét elég jól kidolgozták. Minél simább egy függvény, hozzá annál közelebb kerülő approximációs polinomot találunk. A teljes leírás azonban 1933-ig váratott magára. Akkor sikerült azt megadni, hogy a Bernstein-polinom milyen rendben közelíti a függvényt. Ennek kifejezése a függvény egy újfajta simasági modulusával kapcsolatos.

– Ami pedig Totik Vilmos nevéhez fűződik.”

Staar Gyula ösztökélésére az is rendre kifejtődik, hogyan; itt azonban jobb lesz, ha előrehozzuk Staar Gyula kicsit későbbi közbeszólását:

„– Megvallom, kezdek leszakadni, ne menjünk ebben tovább. Amit elmondtál, számomra azt is bizonyítja, nem elég egy matematikusnak okosnak lennie, mások kisebb-nagyobb ötleteinek sorát is el kell raktároznia agyában. Az ››isteni szikra‹‹ kipattanását ez nagyban elősegítheti.

– Nagyon sok okos ember járt előttünk, nem kell mindent nekünk kitalálnunk…. és az sem valószínű, hogy olyan okosak vagyunk, mint nagy matematikus elődeink voltak.”

Lapozzunk vissza az első interjúra, ahol Lovász László a polinomos kiszámíthatóság bizonyíthatóságának-bizonyíthatatlanságának a kérdése kapcsán szól „ugyanerről másképpen”:

„A P=NP kérdése a hatvanas évek végén vetődött fel, s ahogyan az évtizedek múltak, egyre világosabb lett, mennyire nehéz. Ma úgy tűnik, hogy hagyományos eszközökkel ez a probléma megközelíthetetlen. Ugyanabban a cipőben járhatunk, mint a görög matematikusok, akik nem boldogultak a kockakettőzéssel, a szögharmadolással, a szabályos hétszög megszerkesztésével. Ahhoz, hogy Gauss bebizonyíthassa, a szabályos hétszög nem szerkeszthető, a matematikában hatalmas fogalmi változásnak kellett lezajlania. A geometria mellé kifejlődött az algebra, a valós és a komplex számok elmélete, az egyenletek megoldhatóságának kérdésköre. Mindezek a szerkeszthetőségtől függetlenül zajlottak. Azután egyszerre a kép összeállt, s ma már egy gimnáziumi szakkörön is nyugodtan végigmehetünk azon a gondolatsoron, hogy a szabályos hétszög miért nem szerkeszthető meg körzővel és vonalzóval."

A „P=NP" lényegében egy hatékony algoritmus készíthetőségét jelöli abban az esetben, ha történetesen rábukkanunk egy probléma megoldására, és sikerül igazolni, hogy az jó. És hagyományos eszközökkel ugyanúgy nem boldogulunk vele, mint a görög matematikusok a kockamegkettőzés, a szögharmadolás, a szabályos hétszög megszerkesztésével. A matematika bármely területének fejlődése egymástól távoli vagy még meg sem született területeinek fejlődésétől függ. Időben, térben, társadalomban szövődik összefüggő háló matematikusok munkásságából, akik élhetnek időben, térben, társadalomban mégoly távol és elszigetelten egymástól, eredményeik kiegészítik, erősítik, előbbre viszik, lehetővé teszik egymást. Mintha Bernstein-polinomok sorozata övezne egy folytonos fejlődési függvényt, és Staar Gyula könyvén mintha végiglebegne az approximációs polinomok harmóniája?

Visszautalások, ismétlések, emlékeztetések teremtik meg a regényben a folytathatóságot; az emlékezés folytonosságában azonban a megközelíthetőség ismeretlen birtokait jelölik ki az átláthatóság határai. Meglehet, éppen ez az emlékezés szerepe a művészetben, ahogyan egymástól függetlenül és merőben máshonnét indulva Fülep Lajos és Alain-Fournier matematikai világossággal megfogalmazta? Meglehet, épp ebben az értelemben idézi Staar Gyula oly gyakran Erdős Pál Platónra utaló mondását a „Nagy Könyv"-ről, ahová eleve be vannak írva a legszebb tételek és megoldások?

Erdős Pálról szólt Staar Gyula első matematikus-könyvének, *A megélt matematiká*nak az első fejezete, *A világegyetemi tanár* címmel. A beszélgetést egy ugyanolyan hosszú és ugyanolyan súlyú esszé előzi meg, amely akár az egész könyv bevetésének is tekinthető. Staar Erdősről szólva ugyanis felvetíti az egész akkori – a könyv 1990-ben jelent meg – magyar matematikai kutatás horizontját, noha (vagy éppenséggel mivel?) nem ebben, hanem – a címnek megfelelően – a matematika egészében helyezi el *A világegyetemi tanár*t.

A fejezetcímekbe sűrített jellemzés módszerét örökölte *A megélt matematiká*-tól a *Matematikusok és teremtett világuk.* És „örökölte" Erdős Pált. A tizenhét beszélgetésből tíz explicite hivatkozik rá valamilyen formában. Lax Péter például, aki családjával az utolsó pillanatban menekült Amerikába, beszámol róla, hogy még diákként többször járt Erdősnél Princetonban, közös cikkük is megjelent. Győry Kálmán első megjelent cikke Erdős Pál egyik, még 1939-ben megfogalmazott sejtésének részmegoldásáról szólt, a *Matematikai Lapok*ban jelent meg, magyarul. „Nem vált ismertté – folytatja Győry professzor Staar szívós faggatására. – A sejtés csaknem 60 évig élt, közben beérett a megoldáshoz szükséges matematika. 1996-ban, az új módszerek ismeretében, visszanyúltam az eredeti cikkem gondolatához, ami utolsó láncszemként összekapcsolta a megoldáshoz vezető gondolatsort.

– Milyen szerencse, hogy fiatalon magyarul publikáltál! Ezt a láncszemet így kevesen ismerhették.

– Sajátos nézőpont, de ebben a speciális esetben helytálló megállapítás.

– Erdős Pali bácsi látta a megoldást?

– Sajnos, már nem. Ő 1996 szeptemberében, Varsóban egy matematikai konferencián vett részt. Ott halt meg, szállodai szobájában lett rosszul.

– Pedig hogy örült volna az eredménynek.

– Igen, nagyon szerette az ilyeneket. Temetés után a Magyar Tudományos Akadémián rá emlékező tudományos ülésszakot tartottunk. Kérték, szóljak hozzá. Arra gondoltam, ő a sejtése igazolását hallaná legszívesebben. Így aztán elmondtam az eredményt.”

Idézhetnénk további hosszú részleteket a Lovász Lászlóval, T. Sós Verával, Laczkovich Miklóssal, Frankl Péterrel készült interjúkból, ha azt akarnánk bemutatni, miként vált a nagy világegyetemi tanár a magyar matematikusok serkentő, segítő, szervező erejévé; kiiktathatatlan láncszemmé a honi matematikai kutatás és oktatás fejlődésében. A recenziónak azonban inkább a módszerre kell figyelnie (és figyelmeztetnie), ahogyan Staar Gyula a fent idézetthez hasonló anekdotikus (vagy mondjuk inkább Domokos Mátyás-i) részletekkel a mindennapi élet közelébe hozza az elvont matematikai gondolatokat, és megfordítva: a matematikai emelkedettség légkörét tudja varázsolni a hétköznapok (olykor éppenséggel nem emelkedett) történései köré. A legszebb példa erre a maga szinte már magasztos visszafogottságában a Fuchs Lászlóval (1994 tavaszán és 2000 őszén) készült interjú, ahol világos válaszokból és megbocsájtó elhallgatásokból, túl a betekintésen az Abel-csoportok elegánsan titokzatos világába, kibontakozik a hosszú ötvenes évek (úgy 1949-től 1963–65-ig) értelmiségi drámája, ahogyan különösebb ideológiai elkötelezettség nélkül is, „pragmatikusan”, önérdekből, hatalomvágyból vagy egyszerűen félelemből sokan szép „magánszorgalmasan” akadályozták és gyakran meghiúsították annak a néhány professzornak és tudósnak a törekvését, akik a fennálló ideológiai, politikai és intézményi keretek ellenére és ezeken belül őrizni igyekeztek a szakmai munka színvonalát és az ehhez szükséges tisztességet, hűséget, szolidaritást.

Ezeknek a színvonal- és életlehetőség-őrzőknek a sorában a többi interjúban is minduntalan előfordul Rényi Alfréd, Turán Pál, Gallai Tibor, Péter Rózsa neve. A Fuchs-interjúban, jórészt szakmai, Abel-csoport okokból, de nyilvánvalóan emberi szimpátia folytán is felsorakozik hozzájuk a napjainkra meglehetősen elfelejtett, fiatalon elhunyt debreceni professzor, Szele Tibor. „Magyarországon először ő irányította a matematikusok figyelmét az Abel-csoportokra. Felismerte az orosz Kulikov eredményeinek jelentőségét, azokat tovább fejlesztette. Kitűnő előadó volt, felkeltette az emberek érdeklődését. Jó barátok lettünk, sokszor jött Pestre, ilyenkor rendszeresen együtt töltöttük a délutánokat, matematikáról beszélgettünk, beszámoltunk egymásnak problémáinkról."

„Így éltünk Pannoniában", idézhetjük hagyományos honi sztoicizmussal Bernáth Aurél (ugyancsak méltatlanul elfelejtett) remek regényének a címét. Az interjúk – hasonlóan Bernáth Aurél regényéhez – szakmai és hétköznapi adatok sokaságával hitelesítik az „így éltünk"-et. A Szász Domokos-interjú például nemcsak azt érteti meg, hogy mennyit és hogyan segített a Rényi Alfréd megteremtette és haláláig vezette Matematikai Kutatóintézet matematikusaink megmaradásában és fejlődésében; nemcsak azt, hogy ő, Szász Domokos milyen felelősségnek a terhét vette vállára később az Intézet igazgatásának az elvállalásával, hanem azt is, vagy elsősorban azt, hogy „Rényi csodálatos matematikus volt. Mellette dolgozni, tőle tanulni, bűvkörében élni, örök életre való útravalót adott…. Tehetséges és briliáns volt, az élet bármely területén képes volt felfedezni a matematikát." S úgy látszik, felfedeztetni is, hiszen egyébként aligha alapíthatták volna meg frissen végzett Rényi-tanítványok „1964 nyarán a Múzeum Kávéházban" az „Optimális halmazt." „Ez részben gyerekjáték volt, részben nagyon komoly dolog. Hallottál erről?

– Nem, de kérlek beszélj róla!"

És az Igazgató Úr beszél, beszél, amíg a beszéd fonala és Staar Gyula kérdései vissza nem vezetik saját pályájához és így szükségképpen Rényihez: „Rényi Leningrádban volt aspiráns Linniknél, ott ismerkedett meg a valószínűség-számítással. Hazatérve kezdte meghonosítani, tanítani a valószínűség-elméletet. Ő ismertetett meg Kolmogorov munkáival, elolvastam könyvét, tanulmányoztam cikkeit. Lenyűgözött Kolmogorov szelleme, óriási hatással volt rám. Ugyanaz vonzott hozzá, ami Rényihez.

– Éspedig?

– A szélesség. Mindketten a szó legnemesebb értelmében ízig-vérig matematikusok voltak."

A jól célzott egyszavas kérdés előhívja a beszélgetőtársból a lényegre törő, tömör választ. Meglehet ez is a Staar-kérdések egyik titka? Egy merőben másféle, ugyancsak ízig-vérig matematikussal, Frankl Péterrel készült interjújában Staar Gyula mindenesetre ilyesféle rövid kérdésekkel labdázva vezeti végig hősét (aki maga is nagy kedvelője és mestere a labdákkal-buzogányokkal játszó zsonglőrmutatványoknak) a kaposvári diákoskodástól a legismertebb japán matematikussá-növekedésig vezető hosszú úton. Mindjárt a kezdő kérdések:

„– *Mondjon három olyan dolgot, ami különösen fontos az életében!*

– A matematika, a zsonglőrködés és a szabadság.

– *Számítottam erre a válaszra. Csupán a harmadiknál tévedtem.*

– Miért, mire gondolt?

– *A szebbik nemre, a nőkre.*

– Érthető…

– *Legyen akkor az a negyedik.*

– Rendben.

– *Menjünk végig ezen a négy stáción! Első a matematika.”*

Ezek után kibomlik egy matematikai és emberi kalandokkal még ebben a globalizált világban is meglepően sokféle világba vezető életút, páratlan összehasonlítási lehetőségekkel, egyéni és közösségi vonatkozásokban. „– Látja, ebből a szempontból volt nagy szerencsém, hogy Magyarországon nőhettem fel, mert itt sok becsületes matematikus között nevelkedhettem. A Matematikai Kutatóintézetben szinte csak ilyen emberekkel találkoztam, a kutatóintézeti szemináriumon nyugodtan beszélhettem születőfélben lévő eredményeimről, senkinek nem jutott eszébe kisajátítani. Ellenkezőleg, hozzászólásokkal segítettek is.” Míg másutt általában könnyen viszontláthatja az ember könnyelműen elejtett eredményét más neve alatt.

„Igaz, régebben is történt ilyesmi a matematikában, hiszen még a legnagyobbnak tartott Gauss is igyekezett mások eredményeit a magáénak tulajdonítani. Bolyai Jánossal is ezt tette. Elolvasta a neki elküldött *Appendix*et, azonnal megértette, fejében saját eredményévé változtatta.

– Van egy ehhez kapcsolódó kedves történet, Erdős Pál mondta el a Gólyavárban tartott előadásában.” És Staar Gyula Domokos Mátyásra emlékeztető anekdotázó kedvvel hosszan elbeszéli, hogy Erdős egy fiatal indiai matematikusnak, aki egy megoldásáról véleményét kérte, lelkesen válaszolta, hogy bizony szép eredményt ért el, gyorsan publikálja! Holott ő és Ulam már vagy harminc éve megoldották a problémát, de nem közölték. A fiatal indiai ezt csak később tudta meg, másoktól. „*Megkérdezte Pali bácsit, miért nem szólt neki erről, amikor a tanácsát kérte. A válasz igazi erdősi és gyönyörű szép:* »Nézze, ebben az egyben nem szeretnék Gaussra hasonlítani.«”

A könyv következő fejezete Kiss Elemérről szól, a marosvásárhelyi professzorról, aki Bolyai János kézirataiban nevezetes számelméleti tételeket fedezett fel, melyekről az idáig a Bolyai-kutatók nemcsak, hogy nem tudtak, de még előfordulásuk lehetőségét is tagadták, s melyek közül az egyik tétel bizonyításának a gondolatmenete megtalálható „Erdős Pálnak egy 100 évvel később, 1949-ben megjelent dolgozatában is. Nagyon meglepődtem, amikor észrevettem az azonosságot. Bolyai kéziratai állandóan a szemem előtt vannak. Ahogy ránéztem Erdős dolgozatára, azonnal feltűnt a gondolat megegyezése. Képzelheted, mit éreztem akkor!”

A szemközti oldalon látható a két gondolatmenet fakszimilében; az előző oldalon pedig megtalálható mai jelölésben, matematikusoknak szánva, Bolyai János bizonyítása. Annyit a matematikához mit sem konyító is megérthet belőle, hogy a parallelák évezredes problémájának Bolyai János általi meglepő megoldása mély matematikai műveltséggel a hátterében érthető csak meg igazán. A kéziratok kincseit kutató domidoctus marosvásárhelyi professzor pedig, elszánt törekvésével az új, hűségesebb Bolyai-kép minél szélesebb körű elterjesztésére, hirtelen a világcsavargó japán matematikaprofesszor közelébe kerül: „Az okos emberekkel való kapcsolattartásra a tudomány világa kiváló közeg. Az utca embere azonban távol áll ettől a világtól. Hiányozna, ha velük nem tudnék szót érteni.” Még ha velük Frankl Péter nem is föltétlenül a matematikáról kíván szót érteni.

Erdős Pál Gaussra utalása, Frankl Péter zsonglőrködése és Kiss Elemér felvilágosító buzgalma Staar Gyula könyvében mintha ugyanarról szólna. A szót értés, a közlés kötelességéről és felelősségéről. Nem csak a matematikusokéról. 2002 végének, 2003 elejének Gaussénál mérhetetlenül nagyobb önzésekkel és politikai-tömegkommunikációs zsonglőrködésekkel hideg-polgárháborússá kábított országunkban vigasz ez a könyv, rejtett tartalékokat és drágaköveket tár elénk, mint Kiss Elemér tanár úr a Bolyai-ládákból. Másutt világsiker lehetne. „Itt és most?”

„Az *Albigenser* utolsó sorai oly kitűnőek, hogy nem tudjuk megállni idézés nélkül:

Das Licht vom Himmel lässt sich nicht verspengen,
Noch lässt der Sonnenaufgang sich verhängen
Mit Purpurmanteln oder dunklen Kutten;
Den Albigensern folgen die Hussitten
Und zahlen blutig heim, was jene litten;
Nach Huss und Ziska kommen Luther, Hutten,
Die dreissing Jahre, die Cevennenstreiter,
Die Stürmer der Bastille, und so weiter.

„Számunkra Lenau költészete főképp azért érdekes, mert furcsa módon kihallatszik belőle Lenau magyarországi…” tán nem csak gyermekkora? És nem csak Lenaué. Szerb Antalé is immár.

Mesterek és tanítványok[8]

Kántor Sándorné könyvének méltatása

A tudománytörténet-írás felnövekedésével és élre törésével a kultúrhistórián belül (amit különben jelen könyv egyik „Tanítvány” és „Mester” főszereplője, Lakatos Imre már a hatvanas években megjósolt, Szabó Árpádnak írt egyik levelében) szép lassan kifejlődött külön, önálló szakterületként a tudománytörténet-írás történetének a kutatása és ismertetése; a tudománytörténet-írás historiográfiája. Ezzel összefüggésben növekszik a helyi adatok, szerzők, művek iránti érdeklődés, újraértékelődik jelentőségük, országos, regionális, városi szinten egyaránt. Hadd idézzek a szerzővel közös mesterünk, Szénássy Barna 1970 vége felé írt leveléből; nagyon szépen jellemzi a tudománytörténet-írásban napjainkra felfutó tendenciát: „A könyvem (A magyarországi matematika története. A 20. század elejéig) – legalábbis itt Debrecenben – már elfogyott. Mintegy 8 recenzióról van tudomásom, ezek szinte túlzásba menően hízelgők. Egynek az aggályait azonban nem értem pontosan..., mintha azon tépelődne, hogy létjogosult-e a matematika történetét egy országban tekinteni. Én úgy látom, hogy ez az egész világon megmutatkozó törekvés, minden tudományt illetőleg. Nyilvánvaló, hogy ennek a törekvésnek lehet csak eredménye az egyetemes tudománytörténet objektív felépítése... Rényi mondta többször is nekem: örömmel kell vennünk, ha valaki az egyetemes matematikatörténetét érintő problémákkal foglalkozik, de a magyar feldolgozása a mi kötelességünk, ezt más nem végzi el...”

A *Mesterek és Tanítványok* 13–14. oldalán olvasható: „...Van, aki csak átmenetileg volt Debrecenben és mégis úgy érezte, hogy nagyon sokat köszönhet a városnak. A debreceni élet és a láthatatlan szellem jellegzetes egységbe forrasztotta őket és generációktól függetlenül valami egységes magatartás volt bennük. A kultúra és művelődés feltétlen szolgálata a magyar nemzeti hagyományok tisztelete, a vallási kisebbségből fakadó mások iránti tolerancia. Haladó szelleműek, a nagy kérdésekben sohasem maradiak.” Lényeges a 24. jegyzetben példaként felsorolt néhány közismert név: „Kardos László (író), Barra György (matematika szakfelügyelő) Karácsony Sándor (egyetemi tanár), Kiss Árpád (egyetemi tanár), Lakatos Imre (tudományfilozófus), Németh László (író), Szabó Magda (író).” És tegyük hozzá: Rényi Alfréd.

---

8 Forrás: Vekerdi László: Mesterek és tanítványok. Kántor Sándorné könyvének méltatása. [Kántor Sándomé: Híres matematikatanárok és tanítványok a debreceni iskolákban. Országos Pedagógiai Könyvtár és Múzeum, 2007.] (Ism.) = Természet Világa 138 (2007) No. 9. pp. 404–407.

Ezért a névsorért és az általuk képviselt debreceni szellemiség definiálásáért-elemzéséért magában érdemes volt megírni Kántor Sándornénak ezt a szép kicsi könyvet. De szóljunk inkább *debreceniesebben:* szép kicsi „Nagy Könyvet". Lásd a Bevezetésben, 5. oldal: „A kiemelkedő tanárok nevét a szaktudományuk, a pedagógiai irodalom, a szakmódszertan, a közélet, a hagyomány vagy tanítványaik serege őrzi, néha legendák, anekdoták szereplői. őket debreceni szokás alapján *nagy tanároknak* nevezik." *Nagytemplom, Nagyerdő, Nagykönyvtár, Nagytanárok...* Ám Kántor Sándorné szerencsére matematikus is, nemcsak matematikatörténész, jól tudja hát, hogy Euklidész óta milyen fontos a pontos definíció: „Ha matematikatanárokat keresünk, akkor tisztáznunk kell, hogy kit nevezünk matematikatanárnak, hisz a szaktanári képzés, a szaktárgyi oktatás csak a 19. század második felében indult meg.

Maróthi György, Hatvani István, Kerekes Ferenc professzorok polihisztorok voltak és nem csak matematikaoktatással foglalkoztak, viszont tevékenységük a matematikaoktatás szempontjából korszakokra kiható és alapvető jelentőségű volt. *Tóth József* a Kollégium matézisprofesszora, tanított magyart, latint és németet is.

A szaktárgyi tanárképzésben a 19. század második felében és a 20. században két szaktárgy összevonása volt a jellemző. A szakpárosítások matematika–fizika, matematika–ábrázoló geometria voltak, de harmadik tárgyként a kémia is előfordult."[9] Részletezi azután megint személyekre lebontva, jó néhány nagy tanár tanítási gyakorlatát és szokásait: a munka konkrét formáira és mibenlétére figyelve, nem „pedagógiai" – elméleti módszereire – előírásaira.

Így a mindennapi élet szerves részévé válik és távlatokat nyer a história, beillesztve Debrecent és általa Magyarországot abba a – megint csak napjainkban felismert és jelentősége szerint méltányolt – nagy tudománytörténeti folyamatba, amelynek során a teológus-, jogász- és orvosképzésre „szakosodott" középkori egyetemekből a matematika és a természettudományok (Science) felfedezéseire, a hagyományos tudás átörökítése mellett az új megismerésére és megismertetésére egyre nagyobb súlyt helyező *Research University*-k lettek.[10]

Ezzel párhuzamosan lassan vagy nem is mindig lassan megváltozott a középfokú oktatás feladata és anyaga is. A latin és a görög megtanulása az antik és a humanista örökség átvétele továbbra is központi fontosságú maradt, de előbb-utóbb mindenütt megjelent a matematika és a természettudomány. Hosszú és bonyolult folyamat volt, országonként és városonként különböző. És különböző az illető helyen uralkodó-jelenlévő vallások szerint. *Az iskolaváros Debrecen szellemi arca* című 1. fejezetben az alábbiak olvashatók: „Debrecen,

9 Id. mű p. 6.

10 William Clark: Academic Charisma and the Origins of the Research University. Chicago, 2006. University of Chichago Press.

Magyarország második legnagyobb városa, már a 16. századtól kezdve jelentős szerepet játszott az ország kulturális életében. Ennek fő oka, a nagy szellemi mozgalomhoz, a reformációhoz való csatlakozás volt. A reformáció, amit a 16. században Debrecen befogadott, a várost iskolavárossá tette. Itt is, mint Európa többi részén, a reformáció három fronton indított támadást, három eszközzel harcolt és hódított: szószékkel, sajtóval és iskolával... miért éppen Debrecen lett a magyarországi reformáció kiválasztott városa és középpontja?

A XVI–XVIII. században a város híres volt gazdagságáról, polgárai vagyonosak voltak. Debrecen fontos kereskedelmi útvonal mentén feküdt... A legfontosabb, a sorsdöntő tényező azonban nem ez volt, hanem...” Ezt azonban olvassa el ki-ki magának. És a fenti részletet azért másoltam ide, hogy összehasonlíthassam a legújabb kompetens és konszenzusos tudománytörténeti véleménnyel. William Clark fentebb már említett könyvéről írt Essay Review-ben ez olvasható: W. C. argues that the Research University, which originated in German Protestant lands, developed in response to market forces and buereancracy”[11]

Megnézhetik az Akadémiai Könyvtárban, a könyvet azonban a brutálisan csökkentett költségvetés miatt már valószínűleg nem fogjuk tudni megvenni.

A XVI. és XII. századi Debrecen gondoskodott róla, hogy a Református Kollégium Nagykönyvtárában meglegyenek a tanuláshoz és oktatáshoz szükséges könyvek és az új felfedezések megértetéséhez szükséges kísérleti eszközök és berendezések. A *Mesterek és tanítványok* 2. fejezete: *A debreceni Református Kollégium híres matematikatanárai és tanítványai* azt mondja el precízen, szépen, hogyan és milyen eredményekkel járt a Református Kollégium, majd a belőle kinőtt gimnázium nagy tanárgenerációinak működése a híres, országos hatású tankönyvíró Maróthi Györgytől, a debreceni szenátor fiától, a Bay Zoltánt tanító és a kísérletek bemutatását előkészítő asszisztensként maga mellé vevő Jakucs Istvánig. „Bay Zoltán és a debreceni Református Kollégium kapcsolata különösen szoros volt... a Kollégiumról szóló megemlékezéseiből megtudjuk, hogy e szellemi kapcsolat egészen Maróthiig nyúlik vissza. Erről így írt: »Hogy az iskola mennyire követte az Európai művelődést, akkor láttam, mikor a kollégiumi könyvtárban kezembe került Newton híres könyve a Principia fóliás kötésben, s első lapján a beírással: Georgius Maróthi, aki azt Amsterdamban vásárolta az 1700-as évek valamelyikében. Íme Newton könyve, melyről akkoriban azt mondták, hogy megfejtette a világ titkát, az 1687-es megjelenése után néhány évtizeddel később már a Debreceni Kollégiumban volt. Föltételezem, hogy Maróthi tanította is...«”[12]

---

[11] History of Science. Vol. 45. (2007) No. 2. June.

[12] Kántorné id. mű pp. 74–75.

Bay Zoltán emlékezéséből-leveléből ugyanezen szempontból idézi Kántor Sándorné az Eötvös Collegium jelentését-jelentőségét méltató sorokat is: „Eötvös Loránd kiváló gondolata volt, hogy az ország műveltségét azzal lehet magas fokra emelni, hogy a középiskolai oktatást kiválóan magas szinten tartjuk. A jó középiskola jó tanárt kíván, tehát Eötvös megalapította az apjáról, Eötvös Józsefről elnevezett kollégiumot, ahol jeles tanárjelöltek az állam gondoskodásában élhetnek tanulmányaiknak és készülhetnek jövendő tanári hivatásukra ... A debreceni gimnáziumnak, azalatt, míg én ott tanultam, négy Eötvös-kollégista tanára volt: a két matematikus, Nyári Béla és Jakucs István, azonkívül egy német és egy latin szakos tanár..."[13]

Bay Zoltánt Jakucs Tanár úr választotta ki és ajánlotta be az Eötvös Collegiumba, s később is figyelemmel követte felfelé ívelő pályáját, volt tanítványa pedig valahányszor hazatért Debrecenbe mindig felkereste egykori Nagytanárát.

Egy valóságos szellemi „természetes kiválogatódás", egy szellemi szelekció lépéseit-eszközeit ismerjük meg a *Mesterek és Tanítványok*ból, precízen és nagy szakértelemmel válogatott emlékezésekből, beszélgetésekből, levelekből, tömör szakmai biográfiákból. E tekintetben jelen recenzenst Kántorné Nagy kiskönyve a műfaj – szóljunk „debreceniül" – nagymesterének, Staar Gyulának „nagyinterjú-monográfiáira" emlékezteti, s nem (csak) azért, mert ezt a hosszú recenziót a néki dedikált és meglehetősen szétolvasott példányból készíti; máris messzi túl a *Természet Világá*ban megszabott recenziók keretein, pedig még csak egyetlen debreceni iskola, a Református Kollégium (Gimnázium) tanárairól és tanítványairól volt szó. Igaz, hogy ez az iskola tanáraival és egyik jellegzetes „Nagyigazgatójával", Karai Sándorral mintaként és mérceként szolgált a város többi iskolájának, s ehhez viszonyítva-kapcsolva ismerteti mindet a Mesterek és Tanítványok is. Ami egyáltalában nem könnyíti azonban meg a Szerző dolgát. S nemcsak azért, elsősorban nem azért, mert „ahány ház annyi szokás", hanem a magyarországi történelem, kivált a XX. századi, kiszámíthatatlan és kegyetlen menete és fordulatai miatt. Hű kritikusként Kántor Sándorné iskolák s tanárok sorsán keresztül hűségesen jelzi és bemutatja ezt is.

Azonban az iskolák, az oktatás és a nevelés igazi „kontextusát" nem elsősorban ezzel, hanem a tanárok, az azonos és a különböző iskolák tanárai között szövődő-szőtt emberi és szakmai kapcsolatok bemutatásával – elemzésével teremti meg. Karai Sándoréval például, aki a legendásan nagy matézis professzor, Tóth József tanítványa volt, aki „Kerekes Ferenc tanítványa és híve volt, mind emberi, mind szakmai szempontból." Tóth József „döntő szerepet játszott kollégájával, Gelencsei Pállal együtt a Kollégiumból kiváló reáliskola

[13] Kántorné id. mű pp. 79–80.

szervezésében és irányításában.[14] Ezeket a szervezői-irányítói adottságokat és tudást is „örökölte" tanítványa, Karai Sándor. Pedagógiai tevékenységének csúcspontját igazgatói tevékenysége jelentette. Barátja Kardos Albert így jellemezte: »Karai Sándor igazgatónak született...« A Kollégium érdekében válogatás nélkül minden feladatot elvállalt életművének fő része a Református Főgimnázium Péterfia utcai épületének felépíttetése volt...[15]

Kántor Sándorné röviden részletezi, hogyan lett „az iskola a 20. század elején Magyarország legszebb, legmodernebb iskolája szellemiségében is".[16] „Vizsgálataim szerint – összegez Kántor Sándorné – Karai Sándor szelleme hatással volt a 20. század első felében a Református Gimnáziumban tanító matematikatanárokra, elsősorban azokra, akikből iskolaigazgatók, helyettesek vagy az internátus vezetői lettek. Sok közös vonás fedezhető fel Jakucs István, Vekerdi Béla, Mester István és Nagy Géza magatartásában, nézeteiben... egész legenda kerekedett ki politikai bátorsága körül: a húszas évek elején egymaga kiparancsolta az »ébredő« egyetemi hallgatók fenyegető táborát a Kollégium udvarából..."[17]

„A város kulturális életében is irányító szerepet játszott. Felekezetektől függetlenül összehozta a város tanárait a Debreceni Tanári Kör, a Kollégiumi Felolvasó esték, illetve a Sörtársaság keretében..."[18]

Utóbbit oly élethűen írja le Kántor Sándorné, hogy szinte érezni a sör illatát. (Jelen recenzenst a Soproni Bánya-, Kohó- és Erdőmérnöki Kar „Szakestélyeire" emlékezteti, ott keveredett így vidámság, humor és nagyon is komoly problémák egyvelege valamiféle baráti megbeszéléssé-beszélgetéssé, egyfajta intellektuális „szigetté", az amúgy különben egyre gonoszabb és elviselhetetlenebb világban.

De spontán, személyes szimpátia és szakmai érdeklődés vagy valamilyen nemes szórakozás, például zene, fényképezés vagy vadászat alapján is összegyűltek minden iskolában kisebb baráti körök, amelyek ezután többnyire összekapcsolódtak más iskolák hasonló köreivel. Ez a tanároknak mozgáslehetőséget teremtett, az iskoláknak megkönnyítette tanárgondjait. Kántor Sándorné remekül választott tanárpályákkal mutatja meg, mi volt, és hogyan működött ez a barátságok kis köreiből spontán szerveződött rendszer. Ehhez részletesen be kell mutatnia a Város matematika- és fizikaoktatás szempontjából legfontosabb iskoláit. A 3. fejezet tárgyalja a debreceni Fazekas Reáliskolát a 4. a debreceni Zsidó Gimnáziumot, az 5. a Dóczy Leánygimnáziumot, a 6. a Piarista Gimnáziumot. Nem holmi iskolatörténeti tanulmányokról-esszékről van szó. Látjuk kinőni az iskolákat a Református

[14] Kántorné id. mű pp. 44–45.
[15] Kántorné id. mű p. 58.
[16] Kántorné id. mű p. 58.
[17] Kántorné id. mű p. 60.
[18] Kántorné id. mű p. 59.

Kollégiumból, s látjuk, hogyan vetik „vigyázó szemüket” felnőtt korukban is a Református Kollégium nagyszerű gimnáziumára, felekezeti különbség nélkül.

Mesteri, ahogyan Kántor Sándorné a Piarista Gimnázium igazgatóját; Lóky Bélát bemutatja, valóságos piarista Karai Sándorként? Néhol még ugyanazon szavakat is használja jellemzésére: „Szerette a közéletet, sok társadalmi funkciója volt. Aktívan részt vett a város, az iskola, a tanári társadalom életében.”[19] És állandó tag volt természetesen a Sörtársaságban. S még számos egyéb debreceni, magyarországi és erdélyi társaságban és bizottságban, melyekből tízegynehányat a könyv a 216-os jegyzetben – a végén egy „stb.”-vel – felsorol.

„1928-tól egészségi állapota megrendült, ezért kevesebb mozgást igénylő munkakörbe képezték át. Így lett rendi számvevő. Ekkor sem szakadt el a középiskolától, részt vett Suták József középiskolai tankönyveinek átolvasásában, korszerűsítésében. Így például az algebra részt geometriai résszel egészítette ki... Lóky Béla könyvéből tanítottak a budapesti Piarista Gimnáziumban is.

Ennek az iskolának volt kiváló diákja Hajós György Kossuth-díjas akadémikus. Hajós György írta meg a *Bevezetés a geometriába* című tankönyvet, amelyet a 20. század második felében egyetemi tankönyvként használtak. Magam is sok évfolyamot tanítottam geometriából a Hajós-könyv alapján. Óriási meglepetés volt a számomra Lóky Béla tankönyvsorozata. A Hajós könyv lényegében rövidített változatban a Lóky könyvén alapult. Látszott, hogy Hajós György is a Lóky-féle geometria alapján tanult. A példái közt van olyan, ami ma is szerepel a tankönyvekben, példatárakban a felvételi feladatok vagy a versenyfeladatok között.”[20]

Az ilyen személyes közbevetések – kellő helyen alkalmazva – élettel telítik, megerősítik, hitelesítik, érthetőbbé és élvezetessé-olvasmányossá varázsolják az elmondottakat. Kántor Sándorné mesterien él velük, itt is nyomban megértjük a feladatok, a feladatmegoldások és feladatkitűzés fontosságát a matematikában és a fizikában. Van azonban egy, a könyv egészét, illetve a történet egészét tekintve tán még fontosabb feladatuk: összehozzák, segítenek eleven egésszé ötvözni a szerteágazó részleteket, mint itt a feladatok kitűzésére, megoldására, a megoldók, az előkészítő tanárok (és a kitűzők) tudásának-tehetségének kipróbálására-összemérésére „szakosodott” *Középiskolai Matematikai Lapok*, a híres KöMaL.

A Nagytanárok és Nagytanítványaik mind lelkes és szorgalmas KöMaListák voltak, tagjai egy közösségnek, egy „szigetnek”, ahol a tehetség, a tudás, a felkészültség, a találékonyság számított úgy, ahogyan nagyinterjú-monográfiájában Staar Gyula leírta, s

[19] Kántorné id. mű p. 153.
[20] Kántorné id. mű pp. 154–155.

ahogyan Kántor Sándorné hivatkozik rá. A maga nemében egyfajta Eötvös Collegium volt ez is: fórum tehetségek szelekciójára, támogatására, segítésére, ápolására. Kántor Sándorné pedig a „KöMaL-kollégium” bemutatásával és működésének szakszerű elemzésével újra és nagyon szemléletesen mutatja meg az összetartozást, a közöset, a „Debrecenit” az iskolák, a tanáraik, a diákjaik életében, legyenek amúgy természetszerűleg mégoly különbözőek. Nagy Gézáról szólva, aki a gyakorló tanítást Jakucs Istvánnál végezte, s aztán „45 évig volt aktív tanára a debreceni Református Gimnáziumnak”, tanítványa, Daróczy Zoltán akadémikus, neves matematikus maga is, külön kiemeli: „Elsősorban a Középiskolai Matematikai Lapok feladatmegoldó versenyére irányította figyelmünket, de a konkrét feladatokat nem kérte számon. A beküldési határidő után mindenkitől megkérdezte, hogy hány megoldást küldött be. Ha valaki »nehéz« feladatra is adott megoldást, akkor azt meghallgatta. Később árulta el, hogy sok feladattal ő sem boldogult, nem is volt rá ideje, és nagyon örült titokban egy-egy tanítványa ötletes megoldásának. Ezek alapján adta az elismerést.”[21]

Módis László, a DOTE professzora 1953 és 1957 között a Fazekas Gimnázium diákja volt, Mester István tanította akkor ott a matematikát és a fizikát. Reá emlékezve „Módis professzor kiemeli követendő példaként: »Az ilyen tehetséges diákokat állandó erőfeszítésekre sarkallta, a Matematikai Lapok példáinak megoldására, versenyszellemre ösztönözve őket, a gyengébbeket erejükhöz mérten szabta ki a feladatokat, utolérhetetlen volt az elnéző, megbocsátó képességében, az emberpalánták iránt érzett szeretet állandó közvetítésében.«”[22]

Idézi Kántor Sándorné magát Mester Istvánt is: „Nagyon értékelte a különböző tanulmányi versenyeken résztvevő diákjait: Elismerés és dicséret illeti e kiváló, derék diákokat, akik országos viszonylatban is ilyen szép dicsőséget szereztek az ősi főiskoláknak (ekkor Mester István a Református Kollégium Gimnáziumában tanított matematikát–fizikát), de az elismerésre, dicséretre érdemes a tanári kar is, amely hozzáértő, lelkes munkával ilyen kitűnő növendékanyagot nevelt. A legkitűnőbb tanítványa mégis Szele Tibor volt. 1936-ban megnyerte az Eötvös matematikai tanulmányi versenyt. A versenybizottság rangos tagjai – Rados Gusztáv elnök, Egerváry Jenő, Faragó Andor, Fejér Lipót, Stachó Tibor, Szűcs Adolf, Veress Pál és Kőnig Dénes – értékelésükben kiemelték, hogy »a legjobb dolgozat szerzője Szele Tibor, aki a debreceni Református Gimnáziumban dr. Mester István tanítványa volt...« Szele Tibor eredménye nem volt meglepetés. Évekig a Középiskolai Matematikai Lapok egyik legszorgalmasabb feladatmegoldója volt, a Lap többször közölte a fényképét is.”[23]

---

21 Kántorné id. mű pp. 96–97.
22 Kántorné id. mű pp. 93–95.
23 Kántorné id. mű p. 89.

„Mester István tanítványai közül ő lett világhírűvé”[24] Kántor Sándorné röviden vázolja Szele Tibor gyorsan felívelő, tragikusan fiatalon megszakadt pályáját, amelyet tanítványai folytattak a debreceni algebrai iskola, jórészt az általa kollégáival, Rényi Alfréddal és Varga Ottóval közösen létrehozott, nemzetközi elismerést kivívott folyóirat, a Publicationes Mathematicae hasábjain.[25] „Személyes varázsának is nagy szerepe volt abban, hogy a hallgatók és a tanárok megkedvelték az általa művelt új tudományágat, a modern algebrát. Munkásságát a mély gondolkodás, a legnehezebb kérdések legegyszerűbb megoldása jellemezte. Kiemelkedő tudományos teljesítménye rendkívüli oktatási tehetséggel párosult. Speciális előadásai a legújabb kutatásokat is felölelték, rámutatott a nyitott problémákra, ösztönözte tanítványait e témakörökkel való foglalkozásra. A tanárjelöltek százai látogatták előadását, akik közül sokan még ma is őt tartják mint embert, mint matematikust és mint tanárt példaképnek”.[26]

Mint egykor rég, a tizenhetedik században Maróthi Györgyöt és tanítványát, Hatvani Istvánt. Nem ok nélkül hangsúlyozza Kántor Sándorné tankönyveik szakmai jelentősége mellett a máig figyelemre méltó nevelését is: a debreceniséget, amelyben összeforrt hit, emberség, szakma. Úgy, ahogyan Kántor Sándorné Máté Imrétől, a Kossuth-díjas ökológus akadémikustól idézi: „A tudás és ismeretszerzés bőséges forrásán kívül nem hagyhatom megemlítés nélkül »A debreceni Református Főgimnázium 1852 Orando et Laborando« pecsétjének életnemesítő jelmondatát. E jelmondat életszemléletet, jellemet formáló ingázása szintén részese annak, hogy a Kollégium diákjai korunk edző, viharokban bővelkedő viszontagságának közepette is helytállhattak«.”[27]

Hinni – és dolgozni. Ahogyan 1940-ben „a vigasztalan döntés óráiban” a Vallombrosába zarándokló Németh László ott felismerte és üzente a ma és a jövendő szerény magyar „vallombrosáinak”.[28] Önmagának is, hiszen erről szól a Debreceni Káté; Németh László Hódmezővásárhelyen kibontakozott *debreceniségének* a szellemében.

Ez a szigorú *Ora et Labor*ából, a kemény parancsból lehetőséggé szelídített orando et laborando debreceniség teremt Kántor Sándorné művében a sokféle tanár, tanítvány, iskola között és fölött olyasféle együvé tartozást, harmóniát, mint amilyent egy virágos réten vagy egy erdőben érez az ember, s válik a könyv egyvégtében olvasható és élvezhető elbeszéléssé, valóságos regénnyé, rokonává Szabó Magda *Ókút*jához, Mocsár Gábor *Délibábjaim városá*-hoz. Ezért nemhogy nem lóg ki belőle, hanem egyenesen kívánkozik bele a debreceni Zsidó

24 Kántorné id. mű p. 93.
25 Kántorné id. mű pp. 90–92.
26 Kántorné id. mű p. 92.
27 Kántorné id. mű p. 106.
28 Németh László: Napló. Szeged, 2006. Tiszatáj Alapítvány. p. 36.

Gimnázium lángeszű nagy diákjának, Lakatos Imrének az életét és munkásságát vázoló és méltató jellegzetes Kántor Sándornéi „nagykisbiográfia”, ahogy valósággal plutarkhoszi párhuzamosul kínálkozik a Szele Tiborénak. Talán a legjobb biográfia, amit eddig Lakatos Imréről olvastam.

Logikusan-szépen fejezi be a könyvet a debreceni leányiskolák bemutatása Nagytanárokkal és Nagytanítványaikkal, a legendás Tili nénitől[29] a váltakozva Kolozsváron és Debrecenben tanító Kovács Margitig, aki 1952-1960 között a Református Kollégium Gimnáziumának tanáraként „Jakucs Istvánnal együtt végezte el a régi fizikai eszközök számbavételét egy, az iskolatörténeti múzeumba való elhelyezését.”[30] Valamint Dr. Tóth Lajosné Keresztesi Máriáig, aki 1935-ben az első tanárnő volt, aki Debrecenben doktorált. Disszertációjának címe: *A magyar matematikai műhelyek története*.[31] Munkásságára ma is sokan hivatkoznak, sőt több esetben felmerült, hogy célszerű volna ezt a munkát folytatni...”[32]

Ezzel újra visszajutottunk Maróthi Györgyhöz és a tudománytörténet-írás historiográfiájának az utóbbi években megnövekedett fontosságáig. Kántor Sándorné a debreceni iskolák, Nagytanáraik és az ő Nagytanítványaik pályájának – munkásságának történetében Debrecen iskolavárossá növekedésén túl egyfajta helyi példáját – változatát írta meg a koraújkori Európa nagy matematikai-természettudományos fordulatának. Ugyanúgy szinkronban napjaink tudománytörténet-írási tendenciáival, mint a maguk idején Maróthi György, Hatvani István és tanítványaik az akkori idők matematikai–természettudományos világképváltozásával.

Le kéne fordítani a könyvet angolra, vagy még inkább tán taljánra. Assisi Szent Ferenc, Dante, Michelangelo, Leonardo, Galilei, a Recanatei Leopardi honfitársai tudnák tán leginkább méltányolni azt a hosszú, szívós küzdelmet, amivel debreceni, kolozsvári, nagyszombati Nagytanárok és Nagytanítványaik kivívták azt a jogot, hogy utódaik mára egyenlőkként vehessenek részt a világ matematikai, fizikai, geológiai, biológiai ismereteinek-tudásának gyarapításában.

A helytörténetírásnak pedig Kántor Sándorné Nagy kiskönyve után ezentúl ugyanúgy számolnia kell majd iskola- és tudománytörténet-írással, mint ma a folklórral és a helyi művészettel-irodalommal. S akkor talán meg fog nőni iskolák és tanárok és diákok helyi és országos megbecsülése és felelősségtudata. Az „Orando et Laborando” jegyében.

---

29 Kántorné id. mű p. 138.

30 Kántorné id. mű pp. 149–151.

31 Keresztesi Mária: A magyar matematikai műnyelv története. Debrecen, 1935. 34 p. (Közlemények a Debreceni Tudományegyetem Matematikai Szemináriumából 11.)

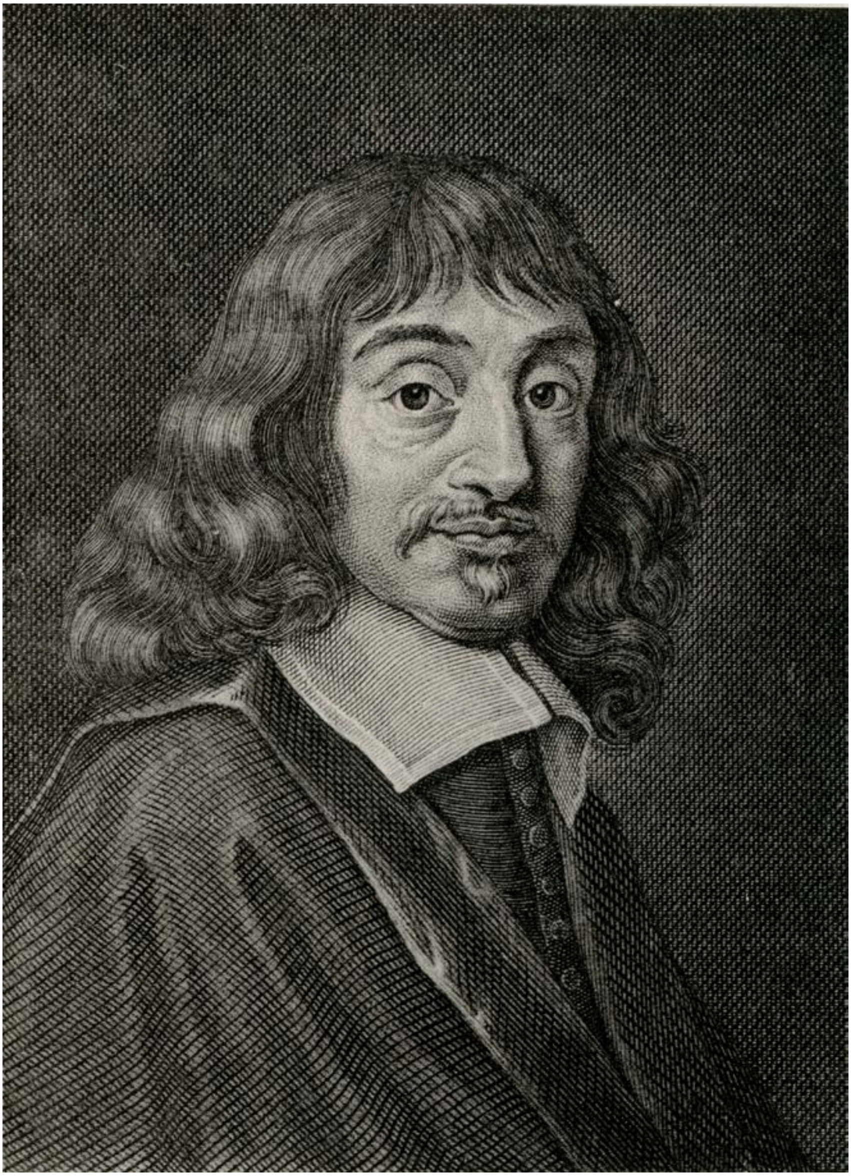
32 Kántorné id. mű pp. 147–149.

Az újkori matematikai történetéből

Vekerdi László korábban már digitalizált tanulmányaiból

Készült az NKA támogatásával 2013-ban

Online forráshely: http://vekerdi.tudomanytortenet.hu/



DESCARTES ÉRINTŐSZERKESZTÉSI MÓDSZERE[43]

Szinte hagyományossá vált már a matematikatörténet-írásban, hogy Descartes matematikáját „antiinfinitezimális”-nak tekintsék. Pedig a XVII. század nagy, egyedülálló matematikai élménye az infinitezimális számítás, a „kalkulus” megteremtése volt. S Descartes, akit minden matematikatörténész a legnagyobb XVII. századi matematikusok közé sorol, éppen a század legnagyobb matematikai vállalkozásából maradt volna ki? Miért, s hogyan lehet akkor a század csaknem minden nagy matematikusának tanítómestere, miért belőle indulnak ki s ellene futnak össze a század szenvedélyes matematikai vitái? A legenda, amit – ha ugyan máig legnagyobb biográfusának, Charles Adamnak hinni lehet – már maga elkezdett szőni önmaga körül, nőttön nőtt a matematikatörténészek szorgos kutatásai következtében is.

DESCARTES MATEMATIKAI MŰVEINEK BEOSZTÁSA

Descartes hatalmas matematikai munkásságát az Adam–Tannery-féle kiadás kötetei szerint lehet legkönnyebben beosztani. A VI. kötet tartalmazza azt a matematikát, amit sokáig hittek a *par excellence* kartéziánus matematikának: a ’Geometrie’-t. A X. kötetben van korai matematikai munkássága a ’Regulae’-val bezárólag. Az első öt kötet tartalmazza szétszórva, levelezés formájában a descartesi matematika legérdekesebb részét, az infinitezimális problémákat, vagy ahogyan a modern kritika szereti nevezni: az infinitezimális számítás descartesi „pótlékait”. A három rész szervesen egybefonódik, és csak egymás segítségével érthető meg. A ’Geometrie’ algebrája nem érthető meg a ’Regulae’ gondolkozási szabályai nélkül, s a ’Geometrie’ jelentőségéből úgyszólván semmit sem

[43] Előzménye: Vekerdi László: Descartes érintőszerkesztési módszere. = Matematikai Lapok 17 (1966) No. 1–2. pp. 165–179.

lehet megérteni a levelezés hatalmas és széleskörű alkalmazásai nélkül. A descartesi tudományt és filozófiát csak kiadói és didaktikai szempontokból lehet részekre osztani, ha valamit is meg akarunk érteni belőle, elkerülhetetlen az egész 'Oeuvre' ismerete.

A 'Levelezés' néhány jellegzetessége

A kartéziánus matematika megértéséhez a 'Levelezés' a kulcs. Descartes 'Levelezés'-e különleges gonddal felépített „tudományos dolgozatok" sorozata. Descartes szakmai természetű leveleit eleitől fogva nyilvánosságnak szánta, s míg egyébként idegenkedett a publikálástól, levelezését annyira közügynek tekinti, hogy akik nem voltak hajlandók leveleik kiadásába beleegyezni, azokkal egyáltalán nem levelezett. Amikor Fermat húzódozott levelei kiadásától, kizárólag Mersenne atya nyomatékos kérésére folytatta vele tovább alapvető fontosságú matematikai vitáját. A 'Levelezés' matematikáját leghelyesebb talán folyóirat-pótló közleménysorozatként felfognunk, amelynek elterjedését a Mersenne-féle levelezési szervezet biztosította, s az általa keltett viták során a kor egyik legfontosabb matematikai inspirátora lett.

A 'Levelezés' matematikájának a hatása sokkal nagyobb volt, mint ma hisszük. A XVII. század közepén egyetlen matematikus sem volt mentes tőle. Elsősorban a 'Levelezés'-hez fűződtek a holland kommentátorok munkái, s ezek igen népszerűek voltak az új tudomány egyik legfontosabb műhelyében, Angliában. „Mr. Moore-nak és másoknak igen nagy véleménye van Huddeniusnak Des Cartes végéhez írott jegyzeteiről"[44] – írja a XVII. századi angol matematika páratlan ügyvivője, Collins. S mikor Clerselier kiadja Descartes 'Levelezés'-ét, a kötetek Angliában is azonnal keresettek lesznek. „Meg van nekem Des Cartes *Levelei*nek első két kötete franciául – írja Collinsnak egy levelezője –, de hiányzik a harmadik; és ezt öntől kell kérnem. Mindegy franciául vagy angolul küldi..."[45]

Ez az olvasó nem tartozott a nagy matematikusok vagy filozófusok közé, egyszerű művelt ember volt, s ez a tény nagyon fontos Descartes hatásának a megértése szempontjából. A XVII. század második felében Descartes nem a válogatott kevesek olvasmánya volt, minden magát műveltnek tartó ember kötelességének vélte olvasni. A XVII. század gondolatvilága annyira telítve volt matematikával, hogy a matematikai ismeretek magától érthetően hozzá tartoztak a műveltség fogalmához. Érhető, hogy Descartes matematikájának a hatása sokkal mélyebb és szélesebb körű volt, mint azt ma a reá hivatkozó viszonylag kevés idézetből sejthetjük.

[44] Correspondence of scientific men of the seventeenth century. Ed. by Stephen Peter Rigaud, 2 vols. Oxford, 1841. (Továbbiakban: Corr. Rigaud) I., 50, Collins to Dr. Pell, April 9., 1667. 127.

[45] Corr. Rigaud I., 71, Towneley to Collins, Jan. 4., 1671/2. 184.

Ebből a szempontból igen fontos az a tény, hogy Descartes ’Levelezés’-ében – ellentétben a század más nagy tudósaival – úgyszólván sohasem ír olyan dolgokról, amiket megjelent, készülő vagy tervezett könyveiben tárgyal. 1629-től, amióta a ’Geometrie’-n dolgozik, a könyv megjelenéséig (1637) alig fordul elő ’Levelezés’-ében matematika, a ’Geometrie’ megjelenését követő évek matematikája pedig már egészen másféle matematika, inkább alkalmazása és folytatása a ’Geometrie’ matematikájának.

A ’Levelezés’ matematikájának beosztása

A ’Levelezés’ matematikájának egyik nagy fejezete a ciklois körül csoportosul. Különösen a ciklois alatti terület kiszámítására végzett vizsgálatai fontosak, mert ezekben először határozta meg pontosan, s méghozzá konstruktív úton azt a fogalmat, amit évszázadokkal később „határozott integrál”-nak nevezett a matematika.[46]

A ’Levelezés’ matematikájának második nagy csoportja az érintő szerkesztésére vonatkozó kérdésekből áll. Az érintőszerkesztés problémáját már a ’Geometrie’-ben tárgyalta, azonban a modern matematikatörténet-írás Descartes módszerét s jelentőségét is teljesen félreismerte a XVII. századi matematika legnagyobb ismerőjének, J. E. Hofmannak alapvető közleményéig. Hofmann mutatta meg, hogy a ’Geometrie’ egyik célja éppen az érintőszerkesztés megoldása a görbék esetében.[47] A ’Levelezés’-ben Fermat-val és híveivel folytatott szenvedélyes vita során ezt a módszert általánosítja és elmélyíti, a módszer pontos algoritmusának a kidolgozásán keresztül a differenciálszámítás egyik legkorábbi előfutára lesz.

A harmadik nagy problémakör, amit a ’Levelezés’ matematikája tárgyal, az ún. „fordított érintő feladat”. Ennek az a lényege, hogy meg kell keresni egész általánosságban valamely adott érintési feltételeket kielégítő görbét. Descartes felismeri, hogy ez a feladat csak a területszámítással rokon művelet segítségével oldható meg. Modern terminológiában kifejezve azt mondhatnánk, hogy Descartes egy konkrét esetben az ún. De Beaune-feladat esetében megkeresi a derivált függvény primitív függvényét, azonban ha valójában ezt végzi is el, az elnevezés anakronisztikus, mert Descartes sem a függvény, sem a határátmenet fogalmát nem ismeri. Descartes az antik kimeríthetetlenségi eljárást adaptálja a feladat megoldására. De ezt az eljárást addig kizárólagosan csak területszámításra alkalmazták, s a módszer új kontextusban való használata előkészítette

[46] Vekerdi László: Descartes infinitezimális módszere a ciklois-terület meghatározására. Matematikai Lapok 15, 196–203. 1964.

[47] Scholz, H. – Kratzer, A. – Hofmann, J.: Descartes. Drei Vorträge. Münster, Westfalen, 1951, 64–66.

az utat területszámítás és érintőszerkesztés közötti összefüggés felismeréséhez. Ahhoz a problémakörhöz, amit később „az integrál és differenciálszámítás alaptételének” neveztek el, s aminek a felfedezését Barrow-nak, Leibniznek vagy Newtonnak szokás tulajdonítani.[48]

FERMAT ÉS DESCARTES VITÁJA AZ ÉRINTŐSZERKESZTÉSRŐL

Ezt a hosszú és elkeseredett vitát már Montucla Fermat javára döntötte el, s azóta több matematikatörténész ismételte véleményét. Moritz Cantor szerint a „hiú” Descartes egyszerűen nem akarta megérteni Fermat zseniális módszerét, bosszúból, mert Fermat lebecsülte ’Dioptrique’-ját, amit Mersenne még kéziratban odaadott volt neki.[49] Lényegében ugyanez a véleménye Jean Itardnak,[50] de ugyanígy vélekedett már Milhaud is, és ezt vette át Yvon Belaval.[51] Szerinte Descartes Fermat eljárását kritizáló leveleiben ugyanazt végzi el, „amit Fermat, csak Fermat felismeri, hogy határátmenetről van szó”, Descartes pedig „szokása szerint” megkerüli a határátmenetet.[52]

Helytálló-e ez az általánosan elfogadott interpretáció? Valóban nem érti Descartes a Fermat-féle eljárást? És mindenek előtt vajon szabad-e Fermat eljárásával kapcsolatban „határátmenetről” beszélni? A kérdések megválaszolására analizáljuk először Fermat eljárását, s azután vizsgáljuk meg a módszer Descartes általi kritikáját.

Fermat érintőszerkesztési módszere maximum-minimum eljárásán alapul. A Fermat-féle maximum-minimum eljárást Moritz Cantor foglalja össze legvilágosabban: „Tegyünk a maximummá vagy minimummá teendő kifejezésben az A ismeretlen helyébe egy két ismeretlenből álló $A + E$ összeget, és tekintsük a két kifejezést megközelítőleg egyenlőnek (adaequentur)... Ezután a megközelítőleges egyenlővé tevés után töröljük mindkét oldalon ami törlendő, és ezáltal csupa E-t tartalmazó tagokat kapunk. E-vel osztva és újból egyszerűsítve töröljük (elidantur) a még E-t tartalmazó tagokat. A fennmaradó egyenlet szolgáltatja A azon értékét, amely maximummá vagy minimummá teszi a kérdéses kifejezést.”[53]

[48] Lásd kötetünkben Vekerdi László: ’A newtoni infinitezimális analízis kialakulása a XX. századi matematikatörténet-írás tükrében’ c. tanulmányt!

[49] Cantor, M.: Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Zweiter Band, erster Halbband, von 1200–1650. Leipzig, 1899, 374.

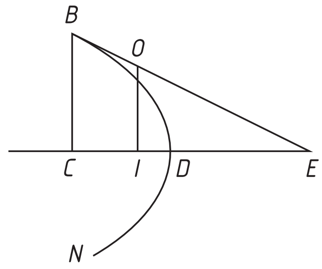
[50] Itard, J.: Le XVII[e] siècle, sciences mathématiques et physiques = Historie générale des sciences publiée sous la direction de R. Taton, II, Paris, 1958, 207–276, 222.

[51] Belaval, Y.: Leibniz, critique de Descartes. Paris, 1960, 305.

[52] Uo. 307.

[53] Cantor, M.: im. 858.

Ezt az elvet a következőképpen alkalmazta Fermat az érintőszerkesztésre: „Legyen adva pl. a *BDN* parabola, melynek *D* a csúcsa, *DC* a tengelye, legyen adva a parabolán egy *B* pont, húzzunk *B* ponton keresztül *BE* egyenest, amely érinti a parabolát és *E* pontban metszi *CD* egyenest. Vegyünk fel a *BE* egyenesen egy tetszőleges *O* pontot, húzzuk meg az *OI* ordinátát, *B* pontból pedig a *BC* ordinátát, akkor azt látjuk, hogy $\frac{CD}{DI} > \frac{BC^2}{OI^2}$, mert az



7. ábra

O pont kívül esik a parabolán. De $\frac{BC^2}{OI^2} = \frac{CE^2}{IE^2}$ a háromszögek hasonlósága miatt. Tehát $\frac{CD}{DI} > \frac{CE^2}{IE^2}$. Mármost *B* pont adott, tehát *BC* ordináta is, tehát *C* pont és *CD* szakasz is. Legyen tehát $CD = d$ adott. Vezessük be a $CE = a$ és $CI = e$ jelöléseket, akkor

$\frac{d}{d-e} > \frac{a^2}{a^2+e^2-2ae}$. Képezzük a kültagok és a beltagok szorzatát:

$$da^2 + de^2 - 2dae > da^2 - a^2e.$$

Tekintsük a fenti módszer szerint a két oldalt megközelítően egyenlőnek (adaequentur), akkor az azonos tagok törlése után

$$de^2 - 2dae = -a^2e$$

marad, vagy ami ugyanaz:

$$de^2 + a^2e = 2dae.$$

Osszunk minden tagot *e*-vel:

$$de + a^2 = 2da.$$

Hagyjuk el (elidatur) *de*-t, marad

$$a^2 = 2da, \quad \text{tehát} \quad a = 2d.$$

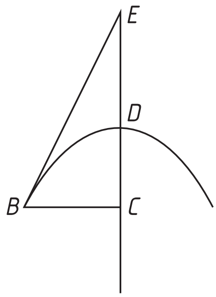
Így bebizonyítottuk, hogy *CE* kétszerese *CD*-nek, ami megfelel az igazságnak.”[54]

Descartes szerint azonban Fermat semmit sem bizonyított be. Szabály és példa egyaránt hibás. 1638 januárjában ezt írta[55] erre vonatkozóan

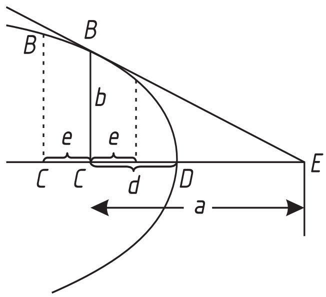
[54] Modern átírásban közöljük, J. Itard szerint (im. 221). Eredeti formájában a régi jelölés miatt nagyon körülményes.

[55] Descartes levele Mersenne-hez 1638 januárjában. Descartes, Œuvres, Adam–Tannery-féle kiadás (továbbiakban AT) I, 487–488.

Mersenne-nek: „Legyen *BDN* az adott parabola, melynek *DC* a tengelye, és amelynek *B* pontjából kell húzni *BE* egyenest, amelyik *DC* egyenest *E* pontban metszi úgy, hogy *BE* egyenes leghosszabb legyen *E* pontból a parabolához húzható egyenesek között: sic enim proponitur quaerenda maxima (így tűzi ki ugyanis a maximum feladatot). Az ő szabálya így szól: „...Descartes a következőkben körülményesen, Fermat régi írásmódjában, helytelen következtetést vezet le, Descartes saját írásmódjába áttéve a következőképpen szól:



8. ábra



9. ábra

Tekintsünk két esetet. Legyenek első esetben $BC = b$, $EC = a$, $CD = d$. Ekkor az *EBC* derékszögű háromszögből $BE^2 = a^2 + b^2$.

Legyen most második esetben (9. ábra szaggatott vonal) $EC = a - e$, vagy ami az eredmény szempontjából ugyanaz, $EC = a + e$ és ugyanígy legyen $CD = d + e$. Ennek a második esetnek megfelelő *BC* ordináta kiszámítható a parabola tulajdonságát kifejező $\frac{BC^2}{d+e} = \frac{b^2}{d}$ arányból:

$$BC^2 = \frac{b^2(d+e)}{d} = \frac{b^2 d + b^2 e}{d}.$$

Mármost hozzáadva $EC = a + e$ négyzetét, ebből a második (szaggatott vonalhoz tartozó) háromszögből is megkapjuk ennek az esetnek megfelelő BE^2-et. Ezt egyenlővé téve az első esetben kapott BE^2-tel:

$$a^2 + b^2 = b^2 + \frac{b^2 e}{d} + a^2 + 2ae + e^2.$$

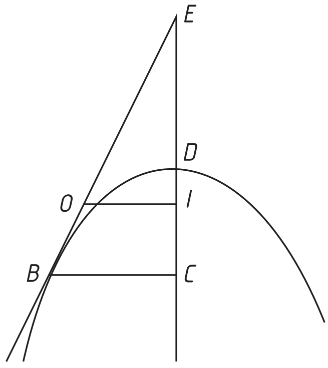
Osztva *e*-vel

$$\frac{b^2}{d} + 2a + e = 0$$

marad. Elhagyva (elidantur) *e*-t,

$$\frac{b^2}{d} + 2a = 0,$$

„ami egyáltalán nem adja meg az érintő értékét, mint a szerző állítja, következésképpen szabálya hamis.”



10. ábra

Descartes tévedését azonnal észrevették Fermat barátai: hevesen tiltakoztak Descartes érvelése ellen. A parabola érintőszerkesztésében – mondották – az a lényeges, hogy a második esetben a *BE* egyenesen vegyünk fel egy tetszőleges *O* pontot, aminek nem szabad – mint Descartes tette – a parabolán feküdni. Ugyanis az a fontos – érveltek –, hogy *CD* aránya *DI*-hez nagyobb legyen, mint BC^2 aránya OI^2-hez, s ehhez szükséges, hogy *OI* nagyobb legyen, mint a parabola *I* pontban emelt ordinátája.

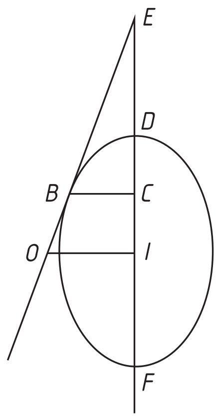
Descartes szerint[56] azonban ez sem segít. Ugyanis ugyanez az egyenlőtlenség felállítható a másik két kúpszelet, az ellipszis és a hiperbola esetében is, s mégis *ugyanaz* a számítás, amelyik a parabolánál helyes eredményre vezet, az ellipszis és a hiperbola esetében hibás értéket ad.

Descartes kritikájára Roberval válaszolt,[57] 1638 áprilisában. „Monsieur Descartes – írja – szokása szerint olyan okoskodást fabrikált, amelyikről azt akarja elhitetni, hogy Monsieur de Fermat okfejtése.” De helytelenül járt el, mert csak az *E* felé eső részen tekintette az ellipszisnél az *O* pontot az érintőn, pedig a *B* pont másik oldalán is kellett volna tekintenie az érintő pontjait, s akkor látta volna, hogy itt nem érvényes az, hogy $\frac{CD}{DI}$ nagyobb mint $\frac{BC^2}{OI^2}$, és így az ellipszis esetében magától érthetően *nem* szabad alkalmazni ezt az arányt. A használt egyenlőtlenség specifikusan csak a parabolánál érvényes az érintési pont mindkét oldalán, éppen ezért használta a parabolánál Fermat. Az ellipszis és hiperbola esetében más, csak ezekre érvényes specifikus tulajdonságokból kell kiindulni. Descartes tehát igen súlyos hibát követ el újra, ami „nagyon figyelemre méltó annál, aki a helyes gondolkozás módszeréről értekezett, mert egyenesen ellentétben van a helyes gondolkozás és az igazi logika szabályaival, amely azt tanítja, hogy ahhoz, hogy valamely tárgy specifikus tulajdonságaira következtethessünk, azokban a propozíciókban, melyekből az okfejtés áll, ugyanazon tárgy legalább egy másik specifikus tulajdonságát kell alkalmaznunk, azaz a saját természetéből kell következtetnünk, ami csak hozzá tartozik.” Ezzel szemben Descartes „szokása szerint gyárt egy

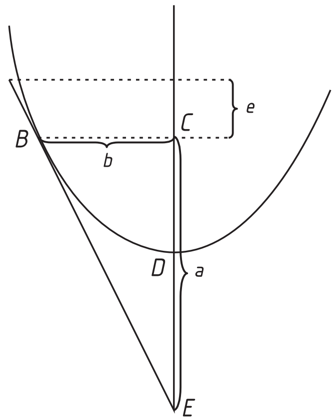
[56] Descartes levele Mersenne-hez 1638. március 1-jén. AT II, 1–15.
[57] Roberval Descartes ellen. Paris, 1638. április. AT II, 103–115.

okoskodást, amelyben csupa olyan általános tulajdonságot alkalmaz, amely tulajdonságok nem csak minden kúpszeletre, de még az egyenesre is állanak, anélkül, hogy bármiféle specifikus tulajdonságot alkalmazna".[58]

Descartes hangsúlyozza válaszában,[59] hogy éppen maga Fermat állította módszeréről, hogy az általános érvényű, minden görbénél alkalmazható. Az a feltétel pedig, hogy csak a parabola esetében áll az alapul szolgáló egyenlőtlenség az érintési pont mindkét oldalán, egyáltalán nem magától értetődő dolog, ha dolgozni akarunk vele, külön ki kell jelenteni. S éppen ezt mulasztja el Fermat, aki a *B* pontot az érintő *végpont*jának tekinti. A következőkben azután Descartes részletezi, mit csinált szerinte Fermat.



11. ábra



12. ábra

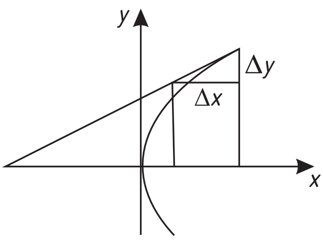
Eljárásának lényege az, hogy a kis *e* távolsággal megnövelt *a*-nak megfelelő *BC*-t *két* módon kell kifejezni: egyszer *BCE* és az *a* befogó *e*-vel való megnövelésével kapott háromszögből azon az alapon, hogy *a* úgy aránylik *b*-hez, mint $a + e$ aránylik *b* megfelelő értékéhez; másodszor pedig a $BC = b$ távolságot mint a parabola ordinátáját kell kifejezni a parabola „specifikus tulajdonságaiból", egyenletéből.

A két módon kifejezett *BC*-t egyenlővé kell tenni, s a továbbiakban már teljes joggal alkalmazható a Fermat által adott szabály. A *végeredmény*t Fermat is helyesen kapta meg, de elmulasztotta a fenti feltétel kimondását, s ami semmi egyéb – írja Descartes –, mint amit ő a 'Geometrie-ben' használt, „és ez az az alap, amire Mr. F. szabályának is épülnie kell. Abból, hogy elhagyta úgy látszik, hogy csak tapogatózás útján találta szabályát, vagy legalábbis az, hogy nem érti tisztán az elveit."[60]

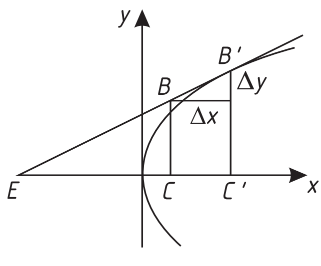
[58] Uo. 111–112.
[59] Descartes levele Mersenne-hez 1638. május 3-án. AT II, 122–132.

Matematikusok és matematikatörténészek már Montucla óta szerették volna, ha Fermat valamiféleképpen a szelő határhelyzeteként határozta volna meg az érintőt, előre megsejtvén vagy éppen megalkotva ezáltal a „differenciálhányados” fogalmát.[61] Éppen ezért írnak mindenütt „megközelítően egyenlőt” Fermat kategorikus „tegyük egyenlővé”-je helyett, még az egyébként pontosan idéző Itard is így fordította a szót Fermat érintőszerkesztésének fentebb idézett modern átírásában. Fermat azonban *ténylegesen* egyenlőségnek tekintett egy egyenlőtlenséget, s ez a határérték fogalmának az ismerete előtt két évszázaddal a matematikai pontossághoz ragaszkodó Descartes-nak joggal sérthette a szemét. Még másik szépséghibája is volt Fermat eljárásának. Nem tudta pontosan meghatározni, miért és mire alkalmazza az érintő meghatározásánál „maximum-minimum” módszerét. (Fermat módszerének erre a hiányosságára Turán professzor hívta fel a figyelmemet.) Egyenlőtlenségek alkalmazása maximum-minimum problémák megoldására ekkoriban már egyáltalán nem volt újság,[62] de Fermat éppen roppant szerencsés algoritmusával nagy egyszerűsítést tett lehetővé ezen az addig minden esetben külön, egyedi megfontolást igénylő területen. Ez magában véve is óriási dolog, függetlenül attól, hogy maximum-minimum algoritmusában a „határérték” fogalmát sejtette-e meg, vagy sem. Érthető, hogy eljárását minél több területen igyekezett gyümölcsöztetni, valószínűleg ez a vágy vezette a fénytörés problémájához is a fizikai kérdésektől egyébként kissé idegenkedő nagy matematikust.

A módszer az érintő szerkesztésében is kiválóan alkalmazható volt, de alkalmazásának körülményeit Fermat nem rögzítette. Éppen ebből a szempontból olyan fontos Descartes közbelépése. A helyzet könnyebb megértése kedvéért tekintsük át a vita eddigi lépéseinek lényegét.



13. ábra



14. ábra

[60] Uo. 129.

[61] Lásd pl. Bell, E. T.: The development of mathematics. New York, 1945. 143–145.

[62] Ez az egyenlőtlenséggel való megoldása szélsőérték problémáknak jól ismert volt az itáliai matematikában, gyakran alkalmazta pl. Torricelli. L. pl. Hofmann, J. E.: Geschichte der Mathematik II. Berlin, 1957, 28. Továbbá C. B. Boyer: The history of the calculus. New York, 1959, 157.: „However, whereas Torricelli had made use of arguments by a reductio ad absurdum, Fermat's characteristic procedure resembles more closely the method of limiting values.”

Legyen adva egy másodfokú parabola csúcsával a koordinátarendszer kezdőpontjában (14. ábra). *B* pontban az érintőt megtalálhatjuk a Δx és Δy befogójú „karakterisztikus háromszögből” illetve a parabola egyenletéből. Semmit nem kell „maximummá tenni”, jóllehet ugyanazt az algoritmust kell használni, mint a szélsőérték-feladatoknál: a differenciálhányados kiszámítását. Fermat és kortársai azonban ezt a fogalmat nem ismerték, annál inkább a maximumét. Descartes is elhiszi Fermat-nak először, hogy valóban maximalizál valamit, s tévesen a görbe pontjainak meg az *E* pontnak a távolságára gondol, ezért veszi fel hibásan a számításhoz használt segédpontot az érintő helyett a görbén (9. ábra). Fermat és barátai tiltakoznak: ebben az esetben nem írható fel a maximum-feladat, mert a kiinduló *egyenlőtlenség* nem érvényes. Descartes viszont szellemes ellenpéldát hoz: ugyanez az egyenlőtlenség *más* görbék esetében is felírható, nemcsak a tárgyalt parabolánál, azoknál viszont helytelen eredményre vezet. Roberval most felismeri – talán éppen azért támad olyan mérgesen –, hogy a lényeg nem annyira az egyenlőtlenségen meg a „maximalizáláson” van, hanem a görbe „specifikus tulajdonságán”, egyenletén. Most már Descartes világosan látja Fermat eljárásának lényegét: az érintőt a parabola egyenletéből meg az *EBC* és *EB’C’* háromszögből kell meghatározni. Ahogyan ma mondanánk, a Δx, Δy által adott „karakterisztikus háromszögből” (14. ábra). Azután megmutatja, hogy ilyen körülmények között a Fermat-féle számítás a görbék egy speciális osztályánál, az algebrai egyenlettel előállítható görbéknél egzakt módon elvégezhető.

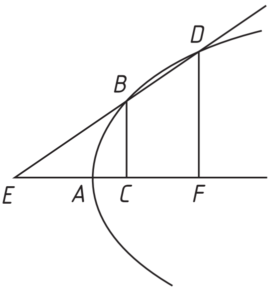
AZ ÉRINTŐ ÉS SZELŐ VISZONYA

Fermat szerint – mint Descartes-ig mindenki szerint – görbe és érintője egyetlen pontban találkozott, módszerének lényegéhez tartozott ez a fogalmazás. Descartes fedezte fel, hogy az érintési pontban görbének és érintőnek két közös pontja van, hogy „egybeejteni”, s nem „törölni” kell valamit. Felfedezést és módszert pontosan megfogalmazta 1638 nyarán Cl. Hardynak írt levelében.[63] Hardy egyike volt azon kevés matematikusoknak, akikről feltételezte, hogy értik a ’Geometrie’-t, ezért már saját új stílusában írt neki.

„Legyen tehát – írja – az adott görbe vonal *ABD* és legyen adva a vonal *B* pontja is, ti. megadom a $BC = b$ ordinátát és az $AC = c$ átmérőt, és keressünk ezen az átmérőn egy olyan *E* pontot, hogy az *E* ponton és *B* ponton át húzott egyenes messe a görbét még egy másik pontban, mondjuk *D* pontban úgy, hogy *DF* ordináta adott arányban legyen *BC* ordinátához, mondjuk mint *g* aránylik *h*-hoz. Jól tudja, hogy eme *E* pont

[63] Descartes levele Hardyhoz 1638 júniusában. AT II, 163–173.

megkeresésére először is azt mondhatjuk – $CE = a$ és $CF = e$ jelölés bevezetésével –, hogy az ECB és EFD háromszögek hasonlósága miatt $CE = a$ úgy aránylik $BC = b$-hez, mint $EF = a + e$ aránylik DF-hez, mely utóbbi ennek következtében $DF = \dfrac{ba + be}{a}$.



15. ábra

Azután, mivel DF a görbe ordinátáinak egyike, megadható más tagokkal is, melyek különféle görbék esetében különbözőek lesznek. Pl. ha a görbe az első azok közül a vonalak közül, melyeket Monsieur de Fermat a parabola mintájára képzelt el, azaz az, melynél az átmérő egyes szakaszai úgy aránylanak egymáshoz, mint az ordináták köbei, akkor azt mondjuk, hogy $AC = c$ úgy aránylik $FA = (c + e)$-hez, mint BC köbe, ami b^3, aránylik DF köbéhez, ami a fentebb talált tagokkal kifejezve

$$\frac{b^3a^3 + 3b^3aae + 3b^3aee + b^3e^3}{a^3},$$

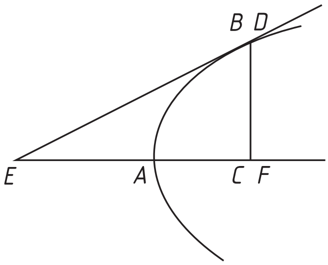
mert ez $\dfrac{ba + be}{a}$ köbe."

Ebből az aránypárból azután kapunk egy egyenletet a és e-re:

$$a^3 = 3caa + 3cae + cee.$$

Mivel egy egyenletünk van két ismeretlenre, szükség van még egy egyenletre. Ezt az egyenletet a $\dfrac{BC}{DF} = \dfrac{g}{h}$ aránypárból kapjuk. A két egyenletből meghatározható a két ismeretlen, a és e.

Mármost ha ezt a módszert az érintő megkeresésére akarjuk alkalmazni, „csupán azt kell tekintetbe venni, hogy amikor az EB egyenes érinti a görbét, akkor DF egybeesik BC-vel", azaz arányukból egyenlőség lesz, s ha az előbb, amikor EBD egyenes B és D pontokban metszette a görbét $\dfrac{BC}{DF} = \dfrac{g}{h}$ állott, most, mikor EB érintő lesz, $g = h$. S akkor a fenti $DF = \dfrac{ba + be}{a}$ kifejezést betéve $BC : DF = g : h$ aránypárba, mivel $BC = b$, a $bh = \dfrac{gba + gbe}{a}$ egyenletet kapjuk, azaz $ha = ga + ge$, „és mivel $h = g$, csupán $a = a + e$ marad, azaz e egyenlő zérussal. Ebből nyilvánvaló, hogy a értékének a megkeresésére nem kell egyebet tenni, mint az első egyenletben, ami $a^3 = 3caa + 3ace + cee$, minden e-vel szorzott tag helyébe zérust kell helyettesíteni, azaz törölni. Mert egy valódi mennyiséget megszorozva egy másik képzelt mennyiséggel, amilyen a nulla, az eredmény mindig zérus. És ez Monsieur Fermat homogének elisiója, ami így bevezetve semmiképpen sem gratis. Elvégezve az elisiot, egyenletünkből $a^3 = 3caa$ marad, azaz $a = 3c$”, ami valóban a harmadfokú parabola érintőjét adja meg.



16. ábra

„Íme a szabály alapja. Virtuálisan két egyenlet szerepel benne, jóllehet elegendő egyet említeni explicite, mivel a második csupán a homogének törlésére szolgál. De nagyon valószínű, hogy Monsieur Fermat ezt a pontot nem értette meg; és csak próbálgatással jött rá, hiszen kihagyja a legfontosabb feltételt.”

Foglaljuk össze Descartes eljárását. Az érintő két egyenlet két ismeretlenének a meghatározásából adódik. Az egyik egyenlet a görbe egyenlete, a másik egyenlet egy, a görbét metsző egyenes egyenlete. Érintő esetében a görbe és a szelő két metszéspontja egybeesik.

Nem „határhelyzete”[64] itt sem az érintő a szelőnek. De Descartes felismeri, s a görbék egy speciális csoportjánál, az algebrai egyenlettel megadható görbéknél pontosan ki is fejezi az érintő és a szelő közötti összefüggést. Hasonlóan, a görbe és a görbét metsző kör egyenletéből határozta meg már a 'Geometrie'-ben az érintőt. Ez az eljárás algebrailag éppen olyan kifogástalan volt, mint a 'Levelezés' most ismertetett érintőmódszere. Hiányzott azonban belőle a továbbfejlődés lehetőségének az a magja, amelyet a Fermat-módszer kritikája során született eljárás olyan világosan megfogalmaz: az érintő és a szelő viszonyának a felismerése. Ahhoz, hogy általános, nem csak algebrai görbék esetében érvényes módszer születhessen, meg kell majd mozdítani az ábrát. Akkor azután – mint Leibniz felismeri – a szelő minden határon túl közelít az érintőhöz, s a g és h mennyiségek aránya pedig – ez Newton „végső arányok módszerének” a lényege – az egyhez.

[64] Vö. C. B. Boyer im. 167.: „In criticising Fermat’s method of tangents, Descartes attempted to correct the method by interpreting it in terms of equal roots and coincident points, a procedure which was practically equivalent to defining the tangent as the limit of a secant. Descartes did not express himself in this manner, however, inasmuch as the concept of a limit was far from clear at this time. Fermat, who was thinking of infinitesimals, could not see that his method had anything in common with the algebraic (limit) method of Descartes and so precipitated a quarrel as to priority…” A *mai* ismeretek szempontjából Boyer interpretációja nagyjából azonos azzal, amit a fentiekben kifejtettünk. De a történelmi fejlődés szempontjából az volt a fontos, hogy Descartes, ha csak a matematika szűk területén is, tiszta, modellként alkalmas eljárást teremtett az érintőszerkesztésre.

Descartes azonban nem dolgozott átmenettel, nem mozdította meg ábráját. Talán azoktól a pontatlanságoktól félt, melyekbe – a határátmenet pontos fogalma nélkül – Newton és Leibniz is belekeveredtek. Talán azért, mert azoknak a görbéknek az esetében, melyeket ő a matematika fejlődése szempontjából legfontosabbnak tartott, az algebrai egyenletekkel kifejezhető görbék esetében, erre nem is volt szükség. A szelő ill. a megfelelő *e* mennyiség bevezetésével itt úgy kaphatunk érintési feltételt, hogy nincs szükség határátmenetre. De ebből nem következik – s éppen ez a felismerés Descartes nagy tette –, hogy az érintőnek és görbének egy közös pontja lenne, mint Fermat hitte, s így elég lenne *egy* egyenlet a meghatározására. Az érintőnek két közös pontja van a görbével, két egybeeső „metszéspontja”, amit két egyenletből kell meghatározni, a görbe és a szelő egyenletéből. A görbének azért van érintője, mert ennek a két egybeeső pontnak a környezetében megközelítően egyenesnek tekinthető. Ma úgy mondanánk: kicsiben lineáris.

Hofmann vette észre, hogy Leibniz a kartéziánus matematika „mélyebb intencióit”[65] ismeri fel s fejleszti ki infinitezimális számításában. Maga Descartes azonban a tiszta és pontos fogalmazás érdekében óvakodott az infinitezimális megfontolást igénylő problémáktól, holott ismerte és több helyen érintette. Szabó Árpád[66] mutatta meg, hogy az eleata filozófia nyomán tájékozódó görög matematika egyik legnagyobb tette a püthagoreus matematika naiv infinitezimális fogalmainak a kritikája volt. S ugyanúgy, ahogyan az eleata Zénon ún. „végtelen ellenes” paradoxonai állanak a görög infinitezimális matematika, azaz az eudoxoszi arányelmélet és az exhauszciós módszer eredeténél, a nyugat-európai infinitezimális kalkulus kialakulását Descartes reformjai: jelölési módja, érintőmódszere és ún. „anti-infinitezimalizmusa” igen nagy mértékben determinálták. Descartes mérte fel elsőnek a végtelen szelő és érintő között tátongó szakadékát, mint egykor az eleata Zénon pontok végtelenségének megmérhetetlen örvényét rész és egész között. Így kell érteni Descartes kritikájának állandóan visszatérő mondatát.

A matematika fejlődése szempontjából nagyon lényeges volt, hogy Descartes olyan durván szétválogatta a geometrikus és mechanikus, „pontos”, algebrai egyenlettel megadható és meg nem adható problémákat. Ezáltal geometriai görbék esetében pontos kritériumát tudta adni az érintő létezésének. És ezzel a valóságba, azaz a létezők tiszta és világos fogalmakból álló világába, a kartéziánus létezés világába horgonyozta le

[65] Scholz, H. – Kratzer, A. – Hofmann, J.: im. 73.

[66] Szabó Á.: The transformation of mathematics into deductive science and the beginning of its foundation of definitions and axioms. Scripta Mathematica 27, 27– 48A, 113–139, 1964.

az érintőt. Most már nyugodtan lehetett spekulálni azon, mi „történik” ha a szelő „közeledik” az érintőhöz.

Descartes még ennek a spekulációnak az irányát is megsejtette: olyasmi történik, ami – bármi is legyen a kérdéses görbe egyenlete – kicsiben egyszerű szorzásra és összeadásra vezethető vissza. Ezt csak Leibniz fedezi majd fel a kartéziánus matematikában, maga Descartes elfordul a végtelen örvényétől, melyet éppen az ő tiszta és világos különbségtevése tett láthatóvá.

De az új matematika nyelvét, s legfontosabb alapfogalmaiból álló nyelvtanát, melyeken keresztül majd legyőzhetők lesznek a végtelen nehézségei, ő teremtette meg olyan területen, ahol ezek a nehézségek nem léptek fel. Ez a nyelv a ’Geometrie’, a harmadik a három nagy óriásesszé közül, melynek a ’Discours’ az előszava. A ’Levelezés’ matematikája bemutatja, hogyan kell az új nyelvet használni különféle – közöttük infinitezimális – esetekben, s hogyan kell az új matematikát fizikai kérdésekre alkalmazni.

A GEOMETRIE (1637) ÉS A DIFFERENCIÁLÁSI ALGORITMUS SZÜLETÉSE[67]

Descartes *Geometrie*-jét a XIX. század óta az analitikus geometria megteremtéseként ünnepelték. Így vezette ezt be M. Chasles, a XIX. század egyik leghíresebb geométere és matematikatörténésze, aki az analitikus geometria elõd nélküli, tökéletes formában való megjelenésének tekintette a *Geometrie*-t.[68] S így él ez máig a legtöbb matematikus képzeletében.

Pedig már a századfordulón figyelmeztetett rá egy kivételképpen matematikához is értő filozófus, Louis Liard, hogy „a cím ellenére, a látszat ellenére a *Geometrie* tulajdonképpen nem geometria, hanem algebrai[69] ... Annak a szövetségnek a célja, amit az algebra és a geometria között teremt, nem a geometria megújítása, hanem az algebra átvilágítása a geometriai intuíció tisztaságával. Amit kínál, az egy szóval kifejezve, egyenletek grafikus megoldása."[70]

Az analitikus geometria következménye lesz ennek az algebrai reformnak, de nem ez volt Descartes célja. Csak a már kialakult analitikus geometria felől visszatekintve, a helytelen perspektíva keltette azt a látszatot, hogy a *Geometrie*-ben geometriáról van szó. „Vissza kell fordítani ezt a hamis perspektívát; olyan rendbe kell állítani a dolgokat, amint azt a módszer előírta. Hűen módszeréhez, Descartes a tudomány reformját a legegyszerűbb dolgok tudományán kezdte el, ti. a viszonyokén és arányokén általában, vagy ahogy ő nevezte, az univerzális matematikán."[71] Ennek a módszernek az alapjait fiatalkori művében, a *Regulae*-ban fektette le. Liard szerint a *Regulae* semmi egyéb, mint általánosított arányelmélet. Liard ezt tekinti az egész későbbi cartesianus módszer kulcsának. „Végső

[67] Előzménye: Vekerdi László: A Geometrie (1637) és a differenciálási algoritmus születése. = A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai és Fizikai Osztályának Közleményei 15 (1965) No. 1. pp. 33–49.

[68] Chasles, M.: *Apercu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie.* Bruxelles 1837, 94–95.

[69] Liard, L.: *Descartes.* Paris ^{2}1903, 47.

[70] Uo. 62–63.

[71] Uo. 63.

analízisben a módszer célja összetett viszonyok képzése egyszerűek segítségével, mint ahogy a számolás a nagyobb számokat az egység megismétlésével konstruálja."[72]

A *Geometrie* későbbi interpretációi ennek a két iránynak a folytatásai. Akik a modern analitikus geometria felől közelednek hozzá, azok, mint Chasles, koordináta geometriát látnak benne, akik a *Regulae* felől, azok algebrát és arányelméletet.

Moritz Cantor[73] jól látta, hogy a *Geometrie*-ben az algebra a lényeg, de az egészet nem tartotta túlságosan újnak. Ezzel szemben Pierre Boutroux[74] szerint Descartes előtt az algebra zsákutcában volt, a továbbjutáshoz mindenekelőtt az egyenletek algebrai megoldásának az elméletét kellett megteremteni, s éppen ezt végezte el Descartes. Charles Adam[75] is az egyenletek elméletét tartja nagy újságnak a *Geometrie*-ben, ez teszi lehetővé a görbék algebrai kezelését. Tannery szerint viszont az a tény, hogy Descartes olyan nagy fontosságot tulajdonít a folytonos mozgás által szerkeszthető görbéknek, arra utal, hogy egy folytonos mozgáson alapuló görbeelmélet kiépítése lebegett a szeme előtt, az érintőszerkesztés módszerének általánosítása érdekében.[76]

Ezeket a század végi–század eleji interpretációkat ismétlik a későbbi történészek. Pl. L. J. Beck,[77] aki Liard interpretációját eleveníti fel, kidolgozva a *Geometrie* és a *Regulae* közötti összefüggéseket. Egy másik angol történész, J. F. Scott pedig Charles Adam értelmezését részletezi: „Minden algebrai számítás öt elemi műveletből, összeadásból, kivonásból, szorzásból, osztásból, gyökvonásból van összetéve. Hasonlóképpen, mondja Descartes, a geometriai szerkesztéseket öt megfelelő elemi szerkesztésből kell összetenni. Algebra és geometria így egymás struktúrájára vetnek fényt."[78]

A geometriai értelmezés felől közeledik a *Geometrie*-hez Morris Kline. Arra a hirtelen megnőtt szükségletre figyelmeztet, amit a XVII. század elejének technikai-természettudományos fejlődése támasztott a különféle görbékkel szemben. Az antikvitás görbéi nem voltak elegendőek ennek a keresletnek a kielégítésére. Itt lépett közbe Descartes. A görbét egy változó hosszúságú egyenes vonalszakasz mozgásaival állítja elő,

[72] Uo. 21.

[73] Cantor, M.: *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, II/1. von 1200–1650.* Leipzig ^{2}1899, 793–796.

[74] Boutroux, P.: *L'imagination et les mathématiques selon Descartes.* Paris 1900, 41.

[75] Adam, Ch.: *Wie et Œuvres de Descartes. Supplément a l'édition de Descartes*. Paris 1910, 214.

[76] Tannery, P.: „Les Excerpta ex MSS. R. Des-Cartes" *Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik. Neuntes Heft*, 1899, 501–513.

[77] Beck, L. J.: *The method of Descartes. A study of the Regulae.* London 1952.

[78] Scott, J. F.: *The scientific work of René Descartes*. London 1952, 90.

ezen egyenes és talppontjának egy választott kezdőponttól való távolsága között algebrai egyenletet állít fel, s így megadja a kívánt új módszert különféle görbék előállítására.[79]

Ezt az inkább ötletszerű interpretációt alapozza meg tudományos pontossággal D. T. Whiteside. Szerinte Descartes az algebrai görbéket „ponthalmazként” fogja fel, s az x, y koordináta hosszúságok közötti kapcsolat és a görbét kifejező egyenlet közötti aequivalencia analitikus feltételét adja meg $f(x, y) = 0$ formában. „Ilyen körülmények között csak akkor meglepő, hogy a *Geometrie* olyan nagy része foglalkozik egyenletek analízisével, ha elfogadjuk azt a modern szempontot, amely ezekben az eljárásokban pusztán algebrai technikát lát. Mélyebb szinten azonban a *Geometrie* nagy része az általános független-változós polinomot megszabó feltételeket kutatja –, amely vizsgálat közvetlenül kapcsolódik a geometriai pont (és vonal) halmazok elméletéhez.”[80]

Descartes matematikai módszerének egyik legutóbbi interpretátora, Jules Vuillemin szerint viszont Descartes az „algebrai függvények általános elméletét” redukálja a geometriai arányelméletre azáltal, hogy csak olyan görbéket enged meg, amelyeknek minden pontja megszerkeszthető. Ekkor a görbe egyetlen pontjának a megadásában sincs szükség megközelítésre, határátmenetre, mint az pl. a De Beaune-feladat görbéje esetében szükséges volt. „Csupán, mivel az analitikus geometria szemszögéből ítéltek, hihették azt, hogy Descartes számot és pontot azonosítva a pontból, azaz a számból indul ki az egyenes megszerkesztésében. Ez a reprezentáció azonban az utódoké, nem az övé. Az ő elve a pontos arányok elve, aminek a *Módszer* által kapott mennyiségek között kell fennállnia. A meghúzható vonalak között kétféle van: azok a görbék, amelyek algebrai egyenletnek felelnek meg, és az egyéb görbék. Az előbbiek Descartes szerint ... szabályozott, pontos és folytonos szerkesztés által keletkeznek. Az utóbbiak csak diszkontinuusan szerkeszthetők meg, grafikus eljárásokkal. Összefoglalva, a filozófus szándéka annak a befejezése volt, amit a görögök kezdtek el. A körzővel-vonalzóval való szerkesztés engedélyezése azt a bővített számtestet eredményezte, amiben csak négyzetgyökök fordultak elő; a Descartes által elfogadott szerkesztések rendeltetése az volt, hogy – modern kifejezést használva – megteremtse a számtest általános algebrai bővítését, a grafikus eljárásoknak átengedett transzcendens testbővítés kizárásával.”[81]

Lényegében ugyanezt az interpretációt vezette be már évekkel Vuillemin előtt a XVII. század matematikájának legjobb ismerője, J. E.

[79] Kline, M.: *Mathematics in Western culture*. London 1954, 170.

[80] Whiteside, D. T.: „Patterns of mathematical thought in the later Seventeenth Century” *Archive for History of Exact Sciences*. 1, 1961, 179–388.

[81] Vuillemin, J.: *Mathématiques et métaphysique chez Descartes.* Paris 1960, 87–88.

Hofmann is. Descartes „különbséget tesz precíziós matematika és approximációs matematika között. Minden algebrai úton megoldható problémát – ő geometrikusoknak nevezi ezeket – a precíziós matematikába sorol, minden egyebet – ő mechanikusoknak hívja – az approximációs matematikába ... Egyidejűleg, a vonalszakasz-egység bevezetésével aritmetizálja a geometriát. A számfogalom, ami kezdetben a természetes számokra korlátozódott és csak fáradságos lépések árán volt kiterjeszthető törtekre, negatív számokra és egyszerű irracionalitásokra, egy csapással lényegesen kibővíttetett: az algebrai számok egész tartományát felölelte."[82]

Carl Boyer, az analitikus geometria történetének monográfusa nem látja ilyen kimagaslónak Descartes matematikai teljesítményét. Szerinte Descartes Viète célját veszi át, ami algebrai egyenletek gyökeinek geometriai szerkesztése volt. Descartes tette pusztán új jelölések bevezetésében állott. Az analitikus geometriát viszont Fermat teremti meg, aki ugyan megtartotta Viète régi jelölésmódját, de bevezette az új, analitikus geometriának megfelelő célkitűzést: a geometriai hely tanulmányozását.[83]

Mi volt hát valójában a *Geometrie*? Analitikus geometria? Algebra? Arány-elméletre redukált egyenletelmélet? Görbék előállítására és osztályozására bevezetett módszer? Algebrai polinomok elmélete? Kezdődő függvényelmélet? Számtestbővítés? Vagy, mint Tannery sejtette, előkészület egy általános érintőszerkesztési módszerhez? Vagy egyszerűen, Descartes szándékosan homályba borított könyvében bizonyos részleteket, s ezek vezetik félre az interpretátorokat? „Különös élvezet – írta erre célozva a legnagyobb Descartes-filológus, Charles Adam –, ami újból rávilágít arra, hogy Descartes bizony egy kicsit misztifikátor volt."[84] A *Geometrie* valóban nagyon különös olvasmány. Könnyed és élvezetes, átfutva azt hiszi az ember, hogy teljesen érti. Azután újra kézbe véve meglepődik: mennyire nem értette meg először.

A SZERKESZTÉS FOGALMA ÉS SZEREPE A GEOMETRIE-BEN

A *Geometrie* három könyvből áll. Az első könyv a körzővel-vonalzóval megszerkeszthető problémákról szól, a második görbe vonalak szerkesztésével, osztályozásával és legfontosabb tulajdonságaival foglalkozik. A harmadik könyv a harmadfokú és magasabb problémák egy ötletes görbe-előállító mechanizmus segítségével történő szerkesztésével és ennek a szerkesztésnek megfelelő egyenletekkel foglalkozik.

[82] Scholz, H. – Kratzer, A. – Hofmann, J.: *Descartes.* Münster, Westfalen 1951, 56.
[83] Boyer, C. B.: *History of analytic geometry.* New York 1956, 74.
[84] Adam, Ch.: i. m. 224.

A könyvben tehát szerkesztésekről van szó s így joggal viseli a *Geometrie* címet, amit éppen a szerkesztésekkel foglalkozó tudomány számára tartottak fenn már az antikvitás óta a számolásokkal foglalkozó aritmetikától való megkülönböztetésképpen.

Négy fontos szerkesztési feladat foglalkoztatja Descartes-ot a *Geometrie*-ben: 1. a Papposz-probléma megoldása 2. az ún. optikai oválisok szerkesztése, 3. az érintőszerkesztés és 4. a másodfokúnál magasabb fokú parabolák szerkesztése.

Az egyenletek nagyon megkönnyítik a munkát, de *elvi* különbséget nem jelentenek a rajzban történő szerkesztésekkel szemben. Csupán világosabban eldönthetővé teszik, melyik az a legegyszerűbb görbe, amelynek segítségével egy adott probléma megoldható. Ugyanis ez a görbe az, amelyik a második könyv osztályozási elvei alapján a legalacsonyabb görbe-osztályba tartozik. Ez pedig legkönnyebben a görbét leíró *egyenlet* vizsgálatával dönthető el.

Az egyenletek tárgyalásában is a *szerkesztés* szempontjai dominálnak. Descartes az egyenletet mintegy „megszerkeszti" a gyöktényezőkből. Ez az eljárás: az egyenleteknek az ismeretlenből és a gyökökből álló binomok szorzataként való előállítása ekkor már nem teljesen új. Descartes azonban felismeri az eljárás megfordíthatóságát: az egyenlet osztható egyik gyöktényezőjével, s így eggyel alacsonyabb fokú egyenletté redukálható.

A szerkesztés centrális fontosságának a gondolata végig követi az egyenletek vizsgálatát. A különféle problémák és a nekik megfelelő egyenletek osztályozása a szerkesztésükre használt eljárásokra épül fel. „Ami pedig a test-problémákat (harmad- és negyedfokú egyenletekkel kifejezett problémák) illeti – írja Descartes –, amikről azt mondottam, hogy nem oldhatók meg valamely, a körnél magasabb fokú görbe használata nélkül, eleget lehet találni közöttük, amik mindkét szerkesztésre vezethetők vissza. Ezek egyikében meg kell találni azt a két pontot, amit két adott vonalszakasz közötti középarányosok határoznak meg, a másikban azt a két pontot, amik egy adott ívet három egyenlő részre osztanak. Mert tekintve, hogy a kör csupán egyetlen aránytól függ, ti. amely a pontjai és a középpont között fennáll, a kört csupán két pont közötti egyetlen pont meghatározására, vagy két adott egyenes szakasz egyetlen középarányosának a megadására, vagy egy adott szög két részre osztására lehet felhasználni. A kúpszeletek azonban mindig két különböző dologtól függenek és így két pont meghatározására használhatók fel.

Ugyanezen okból a negyediknél magasabb fokú problémákat, amelyek négy középarányos beírását vagy a szög öt egyenlő részre való osztását követelik meg, nem lehet megoldani a kúpszeletek segítségével. Ezért a lehető legjobbnak gondolom, ha általános szabályt adok a megszerkesztésükre, azt a görbét alkalmazván, amit egy parabola és egy egyenes metszése ír le."[85]

[85] *Geometrie...* Descartes műveinek V. Cousin-féle kiadása, V. kötet, 419–420.

Ez az egyenletek megoldására, helyesebben megszerkesztésére adott görbe előállító mechanizmus, amelyik voltaképpen az algebrai görbék definíciójára szolgál egy parabola és egy egyenes metszéspontjainak a segítségével, lehetővé tette Descartes számára a különböző fokú algebrai egyenletekkel kifejezhető problémák megoldhatóságának a *konstruktív* definiálását. Így bizonyos fokig ebben az eljárásban a Ruffini–Abel-tétel cartesianus megfelelőjét láthatjuk. Mutatja ez az eljárás azt a mély különbséget, ami a komplex számtestben a polinomok faktorokra történő felbontásával dolgozó mai algebra és az egyenletpolinomot szerkesztés-feladatként felfogó cartesianus algebra között van.

Annál feltűnőbb ez a különbség, mert Descartes is a gyöktényezőkre való felbontásból és az egyenletpolinom gyöktényezővel vagy egy másik egyenletpolinommal való oszthatóságából indul ki, mint a mai egyenletelmélet. Pl. ha valamely probléma megszerkesztésénél olyan egyenletre jutunk, amelyben az ismeretlen dimenziója három (harmadik hatványon van), keresünk egy olyan binomot, amellyel az adott egyenletpolinom osztható és így visszavezetjük alacsonyabb fokú problémák megoldására. „De ha egyetlen binomot se találunk, amelyik az adott egyenletpolinomot osztaná, bizonyos, hogy az egyenlettől függő probléma test-probléma – háromdimenziós – és ezek után nem kisebb hiba lenne megkísérelni csupán körzővel és vonalzóval történő megszerkesztését, mint amilyen az lenne, ha kúpszeleteket alkalmaznánk olyanok megszerkesztésére, amelyek csak köröket igényelnek: mert végül is mindaz, ami tudatlanságot árul el, hibának nevezendő.”[86]

Ugyanígy megadja, milyen esetekben redukálhatók negyedfokú egyenletek, azaz milyen esetekben húzódnak meg mögöttük sík-problémák. Azután megadja az általános szabályt a negyediknél magasabb fokú egyenletek redukciójára: „Felsorolhatnánk a következőkben az ötödfokú, hatodfokú és ennél magasabb fokú egyenletek esetét, de inkább összefoglalva tárgyaljuk őket és általánosságban azt állítjuk, hogy ha megkíséreltük az egyenletet előállítani alacsonyabb fokú egyenletpolinomok szorzataként és összeszámlálva mindazokat a módokat, ahányféleképpen az egyenletpolinom alacsonyabb fokú egyenletpolinomok szorzásából előállítható, azt találjuk, hogy az előállítás egyik által sem sikerül, akkor meggyőződhetünk, hogy nem redukálhatók alacsonyabb fokú egyenletekre, úgyhogy ha az ismeretlen mennyiség harmadik vagy negyedik hatványon van, a probléma amelynek a megoldását keressük test-probléma és ha az ismeretlen ötödik vagy hatodik hatványon van, még magasabb fokú és így tovább.[87]

Megelőzően megadott egy példát egy hatodfokú egyenlet redukciójá-

[86] Uo. 401.
[87] Uo. 408.

ra.[88] A példát a fentebb említett görbe-előállító mechanizmusa igénybevételével oldja meg, tehát szerkesztéses alapon. A példa

$$y^6 - 8y^4 - 124y^2 - 64 = 0$$

éppen

$$x^{km} + a_1x^{(k-1)m} + ... + a_{\mathrm{k}-1}x^{\mathrm{m}} + a_{\mathrm{k}} = 0$$

alakú, ahol $k = 3$, $m = 2$, s mint az jól ismert, éppen ez az eset az, amelyet k-ad fokúra redukálva, ill. ezt követően k számú m-ed fokú $x^{\mathrm{m}} - \mathrm{a} = 0$ binom egyenletre redukálva a négy alapművelettel és gyökvonással lehet megoldani. Hozzávéve ehhez a fentebb idézett sorokat: „...összeszámlálva azokat a módokat, ahányféleképpen az egyenletpolinom alacsonyabb fokú egyenletpolinomok szorzásából előállítható”, hajlandók lennénk azt hinni, hogy Descartes itt a Galois-elmélet közelébe jutott. De a folytatás meggyőz róla, hogy erről szó sem lehet: „Egyébként a fentebb mondottak legnagyobb részének a bizonyításától eltekintek – írja közvetlenül az idézett általános redukciós szabály után –, mivel oly könnyűnek látszanak, ha valaki veszi a módszeres vizsgálathoz szükséges fáradságot, mint én tettem, hogy önmaguktól adódnak, és hasznosabb lesz ily módon megérteni azokat, mint készen olvasva.”[89]

Nem kell itt mélyebb tudás szándékos titkolásától tartani. Egyszerűen, ahol mi az egyenletek általános megoldhatóságának nehéz problémáját sejtenénk, ott Descartes semmi egyebet nem lát próbálgatásokkal történő egyedi megoldásoknál. Az általánosítás számára nem az egyenletek *megoldhatóságának* a síkján jelentkezik, hanem az egyenletek által leírt problémák *megszerkeszthetőségének* a síkján. „Ha meggyőződtünk, hogy az adott probléma test-probléma, akár negyedfokú az egyenlet, amely által kerestük, akárcsak harmadfokú, mindig meg lehet találni a gyökét a három kúpszelet valamelyikének a segítségével,”[90] és ezenkívül csak körző és vonalzó alkalmazása szükséges a szerkesztésben.

Az egyenletek redukciójának az elmélete azt volt hivatva megmutatni, miért nem oldhatók meg a test-problémák a kúpszeletek használata nélkül, s az ezeknél magasabb fokú problémák más, összetettebb vonalak nélkül. Az algebrai egyenletek és az arányelméleti szerkesztések egymásra való leképzése egészen más természetű betekintést nyújt az algebrai egyenletek struktúrájába, mint a mai algebra. Descartes nem ismeri a csoport, a számtest, a testbővítés fogalmát. Amit a modern történetírás ilyenekként ismer fel nála, nem egyéb későbbi fejlődés visszavetítésénél. Descartes nem végezhette el azt, ami Galois és Abel feladata volt. Descartes algebrája a megelőző száz év algebrai fejlődésének az összege-

[88] Uo. 399–400.
[89] Uo. 409.
[90] Uo. 409.

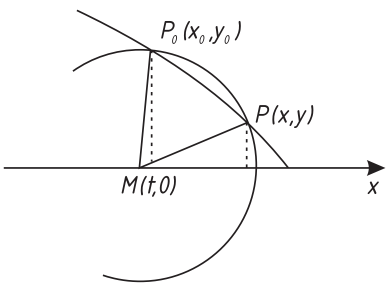
zése az antik kúpszelet- és helyelmélet csúcsa. Ezentúl azonban bevezet valamit, ami a jövő fejlődés szempontjából felbecsülhetetlen jelentőségű volt: az ismeretlen hatványai szerint rendezett, zérusra redukált egyenletpolinom fogalmát és alakját, és felismeri, hogy az ilyen alakban felírt egyenletek oszthatók, akárcsak a közönséges számok.

A XVII. század matematikájában az egyenletpolinom centrális fontosságú lesz. Közvetlenül csatlakoznak hozzá a németalföldi iskola és az angolok: Hudde, Slusius, Pell, Collins, James Gregory és Newton. Az egyenletek redukciója a XVII. század közepére a matematika centrális kérdése lesz, s ezzel szoros kapcsolatban alakul ki előbb csak algebrai egyenlet formájában felírható, majd végtelen sok tagú egyenletre is érvényes formában az első *differenciálási algoritmus.* Descartes az egyenletpolinomban olyan *modellt* teremtett, amelyikre a következő évszázad alatt lassan és nagy nehézségek leküzdése árán felépülhetett a *differenciálás művelete.*

AZ EGYENLETPOLINOM DIFFERENCIÁLÁSA

Descartes a *Geometrie*-ban speciális módszert adott meg a görbe érintőjének a szerkesztésére. A módszer az érintőkör sugarának – a normálisnak – a meghatározásán alapul. A normális abból a feltételből adódik, hogy az érintési pontban a görbe és a kör két metszéspontja, egybeesik. Ebben a pontban a normálisra a kör, a görbe, valamint Püthagorász tételének a segítségével felírt négyzetes egyenletnek két egybeeső gyöke van.

A történészek Moritz Cantor-tól J. F. Scott-ig az érintő kör sugarának a meghatározására helyezik a hangsúlyt, ami a kör és a görbe két metszéspontjának az egybeeséséből adódik. J. E. Hofmann éles szeme vette csak észre, hogy egyébről is van itt szó: Descartes választ a görbén, amelyhez érintőt akar húzni egy $P_o(x_o,y_o)$ pontot és a tengelynek választott egyenesen egy $M(t,\ 0)$ pontot. E körül az M pont körül leír egy P_o ponton átmenő kört, ami a görbét újból metszi $P(x,\ y)$ pontban.



17. ábra

Ez az eljárás az ábra szerint az

$$(x-t)^2+y^2=\left(x_0-t\right)^2+y_0^2$$

egyenletet eredményezi, ahonnan

$$y=\sqrt{\left(x_0-t\right)^2+y_0^2-(x-t)^2}.$$

Behelyettesítve ezt a görbe egyenletébe $f(x,\ t)=0$ egyenletet kapja, amelyben $x-x_o$ lineárfaktor fordul elő. „Descartes most megköveteli – írja Hofmann –, hogy az $x - x_o$ faktor még másodszor is lehasítható legyen, s így nyer t-re egy egyedül t-t tartalmazó feltételt."[91]

Hofmann ezt az eljárást egyáltalában nem tartja lekicsinylendő tettnek, mint azt a többi matematika történészek teszik, csupán mert megkerülte a határátmenetet. Éppen ellenkezőleg az a szép Hofmann szerint ebben az eljárásban, hogy teljesen a cartesianus matematika keretei között maradva, *algebrai* megoldást talált erre az egyébként infinitézimális megfontolásokat igénylő problémára."[92]

Ennek az infinitézimális módszert megkerülő, tiszta algebrai eljárásnak azonban óriási jelentősége volt az infinitézimális számítás kialakulása szempontjából. Ugyanis az első matematikus, aki ennek az érintőszerkesztési eljárásnak a jelentőségét felfogta, ezen keresztül alkotta meg a differenciálás műveletének az algoritmusát.

A két Francis Schooten – apa és fiú[93] – köré tömörült németalföldi cartesianus matematikusok a XVII. század közepén vaskos tanulmánykötetet adtak ki a *Geometrie*-hez írt kommentátorokból.[94] Ebben van közzétéve Johann Hudde két rövid tanulmánya 1657, ill. 1658-ból. Az első[95] az egyenletek redukciójáról szól, a második[96] szélsőérték problémákról. Az 1657-es tanulmány tartalmazza az első világosan és általánosságban megfogalmazott differenciálási algoritmust a függvények egy speciális osztálya, az egyenletpolinomok esetére megfogalmazva. Hudde maga hangsúlyozza, hogy eljárásának lényege már benne foglaltatott a *Geometrie*-ban, ő csupán explicite kifejtette, megmagyarázta és általánosította az ott elrejtett lehetőségeket. Valójában sokkal többet tett ennél, megadta a Descartes által bevezetett egyenletpolinom differenciálásának az explicit és általános szabályát. Az egyenletpolinom esetében ugyanis a differenciálhatóság egyszerűen két egybeeső gyök létezését jelenti. Pontosan ezt adta meg a *Geometrie,* amikor az érintőszerkesztés kritériumaként a görbét reprezentáló egyenlet két gyökének az egybeesését követeli meg. Hudde azonban felismeri az érintőszerkesztés és a maximum-minimum problémák összefüggését és Descartes speciális eljárását *általános számolási módszerré* fejleszti. Olyan *algoritmussá, amelyik egyenletpolinomok ese-*

[91] Scholz–Kratzer–Hofmann: i. m. 64–65.

[92] Uo. 66.

[93] Az ifjabb Frans van Schootenről J. E. Hofmann írt a reá jellemző csodálatra méltó apparatúrával ellátott rövid bibliográfiát. Hofmann, J. E.: *Frans van Schooten der Jüngere*. Wiesbaden 1962.

[94] Renati Des Cartes Geometria, una cum notis Florimondi de Beaune, in Curia Blesensi Consiliarii Regii, et commentariis illustrata, opera atque studio Francisci a Schooten, in Acad. Lugd. Batav. Matheseos Professoris. ... Frankfurti. (1695-ös kiadás.)

[95] *Johannis Huddenii Epistola Prima de Reductione Æquationum*. Uo. 406–506.

[96] *Johannis Huddenii Epistola Secunda de Maximis et Minimis.* Amsterdam 1658. Uo. 507–516.

tében mindig alkalmazható s nem kell keresgélni alkalmazása előtt, vajon érvényes-e az adott esetben.

Hudde, Descartes nyomán, mindig csökkenő hatványok szerint rendezett alakban, nullára redukálva írja fel az egyenletet s az ismeretlen hiányzó hatványait *-gal jelöli. Modern jelölésben (de egyebekben a cartesianus elmélet szelleméhez ragaszkodva)

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

alakban írhatjuk fel az egyenletpolinomot. Hudde először is különbséget tesz kétféle redukció között. Az egyik, a közönséges értelemben vett redukció az ún. abszolút redukció az egyenlet közönséges algebrai műveletekkel történő megoldása. Ezzel nem foglalkozik. A másik, általa relatívnak nevezett redukció a feltett problémára vonatkoztatva vizsgálja az egyenlet gyökeinek a viselkedését. Hudde csak ezzel a redukcióval foglalkozik.

Közvetlenül a *Geometrie*-hez kapcsolódva számos esetet sorol fel, hogyan kell olyan egyenletet redukálni, amely két másik egyenlet összeszorzásából állott elő. Mint láttuk, ezt a kérdést már Descartes elintézte. Azonban Hudde felismeri, hogy a különféle esetek mind feltételezik annak az ismeretét, hogyan kell „két (vagy több) egyenlet vagy mennyiség legnagyobb közös osztóját megkeresni. Tegyük fel példának okáért, hogy két egyenlet vagy mennyiség legnagyobb közös osztóját kell megtalálni."[97]

Azonnal példán mutatja be az esetet. Legyen pl. a két egyenlet

$$d^3c - acdd + 2aabc - 2abcd = 0$$

$$d^4c - bbcdd + caabb - caadd = 0.$$

Először azt kell megnézni, nincs-e valamely betű vagy szám, amellyel mindkét egyenlet osztható. Jelen esetben pl. mindkét egyenlet osztható c-vel:

$$d^3 - add + 2aab - 2abd = 0$$

$$d^4 - bbdd + aabb - aadd = 0.$$

Azután mindkét egyenletben ismeretlennek tekinti az egyik betűt. Legyen pl. ez a d betű:

$$d^3 - add - 2abd + 2aab = 0$$

$$\begin{array}{l} d^4 * - bbdd * + aabb = 0. \\ - aa \end{array}$$

[97] Hudde, J.: *Episola Prima...* 422.

Az egyenleteket a Hudde által alkalmazott cartesianus írásmódban írtuk fel, ahol a zárójelet a tagok egymás alá írása helyettesíti. A legutolsó egyenlet a mi írásmódunkban

$$d^4 - (b^2 + a^2)d^2 + a^2b^2 = 0$$

lenne. A csillagok a Hudde-féle írásmódban az ismeretlen hiányzó hatványait (d^3-t és d-t) jelölik.

Ebben a lépésben veszi fel a Hudde-féle egyenletpolinom azt az alakot, amit mi $f(x) = 0$ alakkal jelölünk és ez a lépés vezet majd Slusiuson keresztül a parciális derivált képzéséhez. Ami ezután következik, az a továbbiak szempontjából nagyon lényeges, azért szó szerint idézzük.

„Azután a d^3-nek az első egyenletből vett értékét behelyettesíthetjük mindenütt a második egyenletben d^3 helyébe és ezt kapjuk:

$$d^4 = ad^3 + 2abdd - 2aabd = bbdd + aadd - aabb$$

vagy (d^3 helyébe az első egyenletből)

$$\begin{array}{ll} & aadd + 2aabd - 2a^3b \\ & \qquad - 2aabd + 2abdd \\ \hline \text{azaz} & aabb - 2a^3b + 2abdd - bbdd = 0 \\ \hline \end{array}$$

és $dd = \dfrac{2a^3b - aabb}{2ab - bb}$ vagy aa, és $d = a$ vagy $d - a = 0$. Így ezt a dd értéket helyettesítve az első egyenletbe, az

$$aad - a^3 - 2abd + 2aab = 0$$

egyenletet kapjuk.

Végül magát a-t helyettesítve be d helyébe az utolsó egyenletben

$$a^3 - a^3 - 2aab + 2aab = 0$$

egyenletre jutunk.

Mivel ebben az egyenletben minden tag kölcsönösen megsemmisíti egymást, bizonyítást nyert, hogy mind a

$$d^3 - add - 2abd + 2aab = 0$$

egyenlet, mind a

$$\begin{array}{l} d^4 * - bbdd * + aabb = 0 \\ \qquad\quad - aa \end{array}$$

osztható $d - a = 0$-val, azaz $d - a$ mindkettőnek az osztója, a legnagyobb közös osztó. És mivel továbbá mindkét adott egyenletet (vagy mennyiséget) előbb c-vel osztottuk, nyilvánvaló, hogy a legnagyobb közös osztójuk $d - a$ szorozva c-vel, vagy $dc - ac$."[98]

Lehet természetesen d helyett más betűt is ismeretlennek tekinteni és aszerint keresni meg a két egyenlet legnagyobb közös osztóját.

Mint látjuk – s a további fejlődés szempontjából ez a nagyon fontos – Hudde világosan felismeri, hogy a legnagyobb közös osztó létesít olyan kapcsolatot egy $f(x)$ egyenlet s egy ebből megadott szabály szerint előállított másik $f'(x)$ egyenlet között, hogy az $f'(x)$ egyenletből az eredeti $f(x)$ egyenlet kétszeres vagy többszörös gyökét ki lehessen számítani. Ezt az eljárást adja meg az X. szabály:

„Hogyan kell redukálni minden, vagy betűkben vagy számokban megadott egyenletet, amelynek az ismeretlen mennyisége (vagy más betűje, amelyet mintegy ismeretlennek lehet tekinteni) két vagy több megegyező értékkel rendelkezik.

Először: ha az adott egyenletben két egyező gyök van, megszorzom azt egy tetszőlegesen felvett aritmetikai progresszióval. Magától értetődően az egyenlet első tagját a progresszió első tagjával, az egyenlet második tagját a progresszió második tagjával, és így tovább. Az így kapott szorzat legyen 0. Azután, midőn így két egyenletem van, megkeresem a fentebb megadott módszerrel a legnagyobb közös osztójukat. Végigosztom ezzel az adott egyenletet, így előállítható a hányados."[99]

Mai nyelven elmondva, egy adott $f(x)$ egyenlethez kell egy olyan másik $f'(x)$ egyenletet találni, hogy a két egyenletnek legyen legnagyobb közös osztója, $d(x)$. Ebben az esetben az eredeti $f(x)$ egyenletnek van többszörös gyöke, az $f(x)$ egyenlet szétejthető, redukálható egy alacsonyabb fokszámú egyenlet és a $d(x)$ szorzatára.

A további fejlődés szempontjából ennek a módszernek a jelentősége óriási. Az az $f'(x)$ egyenlet ugyanis, amit az $f(x)$ egyenletből azzal a feltétellel kaptunk, hogy legyen legnagyobb közös osztójuk, szolgál a maximum-minimum feladatok és az érintőfeladatok megoldására. Erről szól Hudde második, 1658-as értekezése.

Az értekezés a következő tétellel kezdődik: „Ahhoz, hogy egy egyenletben két gyök egyenlő legyen, meg kell szorozni egy tetszőleges aritmetikai progresszióval, magától értetődően az egyenlet első tagját a progresszió első tagjával, az egyenlet második tagját a progresszió második tagjával, és így tovább. Állítom, hogy ez a szorzat az az egyenlet, amelyből meg lehet találni a mondott gyököt."[100]

Mivel a két egybeeső gyök az egyenlet valamilyen szélsőértékét jelenti, az ismeretlen maximum vagy minimum értékét, nyilvánvaló, hogy az

[98] Uo. 422–423.
[99] Uo. 433–434.
[100] Hudde, J.: *Epistola Secunda...* U.o. 507.

így kapott egyenletet lehet használni ennek a szélsőértéknek a megkeresésére. A kapott egyenlet és az eredeti egyenlet közös gyöke lesz az eredeti egyenlet kétszeres gyöke. „Úgyhogy a módszer bizonyítására még csupán azt kellene igazolni, hogy a kiinduló egyenletnek van két egyenlő gyöke. Amit valóban oly egyszerű bizonyítani, hogy ennél tovább időzni semmi más nem lenne, mint munka és olaj vesztegetése."[101]

E helyett felsorolja az egyes eseteket, s mindegyiket bemutatja néhány jól választott példán. Pl. az első esetet: ha az egyenlet csak egy ismeretlent tartalmaz és ez sem fordul elő a nevezőben, a következő példán mutatja be:

„Legyen pl. $3ax^3 - bx^3 - \frac{2bba}{3c}x + aab$ x valamely maximumára érvényes. Szorozzunk tagonként

$$\begin{array}{cccc} 3 & 3 & 1 & \text{-el:} \\ \hline \end{array}$$

Legyen $$9ax^3 - 3bx^3 - \frac{2bba}{3c}x = 0 \quad \text{vagy}$$

$$9axx - 3bxx - \frac{2bba}{3c} = 0\,.$$

Az általános módszer szerint hasonlóképpen:

$$3ax^3 - bx^3 * - \frac{2bba}{3c}x + aab = 0\,.$$

Szorozzunk egy aritmetikai haladvánnyal

$$\begin{array}{cccc} 3 & 3\ {*}2 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Legyen, mint fent $$9ax^3 - 3bx^3 * - \frac{2bba}{3c}x = 0 \quad \text{vagy}$$

$$9axx - 3bxx - \frac{2bba}{3c} = 0\,.$$"[102]

Ebből az egyenletből kiszámított x az eredeti egyenlet kétszeres gyöke (tehát szélső értékének a helye) lesz, mert a két egyenletnek van legnagyobb közös osztója.

Modern megfogalmazásban így foglalhatjuk össze a Hudde-féle eljárást: Egy $f(x)$ egyenletnek akkor és csakis akkor van többszörös gyöke, ha $f(x)$-nek és egy, belőle megadott eljárással előállítható $f'(x)$ egyenletnek van $d(x)$ legnagyobb közös osztója, azaz ha $f(x)$ és $f'(x)$ nem relatív prím polinomok. Ebben az esetben az $f(x)$ többszörös gyökei a $d(x) = 0$ egyen-

[101] Uo. 510.
[102] Uo. 510.

letnek tesznek eleget, ennek tesznek eleget az $f'(x)$ gyökei is, úgyhogy utóbbiakból kiszámíthatók. Az $\frac{f(x)}{d(x)}$ egyenlet pedig alkalmas az eredeti $f(x)$ egyenlet egyszeres gyökeinek a meghatározására.

Látnivaló, hogy a Hudde-féle elmélet semmi egyéb, mint az a módszer, amit a mai algebra használ a gyökök többszörösségének a vizsgálatára.[103] Az $f'(x)$ nem más, mint az $f(x)$ polinom deriváltja. Természetesen Hudde nem használta ezt az elnevezést, nem használta *explicite* még *a fogalmat* sem. De *ahogyan* használja a mi általunk így nevezett és definiált fogalmat, az fedi a mai értelmezést, s ezért átírhatjuk modern terminológiára.

A továbbiakat, hogy ti. hogyan lett a Hudde-féle eljárásból Newtonnál a mi parciális differenciálhányadosunknak megfelelő fogalom, már tisztázta Whiteside a XVII. század második felének matematikájáról szóló alapvető monográfiájában. A cartesianus algebra tehát nem csupán önmagában teljes tárgyalását adta az általa megteremtett egyenletpolinomoknak, hanem túlmutatott önmagán, s mintegy *modellként szolgált az algebrai egyenleteknél általánosabb függvények differenciálásának a kidolgozásához.*

Az érintőszerkesztés problémájának a megoldása abból a feltételből, hogy a problémára felállított egyenlet két gyöke összeessen, nem kisebb jelentőségű az infinitézimális számítás kialakulása szempontjából, mint amilyen Arkhimédész kimeríthetetlenségi módszere volt. Azonban a két eljárás szellemében óriási a különbség. Arkhimédész eljárása nehézkes, körülményes indirekt bizonyításon alapuló módszer volt aminek az érvényességi feltételeit minden esetben külön meg kellett vizsgálni s egyedi módon ismételni el a bizonyítást. Descartes módszere a görbék egy speciális csoportjánál, az algebrai egyenletekre leképezhető szerkesztések esetében, közvetlenül és általánosan alkalmazható egységes szabályt ad az egyenlet által előállított görbe érintőjének a megtalálására.

Igaz, hogy a módszere csak speciális esetben, az algebrai görbék esetében érvényes. Ezáltal azonban ezen a területen megteremti egy olyan eljárás modelljét, ami Newton és Leibniz kezében a *Geometrie*-ből kirekesztett transzcendens görbék esetére is alkalmazható algoritmussá bővül. Az a mód ugyanis, ahogyan két egyenlet megfelelő tagjainak az egyenlővé tételéből következtet a gyökök azonosságára, semmi egyéb, mint a deriváltképzés centrális gondolatának, a *lineáris approximálhatóságnak* a kifejezése.

[103] Lásd pl. Szele Tibor: *Bevezetés az algebrába.* Budapest 1953, 216–218.

A SZERKESZTÉSEK ALGEBRÁJA

Az aritmetika és geometria között létesített megfelelkezés, aminek a Descartes algebra és „analitikus geometria” köszönheti létrejöttét, nem az algebrai és geometriai struktúrák ekvivalenciáján alapul. Nem az algebra leképezése geometriára, hanem a geometriai szerkesztések egyszerűvé, áttekinthetővé, racionális rend szerint elrendezetté tétele az algebra segítségével. A racionálist itt szó szerint kell érteni. Nem átvitt értelemben „ésszerűnek”, hanem *arányos*nak kell fordítani, úgy, ahogyan azt az antik geometria és még Descartes is használta. Láttuk, milyen fontos szerepe volt Descartes görbeelméletében a középarányosok beiktatásának. A matematika történetírás jól ismeri és kellőképpen kiemeli Descartes matematikájának arányelméleti vonatkozásait. Éppen ez az arányelmélet kapcsolja a cartesianus matematikát legerősebben a reneszánsz századai alatt felfedezett antik matematikához.

A *Geometrie* első, XVII. századi kommentátorai többnyire ezeket az antik arányelméleti vonásokat veszik észre a műben. Így a század második felének a geometriájában bizonyos visszatérés észlelhető az antik módszerekhez, s azt lehetne mondani, hogy a valóban cartesianus geometria csak sokkal későbben, a XIX. században bontakozik majd ki Chasles munkáiban.

Jóllehet Cantor és már Montucla is ismerték a XVI–XVII. századi hatalmas, antik matematikáról szóló kommentárirodalmat – joggal beszélhetünk ezzel kapcsolatban „matematikai humanizmusról” –, mégis nagyon keveset tudunk arról, milyen szerepet játszott az antik matematika pontos megismerése az ötlet- és problémaadáson túl a XVI–XVII. századi matematika kialakulásában.

Nem egyszerűen arról van szó, hogy pl. Viète és Fermat jól ismerik és utánozzák Diophantoszt vagy Apollonioszt, s hogy a XVII. században végig lankadatlanul fáradoznak elveszett görög matematikai művek rekonstruálásán. A Warburg-intézet korszakalkotó munkája óta tudjuk, milyen hallatlanul bonyolult történelmi problémát jelentenek „átvétel” és „rekonstrukció”, ha olyan magasrendű és önmagában zárt kulturális képződményekről van szó, mint az antik művészet vagy matematika.

A XV., XVI. és XVII. század egyik legnagyobb jelentőségű, döntő élménye az antik kultúra recepciója volt. Ennek a nagy felfedezésnek a súlypontja a XVI. században van, a XV. század bizonyos értelemben elő-, a XVII. utójátéka. De ez az utójáték az antikvitásnak, mint élet- és kulturális eszménynek az értékcsökkenésével párhuzamosan az antikvitás egyre pontosabb megismeréséhez vezetett. Poussin sokkal antikabb, mint Michelangelo, Halley sokkal inkább követi Apollonioszt, mint Fermat. Az antikvitás *értékelése* és *megismerése* közötti ellentét a XVII. század végén az „antikok” és a „modernek” közötti nagy harcban realizálódik és hosszú küzdelem után a „modernek” javára dől el.

Amikor a XVII. század legvégén Newton műveinek nagy csodálója és kiadója, Bentley doktor *Phalaris*-ában leleplezi az antikvitásimádók hamisításait, nemcsak egy új szakmát, a klasszika-filológiát teremti meg, nemcsak a szövegkritika első nagy példáját adja, hanem egyben megöli az antikvitást is, az antikvitást mint utolérhetetlen életeszményt.

A humanizmus általános jelenség volt, a kultúra minden területét átitatta. Azért volt olyan általános és szenvedélyes az ellene vívott harc is a XVII. század második felében. A humanizmus mozgalma egész Európára kiterjedt. Általánosabb jelenség, mint a vallási reformok, mert utóbbiak egy északi (szárazföldi és óceáni) és egy déli (mediterrán) részre osztották Európát. A humanizmus azonban egész Európán átsöpört. Amikor a XVII. század során a gazdasági és kulturális vezetés a mediterráneumból fokozatosan északnyugatra tevődik át, úgyszólván ezt az egyetlen tényezőt, a humanizmust viszi magával.

A XVII. században a németalföldi és angol egyetemek lesznek a humanizmus fő fészkei. Ezzel azonban átalakul a mozgalom jellege: a humanizmus, ami Itáliában többnyire egyetemen kívüli emberek vállalkozásaként indult, itt szorosan egyetemi tudósokhoz kötődik. S ez nem kicsiny változást jelent. Szinte beosztási elvként lehetne végigvinni az európai kultúra történelmén az egyetemi és nem-egyetemi korszakok váltakozását, annyira fontos különbség az, hogy a kor szellemi életének a vezetői ennek a nagy, középkorban kialakult intézménynek a keretében dolgozó emberek-e vagy sem.

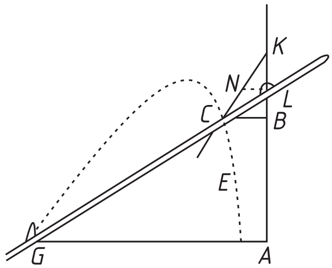
Nem lehet tehát figyelmen kívül hagyni, hogy a humanizmus a XVII. században lényegében egyetemi mozgalommá válik, s hogy a humanizmus első nagy és sikeres ellenfele, Descartes, mindvégig kívül marad az egyetemeken és egyre fokozódó harcban áll velük. Annyira nem egyetemi ember, s annyira gyűlöli az egyetemi tudósokat és humanistákat egyaránt, hogy szinte hajlandók vagyunk a Papposz-probléma *Geometrie*-ben adott megoldását egyszerű ürügynek tekinteni. Ürügynek és párviadalnak: lám, a híres problémát, amit a bámult Euklidész és Apolloniosz sem tudtak megoldani, s aminek Papposz csak a legegyszerűbb esetét tudta nagy nehézségek árán megfejteni, azt ő, Descartes, az egyetemeken kívüli ember, az egyszerű *honette homme,* az egyszerű polgár játszi könnyedséggel és teljes általánosságban megoldotta.

Két kultúra ütközik itt össze a matematika területén: az egyetemivé vált humanista kultúra és az új, előbb gúnyként, majd Descartes által is vállaltan cartesianusnak nevezett Univerzális Módszer. Nem kis dologról volt hát szó és Descartes jogosan tiltakozott felháborodottan, mikor a *Geometrie*-t a Papposz-probléma egyik sikerült megoldásává akarták degradálni.

A Papposz-probléma megoldása Descartes-nál csupán a szerkesztések és az egyenletek között kidolgozott megfelelkezés egyik példája. Szerkesztések és egyenletek megfelelkeztetésének a módszeréhez csatlakozik Schooten és de Witt munkái nyomán a XVII. századi kúpszelet-elmélet nagy része. Ez jelentkezik Huygens és Newton műveiben. Ehhez csatlakozik, Newton és Halley nyomán, az egész késő XVII. századi, XVIII. század eleji angol geometria. *A Geometrie* eredeti felfogása azonban közben észrevétlenül egyre inkább elvész, egyre nagyobb lesz az antikvitáshoz való visszatérés s alig lehet nagyobb különbséget elképzelni matematikai stílusban, mint a Papposz-problémának Newton és Descartes által adott megoldásait.

Ezzel párhuzamosan vész el az a másik, tisztán geometriai kúpszeletelmélet is, ami Desargues és Pascal munkáiban a *Geometrie* algebrai kúpszeletelméletével egy időben és szintén az antikvitással való teljes szakításként, nem-egyetemi emberek kezében alakult ki. Mindkét módszer elmerül az egyetemi humanizmus fokozódó antikizálásában.

Az első lépést e felé az antikizálás felé az ifjabb Frans van Schooten Leyden-i professzor, Descartes tanítványa és Huygens mestere tette híres *Geometrie* kommentárjaiban. Schootenben a matematikatörténet-írás J. E. Hofmann alapvető tanulmányáig Descartes szolgai kommentátorát és utánzóját látta. Hofmann ismerte fel, hogy a Leyden-i professzor módszere több helyen jelentősen eltér a kommentált szöveg stílusától.[104]



18. ábra

A mi szempontunkból különösen fontosak Schooten második könyvhöz írott kommentárjai. A második könyvben vezeti be Descartes a görbék osztályozását és algebrai-geometriai analízisét az általa kigondolt ötletes, egymáson eltolható és egy középpont körül forgatható egyenesekből összeállított görbe-szerkesztő gép segítségével. Azután így folytatja: „Tegyük fel, hogy az *EC* görbét a *GL* vonalzó és *CNKL* sík idom metszése írja le, amelynek *KN* oldalát meghosszabbítjuk *C* irányába és amely úgy mozog az adott síkban, hogy *KL* oldala mindig egybeesik a mindkét irányban meghosszabbított *BA* vonal valamely részével és ezáltal *GL* vonalzónak, amely az *L* pontban a *CNKL* síkidomhoz van kapcsolva forgó mozgást ad *G* középpont körül. Ha meg akarom tudni, hogy milyen osztályba tartozik az így leírt görbe, választok egy egyenes vonalat, pl. *AB-t* amelyre a görbe pontjait vonatkoztatom és választok *AB* egyenesen egy *A* pontot, amelynél kezdem a számítást. ...Azután felveszünk a görbén egy tetszőle-

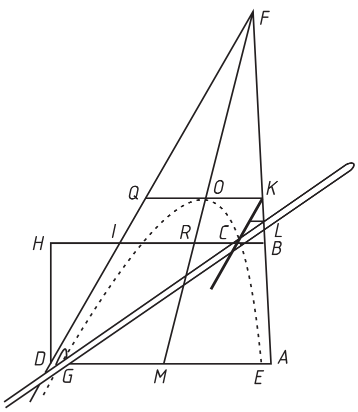
[104] Hofmann, J. E: i.m. 4.

ges C pontot és feltesszük, hogy a görbeleíró gép éppen ezt határozza meg. Ezen a C ponton át CB párhuzamost húzunk GA-hoz. Mivel CB és BA két ismeretlen és indeterminált mennyiség, egyiket y-nal, másikat x-szel jelöljük. Ahhoz, hogy e között a két mennyiség közötti viszonyt megkapjuk, tekintetbe kell venni egyéb, a görbe leírását megszabó ismert mennyiségeket is, mint GA, amit a-val jelölünk; KL, amit b-vel jelölünk és a GA-val párhuzamos NL, amit c-vel jelölünk. Azt állítom, hogy CB vagy y úgy aránylik BK-hoz, amint NL aránylik LK-hoz, vagyis amint c aránylik b-hez. Tehát BK egyenlő $\frac{b}{c}y$.

De akkor BL egyenlő $\frac{b}{c}y - b$ és AL egyenlő $x + \frac{b}{c}y - b$. Továbbá CB úgy aránylik LB-hez, azaz y úgy aránylik $\frac{b}{c}y - b$-hez, amint AG vagy a aránylik LA vagy $x + \frac{b}{c}y - b$-hez. Az aránypár második tagját megszorozva a harmadikkal az eredmény $\frac{ab}{c}y - ab$, és ez egyenlő az aránypár első és negyedik tagjának a szorzatával, ami $xy + \frac{b}{c}y^2 - by$. A keresett egyenlet tehát

$$y^2 = cy - \frac{cx}{b}y + ay - ac.$$

Ebből az egyenletből látjuk, hogy az EC görbe az első osztályba tartozik, amennyiben semmi egyéb, mint egy hiperbola.[105]



19. ábra

Ehhez a legutolsó mondathoz fűzi Schooten az alábbi hosszú magyarázatot: „Ha ugyanis AG-t meghosszabbítjuk D-ig és DG-t egyenlőnek vesszük EA-val vagy NL-el (lásd 19. ábra, de vö. 18. ábrával) és D ponton keresztül CK-val párhuzamos egyenest húzunk, amely az AB egyenest F pontban metszi, DF lesz az egyik aszimptota és AF a másik. Tegyük fel ugyanis, hogy *a* $GOCE$ vonal hiperbola és DF, FA az aszimptotái, továbbá hogy DG, EA egyenlők NL-el, DF párhuzamos CK-val, amint mondottuk azaz DFA szög egyenlő CKB szöggel. Hosszabbítsuk meg BC-t, amíg I-ben metszi DF-et és húzzunk D-n keresztül egy AF-el párhuzamos DH egye-

[105] Descartes, *Œuvres,* Adam–Tannery-féle kiadás, VI. kötet, 393–394.

nest, amely H pontban metszi BC-t. Mivel DHI és KLN háromszögek egyenként hasonlóak FAD háromszöghöz, azért hasonlóak egymáshoz is. Tehát ahogy KL aránylik LN-hez, azaz b aránylik c-hez, úgy aránylik DH vagy AB, azaz x, HI-hez, amely így $\frac{cx}{b}$ lesz. Levonva HB-ből ezt és BC vagy y szakaszt, marad IC, $a + c - \frac{cx}{b} - y$. Mivel a hiperbolánál Apolloniosz *Koniká*-jának második könyv 10. propozíciója szerint ICB négyszög egyenlő DEA négyszöggel; ezért ha IC-t megszorozzuk CB-vel, azaz $a + c - \frac{cx}{b} - y$ kifejezést y-al, az így előálló ICB négyszög, $ay + cy - \frac{cxy}{b} - yy$ egyenlő lesz DEA négyszöggel, vagyis ac-vel, azaz azzal a négyszöggel, ami DE-nek vagy GA-nak az EA-val való szorzásából áll elő. Tehát rendezve az egyenletet, úgy csoportosítva, hogy yy legyen az egyik oldalon, $yy = cy - \frac{cxy}{b} + ay - ac$ egyenletre jutunk. Amely egyenlet ugyanaz, mint ami fentebb a GL vonalzó és a CK egyenes mozgásából állott elő. Így bebizonyítottuk az állításunkat, hogy a leírt CE vonal hiperbola, melynek aszimptotái AF, FD."[106]

Eljutottunk ahhoz a félmondathoz, amit Schooten hosszan kommentált: „amint hogy ez semmi egyéb, mint egy hiperbola". A kommentár azonban teljesen visszájára fordítja a mondat értelmét. Schooten bizonyításában a hiperbola aszimptota-tulajdonságai a döntőek, s feleslegessé válik Descartes görbe-előállító mechanizmusa. Descartes-nál ez az eszköz, ill. az általa megengedett mozgás biztosította a kapott görbe megfelelő, ahogy ő nevezte, „geometrikus" voltát. Ez az eszköz biztosította, hogy a kapott görbe algebrai egyenlettel legyen előállítható, s így természetes, hogy ez az algebrai mozgást létesítő eszköz szolgál az algebrai, Descartes által „geometrikusnak" nevezett görbék osztályozására. Ha ugyanis az eszközön a CNK egyenes helyére a most nyert hiperbolát, vagy bármely más, kettőnél nem magasabb fokú egyenlettel leírható, ún. első *genre*-beli görbét teszünk, akkor ennek a görbének és a GL vonalzónak a metszése az ECA hiperbola helyett egy ún. második *genre*-ba tartozó görbét ír le. Pl. ha CNK kör, melynek középpontja L, a görög geometria ún. második konhoidját kapjuk. Ha pedig a CNK egyenes helyén egy második *genre*-ba tartozó görbe van, akkor ennek és a forgó GL vonalzónak a metszése egy harmadik *genre*-ba tartozó görbét ír le. „És bármely más módon képzeljük is el egy görbe vonal leírását, feltéve, hogy ez a görbe

106 *Renati Des Cartes Geometria...* Schooten-féle kiadás, Schooten kommentárjai a II. könyvhöz. i. m. 171–172.

azok közé tartozik, amelyeket geometrikusoknak neveztünk, mindig lehet találni ezzel a módszerrel egy egyenletet a meghatározására.”[107]

Szerkesztés és algebrai egyenlet között ezáltal az eljárás által definiált „algebrai mozgás” létesít kapcsolatot. Az algebrai mozgás által definiált görbe egyetlen pontjának a meghatározásához sincs szükség infinitézimális processzusra, approximációra. Ez az algebrai mozgás biztosítja, hogy a *Geometrie*-ben elkerülhető a végtelen approximáció fogalmával dolgozó infinitézimális matematika, hogy megmaradhatunk a görbék leírásában az egyenletpolinomoknál, ahol még az érintőszerkesztés és a maximum-minimum feladatok, ezek a tipikusan infinitézimális módszereket kívánó problémák is megoldhatók approximáció nélkül, limes fogalom nélkül, anélkül, amit közönségesen infinitézimális alatt értenek.

Ugyanis az algebrának „nem kell támaszkodnia a differenciálhányados analízisbeli fogalmára (amelynek értelmezése a határérték nem-algebrai fogalmának segítségével történik), mert tisztán algebrai úton is definiálni tudjuk a polinom deriváltját, s e fogalom számunkra szükséges tulajdonságait is bevezethetjük ilyen módon.”[108]

Ezt végezték el Descartes és Hudde: a polinom deriváltjának számukra szükséges tulajdonságait vezették le tisztán algebrai úton. Ezért központi jelentőségű az algebrai mozgás, amelyik az egyenletpolinom és a görbe közötti összefüggést létesíti. S ezért tesz olyan nagy lépést visszafelé Schooten, amikor kiküszöböli az antik módszerek segítségével ezt a mozgást. Hiába fordítja le Schooten az antik definíciókat az új betűszámtani nyelvre, ebből nála nem lesz a Descartes értelmében vett algebra. Descartes algebrája ugyanis nem betűszámtan. A *Geometrie* egy új, nagy jelentőségű fogalom, a deriválható egyenletpolinom és a vele való munka szabályainak a megteremtését tartalmazza. Az algebrai egyenletekkel leírható görbék világa ez, ahol általános szabály adható meg ezen görbék érintőjének a szerkesztésére és a görbéket előállító egyenletek szélső értékének a számítására. Ebből a szemszögből tekintve a *Geometrie* nem az első analitikus geometriai értekezés, hanem az *egész* újkori függvénykalkulus nélkülözhetetlen *előfeltétele.*

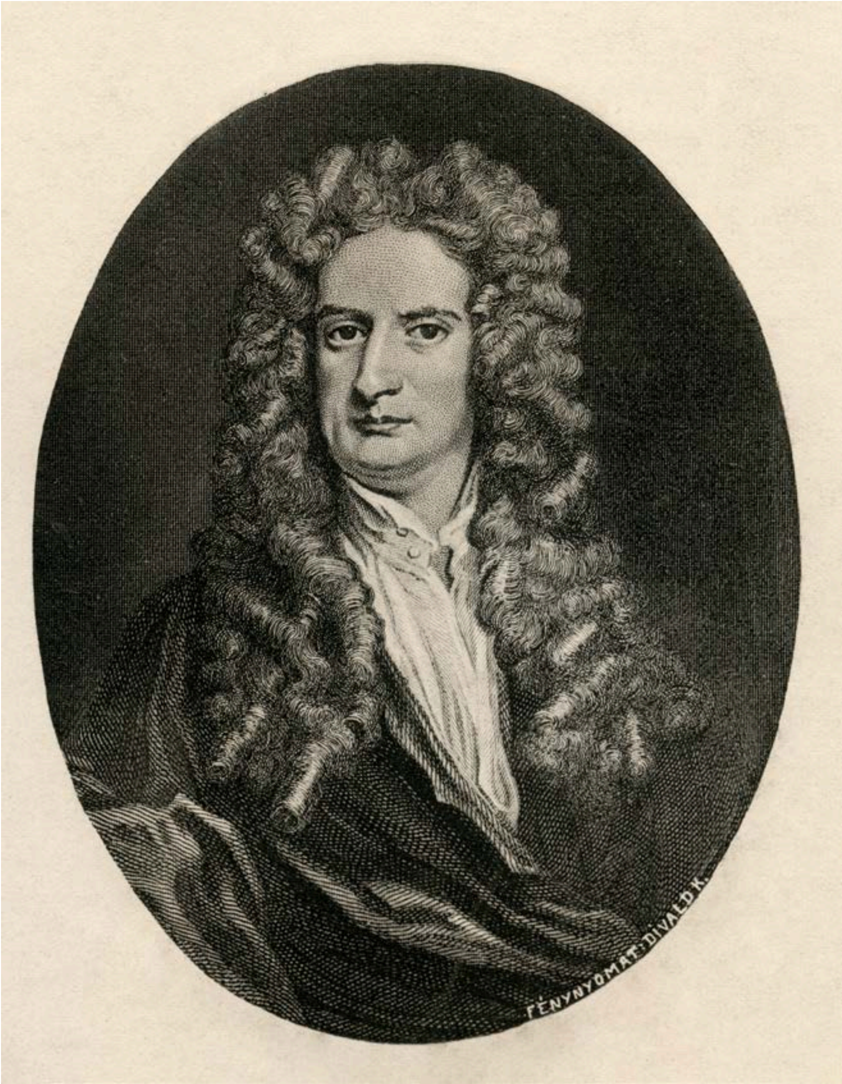
Semmit nem szóltunk még a *Geometrie* első könyvéről, amelyben Descartes bevezeti egy vonalszakasz és a mennyiség közötti megfelelkezést. Általában ezt szokták a *Geometrie* legnagyobb tettének és lényegének tartani. Azonban megtalálható ez már Fermat-nál is, ezzel dolgozott Harriot, Viète, ez húzódott meg Bradwardine és Oresme elképzelései mögött, ezt használta Papposz, Apolloniosz, ezen alapul az euklidészi *Elemek* egész második könyve. Úgyszólván az egész görög geometria az általános mennyiség vonalszakaszként való interpretálásán alapul.

[107] Geometrie, *Œuvres,* Adam–Tannery-féle kiadás. VI. kötet, 395.
[108] Szele Tibor: i. m. 216.

Descartes itt csak alkalmasabb jelölést vezetett be, s a matematika végső soron nem jelöléseken múlik. A vonalszakaszt és a valósszámot Descartes sem veszi egyenlőnek. Ehhez ugyanis a határérték fogalma szükséges, legalább abban az intuitív formában, ahogyan Newton bevezette. Newton az első, aki, ha bizonyítani még nem is tudja, egyenlőséget tesz vonalszakasz és – intuitíve felfogott – valósszám közé. Descartes-nál talán éppen a mennyiség fogalma a legantikabb. De *ahogyan* ezzel az antik vonalszakasz-mennyiség fogalommal dolgozik, a vele elvégezhető öt algebrai művelettel és (implicite) az egyenlőségjellel definiálva azt, annak nincs párja előtte az antikvitásban és utána a modern algebráig. Ez az első könyv jelentősége: definiálja az algebra eredményeit és módszerét, mint ami „a matematika olyan tényein alapul, amelyek a négy alapművelet és az egyenlőségi jel véges számú alkalmazásával megfogalmazhatók."[109]

Nem maga a mennyiség, hanem a vele való munka definiálása Descartes matematikájának a lényege. Ezért jut geometriájában olyan fontos szerep a mozgásnak. Schooten antik aszimptota-keretekbe szorított és Descartes szabad mozgásban leírt görbéje jól szemlélteti a két geometria közötti különbséget. A görög elmélet kész, statikus formákkal dolgozik, a cartesianus geometria a mozgást kihasználó kinematikus eljárás. A görög geometriában a görbék tulajdonságait mindig bizonyos egyenesek szabják meg, a görög geometria, amelyik nem ismeri még intuitíve sem a „folytonosság" fogalmát, nem képes magukhoz a görbékhez férkőzni, mindig egyenesek kereteibe kényszeríti őket. Descartes a mozgás zseniális használatával intuitíve biztosítja geometriája számára a „folytonosság" *követelményének* a teljesülését. Ezáltal közvetlen utat talál a görbék egy nagy csoportjához. Még számos görbét kirekeszt a geometriából és hosszú utat kell megtenni a matematikának, amíg ezek is általánosságban tárgyalhatók lesznek. Többek között explicite tisztázni kell, mit jelent a „folytonosság". De azokra a görbékre, amelyek egy speciális mozgásféleség segítségével algebrai egyenletekre vezethetők vissza, egységes matematikai módszerek adhatók meg. Ezek a módszerek egymással összefüggő, zárt egészet képeznek, jól definiált matematikai rendszert. Ez a felfogás és eljárásmód lett az újkori matematika mintaképe. Ahogyan J. E. Hofmann írta, Descartes nyitotta meg az utat a modern matematikai gondolkozási mód felé.

[109] Uo. 9.


FÉNYNYOMAT: DIVALD K.

NEWTON ÉS PASCAL

A NEWTONI INFINITÉZIMÁLIS ANALÍZIS KIALAKULÁSA A XX. SZÁZADI MATEMATIKATÖRTÉNET-ÍRÁS TÜKRÉBEN[110]

I.

Moritz Cantor nagy műve[111] 85. fejezetében kezdi az infinitézimális számítás ismertetését. A fejezet címe: „Sorok. Mercator. Brouncker. Gregory. Newton."

A XIX. század matematikájának egyik legjellemzőbb területét alkották a végtelen sorok. Az a tény, hogy Cantor ezek felől indul a matematika mindmáig legnagyobb kalandjának, az infinitézimális számításnak az ismertetésébe, már magában véve is jelzi az interpretáció várható jellegét.

A végtelen sorok elméletének legfontosabb, alapvető kérdése ma az, hogy egy sor összetartó-e vagy sem, konvergens-e vagy divergens.

Mit tartott erről a XVII. század? Cantor szerint – semmit.

Szerinte egy sor konvergenciára való megvizsgálásának a szükségessége „természetesen" csak a XIX. században merül fel, a XVII. és XVIII. század erre még csak nem is gondol. Az egyetlen kivétel akkor állt elő, „ha egy sort egy vele azonos függvény gyakorlati kiértékelésére akartak felhasználni. Ebben az esetben önmagától jelentkezett az a kellemetlenség, hogy divergens sorokkal való számolás nem vezet a kívánt eredményre, s ezen segíteni kellett" – úgy, hogy önkéntelenül is, intuitive konvergens sorokat alkalmaztak, a fogalom tisztázása, sőt felvetése nélkül. Így jár el lényegében James Gregory, a nagy skót matematikus 1668-ban megjelent *Exercitationes Geometriae*-jében.[112]

Teljesen a Gregoryéhoz hasonló sorfelfogással és részben azonos eredményekkel találkozunk Nicolaus Mercator 1668-ban Londonban megjelent *Logarithmotechnica*-jában. Ez a németalföldi matematikus Londonban élt, ahol „Wallis és közvetlen tanítványai olyan felületek

[110] Előzménye: Vekerdi László: A newtoni infinitézimális analízis kialakulása a XX. századi matematikatörténet-írás tükrében. = Magyar Tudományos Akadémia Matematikai és Fizikai Osztályának Közleményei 14 (1964) No. 1. pp. 35–70.

[111] *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. 3. (Schluss-) Band. Von 1668–1758.* Leipzig 1898.

[112] Uo. 58–60.

kvadraturájára voltak képesek, amelyeket az abszcisszatengely, két ordináta és az

$$y = a_1 x^{m_1} + a_2 x^{m_2} + \ldots + a_n x^{m_n}$$

egyenletű görbe határolt. Az egyenlő szárú hiperbola esetében ez már 1647 óta ismert volt Gregorius a Santo Vicentio által, aki ezt a területet logaritmus segítségével számította ki, a hiperbola egyik asymptotáját választva abszcisszának. De a hiperbola egyenlete ebben az esetben nem a fenti alakot öltötte, hanem $xy = 1$ volt, és ezért a két eredmény egyetlen tétellé való összefogására minden kísérlet sikertelennek bizonyult.

Itt az a pont, ahol közbelépett Mercator. A hiperbola egyenletét $y = \frac{1}{1+a}$ formára alakította át, és volt bátorsága az $\frac{1}{1+a}$ kifejezésben csak jelzett osztást az algebra közönséges szabályai szerint végre is hajtani.

Így tehát az

$$\frac{1}{1+a} = 1 - a + a^2 - a^3 + \ldots$$

in infinitum sor érvényességét tette fel.

Mai fogalmaink számára ez a lépés csaknem naivul egyszerű, akkor azonban új volt, s olyan horderejű, hogy a kortársak alig voltak képesek felmérni, bármennyire is becsülték azonnal Mercator felfedezését."[113]

Cantor szerint tehát az infinitézimális számítás első nagy jelentőségű lépése az volt, hogy Mercator az egyenlő szárú hiperbola $xy = 1$ egyenletét $y = \frac{1}{1+a}$ alakra hozta, s az itt csak kijelölt osztást a közönséges osztás törvényei szerint valóban el is végezte.

Ezzel mintegy felbátorított a végtelennel való munkára. Ezt az irányt folytatja a fiatal Newton, aki 1669-ben küldte el Collinsnak *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas* c. értekezését, amit Collins lemásolt, megmutatta Lord Brounckernek, mindketten nagyon megdicsérik, de semmit se tettek a megjelenése érdekében, még a Royal Society jegyzőkönyveibe se vezetik be.

Pedig a dolgozatnak több szempontból is óriási jelentősége van.

A 86. fejezetben Cantor a kontinens matematikusainak a sorelméletben elért eredményeit ismerteti, az infinitézimális analízis newtoni formájának a felfedezését a 88. fejezetben kíséri tovább, amelynek a címe: „Kúpszeletek. Síkgörbék elmélete." Ez a fejezet a mi szempontunkból igen fontos.

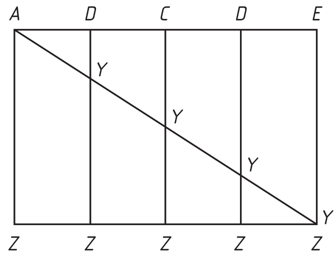
1669-ben jelent meg Isaac Barrow *Lectiones geometricae* c. könyve, amelyikben fiatal tanítványa, Newton is segített. Barrow geometriája a

[113] Uo. 53–54.

mozgás fogalmából indul ki. „Az időt valamilyen alakzattal ábrázolja, amelyik az egyenletességet fejezi ki, név szerint egyenessel és körrel. Hiszen az időt egydimenziós és a pillanat folytonos folyásából előálló mennyiségnek lehet tekinteni. (Barrow, *Lectiones geometricae* 6. oldal: ex unius momenti quasi continuo fluxu constitutum imaginatur.) Végül Barrow csak az egyenest választja az idő érzékeltetésére és egy, az idővonalra merőlegesen állított egyenest az egyes pillanatokban uralkodó sebesség érzékeltetésére. Ezeket a sebességegyeneseket azonos vagy különböző hosszúságúaknak veszi, aszerint, hogy a sebességet állandónak vagy változónak képzeli. A sebességvonalak összessége által képezett területek az adott időben adott sebességekkel történő mozgások, az egyesített sebesség (Uo. 10: aggregata velocitas), a mozgató erő (Uo. 13: vis motiva) képét adják."

„Az *AEZZ* négyszög és az *AEY* háromszög megvilágosítja, mit ért a fentiek alatt ... Barrow *Z, Y* stb. pontok helyeit (Ort) a mozgás alkalmazásával nyeri. Így jut el a görbékhez, amelyekkel a második felolvasás foglalkozik."[114]

Az érintőszerkesztés módszerét is a mozgások összetételének a segítségével ismerteti, ahogy azt már előtte is tették Roberval és Torricelli. Ezt a módszert igen jól ismerték Angliában. Wallis már 1659-ben védelmébe veszi Torricellit Roberval plagizációs vádjaival szemben.[115] Huygens is érintőproblémaként kezelte geniális módon az evolvens-evoluta kérdését.[116]



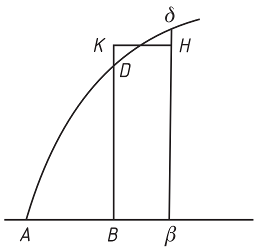
20. ábra

Az érintőprobléma tehát a kor egyik centrális – és legjobban kidolgozott – matematikai kérdés-komplexuma, Wallis és Barrow semmi lényegesen újat nem hoztak a kérdésben, csupán lehetővé tették az angol matematikának az itáliai, Galilei tanítványai körében kialakult módszerekhez való csatlakozását.

A következő, 89. fejezet „Newton és Leibniz első felfedezései az infinitézimális számítás területén". A fejezet annak a megállapításával kezdődik, hogy mindaz, amit az előző fejezetben ismertetett, „rég ismert módszerek szellemes felhasználóinak volt köszönhető". De amit Newton az 1669-es *De analysi..*-jében közölt Collinsszal, az már egészen új. Az írás az $y = ax^{\frac{m}{n}}$ alakú görbék kvadraturájával kezdődik, amit $\frac{an}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}}$ alak-

114 Uo. 127–128.
115 Uo. 129.
116 Uo. 134–143.

ban ad meg. Ez az eredmény nem új (war nichts weniger als neu), Wallis már 1655-ben ismerte. Új volt azonban a bizonyítás. Ahol Wallis intuitív módon bizonyított, ott Newton új bizonyítási módszert alkalmazott.



21. ábra

„Newton bizonyítása a következő. Jelölje x egy $AD\delta$ görbe AB bázisát, jelölje y a reá merőleges BD applikátát, z az ABD területet. Jelölje o betű a kicsiny $B\beta$ vonalszakaszt (ezt az o-t nem szabad, mint néha teszik, zérussal összetéveszteni). Legyen továbbá $BK=v$, és a $BKH\beta(=ov)$ négyszög területe legyen egyenlő a $B\beta D\delta$ területtel. Newton adottnak veszi z-nek x-től való függését, és megkeresi ebből az összefüggésből y-t; mai írásmódban, amit Newton nem ismert, azt mondanánk $z=\int ydx=F(x)$-ből megkeresi $y=\dfrac{dF(x)}{dx}$-et."

A továbbiakban Newton a binomiális tétel segítségével történő sorbafejtést alkalmaz és hatványsorokat differenciál, „de a szorzatok és hányadosok differenciálásának még nyoma sincs".[117]

Ez a Newton-féle fluxiós-kalkulus lényege, bár magát a nevet még nem használja. A „folyás" fogalmának és elnevezésének az eredete valószínűleg Napierre vagy Cavalierire nyúlik vissza. Végeredményben tehát nem új, de a lényeg a jelzésen van, és pontokkal való jelölés kétségkívül Newtontól származik. Az írás, amiben ezt kifejti, a *Methodus fluxionum et serium infinitorurn* csak halála után, 1736-ban jelenik meg nyomtatásban, de valószínűleg az 1670-es évek elején (1671) írta. Newton itt a matematikai mennyiségeket úgy tekinti, mint amelyek folytonos mozgás útján jönnek létre, és *fluensek*nek nevezi őket. Azt a sebességet, amellyel a fluensek nőnek vagy csökkennek, *velocitas*-nak vagy *fluxio*-nak nevezi, és a fluens jelölésére használt betű fölé tett ponttal jelöli. A jelölés – hangsúlyozza Cantor – jelenti Newton nagy lépését, hiszen egyébként ezeket a fogalmakat előtte már alkalmazták az itáliaiak. De Newton azáltal, hogy ugyanazt a betűt használja egy matematikai mennyiség – fluens – és a mennyiség változásának – fluxio – a jelölésére, megnyitja az utat egy új, egységes kalkulus kialakítása felé.

És Cantor nem mulasztja el megjegyezni, hogy ebben Leibniz messze Newton felett áll, nemcsak a jelölésben, hanem a jelöléssel összefüggő műveleti szabályok kidolgozásában is: Leibniz teremti meg a differenciálszámítás algoritmusát.[118]

Newton a *Methodus*-ban két problémát tűz ki. 1. Adva van két fluens

[117] Uo. 150–151.
[118] Uo. 187.

egymáshoz való viszonya, határozzuk meg a fluxióik közti viszonyt. 2. Adva van egy olyan egyenlet, amely fluensek fluxióit is tartalmazza, meg kell határozni a fluensek egymáshoz való viszonyát.

„Az általános módszer, amit Newton a fluxiókat is tartalmazó egyenletről a fluensek között fennálló egyenletre való visszatérésre alkalmazott, ... a fluensek hatványai szerint rendezett végtelen sorokba való sorbafejtésből áll." A sorbafejtésben azonban hibákat követett el – jegyzi meg Cantor.[119]

A Cantor-féle rekonstrukció lényeges pontjai a következőkben foglalhatók össze:

1. A XVII. század 50-es és 60-as éveiben Angliában John Wallis körében jelentős eredményeket érnek el az abszcisszatengely, két ordináta és egy magasabb fokú parabola által határolt terület kiszámításában.

2. Mercator egy zseniális sorbafejtés segítségével felismeri, hogy az egyenlő szárú hiperbola alatti terület ugyancsak a Wallis-féle módszerekkel számítható ki. Ezáltal közismertté teszi a sorbafejtés kvadratúrában való nagy jelentőségét. Hasonló, részben még nagyobb eredményeket ér el ezen a területen James Gregory.

3. Barrow (Torricelli és Roberval nyomán) az érintőmeghatározás kérdését egy mozgásgeometriai modell segítségével oldja meg, amelyben a görbét egy pont mozgása által létrejöttnek képzeli úgy, hogy a mozgás sebességének egy tengelyre – az időtengelyre – való vetülete mozgás közben konstans.

4. Newton az 1669-es Collinsnak küldött írásában általánosítja Wallis eredményeit és – a binomiális tétel segítségével – új bizonyítását adja az $y = ax^{\frac{m}{n}}$ és $\frac{an}{m+n} x^{\frac{m+n}{n}}$ alakú kifejezések közötti kölcsönös összefüggésnek. Ezáltal felismeri, hogy differenciálás és integrálás inverz műveletek. Cantor ezt tartja az infinitézimális számítás felfedezése szempontjából legjelentősebb lépésnek.

5. Később – a *De analysi* ... továbbfejlesztéseként – Newton Napiertől vagy Cavalieritől vett mozgásgeometriai megfontolásokra alapítva, a matematikai mennyiségeket folytonos mozgás által létrejött *fluens*-eknek, a mennyiségek változásának a sebességét a fluensek *fluxió*-inak nevezve, egységes jelölési módhoz jut, amely a fluensek közötti relációk és a fluxiók közötti relációk közötti összefüggés jellegét (integrálás és differenciálás inverz műveletek) még jobban kidomborítja. Ez a módszere is sorbafejtésen alapul és nehézkes. Egészében véve a Leibniz jelölési és számolási módja sikerültebb: az infinitézimális számítás algoritmusát Leibniz teremti meg.

A Cantor-féle rekonstrukcióhoz csatlakozik – annak kisebb – na-

[119] Uo. 155–166.

gyobb fogyatékosságait fokozatosan kiküszöbölve – a német matematikatörténészek zöme.

Az első jelentős módosítást Cantor interpretációján Zeuthen[120] végzi, Zeuthen interpretációja lesz a másik nagy interpretációs vonal kiindulása, amelyet a legtöbb angol és francia matematikatörténész követ. Zeuthen az infinitézimális számítás genezisének a centrumába a területszámítás helyett az érintőmeghatározás és az érintőből való görbemeghatározás (fordított érintőfeladat) problematikáját helyezi. Láttuk, hogy Cantor a területmeghatározás problémái mellett ezt kevésbé jelentősnek ítélte. Zeuthen szerint itt hoz a XVII. század az antikvitás infinitézimális problémáihoz képest először jelentős újítást. Az új tulajdonképpen már megjelenik a XVII. század legelején: a Napier-féle logaritmus-definícióban és Galileinél. Galilei és Napier egy tényleges, ill. egy képzelt pontnak a mozgását vizsgálva, tulajdonképpen a folytonos függvény fogalmát teremtik meg, és a Newton-féle fluxiós módszert készítik elő. De előbb még egy hosszú kerülőt kell végigjárnia a matematikának: az antikvitás exhauszciós és demokritoszi módszereihez csatlakozva.[121] Ezt a nagy kitérőt Zeuthen „integrálszámítás előtti integrálás" (Integration vor der Integralrechnung) néven foglalja össze: ide sorolja Kepler, Torricelli, Gregorius A Santo Vicentio, Fermat, Pascal, Roberval és Huygens terület, térfogat, súlypont meghatározásra szolgáló módszereit. Ezek mind az antik geometriai módszerek egyre tökéletesebb elsajátításán alapultak.

De az antik módszerek újratanulása közben a matematika fejlődése olyan gyors lett, hogy elkerülhetetlenné váltak intuitív bizonyítási módszerek is: ezeket alkalmazva jut Wallis – aki egyébként szintén jól ismerte a szigorú antik módszereket a híres kvadratúráira.[122]

Az intuitív módszerek szerepelnek az egyre nagyobb jelentőségűvé váló végtelen sorok elméletében is.

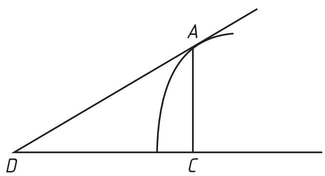
Zeuthen egyetért Cantorral: szerinte sem jutottak eddig lényegében túl az antikvitás infinitézimális módszerein. Ekkor jelentkezik az új (s egyben a zeutheni interpretáció Cantortól való eltérése). A XVII. század közepén, második felében számos problémát – mint pl. érintőmeghatározás, maximum-minimum feladatok, algebrai egyenletek gyökeinek az összeesése – közös csoportba foglalnak össze. Ismerte ezeket az antikvitás is, de nem tekintette őket – szemben az integrációs módszerekkel – közös csoportba foglalhatóknak.[123]

Torricelli és Roberval egymástól függetlenül – Torricelli közvetlenül

[120] Zeuthen, H. G.: *Geschichte der Mathematik im XVI. und XVII. Jahrhundert*. Leipzig 1903.
[121] Uo. 235–237.
[122] Uo. 248–280.
[123] U. 316.

Galileihez kapcsolódva – meghatározzák a hajított test parabolikus pályájának az érintőjét a mozgások összetevésének a segítségével. A Torricelli-iskola jelentős részleteredményeket ért el, de általános módszert kinematikus érintőmeghatározással nem lehetett adni. Ehhez algebrára volt szükség.[124] Itt lép be a fejlődésbe a nagy Toulouse-i matematikus, Fermat.

Fermat a maximum-minimum problémával hozza kapcsolatba az érintőmeghatározást: ez jelenti az első nagy lépést az új infinitézimális számítás megteremtése felé. Abból indul ki, hogy a *CA* ordináta és a *CD* szubtangens (s_t) közötti viszony érintés esetében maximum vagy minimum lesz,[125] s egyes esetekben már a kvadratúra és az érintőmeghatározás között fennálló inverz-viszonyt is felismeri. Az inverz-viszony általános voltának a felismerése Barrow érdeme.



22. ábra

Barrow ezen tételét – az érintőszerkesztés és a kvadratúra közötti összefüggést kifejező „megfordíthatósági tételt” (Umkehrungssatz) implicite már Napier kimondotta volt logaritmus definíciójában, s főleg Galilei $\frac{ds}{dt} = gt$ törvényében, amit ő grafikusan integrált, s kapta az $s = \frac{g}{2}t^2$ eredményt. Az érintőszerkesztés és a kvadratúra közötti összefüggés implicite benne volt a De Beaune-feladatban. Ezt az összefüggést használja fel Wallis, amikor a Torricelli–Roberval-féle érintőszerkesztést általánosítva egy fordított érintőfeladatnak differenciálegyenlet alakot ad, kinematikai megfogalmazásban. Wallison át jut Barrowhoz, aki általánosítja és explicite kimondja.

Barrow általános megfordítási tételét Torricelli kinematikai érintőmódszerével és tisztán geometriai úton bizonyítja. Módszere nem egy bizonyos görbére vonatkozik, hanem általános: összefüggést ad egy tetszőleges y függvény $v = \frac{dy}{dx}$ között, s kimutatja, hogy ez az összefüggés egy $y = \int vdx$ kvadratúrával fejezhető ki. De Barrow-nál még hiányzik a differenciálhányados fogalma.[126]

Newton itt is, akárcsak a fizikában, azt az utat járja következetesen végig, amire Galilei lépett. Az idő, mint független változó (parameter) segítségével jellemez mennyiségeket (fluensek, *x, y,* z stb.), s így ezeknek megadhatók a sebességei (fluxiók, $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, stb.) és azok viszonyai: $\dot{x}/\dot{y}$ stb.

A módszer segédeszközét a *De analysi per aeqationas infinitas*-ban

[124] Uo. 322–325.
[125] Uo. 330–333.
[126] Uo. 354.

adta meg, sorbafejtésekkel. Newton már tisztában van azzal, hogy a fluxioképzés (differenciálás) és a kvadratúra inverz műveletek. „Az $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ viszony képzésénél fogva pontosan ugyanaz, mint a $\frac{dy}{dx}$ differenciálhányados, és magát Newton $\dot{x}$, $\dot{y}$, ... fluxió-meghatározását a *dx*, *dy* differenciálok tiszta, mindenféle meghatározatlan »végtelen kicsi« fogalomtól mentes definícióinak lehet tekinteni.”[127]

Erre utal egyébként az is, hogy $\dot{x}=1$ esetében $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\dot{y}$-ot ír, s ezt z-vel, fluxióját $\dot{z}$-val vagy $\ddot{y}$-val jelöli. „Látjuk, hogy a független változó fogalom, ha ez a kifejezés még nem is fordul elő, olyan tisztán és egyszerűen áll előttünk, akár egy modern tankönyvben.”[128]

A *Principia* is sokkal egyszerűbb lett volna, ha a fluxiós módszert használja. Mégsem alkalmazza. Egy olyan mennyiséget, amely egy másik mennyiség valamilyen függvénye, nem fluensek relációjával, hanem egy görbe ordinátájával reprezentál, s az integráció helyett inkább geometrikus kvadratúrákat alkalmaz.[129] Leibniz nem jelent elvi haladást Newtonhoz képest, jelentősége szerencsés szimbolikus jelölésmódjában van, ami a továbbiakban egységes számolási módszer alapjává válhatott.[130]

A Zeuthen-féle interpretáció Cantorétól való eltérései az alábbiakban foglalhatók össze:

1. Igen nagy jelentőséget tulajdonít a függvényfogalom megjelenésének, s ezt már Galileire és Napier-re vezeti vissza.
2. Semmi – vagy majdnem semmi – jelentőséget sem tulajdonít a további fejlődés szempontjából az antik módszerek újraéledésének.
3. A kvadratúra-problémákkal való foglalkozásnál fontosabbaknak tartja a (később) differenciálással megoldható problémák előtérbe nyomulását és egy csoportba való összefoglalását.
4. Központi jelentőséget tulajdonít Barrow megfordítási tételének.
5. Newton fluxiós módszerében látja a Galileinél megindult problémák betetőzését, ezt a módszert lényegében a mai differenciálszámítással veszi azonosnak. Emellett csak alárendelt szerepet tulajdonít – a differenciálszámítás szempontjából – a *De analysi* ...-nek.
6. Kétségtelennek tartja Newton módszerének eredetiségét és elvileg tisztázottabb voltát Leibnizével szemben, de elismeri a Leibnizi módszer számolástechnikai előnyeit.

A következő – véleményünk szerint igen jelentős – lépést a newtoni

127 Uo. 375.
128 Uo. 376.
129 Uo. 394.
130 Uo. 412.

infinitézimálkalkulus történetének felderítésében Otto Toeplitz tette. Helyesebben nem is pontosan ő, hanem a göttingeni matematika, aminek Toeplitz inkább csak „szócsöve” volt. S ez nem lekicsinylés akar lenni, ellenkezőleg: a legnagyobb dicséret. Nem lehet elégszer figyelmeztetni arra, mit jelentett a modern matematika történetében Göttingen. Az egyik legnagyobb göttingeni matematikus, Felix Klein *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus c.* könyvének harmadik kötete, a *Präzisions- und Approximationsmathematik* (Berlin, 1928) az infinitézimális számítás kialakulása szempontjából nélkülözhetetlen részleteket tartalmaz. „Minden gyakorlati területen van a pontosságnak egy küszöbértéke” – állapítja meg –, de van-e ilyen küszöbérték a térbeli elképzelésben is? Az arithmetikában ugyanis nincs, „az a pontosság, amivel a számok definiálhatók, korlátlan”.[131]

Teljesen ebbe a precíziósmatematikába tartozik pl. a kommenzurábilis – inkommenzurábilis közötti különbségtevés. De hová tartozik a függvény? Az empirikus görbe ugyanis nem függvényt definiál, hanem egy $y = f(x) \pm \varepsilon$ „függvénysávot” (Funktionsstreifen). Egy empirikus görbe mindig – akkor is, ha nem rajzoljuk, csak „elképzeljük” – korlátolt pontosságú lehet „és így nem a precíziósmatematika éles függvényfogalmának, hanem a függvénysávnak felel meg”.[132] A precíziósmatematika éles, $y = f(x)$ függvényfogalma empirikusan se meg nem valósítható, se el nem „képzelhető”.

Lehet-e a precíziósmatematika $y = f(x)$ függvényfogalmát úgy beszűkíteni, hogy az az empirikus görbénél megszokott tulajdonságokat, illetve ezekkel analóg tulajdonságokat mutasson? Lehet. A precíziósmatematika $f(x)$ függvényfogalmának ehhez az alábbi öt tulajdonsággal kell rendelkeznie:

1. Kontinuitás – azaz sehol se szakadjon meg, ne „ugorjon” a görbe. – Ennek a követelménynek a precíziósmatematikában az ún. „folytonos” függvények felelnek meg.

2. Az x tengely, a görbe, és két ordinátája közt mindig legyen egy terület (Flächeninhalt) elhatárolható. – Ennek a követelménynek megfelel az a precíziósmatematikai tétel, hogy minden folytonos függvény integrálható.

3. A görbének véges intervallumban csak véges számú maximuma vagy minimuma legyen. – Ez nem következik a folytonosságból, mert pl. $y = x \sin \frac{1}{x}$ esetében a hullámok sűrűsödésének soha nincs vége. Ehhez meg kell követelni, hogy „az $y=f(x)$ függvény az éppen vizsgált intervallumban véges számú monoton (csak növekvő vagy csak csökkenő) darabra essen szét”.[133]

[131] Klein, Felix: *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. 3. Bd. Präzisions- und Approximationsmathematik.* Berlin 1928.
[132] Uo. 17.

4. Empirikus görbéinknek irányt is tulajdonítunk: ezt egy $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ úgynevezett differenciahányadossal fejezzük ki, ahol $\Delta x \neq 0$ kicsi a görbe hosszához, de nagy a szélességéhez képest. „Az empirikus görbe a tapasztalat szerint megközelítőleg egybeesik az x, y-ból $x + \Delta x$, $y + \Delta y$-ba vezető egyenessel."

A precíziósmatematikában a Δx minden előre megadott értéknél kisebb lehet, s ebben az esetben az (x, y) és $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ pontokat összekötő szelő minden határon túl közeledik az (x, y) pontbani érintőhöz, a szelő irányát kifejező $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ differenciahányados pedig az érintő irányát megadó kifejezéshez, amit – differenciálhányadosnak neveznek, és y'-vel vagy $\frac{dy}{dx}$-el jelölnek. De ilyen differenciálhányados nem minden folytonos függvény esetében létezik, pl. az $f(x) = |x|$ függvénynek, ami minden valós x-hez abszolút értékét rendeli, az $x = 0$ pontban nincs differenciálhányadosa – a függvényt ábrázoló görbének nincs egyértelműen megadott iránya. Azért ha azt akarjuk, hogy a folytonos függvény megfeleljen egy empirikus görbének – „aminek mindig van iránya" – , meg kell követelni a differenciálhányados létezését.[134]

Ezekkel a tulajdonságokkal rendelkező függvények adják vissza kvalitative az empirikus görbéknél megszokott sajátságokat. De ezzel még semmit sem tudunk a kvantitatív viszonyokról. Arra a kérdésre, hogy „mennyire lehet egy empirikus görbét lefutás, irány és görbület szempontjából egyszerű, analitikusan definiált függvényekkel megközelíteni?"[135] – a sorbafejtések adnak választ.

Nem mintha a „természet" különösebben kedvelné az egyszerű, fentiek értelmében definiált függvényeket, s nem mintha ezek lennének a precíziósmatematika legfontosabb részei. Pusztán arról van szó, hogy a precíziósmatematikának ezek a részei aránylag könnyen alkalmazhatók a mindig csak korlátolt pontosságú megfigyelésekre.[136]

Nos, éppen a Klein által a fizikai alkalmazhatóság érdekében a függvénytől megkívánt pontokat járja végig Toeplitz[137] szerint a nyugat-európai matematika fejlődése. Cavalieri az első, aki először lép túl – nem sokkal – Arkhimédész parabolakvadratúráján, amennyiben sikerül – arkhimédészi exhauszciós módszerrel „feltornáznia" magát az Arkhimédész

[133] Uo. 23.
[134] Uo. 24–26.
[135] Uo. 51.
[136] Uo. 51–84.
[137] Toeplitz, Otto: *Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung. Eine Einleitung in die Infinitesimalrechnung nach der genetischen methode.* Berlin–Göttingen–Heidelberg 1949.

által megoldott másodfokú parabola ($y = x^2$) kvadratúrájáról az $y = x^9$-el leírható paraboláig, $y = x^{10}$-nél azonban megakadt.

Fermat-nak sikerül – végtelen geometriai sor összegének a segítségével – 1650 körül megoldania az $y = x^k$ parabola kvadratúráját tetszőleges k egész kitevőre.[138]

Ez idő tájt (1647) kerül közlésre Gregorius a Santo Vincentionak csupa mesterkélt, üres tételt tartalmazó nagy könyve végén az egyenlő szárú hiperbola $y = x^{-1}$, azaz $y = \frac{1}{x}$ kvadratúrája.

Mint Gregorius felfedezéséből is látszik, a területszámítás egyre inkább bizonyos meghatározott alakú idomokra: az abszcissza, a görbe és két ordinátája által határolt területekre kezdett korlátozódni. Ezekre vonatkozik Cavalieri két fontos tétele.[139]

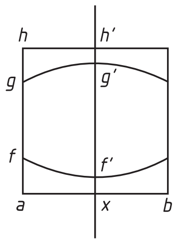
Könnyű felismerni, hogy eddig a Klein-féle 1. és 2. követelmény birodalmában mozogtunk. Most Toeplitz – megfelelően a Klein-receptnek – bevezeti a „monotoniát”. És itt elhagyja a történelmi sorrendet – kitérőt végez, visszafelé, a múltba. A nyugat-európai matematika történetében nem itt volt a folytatás. A nyugati matematika csak később ért el a monotonia fogalmához. Arkhimédész azonban már ide is eljutott: axiomatizálta az ívhosszmeghatározáshoz szükséges monotonia fogalmat.[140]

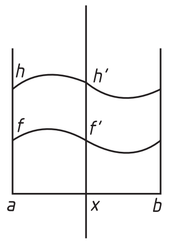
Az európai matematika más, pontatlanabb, intuitív úton közeledett a területszámítás általános megoldásához: az indivizibiliák útján. Nem tudták, hogy ebben is megelőzte őket Arkhimédész, mert ezt a módszert tárgyaló „Módszer”-e csak 1906-ban került elő. Heiberg találta meg egy kivakart és szent szöveggel teleírt bizánci kéziraton, Isztambulban.

Az európai matematikán a XVII. század első felében valóságos tevékenységi láz vesz erőt. Az indivizibila-módszer diszkussziói mellett egyre intenzívebben foglalkoznak az érintő meghatározás kérdésével, a megfordított érintő feladattal, maximum-minimum problémákkal, a Galilei-isko-

[138] Uo. 51–52.

[139] Uo. 55. – 1., Ha egy f görbe alatti terület F, egy g görbe alatti G és úgy van szerkesztve egy h görbe, hogy minden egyes ordinátájára $xh' = xf' + xg'$ akkor $H = F + G$. 2., Ha h görbe úgy van szerkesztve, hogy minden ordinátáján a-tól b-ig $xh' = \rho \cdot xf'$, akkor $H = \rho F$.





[140] Uo. 60–73.

lában mozgásmatematikával, a sebességgel, Napier a képzelt mozgás egy különös esetével: a logaritmussal.

Ezekben a felfedezésekben csírájában benne van az integrál- és differenciálszámítás. „És ez a fejlődés legvilágosabban kiemeli azt a pontot, amit a szokásos ábrázolással többnyire elrejtenek, szinte szándékosan, bár az egyetlen meglepő gondolat az egészben.”[141] 1650 körül voltaképpen már minden kellék együtt van, ami az infinitézimális számításhoz szükséges. Mégsem jöhetett létre addig, amíg ez az „egyetlen meglepő gondolat” napvilágra nem jön. Ez az „egyetlen meglepő gondolat” a XVII. század egész addigi, szerteágazó, értékes, de nagyon pontatlan, intuitív indivizibilia-fogalomra, vagy az antik geometria fogalmaira építő részletkutatását egyszerre összefogja, egységesíti, s – integrál-differenciálszámítássá alakítja át.

Mi ez a meglepő gondolat?

Bizonyos fokig visszatérés Arkhimédészhez, aki axiomatizálta az ívhosszmeghatározáshoz szükséges monotonia-fogalmat. Felismerte, hogy „ívhossz”-ról matematikailag, azaz pontosan, csak akkor beszélhetünk, ha előre megköveteljük a létezését. Ha körülhatároljuk, gondosan kizárjuk mindazokat a veszélyeket, – amik eleve lehetetlenné tennék a róla való matematizálást. Ahogy Toeplitz mondja: megadjuk a kívánt dolog matematikai „receptjét”.[142]

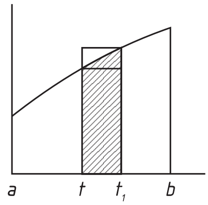
Ehhez a meglepő arkhimédészi gondolathoz tér vissza a XVII. század hatvanas éveinek a végén Isaac Barrow, Newton mestere. Kimutatja, hogy az érintőmeghatározás (differenciálás) és területszámítás (integrálás) nem magától értetődő, mindig elvégezhető műveletek. Észreveszi, hogy csak akkor tudunk érintőt szerkeszteni egy görbéhez, ha a görbét előre olyannak vettük fel, hogy legyen érintője. Hasonlóképpen csak akkor beszélhetünk egy görbe alatti területről, ha a görbét előre olyannak választottuk, hogy ez a terület létezzen. Azaz legyen a-tól b-ig mindenütt végigcsúsztatható a görbe mentében, ugrás nélkül, egy tetszés szerint keskeny tt_1 terület (folytonosság) és legyen a görbe véges ab szakaszokkal csupa vagy csak növekvő, vagy csak csökkenő részekre felosztható (monotonia). S ha ez a két feltétel kielégül, azaz folytonos és monoton függvények esetében, az érintőszerkesztés, és területmeghatározás összetartoznak, egyik következik a másikból, egymás után alkalmazva megsemmisítik egymás hatását, pontosan úgy viselkednek ebből a szempontból, mint a hatványozás és gyökvonás: egymás megfordított műveletei.

Isaac Barrow felfedezi 1667-ben azt, amit ma az infinitézimális számítás fundamentális tételének nevezünk: differenciálás és integrálás (folytonos és monoton függvények esetében) egymásnak inverz műveletei.

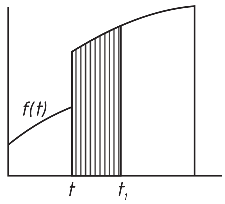
[141] Uo. 91.
[142] Uo. 60.

Láttuk, ugyanezt tartotta már Zeuthen Barrow nagy tételének, csak még folytonosság és monotonia nélkül. Zeuthen még nem hallgatta Felix Kleint, Zeuthennél még egészen másként fedezte fel Barrow ugyanazt...

Toeplitz megmagyarázza Barrownak, tulajdonképpen mit is vitt végbe. Felfedezte a „Fundamentalsatz”-ot: „Ha $F(t) = \int_a^t f(x)dx, a \le t \le b$, $f(x)$ folytonos és monoton, akkor $F'(t) = f(t)$. Barrow bizonyítása éppen olyan egyszerű, mint amilyen világos.



23. ábra



24. ábra

Tekintsük $F'(t) = \lim\limits_{t_1 \to t} \dfrac{F(t_1) - F(t)}{t_1 - t}$ határátmenetet. Mármost $F(t_1) - F(t) =$ $= \int_a^{t_1} f(x)dx - \int_a^{t} f(x)dx = \int_t^{t_1} f(x)dx$ a vonalkázott alakzat területe. Mivel $f(x)$ monoton

$$f(t) < f(x) < f(t_1) \text{ ha } t < x < t_1$$

és $(t_1 - t)f(t) < \int_t^{t_1} f(x)dx < (t_1 - t)f(t_1)$; így $f(t) < \dfrac{F(t_1) - F(t)}{t_1 - t} < f(t_1)$.

Ha $t_1 \to t$, akkor $f(t_1)$ minden függvényértéket felvesz t_1 és t között. Ha az $f(x)$ függvény $x = t$-nél megszakadna (ettől monoton még lehetne) akkor $\lim\limits_{t_1 \to t} f(t_1)$ nem lenne egyenlő $f(t)$-vel. Ha $\lim\limits_{x \to t} f(x) = f(t)$ függetlenül attól, hogy jobbról vagy balról közeledik az x a t-hez, akkor az $f(x)$ függvényt az $x = t$ helyen folytonosnak nevezzük. Mivel előre feltételeztük, hogy $f(x)$ függvény folytonos, következik, hogy $\lim\limits_{t_1 \to t} \dfrac{F(t_1) - F(t)}{t_1 - t} = f(t)$.[143]

Ha egyáltalán lehetséges egyetlen embert megtisztelni az infinitézimális számítás felfedezője címmel – véli Toeplitz –, akkor az Isaac Barrow... Barrow azonban bizonyosan nem pályázna erre a címre. Nagy könyve megjelenése után visszavonul a Bibliához, és a geometria csak kedvtelése marad, de mindig szigorúan Euklidész modorában.

A prioritásharcnak – Toeplitz szerint – nem Leibniz és Newton, ha-

[143] Uo. 92–93.

nem Barrow és Newton között kellett volna kitörni, a prioritásharc – mint Cantor olyan szépen kifejtette – politikai kérdés volt a tory Newton és a fejedelmét, a whi-jelölt hannoveri választót támogató Leibniz között.

De a harc gyökerei nem itt voltak. A harc gyökerei „a matematika egész fejlődésében találhatók, kiváltképpen a függvényfogalom fejlődésében."[144]

Descartes a görög geometria nagy részét algebraizálta, de – tudatosan a görög matematika egy részére szorítkozott: az infinitézimális eljárásokhoz – Toeplitz szerint – nem nyúlt.

Ennek következtében alakul ki kétféle függvényfogalom. Az egyik a Descartes által kirekesztett infinitézimálgeometriai megfontolásokhoz csatlakozik. Csírájában már Galileinél és Cavalierinél is megtalálható, és Barrow-ban ér csúcsára. Ez az irány jelenti a geometriai függvényfogalom kialakulását. A függvény itt a geometriai és mechanikai képek összefogásából és általánosításából alakul ki, egy szabályt jelent, amely minden, adott a és b határok közt fekvő x értékhez egy $y = f(x)$ számot rendel.

Descartes analitikus geometriájához csatlakozva fejlődik ki a másik irány. Ez az irány a függvényt sokkal szűkebben értelmezi, algebrai kifejezésnek fogja fel (Rechenausdruck): racionális törtfüggvénynek, gyöknek, polinomnak, végtelen sornak.

„Gregorius a Santo Vicentio, a jezsuita páter és Huygens még a régi, görög módon gondolkoznak; Barrow-t megragadja a geometriai függvényfogalom fejlődése és megkísérli beépíteni a görög gondolkozásmódba. Newton alig pár évvel fiatalabb Barrow-nál, de ő már az új, algebrai kifejezésekre alapított függvényfogalom generációjához tartozik."[145] A „generációváltás" a matematika történetében éppen olyan jelentős, mint a művészettörténetben. Csak az új generáció: Newton és Leibniz generációja érti meg a Barrow-féle tétel lényegét, azt az óriási megkönnyítést, amit ez a tétel a számolás, a kalkulus szempontjából jelent.

Összefoglalva Toeplitz interpretációját, azt látjuk, hogy szerinte az első lépés a folytonosság fontosságának a megsejtése volt, ami a parabolákra való szorítkozásban és a mozgás segítségül hívásában nyilvánult. A görbe alatti terület kvadratúrájában a módszer további fejlődését a speciális alakú területek bevezetése segítette elő. Azután esetenként, a folytonosság és a szakaszonkénti monotonia biztosításával, intuitív határátmenettel történt az érintőszámítás, a fordított érintőfeladat, a maximum-minimum problémák, evolvens-evoluta problémák megoldása. A fejlődés végső következményét Barrow vonta le: megteremtette a megfordíthatóan differenciálható-integrálható függvény fogalmát.

Ez a fejlődés nagyjából annak a négy kvalitatív követelménynek felel

[144] Uo. 123.
[145] Uo. 124.

meg, amit Felix Klein kívánt meg a fizikában célszerűen alkalmazható függvényektől. A Klein-féle kvantitatív lépcsőt Toepliz interpretációjában Newton és Leibniz jelentik: megmutatják, hogyan kell tetszőleges pontossággal számolni az ilyen függvényekkel.

Toeplitz könyve máig legteljesebb és legszebben megírt vázlata az infinitézimális számítás korai történetének. S mivel az a perspektíva, amiből az egész fejlődést tekinti – ti. a fizikai alkalmazások perspektívája – bizonyos fokig valóban egyben a történelmi fejlődés perspektívája is, sok helyen történelmileg is helyes képet ad a kalkulus kialakulásáról. De nem szabad elfelejteni, hogy az infinitézimális számítás csak a XVIII. és XIX. században forrott össze elválaszthatatlanul a fizikával, a XVII. században a két diszciplína még függetlenül fejlődik egymástól. Elég arra emlékeztetni, hogy Newton nagy fizikai művében, a *Principia*ban nem alkalmazza azokat az infinitézimális módszereket, amiknek akkor már két évtizede birtokában volt, s amik számunkra elválaszthatatlanul egybeforrottak a newtoni fizika fogalmával, s hogy Huygens, a modern fizika Newtonnal és Galileivel egyenrangú megteremtője sohasem alkalmazta a kalkulust.

Könnyű már nekünk elképzelni pl. Galileit, amint egy vízióra és egy különböző hajlásszögre beállított lejtő segítségével „integrálja" a fizika első „differenciál egyenleteit"...

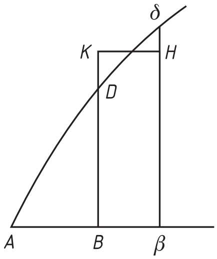
De Galilei bizonyosan nem gondolt arra, hogy differenciálegyenletet integrál. A történelem alapvető igazságtalansága, hogy nem lehet megkérdezni azokat, akikről írunk: ők mit gondolnak arról, amit róluk állítunk. Így minden történetírás – bizonyos fokig – múltba vetített utópia: a jelen értelmét és gyökereit keresi. Azért csak az lehet jó történetíró, akinek a múlthoz, amiről ír, köze van. Akinek a tárgyalt múlt egy kicsit saját története. Végeredményben két megbízható történetírói műfaj van: a memoár és a – levelezés.

Nos, a göttingeni iskola memoárjait az infinitézimális számítás eredetéről így kell megítélni. Egy előnye bizonyosan van: észrevette és kiemelte azt az éles fordulatot, ami a matematika történetében a XVII. század közepén bekövetkezik: a kvantitatív módszerek, a számolás, a kiszámítás elképesztő és hirtelen térhódítását, a számtáblázatokkal, logaritmussal és szögfüggvényekkel való munka terjedését, ami nélkülözhetetlen előfeltétele volt az infinitézimális kalkulusnak.

De nekünk, akik nem rendelkezünk olyan sok éves matematikai memóriával, mint a göttingaiak, kötelességünk ezt a személyes és meleg hangú történetet egy objektív, hideg, óriási filológiai apparaturával dolgozó, nagyon nehezen olvasható, nagyon megbízható, túlságosan is pontos, szigorú leírással kiegészíteni.

Joseph E. Hofmannra gondolok: ő a matematikatörténész a XVII. század szép, de zavaros vizein.

Der große Newton wird häufig genannt und ist doch kaum bekannt – kezdi a Newton korai matematikájáról írott nagy monográfiáját.[146] Newton legendává lett, az igazi Newtont rég elfelejtették. Newton – az igazi – 1664-ben kezd komolyan foglalkozni matematikával. „Schootent, a cartesiánus geometriát, Oughtredet, Wallist és Viètet tanulmányozza. Egyébként Barrow matematikai előadásait is hallgatta."[147]



25. ábra

Hofmann részletesen ismerteti az 1669. aug. 10-én Collinsnak küldött *De analysi per aequationes numeros terminorum infinitast.* Az első négy fejezet a sorelmélet szabályait foglalja össze, az ötödik fejezet a fluxió fogalmát vezeti be, de még a fluxió elnevezés nélkül, a további fejezetek alkalmazások: görbék hossza, sorok koefficiensei, mechanikus görbék.

Az első fejezetben közölt, $y = ax^{\frac{m}{n}}$ alakú függvények $\frac{an}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}}$ alakú kvadratúráját és ennek a megfordíthatóságát a tizedik fejezetben igazolja. „Egy előkészítő részben *AB* = *x; BD* = *y, ABD felület* = *z* jelöléseket vezeti be, és azt a feladatot tűzi ki, hogy az *x* és *z* között adott összefüggésből meghatározza *y*-t. Ebből a célból bevezet egy szomszédos ordinátát és *Aβ* = *x* + *o, Aβδ felület* = *z* + *ov* jelölést vezeti be.

A továbbiakat a $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} = z$ vagy $\frac{4}{9} \times x^3 = z^2$ példán vezeti le, *x*-et *x* + *o*-val helyettesíti, *z*-t *z* + *ov*-vel, kiküszöböli mindkét oldalon az *o*-t nem tartalmazó tagot, végigoszt *o*-val, és így a

$$\frac{4}{9}\left(3x^2 + 3xo + o^2\right) = 2zv + v^2o$$

egyenletre jut. A továbbiakban a saját szavaival folytatom: Si iam supponamus *Bβ* in infinitum diminui et evanescere sive *o* esse nihil, erunt *v* et *y* aequales, et termini per *o* multiplicati evanescent; quare restabit

$$\frac{4}{9} \times \frac{3}{3}xx = 2zv \textit{ sive } \frac{2}{3}xx(= zy) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}y \textit{ sive } x^{\frac{1}{2}}\left(= \frac{x^2}{x^{\frac{3}{2}}}\right) = y.$$

[146] Hofmann, Jos. E.: „Studien zur Vorgeschichte des Prioritätstreites zwischen Leibniz und Newton um die Entdeckung der höheren Analysis. I. Abhandlung: Materialen zur ersten mathematischen Schaffensperiode Newtons (1665–1675)", *Abhandlungen der Preussischen Akademie der Wissenschaften, Jahrgang 1943. Mathematisch-naturwiss. Klasse. Nr.* 2. Berlin 1943. (továbbiakban: Vorgesch.)

[147] Uo. 7.

Quare e contra, si $x^{\frac{1}{2}} = y$, erit $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} = z$.

Teljesen hasonlóan halad az I. fejezetben adott szabálynak az általános bizonyítása. Newton kimutatja, hogy $z = \frac{n}{m+n} ax^{\frac{m+n}{n}}$-ból $y = ax^{\frac{m}{n}}$ következik, és megfordítva.”[148]

A mű befejezésül egy függvény hatványsorba fejtését adja meg.

A *De analysi* jelentősége óriási lett volna, ha ismertté válik. Talán a matematika egész fejlődése másként alakul – írja Hofmann. Collins azonban jóformán semmit sem ismertetett Newton eredményeiből. James Gregory (1638–1675), aki évek óta foglalkozott hasonló kérdésekkel, csak pár, számára használatlan eredményt tud meg tőle, bizonyítás nélkül.

James Gregory érintő-módszere már *Geometriae pars universalis*-ában (Padua, 1668) megjelent. Gregory skót nemes, aki a protektorátus alatt, 1663-ban Itáliába emigrál.

Padovában Stefano Degli Angeli, a galileista matematikus a Torricelli-kör módszereivel ismerteti meg. Ugyancsak Itáliában ismerkedik meg Michelangelo Ricci eredményeivel.

Ricci az ellenreformáció jelentős személyisége, magas egyházi funkciókat töltött be. Mersenne római tartózkodása (1644) alatt közvetítő volt az olasz és francia iskola között. Ricci hosszú éveket töltött az érintőprobléma megoldásával. Későn, 1666-ban adta közzé az apollonioszi szigorú módszerek továbbépítésén alapuló módszerét az $x^p y^q = z^{p+q}$ (ahol $ax + by = cz$) egyenletű görbék érintőszerkesztésére.

Ricci nyomán dolgozta ki René François Walter de Sluse (1622–1685) $f(x, y) = \sum a_{ik} x^i y^k = 0$ formában előállított algebrai görbék s_t, szubtangensének a meghatározására szolgáló módszerét. A szubtangenst az

$$x\frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} + y\frac{f(x, y+k) - f(x, y)}{k} = 0$$

[148] A latin szöveg fordítása: „Ha most feltételezzük, hogy $B\beta$ már végtelenül csökkent és eltűnt, azaz o zérus lett, v és y egyenlőek lesznek, és a o-val szorzott tagok eltűnnek; tehát megmarad

$$\frac{4}{9}\times\frac{3}{3}xx = 2zv \text{ vagy } \frac{2}{3}xx(= zy) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}y \text{ vagy } x^{\frac{1}{2}}\left(= \frac{x^2}{x^{\frac{3}{2}}}\right) = y.$$

Tehát megfordítva, ha $x^{\frac{1}{2}} = y$, akkor $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} = z$ lesz.” – A o-t nem szabad nullának fordítani, mint oly sok könyv, pl. D. J. Struik, *A matematika rövid története,* Bpest, 1958. 119. is teszi. (Ugyanezt a hibát követi el az angol kiadás is.)

egyenletből kapja meg, a végbevitt osztás után a h és k-t tartalmazó tagok elhagyásával.[149]

James Gregory a Ricci érintőszerkesztését egyszerűsíti, s Sluzehoz hasonlóan, a Fermat módszerével rokon eljáráshoz jut, amennyiben az $\frac{f(x)}{s_t} \approx \frac{f(x+h)}{s_t + h}$ egyenletet írja fel, a kifejezést kifejti és rendezi h hatványai szerint, és a h elsőnél magasabb fokú hatványait tartalmazó tagokat elhagyja. Ezáltal arra az eredményre jut, amit mi $s_t = \frac{f(x)}{f'(x)}$-szel jelölnénk.[150]

Gregory azonban messze túljut elődein. Az eddigi korszak – a „Hochbarock" – tudása arisztokratikus, nehezen elsajátítható, tudósok szűk körére szorítkozó volt. Érdeklődő, de szakmailag többnyire nem eléggé képzett közvetítők tartották a tudósok között a kapcsolatot személyesen és kiterjedt levelezésükkel.

A tudósok megélhetés és munkalehetőség tekintetében „gyakorlati" foglalkozások és bizonytalan patrónusok kényszerének és kényének voltak kiszolgáltatva.

Az 1660-as évekkel alapvető változás következik be. A tudomány önálló lesz, az akadémiákban megteremti saját szervezeti formáit, a levelezést felváltja a folyóirat, a tudományos élet határozott, elismert és egyre jobban megbecsült része lesz az államok felépítésének.

Az általános matematikai tudás most is alacsony. A kor – a Spätbarock, ahogy Hofmann nevezi – vezéregyéniségei Viète és Descartes nyomán átfogó módszerekre törekednek, amikkel az eddigi eredmények kisebb tudás birtokában is áttekinthetők lesznek. A régibb, nehéz geometriai módszereket felváltja a teljesítőképesebb algebrai. Ez rövid és könnyen kezelhető szimbolikához és számolástechnikához vezet, s előkészíti a hatványsormódszert. A hatványsorok az új matematika hatalmas fegyverei lesznek, *kiegészítőjük,* a differenciálszámítás pedig a Spätbarock szakmai és ismeretelméleti tendenciáinak az összjátékából előálló csúcsteljesítmény.

Gregory már itáliai tartózkodása alatt az új, végtelen sorokkal dolgozó módszer felé tájékozódik. Az arkhimédészi exhauszciós eljárás kibővítésével nagy jelentőségű módszert dolgoz ki a kúpszelet-szektorok kvadratúrájára. A módszer kívül írható háromszög- és belülírható négyszögbeosztás azonos határ felé „konvergáló" (a szó tőle ered) kettős sorozatán alapul. A sorozat határértékére egyszerű közelítő formulákat ad meg, és megkísérli bizonyítani a körkvadratúra „analitikus" – azaz a szó általa

[149] Becker, O. und J. E. Hofmann *Geschichte der Mathematik,* Bonn 1951. 198. (Továbbiakban: Becker–Hofmann)

[150] Vorgesch., 30, Becker–Hofmann, 198.

használt értelmében algebrai egyenletek segítségével történő – megoldásának a lehetetlenségét.

De hibát követ el a sorelmélet alkalmazásában, és csak az angol iskola, Wallis, Mercator eredményeinek a megismerése segíti hozzá a helyes megoldáshoz. „Nehezen ássa le magát a *Logarithmotechnica* magváig", de megismerkedve a logaritmus fogalmával, nemcsak eddigi soraira dolgoz ki sokkal jobb közelítéseket, nemcsak π-re kap igen gyorsan konvergáló sorokat, s adja szigorú bizonyítását a Mercatornak, hanem 1670 végén felfedezi a Newton-féle binomiális-tételt is, bevezeti folytatólagos differenciálás segítségével a hatványsorbafejtést, megadja a trigonometrikus függvények és logaritmusaiknak a sorait, visszavezeti a logaritmikus görbe ívhosszmeghatározását a hiperbolakvadratúrára, s végül a sorokat egyenletmegoldásra és nehéz számelméleti problémák eldöntésére is felhasználja.

Még teljesen a geometriai-verbális felfogásban nőtt fel, és érett férfikorában sikerült áttörnie a számításos, analitikus gondolkozásmódhoz. Az áttörés jelentőségét megérthetjük, ha meggondoljuk, hogy pl. Huygensnek, aki kora egyik legnagyobb matematikusa volt, sohasem sikerült. Éppen ez a legnyilvánvalóbb bizonyítéka Gregory – „a modern matematika egyik megalapítója" – kiváló képességeinek.[151]

John Collinst azonban „szűklátóköre" és „Newton-imádata" megakadályozza Gregory felismerésében. Mint afféle autodidaktának, fölöttébb imponált neki a nagy Newton barátsága, s meggondolás nélkül szolgáltatja ki neki Gregory eredményeit. Gregory mellett pedig senki sem áll. „If, it were not for you, I would be, as it were, dead to all the world" – idéz Hofmann Gregory 1671. febr. 25-én Collinshoz írt leveléből.[152] „Így történhetett, hogy Gregory halála után csakhamar teljes feledésbe merült, és Newtont tekintették egy sor csodálatos tétel felfedezőjének, jóllehet ezek első felfedezője a valóságban nem ő, hanem Gregory volt.[153]

Newton csak Dary és Gregory munkáinak – és így közvetve Sluse eredményeinek – az átnézése után jön rá saját módszereinek az általános érvényére. „Hogy ebben mennyire befolyásolták Gregory eredményei,

[151] Becker–Hofmann, 198. J. E. Hofmann: *Geschichte der Mathematik, 2. Bd.* Berlin, 1957, 51–52. (Továbbiakban: Hofmann II.)

[152] Vorgesch. 48. Vö. *The Correspondence of Isaac Newton,* Ed. by H. W. Turnbull, Vol. I. 1661–1675, Cambridge 1959, 61. A szövegben az idézet nem hangzik annyira tragikusan, és főleg nincs Newton elleni éle: I can not expresse, how much I think my self engaged to you for your account of new books; if it wer not for you, I wold be, as it wer dead, to al the wordle …
As for Mr. Newton his universal method, I imagine I have some knowledge of it, both as to geometrick & mechanickcurves, however I thank you for the serieses ye sent me, & send you these following in requital.

[153] Vorgesch. 49

amelyeket kétségkívül önállóan utánaszámolt, teljesen tisztázatlan és valószínűleg sohasem lesz felderíthető."[154] Newton kortársai azonban – s ebben még Gregory sem volt kivétel nehézkes geometriai módszerekkel dolgoztak, „Newton már analitikusan gondolkozott, a szót a modern értelemben használva... Pár sorban és általánosságban meg tudta oldani azt, amit addig nehézkes és szubtilis vizsgálatokban is csak tökéletlenül sejtetni tudtak."[155]

Newton sorelméletét és fluxiótanát 1665–1674 között dolgozza ki, ez a Sturm und Drang periódusa, végleges fogalmai azonban ekkor még hiányoznak. Két évre abbahagyja a matematikát, és csak 1676-ban tér vissza, de már mint Mester, aki ismereteit egyenesen kinyilatkoztatásnak érzi. S ez súlyos válságba kergeti.[156]

Ugyanis: „A balsors (das Unglück) úgy hozta magával, hogy az analitikus érintőmódszer első felfedezője nem Newton volt, s kínosan ható szőrszálhasogatással kellett bizonygatnia, hogy a Sluse eljárása nyilván más alapokon keletkezett és nem olyan általános, mint az övé. S tovább úgy akarta (ti. a balsors), hogy Leibniz éppen Slusetól kapta döntő indítékát, s ebben a tekintetben messzebre és mélyebbre látott, mint Newton."[157]

S ezután az előkészítés után már nem lesz nehéz levonni a végkövetkeztetést: Die mathematische Hochleistung des Spätbarocks ist die Erfindung des Calculus. Sie ist das ausschliessliche Verdienst des Leipziger Professorensohnes G. W. Leibniz (1646–1716).[158]

A „Prioritätsstreit" J. E. Hofmann nyomán új fázisba lépett. Talán James Gregory és Leibniz között kellene megvívni? A két „Sluse-tanítvány" között, a skót és a szász között, akiktől ügyes angolok – jóllehet részben jóhiszeműen és öntudatlanul – ellopták felfedezéseiket?

J. E. Hofmann a prioritásvita legnagyobb szaktekintélyei közé tartozik, és a leibnizi matematika genezisének a tisztázásában alapvető munkát végzett. Ma talán ő a XVII. századi matematika legjobb ismerője. S ha nem is élezi ki a kérdést ennyire, mint azt a fenti, összefüggéseikből kiragadott idézetek mutatják, a Hofmann-interpretáció tendenciája kétségkívül Newton-ellenes.

S emellett az a tipikusan tudománytörténész beállítottság jellemző rá, amit Jacques Hadamard a Newton születésének háromszázadik évfordulójára rendezett ünnepségen így jellemzett: „Mind tudjuk, hogy a tudománytörténészeknek az a legnagyobb dicsőség, ha bebizonyítják, hogy soha nem fedezett fel senki semmit".

[154] Uo. 100.
[155] Uo. 117.
[156] Uo. 118.
[157] Uo. 119.
[158] Hofmann II, 62.

Ezt a mondatot választotta J. O. Fleckenstein a prioritásvitáról írott kitűnő kis összefoglalása mottójául.[159]

Fleckenstein lényegesen kevésbé elfogult, mint Hofmann. Helyesebben, ő más szempontból elfogult. Fleckenstein svájci, eredetileg csillagász volt, filozófus, s míg Hofmann „szellemtörténeti” háttérbe ágyazza be a matematika fejlődését, ő a „gondolkozástörténeti előfeltételeket” (ideengeschichtlichen Voraussetzungen) keresi. Természetesen ő is leibniziánus, hiszen hosszú évekig foglalkozott Leibnizzal, s így az egész newtoni matematika lényegét leibnizi szemszögből – a differenciálegyenletek szemszögéből – interpretálja. Még a *Principia* főérdemét is abban látja, hogy lehetőséget ad a naprendszer *n*-testproblémaként, differenciálegyenletrendszerrel való tárgyalására.[160]

Ez a formai felfedezés a nagy szerinte a *Principiá*-ban, mert egyébként, tartalmilag, a gravitációs törvény semmi egyéb, mint Huygens 1659-es centrifugális-formulájának alkalmazása a harmadik Kepler-törvényre.

Newton nagy érdeme – ha a *Principia* tételeit nem is öltözteti ebbe az új ruhába – az új matematikai kalkulus megteremtése. Ez az új kalkulus nem egyéb, mint „a dinamika algebrára való leképezése” (eine Abbildung der Dynamik auf Algebra), a változó erők dinamikájáé, ami megkövetelte a változás (út) változása (sebesség) változásának (gyorsulás) az analízisét.

A kalkulus: az erők matematikája.

Galilei, aki a mozgást a (mozgás indivizibiliájaként felfogott) sebességnek a folytonos változásával állította elő, intuitive már érzi az erőknek ezt az új matematikáját. Azonban nemcsak ő, még Descartes sem érkezett el soha a dinamika algebrára való leképezéséig. Sőt: Descartes ebből a szempontból kitérőt jelent. Descartes és a cartesiánusok (ide számítja Fleckenstein Fermat és Pascal matematikai módszereit is!) a maguk metszéspontösszeesésen, ill. szelő-határhelyzeten felépülő érintőmeghatározásaikkal csak a kinematika matematikai igényeit elégítik ki. „Ezáltal sikerül a cartesiánusoknak kinematikát űzni és azt az algebrára leképezni, de a dinamika zárva marad előttük; és ezáltal a cartesiánus fizika magasabbrendű algebrai görbék kinematikája lesz csupán.”[161]

A fejlődés útja nem ezen a cartesiánus geometrián át vezet, hanem Galilei firenzei iskolájához csatlakozik, és az indivizibilia-matematikán

159 Fleckenstein, J. O.: *Der Prioritätsstreit zwischen Leibniz und Newton,* Basel und Stuttgart, 1956.

160 Uo. 2. – A *Principiá*-ban természetesen szó sincs erről. Nemcsak a differenciálegyenleteket nem ismeri, az *n*-test problémát sem. A három-test problémáira egy speciális XVII. századi, a területelven alapuló módszert alkalmaz. – Vö.: Truesdell, C.: „A Program toward Rediscovering the Rational Mechanics of the Age of Reason”, *Archive for History of Exact Sciences* 1. 3–36. 1960.

161 Uo. 4.

keresztül történik. Ennek az iránynak az alapvető, nagy művét Cavalieri írja meg: *De geometria indivisibilibus continuorum* (Bologna 1635) címen.

Fleckenstein a Cavalieri-módszert a Newton-féle fluxió-elmélet szemszögéből interpretálja, s így nagyon szépen le tudja vezetni a newtoni matematika keletkezését – „ideengeschichtlich” – a Galilei-iskolából.

Már csak Henry Morenak kell egy immateriális tér és egy egyenletesen folyó idő realitásként való feltételezésével „biztosítani az új változás-fogalom metafizikai hátterét”, Barrownak és James Gregorynak felismerni az integrálás és differenciálás műveletének inverz voltát,[162] – és akkor „megérett Cambridge számára az idő, hogy Descartes algebrai módszereinek Galilei dinamikus elképzeléseire való alkalmazásával megteremtse az infinitézimális kalkulust.”[163]

Barrow is megteremtette volna – véli Fleckenstein –, ha nincs annyira fogva a firenzeiek geometriai módszereiben. Gregory már lényegesen tovább lát, úgyhogy tulajdonképpen nem Barrow és Leibniz, hanem Gregory és Leibniz között kellene megvívnia a prioritásharcot.[164]

Így áll Newton – „ideengeschichtlich”. Még csak egy kis „induktív empirizmust” kell kölcsönvennie ahhoz, hogy megteremthesse a kalkulust, s ezt Wallis szállítja.[165]

„Közvetlenül a pubertás utáni években” bontakozik ki Newton géniusza, s teremti meg az infinitézimális analízis alapfogalmait: a fluens és a fluxió fogalmát, s az algoritmusát, a kalkulust.

Főművében, a *Principiá*-ban csak az alapfogalmakat ismerteti, az új módszer alkalmazásától „visszariad”, s jóllehet a könyv nem egy propozícióját ennek a segítségével fedezhette fel, hogy könyvében „sehol sem alkalmazza”.

Leibniz viszont épp ezen a területen, az új módszer alkalmazásainak a területén veti be legjobb képességeit, s nyomában alakul diadalmenetté az infinitézimális számítás – fejezi be interpretációját Fleckenstein.

A Hofmann és a Toeplitz módszeréhez hasonlítható D. Th. Whiteside kalkulus-interpretációja a XVII. század matematikájáról szóló nagy monográfiájában.[166] Forrás ismerete a Hofmannéhoz fogható, s a modern matematika felől közelít a XVII. századhoz, mint Toeplitz tette volt.

Négy nagy fejezetre osztja a XVII. század matematikáját: aritmetikára és algebrára, függvényelméletre, geometriára (szintetikus és analitikus) és a kalkulusra. Legnagyobb részt természetesen a kalkulus ismertetése foglalja el. A kalkulushoz az utat a függvényfogalom tárgyalása ké-

[162] Uo. 8.
[163] Uo. 7.
[164] Uo. 8.
[165] Uo. 10–11.
[166] Whiteside, D. Th.: Patterns of Mathematical Thought in the later Seventeenth Century, *Archive for History of Exact Sciences*, 1. 179–388, 1961.

szíti elő. Épp úgy, mint Toeplitznél, a logaritmus és geometriai modellje áll itt is a fejlődés kezdetén, mint „type-function”. A számolás és táblázatos függvények szerepét tartja ő is a következő lépésnek. De itt lényegesen tovább lát elődeinél: a táblázatok számításaiból adódó interpolációs feladatokban a „függvényfogalom” fejlődésének egyik fontos tényezőjét ismeri fel. Whiteside interpretációjának ez a legérdekesebb része. Az interpoláció-elméletet Wallis és James Gregory uralják. Az ő kezükben lesz a táblázatok számításainak a megkönnyítését szolgáló segédszámításokból igazi matematika: differenciaszámítás. Ez a rész iskolapéldája annak, hogyan kell a matematikai gondolkozás egy fejezetét „pattern” -analízissel közel hozni a mához. Wallis professzor – ahogy Whiteside ismerteti – nyugodtan előadhatná elméletét a mai Oxfordban is, a matematikában nem érezhetők a közben eltelt évszázadok, a matematikus gondolkozásmódja, „észjárása”, gondolkozási „pattern”-ja időn kívül álló, örök. Úgy adjuk vissza igazán helyesen, ha mai fogalmainkkal közeledünk hozzá, ha mai formuláinkkal írjuk le. De nem úgy, mint Moritz Cantor, aki a modern szimbolizmussal modern észjárást is vitt a tárgyalt gondolatokba. Utóbbihoz a „pattern”-analízis szabályai szerint nem szabad nyúlni. Az akkori észjárást kell visszaadni mai matematikai formákban, s akkor kiderül, hogy a több száz, vagy több ezer éves matematikai gondolatok épp olyan „modernek”, mint a maiak.

Láttuk, ki fedezte fel a matematikatörténetnek ilyen modern matematikai eszközökkel történő belső gondolati átvilágítását: Felix Klein. Nem árt erre emlékeztetni, mert Whiteside éppen őt és Toeplitzet nem idézi óriási apparaturájában. Nem „plagizálási” okokból. Egyszerűen azért, mert azok az elődök kerülik el legkönnyebben az ember figyelmét, akikkel lényegében egyetért.

A „függvényfogalom” fejlődésében a következő nagy lépést az interpoláció után a sorok jelentik a Whiteside interpretációjában is. Ahogy a sorelmélet történetét bevezeti, az nagyon jellemző a „pattern”-analízisre. A valós számok jólrendezhetőségét felhasználva, teljesen mai matematikai eszközökkel és szimbolizmussal, definiál bizonyos l_0, l_1, …, l_n, l számokat, amikkel azután összeg formájában, ahhoz hasonlóan, ahogyan pl. a tizedes törteket szoktuk a 10 növekvő negatív hatványainak az összegével előállítani, definiál egy λ számot.

„A további haladás implicite benne van a helyérték fogalmában és abban áll, hogy a [l_0, l_1, …, l_n, l] rendezett halmazt λ-val jelölhetjük.

Ha az ember elérte az absztrakt gondolkozás kívánt fokát, természetesen felmerül az a kérdés, hogy milyen módon lehet értelmet adni a kötetlen l_0, l_1, …, l_n, … sorozatnak, ahol n korlátlanul nagy lehet, és ahol az l_i-ket valamely a generálásukra elegendő, rekurziós formulával (pattern) definiálhatjuk.”[167] Nagyon fontos a hozzáfűzött jegyzet: „Történetileg ezt

[167] Uo. 252–253.

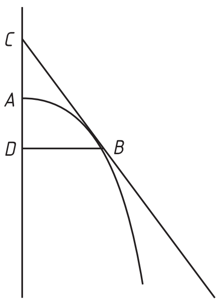
[ti. az absztrakt gondolkozás szükséges fokát] legalább akkor elérte már az ember, mikor Hippasus, Eudoxus és a többiek, az i. e. V. században ilyen végtelen számsorozatok elméletére alapozták a valós számarányok definícióját. Ez a haladás közvetlenül vezetett az aktuális és potenciális végtelen közötti különbségtételre és az irracionális arány fogalmára, mint amely nem képes (racionális) arányt adni."[168]

A XVII. század – Whiteside szerint – inkább az alkalmazások területén jelent haladást, a sorelmélet elvi gondolati tisztázása szempontjából legfeljebb Brouncker és James Gregory munkái jelentősek. A sorelmélet túl nehéz a XVII. századnak. Azért olyan büszkék egy-egy könnyű kis sorbafejtésre is, és azért hagyják el ezt az utat a könnyebb és algoritmizálásra alkalmasabbnak bizonyuló kalkulus kedvéért.

Az infinitézimális számítás – a kalkulus – kialakulását Whiteside ugyanazokban a lépésekben tárgyalja, mint Toeplitz. 1. Az intuitív eszközökkel dolgozó indivizibilia elmélet, amely a későbbi kalkulus alapötleteit és jelölési módját inspirálja, 2. visszatérés a szigorú arkhimédészi módszerekhez, 3. az érintőszerkesztés algoritmizálása, 4. végül az integrálás és differenciálás inverz műveletként való felismerése jelentik a fejlődés fő szakaszait. Nála is az integrálás-differenciálás inverz voltának a felismerése a döntő: ettől kezdve lehet infinitézimális számításról beszélni. De Whiteside már nem szűkíti le Barrowra az inverz jelleg felismerését, mint Zeuthen és J. M. Child nyomán Toeplitz tette volt. Whiteside óriási forrásismerete „feloldja" a felfedezést a századközép hatalmas matematikai irodalmában. Voltaképpen miután Descartes a De Beaune-feladatot megoldotta, a felismerés a levegőben volt,[169] és implicite alapul szolgált az indivizibilia-exhausztiós módszereknek. Wallisban is felcsillant a felismerése, James Gregory pedig sokkal világosabban kimondja, mint Barrow.

Newton 1666-ban írta le: „Enyhén modernizálva megoldását – írja

[168] Uo. 353, 2. lábjegyzet.

[169] 

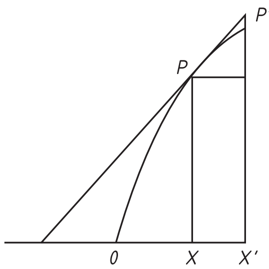
„Voltaképpen" Descartes és De Beaune látják, hogy a De Beaune által felvetett második feladatban „kvadratúráról" van szó, anélkül, hogy területmeghatározás lenne, s hogy ez az érintőszerkesztés megfordítottja. Paul Tannery a Descartes-féle megoldás utáni klasszikus jegyzetében ezt írja: Le problème est donc bien ramené à une quadrature, et la possibilité d'obtenir en tous cas celles-ci par une sommation de termes, avec une approximation indéfinie, est démonstré. *Oeuvres de Descartes. Publ. par* Ch. Adam & P. Tannery, II., 522. – De Beaune pedig világosan rámutat Roberval véleményével szemben, hogy nem érintőszerkesztésről, hanem annak a megfordítottjáról van szó: Je demande au contraire la methode, ayant vne equation qui explique le rapport d'entre *CD* et *DB,* de pouvoir trouver la ligne *AD. – F. Debeaune á Mersenne, 5 Mars* 1639. *Oeuvres de Descartes,* V, 535. – Descartes és Debeaune legalább annyi joggal tartható az érintőszerkesztés és a kvadratúra megfordíthatóságának a felfedezőjének, mint Wallis.

Whiteside – azt mondhatjuk. hogy Newton egy OP görbét egy, az $OX = x$ és $XP = y$ mennyiségeket összekötő $y = f(x)$ függvény által definiáltnak tekint, és vesz egy másik z függvényt, (az ő «$(OXPO)$ területe») ahol legyen $z = \int_0^x y dx = g(x)$ akkor a $g(x)$ deriváltja $\lim_{x' \to x}\left(\frac{z'-z}{x'-x}\right)$, ahol $OX' = x$, $X'P' = y'$ és $z' = (OX'P'O)$ terület. De, amint $P'X' \to PX$, $(XX'P'P)$ terület $\to PX \times XX'(= y(x'-x))$, és így

$$\lim_{x' \to x}\left(\frac{g(x') - g(x)}{x'-x}\right) = \lim_{x' \to x}\left(\frac{(XX'P'P)\text{ terület}}{XX'}\right) = PX(= y).$$ [170]

Ez természetesen ugyanaz a bizonyítás, ami a *De analysi* 5. és 10. fejezetében szerepel, s amiről Hofmann számolt be részletesen. Whiteside „pattern”-analízise azonban világosabban kidolgozza a $g(x)$ „primitív függvény” és $g'(x) = y$ „deriváltja” közötti összefüggést. Ugyanúgy, mint Toeplitz Barrownál tette volt.

Magának a differenciálásnak a keresztülvitele szempontjából döntő hatással volt Newtonra a Slusius–Hudde-féle szabály. Whiteside kimutatja, hogy Newton–Hudde nyomán – már az 1660-as évek közepén eljut a mai parciális differenciál operátoroknak teljesen megfelelő műveleti szabályokhoz, s ami talán még fontosabb, jelölésekhez is. Azonban ez az 1665-ös módszer még csak algebrai függvényekre volt alkalmazható, a nem algebrai, Descartes által mechanikus „görbéknek”, Leibniz által „transzcendens egyenleteknek” nevezett függvényekre a módszer nem terjedt ki. A haladás ezen a területen lassú volt. Ugyanis nem volt meg a „bármely görbe” geometriai modelljének megfelelő „analitikus függvény” fogalmuk.[171]



26. ábra

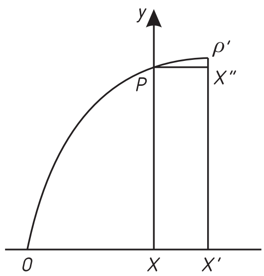
Newton is csak akkor mozog biztos területen, ha a „geometriai modell”-ben dolgozhat. Valóban, fluxió számításának a gondolatai itt születnek, innen általánosít.

„Ha az OP hosszúságot x analitikus mértékkel reprezentáljuk, akkora PP' limes-vonalszakasz $P' \to P$ esetén $\lim_{o \to \text{zero}} (o\dot{x})$-el reprezentálható, ahol $\dot{x}$ a pont pillanatnyi sebessége P-ben. Ebből az $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ fluxióhányados definíciója, ha x, y-t valamely $y=f(x)$ reláció fűzi össze, azonnal adódik: mivel $y + o\dot{y} = f(x + o\dot{x})$, tehát

[170] Uo. 370–371.
[171] Uo. 362.

$$\frac{\dot y}{\dot x} = \frac{o\dot y}{o\dot x} = \lim_{o \to \text{zero}} \frac{f(x+o\dot x) - f(x)}{(x+o\dot x) - x}\left[= \frac{dy}{dx}\right].$$

Gyakran bevezet egy olyan egyszerűsítést, amelyben x-et az időkontinuumnak tekinti (és így $\dot x$ állandó és egységnek vehető, mivel az idő egyenletesen „folyik”) tehát $\dot y\left(= \frac{\dot y}{\dot x}\right)$ reprezentálja az y növekvésének a fluxionális mértékét (fluxional rate). A geometriai modellre való lefordítás ugyanolyan közvetlen, mint az előbb. A t méri az alapul vett időskálát (ahol t a mértékegység), definiáljuk $g(y)$-t mint az $f(y)$ reláció fluxióját, vagy megfordítva, $f(y)$-t mint a $g(y)$ »fluensét«; és akkor ábrázolhatók »bármely mennyiség fluensei görbék alatti területekkel, a fluxiók az ordinátákkal, az idő-intervallum az abszcisszával, az idő limes-momentuma az abszcissza limes-momentumával, a többi fluensek limes-momentumai az abszcissza limes-momentumainak megfelelő ordinátákkal« azaz, ha $OX = t$, $PX = y = \varphi(t)$ és $XX' = \dot t o = o$ (mivel t-t 1-nek vettük) és $P'X''(= P'X' - PX) = \dot y o$, akkor a fluens az $y = \varphi(t)$ alatti *OPX terület* $= z = \square y$ és a *fluens* fluxiója a $PX = y = \dot z\left(= \frac{\dot z o}{\dot t o}\right)$ abszcissza.”[172]

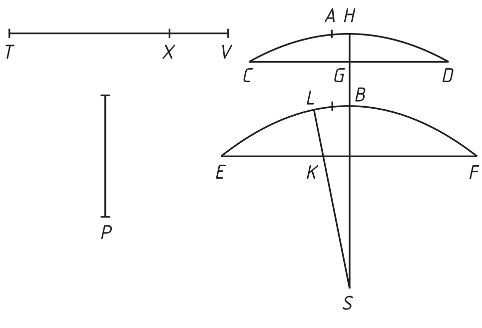


27. ábra

A következőkben Whiteside a Newton-féle elmélet differenciálgeometriai alkalmazásait ismerteti. Ez a dolgozata egyik legjelentősebb része. Fleckenstein kivételével Newtonnak ide vonatkozó vizsgálatait a matematikatörténészek alig méltányolják. Newton különösen a görbületi viszonyok analízisében jutott nagyon messze, de követői nem voltak, mert ez a terület a leibnizi analízis folytatásaként fejlődött tovább.

A pattern-analízis végeredményben ugyanoda vezetett, ahová Hof-

[172] Uo. 374–375. A modern limes-jelölés ebben az esetben nagyon zavaró. Vö. pl. Samuel Horsleynek a *Principia* Prop. VI. Theor. V.-jéhez adott fluxióelméleti magyarázatával: – si exponatur recta quaedam, *TV,* quae ad datam *P* rationem habet eam, quam sagitta



mann idea-történeti és Toeplitz szellemtörténeti vizsgálatai. De Whiteside analízise számtalan finom részlettel gazdagította a képet, elviszi az olvasót a forrásokig.

A matematikatörténeti pattern-analízis azoknak a történetírói áramlatoknak a megfelelője, amelyek az irodalomtörténetet irodalomtudománnyá, a zenetörténetet zenetudománnyá, a művészettörténetet struktur-analízissé alakították.

A folyamat lényegében a historizmusra való reakciónak fogható fel, s nagy hatással van kialakulására az egzisztencializmus. Az egzisztencializmus roppant heterogén filozófia. Számtalan válfaja van, de egyben mind megegyezik: mind ahistorikus. A megelőző kor vezető nyugati filozófiája, a pozitivizmus történelemkedvelő volt, ha nem is történelemtisztelő. A pozitivista történész lelkesedett a korhű kosztümökért, de saját gondolatait öltöztette beléjük. Így lett már Machnál a tudományok története gondolkozásökonómiai példatárrá.

Az egzisztencialista történészt a történelem struktúrája érdekli, az eseményeké vagy a gondolkozásé. És ez a struktúra, ez a pattern modern eszközökkel közelítendő meg, mert lényegében változatlan.

Ahol az „embert" kell megismerni, belső gondolkozási formáival, ott ez a módszer néha nagyon mély interpretációkat tesz lehetővé. llyen volt Jean Laporte nagy Descartes-átértékelése.[173]

Egy ilyen interpretáció lehetősége fonódik Whiteside munkájában Wallis gondolkozása köré. Wallist Whiteside interpretációja, az angol matematika centrális alakjává teszi. Ő benne, az indivizibilia-elmélet csúcsát jelentő Wallisban fonódnak össze, s belőle ágaznak szét a szálak. Az ő korlátai egy gondolkozási módszer belső korlátai, a többiek korlátai – ez áll még James Gregoryra és még inkább Newtonra is – a saját gondolkozásuk korlátai. Wallis az adott gondolkozási-pattern határáig megy,

KL ad sagittam *GH;* tum, arcubus *CAD, EBF* infinite decrescentibus, si recta *TV* ea lege fluat, ut semper sit ad datam P sicut sagitta *KL* ad sagittam *GH* (illas utrique sagittarum, *GH, KL* rectaeque *TV* magnitudines conferendo quae simul fiunt), & si *TX* sit ultima rectae *TV* longitudo, quam, arcubus *CAD, EBF* jamjam in nihilum abituris, proprius illa accesserit quam pro data quavis differencia, ... Isaaci Newtoni *Opera quae exstant omnia. Commentariis illustrabat* Samuel Horsley. Tomus II, London. 1879, jegyzet a Prop. VI, Theor. V-höz. A „minden adott különbségnél jobban" való megközelítés valóban azt a látszatot kelti, mintha a limes-fogalom alkalmazható lenne. De ez nem áll, mert a limes-fogalomban a megközelítés a természetes számok során át történik, a newtoni „limes"-ben pedig folytonos mennyiségek – Descartes általános mennyiségei „folyásán" át. A XVII. század matematikája kontinuum-matematika, a XIX. századé az arithmetikai számfogalomra épül fel.

173 Laporte, Jean: *Le rationalisme de Descartes,* Paris, [1]1945, [2]1950. – Laporte ismeri fel, hogy Descartes algebrájának éppen a folytonos mennyiségekkel való munka bevezetése egyik jellegzetessége. I. m. 9.

s néhol meglepő intuicióval még ezeket a határokat is szétfeszíti: Wallis megsejti a Reimann-integrált.[174]

A többiek elhalványodnak mellette; Newton is. Itt vannak az egzisztencialista jellegű történetírás korlátai. A modern módszerek alkalmazása csak addig jó, amíg egyetlen ember gondolkozását kell megismerni. Egyetlen ember gondolati struktúrája lefordítható modern nyelvre. Ebben a lefordításban nem vész el a lényeg, sőt: sokszor talán a fölösleges járulékoktól megfosztva, még jobban kidomborodik. De mihelyt gondolatok kölcsönhatásáról van szó, ez a lényeg-analízis felmondja a szolgálatot. Mert az emberek mihelyt többesszámban vannak, rögtön felveszik a cselekvési és gondolkozási „illemszabályokat”, különösen olyan szemérmes emberek, mint Newton. És ezek a gondolkozási sablonok – az outilage mentale, ahogy Lucien Febvre nevezte – korhoz kötöttek. Egyetlen modern formula alkalmazásával meghamisíthatjuk őket. Ezeknek a gondolkozási sablonoknak is van patternje, de ezt a patternt nem olyan élvezetes dolog leírni, mint a gondolatok patternjét. Mert ebben semmi „modern” nincs. Poros és elavult, olyan, mint egy régi, nagy barokk paróka. A borotva- hajvágáshoz szokott egzisztencialista fej megizzad alatta, annyira, hogy elmegy a kedve a „gondolkozástól”.

II.

Az első fejezetben ismertetett Newton-interpretációk mind a Moritz Cantor-féle felfogásból nőttek ki, s lényegében azonos tendenciát követnek. Ez az irány Newtont elsősorban elméleti (matematikai) fizikusnak érzi, s ezért is fűzi előszeretettel Galilei iskolájához. A matematikus Leibniz volt, ő teremti meg az új módszer algoritmusát.

Ez az egyetlen lehetőség a Newtoni kalkulus interpretálására? Csupa óriás elől, akiknek a vállán Newton már alig látszik? – Nem egészen.

Jacques Hadamard a háromszázéves évfordulón éppen azt emeli ki, hogy Newtonnak nem volt igazi elődje. Egyedül Fermat volt az, „aki, ha nevet és jelölést ad $\dfrac{f(a+e)-f(a)}{e}$ mennyiségeinek (quantitas), kétségkívül sokkal messzebb jut alkalmazásukban, mint így, talán olyan messze,

174 Whiteside, i. m. 326–327. – Wallis jelentőségének az eltúlzását lásd már 1927-ben: J. M. Child, „Newton and the art of discovery”, Isaac Newton 1642–1727. *A memorial vol.* Ed. by W. J. Greenstreet, London, 1927, 117–129, 119. Szerinte nemcsak a binomiális együtthatókat és a $\int_o^x \sqrt{1-x^2}dx$ integrál sorbafejtését, hanem a *De analysi* alaptételét is Wallistól „vette” Newton, és az elismerése Wallis felé, frank as it is, hardly conveys the true measure of what he owed to his study of Wallis.

mint maga Newton. Ezzel szemben annak a hozzájárulásnak az értékéről, amit Leibniz hozott a differenciális jelölésével a tudományba, egyáltalán nem vagyok meggyőződve, kiváltképpen ha a magasabbrendű differenciálokról hallok beszélni."[175]

A háromszázéves évfordulók persze nem a legjobb alkalmak kritikai értékelésekre, de – Hadamard nem áll egyedül ezzel a véleményével. Ugyanezt írja a két nagy összehasonlításáról Jean Itard: „Newton ideái alapjában véve elég közel állanak a Leibnizéihoz. Ám tárgyalásmódja, anélkül, hogy a mai szigorúságot elérné, sokkal óvatosabb, mint vetélytársáé."[176]

De Itard az óvatosságot nem tartja föltétlenül szükséges tulajdonságnak, mert szerinte az algoritmusok fokozott, kiterjesztése, a bennük való egyre nagyobb bizalom, „ez a jog egy homályos és bizonyos értelemben mechanikus gondolkozásmódhoz, amit Leibniz hirdetett, ez – azt hiszem – a lényeges a matematika történetében".[177]

Már Zeuthen, s újabban René Taton[178] felhívták rá a figyelmet, hogy Newton fluxiós módszere épp úgy alkalmazható lett volna az infinitézimális geometria és a differenciálegyenletek elméletének a kiépítésére, mint a Leibniz módszere.

A. S. Ramsey[179] pedig arra emlékeztet, milyen nagymértékben fellendítette a Newtoni gravitációs-elmélet a tiszta matematikát. És épp a XVIII. században, amelynek matematikáját teljesen a Leibnizi módszerek fejlődésének tulajdonítják.

Oskar Becker, aki a „Grundlagenforschung" felől közeledett a matematikatörténethez, az első fejezetben ismertetett iránnyal szemben semmiféle „ellentétet" nem lát a *Principia* elején bevezetett új módszer és a klasszikus öltözék között. Hiszen ez a bevezetés is épp olyan szigorúan klasszikus formába van öltöztetve, mint a továbbiak, – írja. S a bevezető rész scholiumában, ami szándékosan amennyire csak lehet „a klasszikus geométerek eljárását közelíti meg", kora indivizibilia módszerével száll szembe elvi síkon, s egyféle határérték-módszert vezet be.[180]

Newton éppen azáltal „modern", hogy kortársainál szorosabban ragaszkodik a klasszikus deduktív görög módszerekhez? S épp azzal az

[175] Idézi Jean Itard: „A propos du tricentenaire de la naissance de Newton", *Revue d'Histoire des Sciences,* 1. 254–257. 1947–48.

[176] Historie générale des sciences, publ. sous la direction de René Taton. Tome II. La science moderne, Paris 1958, 233.

[177] Archives Internationales d'Histoire des Sciences, 5, 389–390, 1952.

[178] Taton. R. „La préhistoire de l'analyse géométrique." *Archives Internationale d'Histoire des Sciences,* 3, 89–102, 1950.

[179] Ramsey, A. S.: *An introduction to the theory of Newtonian attraction,* Cambridge, 1940, V.

[180] Becker, O.: *Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung,* Freiburg–München, 1954, 150.

indivizibilia-módszerrel száll szembe, aminek – Fleckenstein szerint – csúcsát jelenti?

A Becker véleményének a megértéséhez tudni kell, hogy számára voltaképpen csak két matematika létezik: a görög és a XIX–XX. századi. Csak ebben a két periódusban „szabad” tudomány a matematika: sem a dolgok metafizikai lényegének a megismerésére, sem a természet megismerésére nem törekszik. A matematika – Becker szerint – ott végződik, ahol nem-matematikai kérdésekre alkalmazzák.[181]

Ha ezt a két elvét következetesen végigvinné, se Newtont, se Leibnizot nem lenne szabad matematikusnak tartania, mert ők a matematikát a természet, ill. a metafizika elveinek a megismerésére használták.

Nem voltak „matematikusok”, – mégis az egész modern matematika belőlük nőtt ki.

K. A. Rybnikov cikke ad kulcsot az „ellentét” megoldásához. Eszerint Newton a természeti jelenségek lehető legszélesebb körének a leírására alkalmas matematikai módszert akart teremteni, s ezt vélte megtalálni a fluxiós számításban. „Gondolata a következő volt. Épp úgy, mint ahogy bármely valós szám elképzelhető véges vagy végtelen tizedestört formájában, bármely valós változójú függvény is elképzelhető a változó hatványai szerint rendezett véges vagy végtelen hatványsorban.” Azért teremti meg Newton a hatványsorok differenciál- és integrálszámítását, s aztán már „csak” egy tetszőleges függvénynek a sorbafejtését kell megoldania. Ez természetesen nem sikerül, s Rybnikov szerint azért tér vissza a *Principiá*-ban az euklidészi–arkhimédészi módszerekhez. Ezért nem alkalmazza a fluxiós módszert.[182]

Lényegében ugyanez a véleménye P. Sergescunak, aki az infinitézimális számítás kialakulástörténetének egyik legnagyobb szaktekintélye. Sergescu felismeri Descartes központi jelentőségét az infinitézimális-számítás történetében. Descartes teremtette meg a „geometriai” és „mechanikus” görbék elkülönítésével az infinitézimális számítás és a sorelmélet alapjait. Ugyanis a „geometriai” görbék érintő- és területszámítási feladataihoz elegendő volt az algebrai vagy az indivizibilia-módszer valamilyen formája.

A „mechanikai” görbéket azonban sorbafejtéssel kellett megoldani.

A görbék elméletének, az érintőszerkesztésnek, az indivizibilia-vizsgálatoknak, a sorbafejtésnek értelmes egésszé való összefogására volt szükség ahhoz, hogy később a függvényfogalom megszülethessen. Ez az összefogás a Newtoni infinitézimális kalkulus.[183]

[181] Becker, O.: *Grösse und Grenze der mathematischen Denkweise,* Freiburg–München, 1959.

[182] Rybnikov, K. A.: „On the role of algorythmus in the history of mathematical analysis”. *Actes du VIII*e Congrès International d’Histoire Sciences, Florence–Milan 3–9 Septembre 1956, Paris 1958, 142–145.

III.

A „Newton-párti” észrevételek – amikből egynéhány példát idéztünk – nem sűrűsödtek olyan imponáló interpretációkká, mint az első részben ismertetett Cantor–Zeuthen–Toeplitz–Whiteside vonal. A XX. századi matematikatörténet-írás főáramlata érintőlegesen halad el a newtoni infinitézimális analízis mellett. Kétségkívül Whiteside jutott legmesszebb a newtoni matematika gondolat-strukturális előzményeinek a feltárásában, de épp ezek az előzmények a kelleténél jobban háttérbe szorítják Newton tettét.

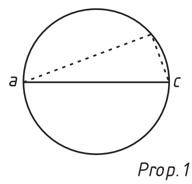
De a XX. század matematikatörténet-írása még egy nagy „Newton-interpretációt” hozott létre, amelynek az ismertetése nélkül a kép nagyon hiányos lenne: a Newton-levelezés folyamatban levő kiadását. Az első kötet 1959-ben jelent meg, a harmadik 1961-ben, és 1694-ig öleli fel a Newton-levelezés anyagát.[184]

H. W. Turnbule, a kitűnő matematikatörténész irányította a kiadást, H. W. Robinson és J. F. Scott segítségével.

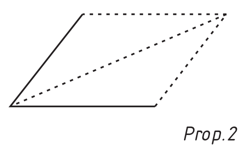
Az Adam–Tannery-féle Descartes kiadás mutatta legszebben, hogy egy ilyen nagy levelezés-kiadás egyben milyen hatásos interpretációt is jelent: a levelek összeállítási módja, a jegyzetek, az egyes részletek hangsúlyozása a századfordulón egészen új Descartes-képet teremtett, amelyik lényegében változatlan maradt Jean Laporte nagy reinterpretációjáig.

Ugyanígy a Newton-levelezésből a newtoni infinitézimális analízis új képe bontakozik ki, ami meglehetősen eltér az első részben ismertetett interpretációs fővonaltól. Érthetően a Whiteside hatalmas kéziratismerettel megírt Newton-interpretációja jár legközelebb a *Levelezés* Newtonához. De a *Levelezés*-ben előtérbe kerül az, amit Whiteside modern jelölési módja elhagyott: a newtoni matematika formavilága. S a newtoni formákban a Whitesidénél modern ruhában megismert gondolatok is más jelentést nyernek.

A newtoni infinitézimálkalkulus genezise szempontjából döntő fontosságúnak kell tekinteni azt az 1666. máj. 16. keltezésű kéziratot, amit a levelezés kiadói 348. szám alatt közölnek. A címe: „Problémák mozgás általi megoldásához az alábbi hat propozíció szükséges és elegendő”.[185]



28. ábra



29. ábra

[183] Sergescu, P.: *Coup d'oeil sur les origines de la science exacte moderne,* Paris, 1951. 76–77.

[184] A cikk írása óta megjelent a teljes Newton-levelezés. A további négy kötet: Vol. 4 (1694–1709), Vol. 5 (1709–1713), Vol. 6 (1713–1718) és Vol. 7 (1718–1727).

[185] *The Correspondence of Isaac Newton* (továbbiakban Corr.) *Vol. III.* 1688–1694. *Ed. by* H. W. Turnbull, Cambridge 1961, 348. A manuscript by Newton 16 May 1666.

Az első és második propozíció „mozgások” adott irányba eső komponensének a meghatározása, ill. mozgások összetevésének a törvénye. Már ez világosan mutatja a newtoni matematikai gondolkozás kapcsolatát Barrow-on keresztül a Torricelli-iskolához.

„Prop. 3. Egy önmagával párhuzamosan mozgó test minden pontja azonos (equall) mozgásban van.

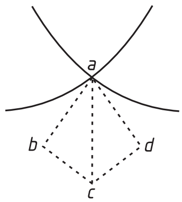
Prop. 4. Ha egy test csak körmozgást végez valamely tengely körül, pontjainak mozgása úgy aránylik mint tengelytől való távolságuk.

Nevezzük ezt a kétféle mozgást egyszerű mozgásnak.”

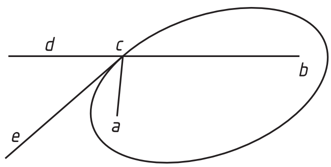
Az 5. propozíció azt mondja ki, hogy minden bonyolultabb „mozgást” ebből a két „mozgásból” kell felépíteni.

A 6. propozíció két egymást metsző görbe vonal „mozgását” analizálja ebben az értelemben: az *a* metszéspont által leírt harmadik görbevonal mozgásgeometriai adatait adja meg a két görbét *a* metszéspontjukban érintő *abcd* síkban.

A 7. propozíció a 6. propozíció algebrai megfelelőjét adja meg: hogyan kell kiszámítani két test *p* és *q* „mozgásai” közötti viszonyt, ha a két test által leírt *x* és *y* vonal közötti reláció egyenlete van megadva.



30. ábra



31. ábra

„Mozgás” alatt Newton a sebességgel arányos mennyiséget ért, s így a „mozgás”-meghatározások érintőmeghatározást jelentenek. Két példát hoz fel a fenn propozíciók illusztrálására. Az első: „Húzzunk érintőt az ellipszishez. Tegyük fel, hogy az ellipszist az *abc* zsinór (thred) írja le, és hogy *ce* az érintője. Mivel az *ac* szár ugyanakkora sebességgel csökken, mint amekkorával a *bc* nő, azaz a *c* pont egyforma mozgással mozog *a* és *d* felé, a *dce* és *ace* szögeknek egyenlőeknek kell lenni az első propozíció miatt: és ugyanígy a többi kúpszeletnél is.”

A második példa, a nikomédészi spirális érintőjének a meghatározása, jóval – bonyolultabb. Ez a példa megadja a geometriai és algebrai módszert is. A latin verzióban azonban hozzáfűzi, hogy a mechanikai görbék esetében az algebrai számítás cserbenhagy, csak a másik módszer használható.

Ez a kis írás a korabeli Torricelli–Roberval–Barrow-féle mozgás geometria és a Descartes–Hudde–Sluse-féle algebraizált geometria egymás mellé helyezése, összeolvasztási kísérlete.

Meg kell figyelni, már most milyen következetesen kidolgozza a vonal és a vonal mentén történő „mozgás”, más szóval a pálya és a sebesség – még más szóval: a görbe és az érintője közötti összefüggést. És ez az új, a jövő csírája: a görbét az érintője segítségével definiálja, erre való a hat propozíció. Már úgy adja meg a görbét, hogy legyen érintője, s ez a felfogás törli el a cartesiánus különbséget „geometriai” és „mechanikus” görbék között. Közös csoportba foglalhatókká lesznek „geometriai” és „mechanikus” görbék; az érintővel rendelkező görbék; – a „differenciálható függvények” – csoportjába.

A matematikus olyan, mint a bűvész: csak azt tudja elővarázsolni a kalapból amit előre beletett.

A matematikus is annál jobb bűvész, minél „kevesebből” minél többet elő tud varázsolni. S sajnos, Newton azt hitte, abban is követni kell a bűvészt, hogy az elővarázsolás módját a lehető legnagyobb titokban kell tartani.

A bűvészrecept adva volt; ha érintőt akarsz szerkeszteni, gondoskodjál róla, hogy görbéidnek legyen érintője. Csírájában már ebben az írásban meg van adva, mi biztosítja majd ennek a feltételnek (szükséges és elegendő – mondja a cím) a teljesülését: a folytonos mozgás. De explicite csak a *De analysi*-ben jelentkezik a feltétel, ahol a sebességet egy görbe alatti terület változásának a sebességére konkretizálja.

Ezáltal megad két mennyiséget, amelyek mindig kiszámíthatók egymásból. A két mennyiség: a görbe alatti *változó terület* s a terület változásának *a sebessége.*

Mivel a görbét két mozgásból származtatja: egy abszcissza-irányú és egy ordináta-irányú mozgásból, a mozgás – területváltozás – sebessége éppen a két mozgásból összetevődő érintő abszcissza-tengelyhez való hajlását adja meg.

A két mennyiséget: változó területet és a területváltozás sebességét névvel látja el: „fluens” és „fluxió”, s ezzel az új kalkulus megszületett. Többé nem szükséges a terület-képhez ragaszkodni, aminek a segítségével a *De analysi*-ben bizonyított, a nyert új mennyiségek egészen általánosak, s definiálási módjuk biztosítja, hogy – legalábbis elvben – egyik a másikból mindig számítható.

Az új módszert nagyon részletesen és logikusan ismertető *Methodus Fluxionum et Serierum Infinitarum* csak 1736-ban jelent meg nyomtatásban, jóllehet már 1671-ben készen volt, s barátai tudtak róla.

Egy 1692-ből származó feljegyzés mutatja, hogy Newton eljárása közismert volt Angliában, de nem közkedvelt. „A kitűnő Mr. Newton – írja a névtelen jegyzetkészítő – a fluxiók tanát két propozícióra redukálta: 1. megtalálni bármely fluens mennyiségeket tartalmazó adott egyenlet fluxióit és 2. a megfordítottja. Fluens mennyiségek alatt meghatározatlan mennyiségeket (indeterminate quantities) ért, azaz olyanokat, amelyek egy görbe (curve) mozgás (local motion) általi előállításában folytonosan nőnek vagy csökkennek (perpetually increase or decrease), fluxió alatt pedig a növekvésüknek vagy csökkenésüknek a sebességét (celerity) érti.

Jóllehet a fluens mennyiségek és fluxióik (flowing quantities & their fluxion[s]) első látásra nehezen felfoghatónak tűnnek (új dolgok felfogása mindig jelent bizonyos nehézséget), mégis ő úgy véli, hogy a fogalmuk (Notion of them) csakhamar könnyebb lesz, mint a momentumok vagy végtelen kis részeké, vagy végtelen kicsi differenciáké; mivel az alakzatoknak és mennyiségeknek folytonos mozgás (continued motion) által való előállítása sokkal természetesebb és könnyebben felfogható, és ennek a módszernek a sémái sokkal egyszerűbbek, mint a részekéi...

Minden görbe vagy bármely más fluens mennyiség abszcisszáját egyenletesen növekvőnek tekinti, és flexióját egynek veszi; a többi fluens mennyiségek fluxióit maguk a mennyiségek fölé írt ponttal jelzi következőképp: Tegyük fel, hogy *v, y, x, z* a fluens mennyiségek, akkor megfelelő fluxióik $\dot{v}$, $\dot{y}$, $\dot{x}$, $\dot{z}$-al jelölendők. És mivel ezek a fluxiók is meghatározatlan mennyiségek (indeterminate quantities) és folyamatos változással (perpetual mutation) nőnek vagy csökkennek, azokat a sebességeket, amelyekkel nőnek vagy csökkenek, ezek flexióinak tekinti...”[186]

Ez a mennyiségfogalom az új a newtoni kalkulusban. A módszer, ahogy fluensek között fennálló egyenleteknek a fluxióját meghatározza – az érintőszerkesztés módszere – 1670 körül már nem új, de nem is olyan régi és magától értetődő, amilyennek a matematikatörténészek szeretnék beállítani. A *Levelezés*-ből jól kitűnik, mennyire izgató kérdés a fiatal Newton kortársainak az érintőszerkesztés. Az a megoldás, amit Newton ad, egy messzeágazó nemzetközi fejlődés csúcsa.

Az olasz és a francia iskola eredményeit ötvöző Michelangelo Ricci tartja talán kezében a módszer kulcsát. Mikor magas egyházi funkciói miatt le kell mondania a matematikáról, René Francois Walther de Sluse, liège-i kanonok veszi át örökségét, és talál „váratlanul” egy módszert az érintő egyetlen aránnyal való kifejezésére. S ennek a segítségével – írja 1671 decemberében Oldenburgnak – röviden és igen könnyen kapja meg ugyanazt az eredményt, amit régen nagy kerülőutakkal nyert. Ha „Isten életet és időt ad”, reméli, hogy rövidesen elküldheti a megoldást. „De ami a jövőt illeti, Isten térdein nyugszik az; én még pyrrhoszi módra semmit sem szögezek le.”[187]

1672-ben közli Sluse „rövid és könnyű” módszerét a *Philosophical Transactions*-ban a geometriai görbékhez való érintő szerkesztésére. A következő évben módszert közöl mindenféle görbéhez való érintőszerkesztésre.

[186] Corr. III, 394, Newton’s method of fluxions, 17 September 1692, 222–223.
[187] Corr. I, 27, Sluse to Oldenburg 17 December 1671, 71.

Az ő módszere éppúgy nem vált közkedveltté, mint a Newtoné.

És mint a James Gregoryé, aki Sluse geometriai görbékhez való érintőmódszeréről megírja Collinsnak, hogy az semmi egyéb, mint amit ő, Gregory „Fermat-módszernek" nevez, s ami voltaképpen az a módszer, amit Newton használ a *De analysi*-ban.

A kortársak se rendelkeztek sokkal biztosabb elképzelésekkel a kalkulus születéséről, mint mi.

Még Collins sem, akinek a kezében az erre vonatkozó levelezés jórésze összefut, s akivel Newton is szabadon közli felfedezéseit. Legalábbis ami az eredményeket illeti. A módszer tekintetében tartózkodóbb.

James Gregory sem ismerte Newton „Univerzális módszerét", aminek a segítségével a legkülönfélébb geometriai és mechanikai görbék problémái: érintőszerkesztés, ívhosszmeghatározás, görbék alatti terület meghatározása, adott érintőirányokhoz görbeszerkesztés stb. megoldhatók. De sejtette, hogy Newton módszere, éppúgy mint az övé, „tetszőleges" egyenletnek végtelen sorbafejtéséből áll. „Nagyon szeretném megismerni Mr. Newton módszerét, amellyel kéttagú egyenleteket végtelensorrá alakít... Én bármely egyenletet végtelen-sorrá tudok alakítani... Van egy módszerem, amivel a geometrikus problémákat (legalábbis amiket eddig tárgyaltam) végtelen-sorba tudok átvinni", s közöl Collinssal számos fontos példát.[188]

Gregory példái mutatják: körülbelül ugyanott tart, ahol Newton a *De analysi*-ben. Tudja, hogyan kell hatványokból összetett, többtagú kifejezéseken könnyen elvégezni azokat a műveleteket, amik érintőszerkesztéshez, maximum-minimum meghatározáshoz, ívhossz-számításhoz, területszámításhoz, érintőből való görbe megszerkesztéshez és kvadratúrához szükségesek. Másrészt tudja azt, hogyan kell egy „tetszőleges" görbét megadó összefüggést végtelen hatványsorban kifejezni.

Harmadszor: tudja, hogy – a kor legnagyobb matematikusa Dr. Barrow, akinek a műveit tanulmányozni, módszereit követni kell. Így pl. teljesen a Barrow klasszikus geometriai modorában, a *Lectiones geometricae* egy területmeghatározásra vonatkozó problémájának a megfordításán töri a fejét.[189] „Ez a probléma – írja Collinsnak 1670-ben – (ha megoldható) úgy képzelem, hogy túlvinné a geometriát jelen állapotán; de oly sok nehézséget látok benne, hogy én magam reménytelenül állok vele szemben, s ezért szerényen kérdem, nem tudná-é másvalaki megoldani. Szeretném látni Mr. Newtonnak azt a munkáját, amelyik minden görbére, általáno-

[188] Corr. I. 20, Gregory to Collins 23 November 1670, 46–47.

[189] Corr. I. 18, Gregory to Collins 5 September 1670, 41–42, 4. jegyz.: hogyan kell egy *KL* görbe alatti *AKLD* terület segítségével meghatározni egy *ANMB* görbét úgy, hogy a görbe érintője bizonyos előre megadott feltételeknek tegyen eleget. Mai nyelven keresendő az $y^2[1+(dy/dx)^2]=X$ differenciálegyenlet megoldása, ahol X az x adott függvénye.

san alkalmazható. Valóban azt hiszem, hogy Mr. Barrow XIII-ik felolvasása annyira tökéletesítette az analitikát (analytics), hogy kevés adható általánosságban hozzá.”[190]

Barrow felveszi a kesztyűt; Gregory „szerénységét” se kell egészen komolyan venni, s mind a ketten adnak a problémára egy-egy klasszikus geometriai stílusban tartott, nehéz megoldást.

A jövő fejlődés szempontjából épp az ilyesféle fordított érintőfeladatok és a terület változásából a görbe mentére vonatkozó kérdések a legfontosabbak. De nem a Barrow nyomán.

A Barrow-féle geometriai módszer ebben a tekintetben különösen nehézkes, a végtelen sorokba való fejtést még szülőhazájában, Angliában sem nagyon értik.

Kétségkívül Collins az egyik legjobban tájékozott matematikus a kialakulóban levő sorelmélet és infinitézimális számítás területén. Newton munkáját is ő ismeri talán legjobban: „...Dr. Barrow révén sikerült azóta pár új sort szereznem Newton általános módszeréből, s vele való megbeszélésből tudom, hogy azok bármely alakzat (figure) adott tulajdonságaiból analitikusan (ti. algebrai úton) származtathatók, és hogy minden figurára sok sor alkalmazható, és hogy egyaránt képes kvadrálni azokat a görbéket; amelyeket Descartes geometriaiaknak tart, és azokat, amelyeket mechanikusaknak, ezért ezzel a módszerrel minden olyan figurának, amelyek közös tulajdonsággal bírnak, a görbe vonalai kiegyenesíthetők, érintőjük és súlypontjuk meghatározható, forgástestjük is és annak második szegmentuma mérhető és minden görbénél megadható a görbe vonal egy ívhosszához tartozó ordináta és megfordítva.”[191]

Ekkor Collinsnak már birtokában volt a *De analysi,* s a *Levelezés* kiadói szerint épp ezt beszélte volna meg Barrowval.[192] Newton új módszeréről mindenki a legnagyobb elismeréssel nyilatkozik, ő maga mégis a *Principiá*-ban, amint azt minden tudománytörténész illőnek tartja szemére vetni, nem a saját fluxiós-módszerét, hanem az „elavult” geometriai módszereket alkalmazza.

Valóban egyedülálló szituáció. Felfedezi a „természet” leírására szolgáló kitűnő módszert, s amikor a „természet” addig páratlan tökéletességű matematikai leírását adja, nem alkalmazza ezt a módszert.

Azonban ő maga és kortársai nem érezték ezt az „anakronizmust”. Sőt: egyik legnagyobb angol matematikus – ha ugyan nem a legnagyobb – James Gregory zavartalanul alkalmazza egymás mellett a „haladó” sorelméleti matematikáját, s az „elavult” Barrow-féle geometriai módszereket. Edmund Halley, aki szintén nem mindennapi matematikai tehetség

[190] Uo. 41.
[191] Corr. 1. 22, Collingi to Gregory 24 December 1670, 54.
[192] Corr. I, 59, 14. jegyz.

volt, kizárólag az „elavult” módszereket alkalmazza, s amikor Newtont nagy és tisztelt barátjának, Lockenak a *Principia* lényegét meg akarja magyarázni, nem a fluxiós módszert, hanem az „elavult” geometriai módszert alkalmazza, ugyanazt, amit a *Principiá*-ban.

S ugyanakkor ő is, kortársai is nagyon nagyra becsülték a fluxiós módszert, egyébként nem vívtak volna késhegyig menő harcot a leibniziánusokkal a prioritásért.

Nem látunk mi kiengesztelhetetlen ellentétet ott, ahol a korabeli Anglia és maga Newton semmi ellentétet nem látott? A „haladó” és „elavult” megkülönböztetését kérjük számon egy olyan koron, amelyik számára ennek a megkülönböztetésnek semmi értelme sem lehetett?

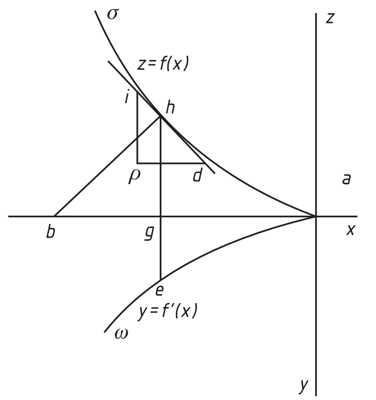
Huygens végig az „elavult” matematikai módszerekkel dolgozva lett kora legnagyobb matematikusa, James Gregory nem szűnt meg Barrowot csodálni, Barrow nem szűnt meg Euklidészt és Apollóniószt csodálni, David Gregory, aki egész fiatalon kerül az öreg Newton mellé, ezt az „elavult” módszert tanulja meg és viszi tökélyre, ebben dolgozik Roger Cotes, a *Principia* második kiadásának készítője...

S amikor Johann Bernoulli meggyanúsította Newtont, hogy a *Principia* egy hibáját saját fluxiós elméletének hibája miatt követte el, az öreg Newton fölényesen utasítja vissza az ifjú óriást: a hiba közönséges számolási hiba; a tétel bizonyításának semmi köze a fluxiós számításhoz, s rögtön megadja a helyes bizonyítást – „elavult” geometriai módszerekkel.[193]

Láttuk, hogy már egy egészen korai Newton-kéziratban fel lehet ismerni a fluxiós elmélet csíráit.

Egy még korábbi, valószínűleg még 1664-ből származó kézirat viszont a „régi” geometriához csatlakozva vezet a *De analysi...* „új” analitikája felé.

A kézirat a cambridge-i egyetemi könyvtárban őrzött ún. *Commonplace Book*-ból származik, már Brewster beszámolt róla, Schootenból és Wallisból készített jegyzetek között helyezkedik el. Címe: „Kvadrálható görbe vonalak kvadrálására szolgáló módszer.”[194]



32. ábra

A következőt állítja: Legyen adva egy *σha* görbe. Szerkesszünk egy másik *aeω* görbét úgy, hogy minden *ge* ordinátája az előbbi görbe érintőinek $\frac{i\rho}{\rho d}$ gradienseivel

[193] Hall, A. R.: „Correcting the Principia”, *Osiris,* 13, 291–326, 1958.
[194] Corr. II 190*,* A manuscript by Newton ? 1644, 144–167.

legyen arányos. Akkor az *ae* görbe alatti *aeg* terület a *ha* görbe megfelelő *gh* ordinátájával lesz arányos.

Vagy modern nyelven elmondva: Ha adva van egy $z = f(x)$ görbe és a hozzátartozó $y = f'(x) = \dfrac{dz}{dx}$ derivált görbe, akkor $\int f'(x)dx = z$.

A bizonyítás egyszerű: Az *aeω* alatti görbét beosztja az $\dfrac{i\rho}{\rho d}$ gradiensekhez tartozó téglalapokra, a beosztás számát végtelenül növeli, s közben – implicite – felhasználja az *iρd* háromszögnek azt a tulajdonságát, hogy oldalainak aránya a háromszög bármeddig való kisebbítésében sem változik, mert a *hb* normális által megadott *hgb* háromszögből (egymásra merőleges oldalak) számítható.

A „karakterisztikus háromszög" – legalább 10 évvel Leibniz előtt. S a „Barrow-féle" fundamentális tétel 6 évvel Barrow előtt.

Mint a *Levelezés* kiadói megjegyzik, „valószínűleg" ez a fundamentális tétel legelső kimondása és bizonyítása. Utána Gregory *(Geometriae pars universalis* 1668, prop. 6.) és Barrow *(Geometricae lectiones* 1670, Lecture 10) mondják ki, s maga Newton újra, a *De analysi*-ben (1669) kevésbé frappánsan.[195]

Newton két példát ad a módszerre: Legyen egy vonal alatt levő terület egyenlete $\dfrac{x^3}{a}$, ill. $\dfrac{a^3}{x}$. Mik a megfelelő görbevonalak? – Newton felállít két, az érintési feltételeknek eleget tevő egyenletet, az egyenleteket Hudde módszerével „differenciálja", s a nyert egyenlet adja meg a fenti tétel értelmében a keresett görbét, ami az egyik esetben egy parabola, a másik esetben hiperbola.

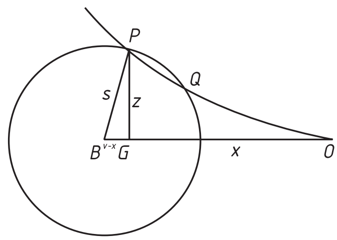
Később a Hudde-féle módszer helyett a Fermat-módszert használja, míg a *De analysi*-ben ki nem alakítja a saját, binomiális-tételen és fluxiós felfogáson alapuló „differenciálási" módszerét. A példákkal kapcsolatban a *Levelezés* kiadói megjegyzik, hogy részben még a jelöléseket is Descartes *Géométrie*-jének (1637) második könyvéből, ill. a Schooten-féle *Geometria a Renato Descartes* (Leyden 1649) 46. lapjáról vette.

Ugyancsak Descartes érintőmeghatározásából származik az a hatodfokú egyenlet, amit a példákban felhasznál. „Descartes egy $B(v, 0)$ pontból úgy találja meg a normálist, hogy egy B középpontú, s sugarú kört húz, aztán s-et úgy választja, hogy P és Q a két metszéspont, egybeessen; úgy, hogy az x-ek megfelelő értékei is egybeessenek.

[195] Corr. II, 167, 2. jegyz. (A jegyzet jelzései a kiadók és Newton ábráihoz képest z-t és y-t felcserélik.)

Ha $z = \frac{x^3}{a^2}$ akkor a *BPG* háromszögből $s^2 - (v - x)^2 = z^2$ ahol *s* és *v* konstansok. Innen Newton *x*-ben hatodfokú egyenlete."[196]

Csak a hatodfokú, ill. négyzetes, az érintési feltételt biztosító egyenlet származik a *Géométrie*-ből? Nyilvánvalóan nem. A módszer egész „szelleme", „stílusa" mélységesen cartesiánus: Descartes módjára tesz át egy geometriai problémát algebrai egyenletekbe; az érintési feltételt mint az egyenlet két gyökének az egybeesését – nem mint a szelő „határhelyzetét"! – adja meg. Ezért is használja a Hudde-féle cartesiánus módszert. Cartesiánus abban is, hogy a tétel bizonyításában az érintőket kezdettől fogva a normálisokkal határozza meg, a szerkesztés a normálisok (és a rájuk merőleges érintők) változatlanságára van felépítve, ezek rögzítettek az indeterminált területbeosztás mellett is.



33. ábra

Modern és régi, newtoni és cartesiánus között a választóvíz nem az infinitézimális kalkulus. Descartes „infinitézimális-fóbiája" – már Tannery felismerte – épp olyan mese, mint a görögöké. S bizonyos tekintetben Descartes „differenciálási" módszere modernebb, mint a Newtoné és főleg a Leibnizé, és szigorúbb, mint utána Cauchyig bármi.

És Descartes módszerei jobbak, pontosabbak, matematikusabbak, mint előtte és két évszázadig utána bármi. Descartes olyan tökéletes, mint Arkhimédész és Euklidész. Egyetlen dolog hiányzik Descartes-ból: a folytonos változás, a mechanikus mozgás matematikai elismerése. Nem a felismerése. Descartes felismeri, s éppen ezért tiltja a „mechanikus" görbéket. Felismeri – és eltiltja, miután ő maga ad kezelhetőségükre néhány ragyogó példát.

Newton, James Gregory és Leibniz nem az infinitézimális számítást teremtik meg, hanem bemerészkednek a tiltott területre a fizika, a matematika és a metafizika nevében.

Ezért lesz háromféle infinitézimális kalkulus: egy fizikai, egy matematikai és egy metafizikai.

Ez a prioritásvita „stílustörténeti" háttere: ha feldobom, differenciál, ha leesik, fluxió, de voltaképpen végtelen-sorbafejtés.

És ha nagyon-nagyon szigorú akar lenni az ember, olyan, mint a hollandiai francia kóborlovag, akkor az egész tojásbűvészetből nem marad semmi, csupán egy egyenletrendszer determinánsának a zérussal való egyenlővé tevése... Nem egy modern algebrában járatos differenciálgeo-

[196] Corr. II, 167, 4. jegyz.

méter fedezte fel, hogy a differenciálhányados voltaképpen egy sajátos „leképezés”? – Nem. Monsieur Descartes.

Nagy Mesterét – az egész XVII. század nagy mesterét – követte itt is Isaac Newton. – Egyben nem követi: a tényleges számolással szembeni ellenszenvben. Newton szabadon dolgozik a számokkal és a számokat jelentő betűkkel.

Ugyanannak a *Commonplace book*-nak egy következő helyén, ahonnan az előbbi kézirat származik, egy valószínűleg 1664 végéről vagy 1665 elejéről származó bejegyzésben többek közt megtalálható a *De analysi* fő, kezdő propozíciója:

„Legyen $ab = x$ és $y = be$, akkor: ...Prop.: 3 ... Ha $a^n x^m = b^n y^m$, vagy $\frac{ax^{\frac{m}{n}}}{b} = y$ akkor $\frac{nxy}{n+m} = \frac{nax^{\frac{m+n}{n}}}{nb+mb} = abef$, azaz az *aef* vonal alatt levő terület...”

A bizonyítás teljesen a Cartesius–Hudde-féle módszerekkel történik, mint a fenti példában. A nagy újság a törtkitevő megjelenése.

Igen fontos a következő propozíció, ami a kvadratúra tagonkénti elvégzésének a lehetőségét mondja ki:

„Prop: 4. Ha $y = ax^m + bx^n$, akkor $\frac{ax^{m+1}}{m+1} + \frac{bx^{n+1}}{n+1} = abcf$...”[197]

Egyre inkább haladunk a módszer számolási szabályainak a rögzítése és egységesítése, algoritmizálása felé.

A következő propozíciók (Prop. 5.–Prop. 8.) a binomiális tételt mondják ki $(a+b)^{\frac{m}{n}}$ és $(a+b)^{-\frac{m}{n}}$-re, a binomiális koefficiensek megadásával.

Newton a Leibnizhoz intézett híres *Második levelében* mondotta volt el a binomiális sor felfedezésének a részleteit, s azóta számtalanszor idézték, hogyan jött rá Wallis eredményeinek az interkalálásával a binomiális tételre: ... Sub initio studiorum meorum Mathematicorum ubi incideram in opera Celeberrimi Wallisij nostri...[198]

A *Levelezés* kiadói szerint többek között a N° 191 alatt közölt[199] kézirat lehetett az, amire Newton a Leibnizhoz írt *Epistola Posterior*-ban mint a binomiális tétel felfedezésére hivatkozik.[200] Ugyanott röviden megadják, milyen interkalációs táblákat adott meg Newton az $(1-x^2)^n$ egész n kitevőjű görbék alatti területek formuláinak a segítségével az $(1-x^2)^{\frac{m}{n}}$ a törtkitevőjű görbék alatti területekre.

[197] Corr. II, 191, A manuscript by Newton ?1665, 168.
[198] Corr. II, 111.
[199] Corr. II, 191, 168–171.
[200] Corr. II, 191, 170, 1. jegyz; 188, 150, 10. jegyz.

A binomiális tételhez természetesen nem elegendő a Wallis-féle kvadratúrák „induktív" általánosítása, hanem elengedhetetlen az ugyanezen kéziratban közölt 4. és 3. propozíciók, valamint a fundamentális tétel alkalmazása is.

A binomiális tétel komplex és sok forrásból táplálkozó matematikai fejlődés eredménye: a cartesiánus geometriának legalább annyi része van benne, mint „Celeberrimi Wallisij nostri"... S még valaminek. Newton így fejezi be az $(a+b)^{\frac{m}{n}}$ és $(a+b)^{-\frac{m}{n}}$ a sorbafejtésének az ismertetését: „Ennek a két propozíciónak az igazsága így is bizonyítható. Ha $(a+b)^{-\frac{1}{1}} = \frac{1}{a+b}$, akkor 1-et elosztom $(a+b)$-vel, mint a tizedestörteknél és az $\frac{1}{a} - \frac{b}{aa} + \frac{bb}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \frac{b^4}{a^5} \& c$ hányadost kapom, amint mindkét oldalt $(a+b)$-vel szorozva kitűnik. Ugyanígy (a^2+b)-ből úgy vonok gyököt, mintha tizedesszámok lennének, $\sqrt{a^2+b} = a + \frac{b}{2a} - \frac{bb}{8a^3} + \frac{b^3}{16a^5} \& c$-ra jutok, ami szintén igazolható a két oldal négyzetre emelésével."[201]

Nyilvánvaló, hogy ugyanazzal a számolási készséggel, ugyanazzal az algoritmusokba vetett bizalommal állunk itt szemben, amit Cantor a Mercator nagy újításának tartott.

Amit megtalálunk Oughtredben, Collinsban, Gregoryban, Mercatorban; az angol matematikusok nagy részében. És ami nincs meg a cartesiánusokba Newtonban valóságos számolási dühhé fokozódik a hatvanas években. Mindent ki akar számolni: azt a hatást, ami a Föld egyenlítőjén a Föld forgása következtében emeli a testeket, azt *a conatust,* amivel a Föld a Holdat mozgatja maga körül és a Földet a Nap maga körül, az eső test pályáját, ha az parabolikus, az inga „mozgását". – Galileiből a számpéldákat veszi ki, és végigszámolja, amit az csak elgondolt... Meghagyja az itáliai mértékegységeket, majd áttér angolra – nem a mértékegység, hanem a szám fontos, a tetszőleges pontosságig kiszámítható tizedestört...[202]

A betűkben kijelölt műveletek éppúgy elvégezhetők, mintha közönséges számok lennének, közönséges véges vagy végtelen tizedestörtek. És ha így tekintjük őket, akkor megszűnik a descartesi tilalom a „mechanikus" problémák iránt. Éppúgy tetszőleges pontosságig elvégezhetők lesznek azok is, mint pl. egy osztás, amelyik végtelen tizedestörtre vezet.

A „szám" nem egész és nem racionális tört, a „szám": végtelen tizedestört. A XVII. század közepi Angliában a „levegőben van" ez a nagy fontosságú tétel. Számoló mesterek és kereskedők, pénzváltók és hajóskapitányok egyaránt használják a tizedestörteket, a számolás könnyű

201 Corr. II, 170.

202 Corr. III. 347, A manuscript by Newton ?1665 or 1666, 46–54.

velük, elterjed, bizalmat ébreszt maga iránt, minden kiszámíthatóvá válik: nyereség, halálozás, szaporodás, kamat.

Minden kiszámítható: a végtelen tizedestörtek varázsának a formulák sem állhatnak ellen, a végtelen tizedestörtek mintájára gyerekjáték lesz egy csak kijelölt osztást végtelen sorba törni. Egyszerre, mintegy varázsütésre születnek Newton, Mercator, James Gregory, Lord Brouncker, John Collins kezén a 60-as évek végén, 70-es évek elején a szebbnél-szebb sorbafejtések: körterületre és körívre megadott sorok, a hiperbola alatti területre megadott sorok, a logaritmikus sor, a sinus sor, a cosinus sor és így tovább...

És a sorokkal megadott összefüggések azonnal elvesztik titokzatos „mechanikus" tulajdonságaikat, a sorokkal megadott görbék azonnal kvadrálhatók, rektifikálhatók, tanulmányozhatók érintő-tulajdonságaik, szembetűnnek olyan hasonlatosságok, amelyekre a „mechanikus" definícióban gyanakodni se lehetett.

Érthető, ha John Collins olyan szenvedélyes végtelen sor gyűjtővé, és James Gregory olyan szenvedélyes végtelen sor előállítóvá válik.

A végtelen sor, speciálisan a binomiális tétel, ad lehetőséget az érintőszerkesztés és kvadratúra minden „geometriai" és „mechanikus" megkülönböztetéstől független megalapozására. Ezt végzi el Newton a 60-as és 70-es évek fordulóján, ezzel nyit utat egy új világba: a „mechanikus" görbék vizsgálatának a tiltott paradicsomába.

Érthető, ha öreg korában a binomiális tételt vágyott a sírkövére vésetni.

A végtelen sorban való kifejezés adta meg a lehetőségét annak, hogy a „mechanikusan", mozgás által létrehozott görbékkel ugyanúgy bánjon, mint a „geometriai" görbékkel. De ehhez a területet folytonos folyás útján keletkezőnek kell tekinteni, s a folytonos folyást reprezentáló kis *o* momentummal megnövelt mennyiségeket sorbafejteni.

A 60-as évek végén, 70-es évek elején a sorok látszanak a királyi útnak a matematikához. S talán csak James Gregoryban és Isaac Newtonban, a sorelmélet két nagy elindítójában ébred fel a kétely: milyen pontosan írja le, közelíti meg egy sor a szavakban és geometriai jelekkel vagy mechanikai módon definiált összefüggést?

Newton egy 1670 elejéről származó levelében egy speciális sorbafejtési probléma során kísérletet tesz a megközelítés következtében előálló hiba megbecsülésére. A becslés nem általános érvényű, azonban arra mutat, hogy Newton milyen nagy súlyt helyez az „igazság"-hoz leginkább „konvergáló" sor megtalálására.

Ezek az ő szavai: a probléma kétféle megoldását adva, a második sorbafejtés után megjegyzi: „A haladványban minden második tag hiányzik, és így sokkal inkább konvergál az igazsághoz, mint az előbbi." Majd újra, a hiperbola alatti területre egy új sort előállítva, amely sorban „minden második tag hiányzik, és *x* felével kisebb mint egyébként lenne, ami a sort konvergálóbbá teszi az igazság felé". (Wich makes ye series more converging toward ye truth.)[203] Könnyű ma megállapítani, hogy a sorok nem az „igazság", hanem a limesük felé konvergálnak. Egyébként az, hogy becslést végez, mutatja: Newton is ilyesmire gondolhatott...

Mégis a határérték matematikai megfogalmazása előtt a sorelmélet bizonytalan marad, s nem alkalmas arra, hogy az infinitézimális számítást – mint majd a XIX. század teszi – reá alapozzák. A sorelméletnek éppúgy csak a prehistóriája kezdődik a XVII. században, mint a „korpuszkuláris filozófiának". Mind a kettő jellegzetesen XIX. századi eredmény, egzakt sorelmélet és statisztikus mechanika.

De az infinitézimális kalkulus a maga módján a XVII. században sem primitívebb, mint a XIX. vagy XX. században. Mint ahogy Euklidész vagy Arkhimédész se lesz „primitívvé" soha. A sorokról a XIX. század sokkal többet tud, mint a XVII. század. Az infinitézimális számítás alapfogalmairól csak mást. Megváltozik a matematika kifejezésmód, a stílus, de a lényeg: az integrálás- és differenciálásnak, mint inverz műveleteknek a felfogása, a „folytonosság" és a „szakaszonkénti monotónia" biztosítása megvan a XVII. században is.

Nem naivság folytonosságról beszélni a függvény és a határérték fogalma nélkül? Hogy lehet a határérték nélkül definiálni a folytonosságot? Nos, a differenciálhatósággal. A differenciálható függvények feltétlenül folytonosak. S hogyan lehet biztosítani, hogy csak ilyen „függvények" forduljanak elő a matematikában? A fluenseket kell matematikai mennyiségeknek tekinteni, amelyekhez definíció-szerűen hozzátartoznak fluxióik, az „idő szerint vett parciális differenciálhányadosaik".

S így eltűnik a nagy ellentét a klasszikus geometriai és modern analitikus módszer között. A fluens-fluxió definíciója biztosítja, hogy akár a fluxiós módszerrel akár a geometriai módszerekkel nyert eredmények – legalábbis elvben – mindig kiszámíthatók, úgynevezett „mechanikus" problémák esetében is. Legfeljebb a kiszámítás nem lesz egészen pontos. Meg kell elégedni bizonyos pontossági határral, mint a végtelen tizedestörtekre vezető számítások esetében.

„Ellentét" a *Principia* elején bevezetett fluens-fluxió definíciók és a későbbiekben alkalmazott „elavult klasszikus geometriai" módszerek között? Ezt az „ellentétet" a XIX. század érzi, nem a XVII. Newton nyugodtan alkalmazza a korabeli Anglia számára megszokott és így egyszerűbb módszereket, annál is inkább, mert a *Principiá*-ban elsősorban kúpszeletekről van szó, ahol ezek a módszerek egyébként is helyénvalóak. S a *Principia* bevezetésében nemcsak az új fluxiós módszerének a körvonalait fejti ki, hanem röviden utal arra is, miként alkalmazhatók az új mód-

[203] Corr. I, 9, Newton to Collins January 1669/70, 18.

szer lényegét jelentő határátmenet-eljárások a klasszikus geometria formuláiban is. Így a *Principia* klasszikus geometriai megfogalmazásai át vannak itatva az új infinitézimális számítás fogalmaival, s mi sem lesz könnyebb, mint a következő században átírni őket a kalkulus megfelelő analitikus formanyelvére. A *Principia* nem az infinitézimális módszereket kerüli, hanem a cartesianus algebrai jelölési módot. Ez annál feltűnőbb, mert Newton a fluxiós módszer kialakításakor, mint láttuk, teljesen szabadon bánt az algebrai jelölésmóddal. Miért nem alkalmazta hát a *Principiá*-ban?

A kérdés ilyen formában feltéve semmivel sem lesz könnyebben megválaszolható, mint a megszokott alakjában. Ha választ akarunk kapni a kérdésre, először is pontosan meg kell vizsgálnunk a *Levelezés* alapján a *Principia* keletkezési körülményeit. Ezt kísérli meg egy következő dolgozatunk.[204]

[204] Lásd kötetünkben Vekerdi László: 'A Principia születése' c. tanulmányt.

INFINITÉZIMÁLIS MÓDSZEREK PASCAL MATEMATIKÁJÁBAN[205]

Madame Périer – Pascal nénje – és Marguerite Périer – unokahúga[206] – megegyezően mondják el Pascal matematikához való „visszatérését". És mivel Pascal életére vonatkozóan lényegében még ma is erre a két forrás-

[205] Előzménye: Vekerdi László: Infinitézimális módszerek Pascal matematikájában. = Magyar Tudományos Akadémia Matematikai és Fizikai Osztályának Közleményei 13 (1963) No. 3. pp. 269–*285*.

[206] A Pascal család a francia közéletben a XVII. század eleje óta egyre nagyobb szerepet játszó „hivatalnok nemesség" közé tartozott. Blaise Pascal születésének idején (1623) apja, Étienne Pascal a clermont-i *Cour des Aides* elnöke volt. A kisfiú korán elveszíti anyját, s innentől kezdve apja részesíti rendkívül gondos, elsősorban a matematika és természettudományokra kiterjedő nevelésben. Étienne Pascal 1631-ben három gyermekével Párizsba költözik. A legidősebb, Gilberte, a későbbi Madame Périer, ekkor 11 éves, a legkisebb, Jacqueline hat, Blaise, a két lány közötti egyetlen fiú, nyolc. A harmincas évek Párizsa páratlan méretű társadalmi kohó, ahol spontán alakuló és egymással több-kevesebb összefüggésben levő csoportokban mintegy kikísérleteződnek az újkori szellemi élet szervezeti formái. A szalón, az akadémia, a természettudományos és matematikai társaság és a szabadgondolkozó költőfilozófusok cabaret-klubjai a legfontosabbak ezek között a csoportosulások között. Étienne Pascal elsősorban a Mersenne atya körül összegyűlő természettudósokkal és matematikusokkal van jóban, de bejáratos a kalandos életű Mme Sainctot-hoz is, akinek a testvére, Charles Vion Dalibray, a cabaret költők egyik legjellegzetesebb képviselője. Dalibrayval és barátjával, Le Pailleur-rel Blaise Pascal később is jóban marad, hiszen pl. meghívja őket arra a nevezetes látogatásra is, amivel 1647 nyarán az éppen Párizsban tartózkodó Descartes tiszteli meg a két testvért, Blaise-t és Jacqueline-t, akik ekkor éppen Blaise légnyomás-kísérleteit rendezik sajtó alá, s szenvedélyesen tanulmányozzák azt a vallási-világnézeti irányt, aminek nemrégiben az egész Pascal család, de a francia hivatalnok nemesség nagy része is, egyre inkább, a hívévé vált: a jansenizmust. Blaise életét ettől kezdve a természettudomány, a matematika, a jansenizmus, Jacqueline, a mély hit és az elegáns, nagyvilági élet ma már teljességgel kibogozhatatlan keveredése determinálja. Keveredés, amely néhol már olyan tökéletes, hogy a szintézis látszatát kelti, de ez a szintézis mindvégig látszat marad, amin átütnek újra és újra az ellentétes tendenciák. Ez az ötvenes évek nagy műveinek a jellegzetessége és háttere. A Pascal család azonban, amelyik a politikai reményeit vesztő hivatalnok nemességgel együtt egyre inkább áldozatul esik a megmerevedő, bigottá váló jansenizmusnak, Pascal műveit és életét a szekta igényeinek megfelelően fésüli át. Gilberte leánya, Marguerite Périer, aki gyermekkorától a nagy jansenista apácakolostorban, Port Royal-ban nevelkedett, úgy él és ír, mint egy XII. vagy XIII. századi apáca. Blaise életéről szóló leírása a borzalmas és realista részletek, a vakhit és a babona által átszőtt, jellegzetes „középkori" apáca krónika.

ra vagyunk utalva, az infinitézimális matematika, mint fogfájás elleni gyógyszer, klasszikus recepttté vált a matematikatörténeti anekdoták iránt érdeklődő matematikusok körében.

Madame Périer leírása szerint öccsét, aki az 1654-es megtérése óta kizárólagosan vallási kérdésekkel foglalkozott, 1658 elején sajnálatos módon kezdte gátolni ebben az üdvös foglalkozásában betegsége. „Öcsém bajainak ez a kiújulása – írja – fogfájással kezdődött, ami teljesen meggátolta az alvását. De hogyan lehetne ébren egy olyan szellem, mint az övé, anélkül, hogy gondolkozna valamin. Ezért jutott eszébe az egyébként oly gyakori és kimerítő álmatlanságaiban egy éjjel valami a roulette-el kapcsolatban. Az első gondolatot második követte, a másodikat harmadik és végül egymást váltó gondolatok sokasága; s ezek, mintegy akarata ellenére, úgyhogy még saját maga is meglepődött rajta, feltárták előtte a roulette bizonyítását. De mivel minden ilyesmiről már régen lemondott, nem is gondolt rá, hogy valamit is leírjon belőle. Mégis beszélt róla egy olyan személynek, akinek teljes tisztelettel tartozott, mind érdemeit illetően, mind az általa mutatott vonzalom elismeréseképpen, és ez a személy olyan tervet formált erről a felfedezéséről, ami csupán Isten dicsőségét tartotta szem előtt, és rávette öcsémet, hogy írjon csak le mindent, ami erről eszébe jut, és nyomtattassa ki.”[207]

Ugyanígy, de a kegyes körítés helyett realista részletekkel gazdagon mondja el a történetet Marguerite, és megnevezi a „magas személyt” is: „M. de Roannez jött látogatni és azt találva, hogy semmi baja sincs, megkérdezte, mitől gyúgyult meg. Azt felelte, hogy a roulette-től, amin a fejét törte, s amit megtalált. M. de Roannez meglepődve ezen a hatáson, de magán a dolgon is, mert tudta, milyen nehéz probléma az, megkérdezte, mi vele a szándéka. Nagybátyám azt felelte, hogy ez pusztán gyógyszerként szolgált neki, és semmi másra nem akarja használni. M. de Roannez azt felelte erre, hogy jobb hasznát is lehetne venni ennek; hogy az atheisták leküzdésére irányuló igyekezetükben jól meg lehetne mutatni ezáltal, hogy a geometriát és a bizonyítás alá eső dolgokat tekintve is többet tud, mint ők együttesen; és így, ha a hit kérdéseiben engedelmeskedik, az azért van, mert tudja, meddig érnek a bizonyítások, és azt tanácsolta neki, hogy helyezzen letétbe 60 pistole-t és hirdessen versenyt minden kitűnő matematikus között, akit csak ismer és ajánlja fel a nyereséget annak, aki megtalálja a probléma megoldását. M. Pascal így tett, és letétbe helyezett 60 pistole-t M. de Carcavy-nál, aki az egész Európából érkezen-

[207] *La vie de Monsieur Pascal érite par Madame Périer, sa soeu, femme de Monsieur Périer, conseiller de la Cour des Aides de Clermont.* – Oeuvres complètes de Pascal, édition Pléiade. Texte étebli et annoté par Jacques Chevalier. Paris 1954 (továbbiakban: Éd. Pléiade) 3–34, 19.

dő pályamunkák egyik elbírálójává neveztetett ki, és a határidőt 18 hónapban tűzte ki."[208]

Próbáljuk megérteni először is a két elbeszélés tendenciáját. A Pascal család szemében Pascal főműve a *Pensées* volt, s ez a nagy apologetikus mű az ő szemükben sajnálatos módon befejezetlen maradt, s elsősorban ezt a töredékességet kellett valahogyan megmagyarázni. „Gyengélkedései voltak azok, amik meggátolták abban, hogy tovább dolgozzon tervén" írja Mme Périer. Olyan súlyos beteg lesz – írja –, hogy miután egy évet (1657–58) dolgozott a nagy művön, gyakorlatilag semmit sem képes többé végezni. Tudományra – világi hívság – természetesen már régen nem is gondol, de betegsége és súlyos álmatlansága addig fokozódik, hogy egy fogfájásos éjjel hirtelen, saját akarata ellenére eszébe jut a ciklois-probléma és megoldja. Közlésre – világi hiúság – természetesen nem is gondol, hiszen az egész csak „gyógyszer" volt számára, de barátja, akinek hálával és tisztelettel tartozik, s aki nem más, mint Roannez herceg, Poitou kormányzója, rábírja a kiadásra: végül is Isten dicsőségére szolgál az, ha egy odaadó híve old meg olyasmit, amin a világ legnagyobb matematikusai hiába törték a fejüket. A tendencia nyilvánvaló: a mélyen vallásos Pascal család szemében a *Pensées* szigorú apologetikája után Pascal matematikai hattyúdala kellemetlen zavart jelentene, tehát deus ex machina-val át kell siklani rajta. Ennél súlyosabb dolgokat is tett a Pascal család a geniális matematikus ellen; egyik matematikai főműve, amit még Leibniz látott kéziratban, s sajnos visszaadott a családnak, eltűnt a kezük között.

A különösebb inkább az, hogy a történészek máig mennyire hatása alatt állanak Madame és Marguerite Périer kegyes elbeszéléseinek. Még Pascal életének olyan kitűnő ismerője is, mint Jean Mesnard, törést lát 1658-ban Pascal fejlődésében, amit 1659-ben egy újabb „megtéréssel" kellett a világi hívságba visszaeső Pascalnak kompenzálnia. Ez az újabb „megtérés" azért vált szükségessé, mert az 1658-as év matematikai műveinek – nevezzük továbbiakban rövidség kedvéért *Roulette-leveleknek* – a hangját mindennek lehet nevezni, csak keresztényi alázatnak nem. A Pascalok érthetően igyekeztek átsiklani e felett a számukra kellemetlen tény felett, de Mesnard-t már nem köti a családi és a jansenista diszkréció. „Látjuk, amint ellenfeleit piszkolja – írja Mesnard – amint hevesen reagál a legkisebb ellentmondásra, amint olyan versenyt tűz ki, ami azt hivatott kimutatni, hogy egyetlen európai tudós sem képes versenyezni vele. Úgy rendezi a dolgot, hogy a lehető legkisebbre csökkentse versenytársai esé-

[208] *Mémoire sur la vie de M. Pascal. Écrit par Mademoiselle Marguerite Périer, sa niece.* – Éd. Pléiade 35–41, 40.

lyeit és minden megoldási kísérletet, amit elküldhettek neki, eleve félvállról kezel. Visszatért belé a gőg."[209]

De a *Roulette-levelekben* nem ez a „gőg" és sértő hang a legfeltűnőbb, ez nem hiányzik Pascal vallásos írásaiból sem. S egyébként is a kor egyházi vitairodalmán edzett füleinek a *Roulette-levelek* sértő kitételei nem lehettek szokatlanok. S végül – ami a legfontosabb – Pascal az 1658-as matematikai kutatásaival párhuzamosan *folytatja* teológiai és egyházpolitikai harcait is, gyakorlati síkon a jezsuiták, elméleti téren a kálvinizmus ellen. A *Roulette-levelek*ben nem a gőg, még nem is a vitatkozókedv a legfeltűnőbb, hanem az, hogy éppen olyan céltudatos és jól szervezett propagandakampány benyomását keltik, mint az 1656-ban a jezsuiták ellen indított *Vidéki levelek.*[210] A *Roulette-levelekben* is teljes harci aktivitásában látjuk Pascalt, félelmetes vitakészsége csúcsán. S így egyszerre más megvilágításba kerülnek a *Roulette-levelek*. Nem egy haldokló nagybeteg fájdaloműző foglalkozását tükrözik többé, de nem is egy világi „gőgbe" visszaeső vallásos lélek válságát. A *Roulette-levelek* jelentését nem elég Pascal biografikus adatai és pszichológiája felől vizsgálni, meg kell kísérelni kibontani a mű tudományos és tudománypolitikai *környezetét* is. Ezt kísérli meg a jelen tanulmány.

1658-ban a ciklois-kérdés már nagyon régi. Magát a görbét[211] – amit

[209] Mesnard, Jean: *Les conversions de Pascal* – Blaise Pascal, l'homme et l'oeuvre. Cahiers de Royaumont. Philosophie N° I. Paris 1956 (továbbiakban: P, Cr.) 46–77, 60.

[210] *Les Provinciales ou les Lettres écrites par Louis de Montalte, à un Provincial de ses amis, et aux RR. PP. Jésuites: sur le sujet de la Morale et de la Politique de ces Péres.* Cologne 1657 – Éd. Pléiade 567–904. Az ötvenes évek során jezsuiták és jansenisták elkeseredett harcot vívnak a vezetőszerep megszerzéséért a kialakuló abszolutisztikus monarchiában. A harc ideológiai téren a kegyelemtan bizonyos tételei körül koncentrálódott, amiket az Egyház Jansenius tanításában eretneknek nyilvánított. A jansenisták vezetője, a „nagy Arnauld" úgy próbál kisiklani az eretnekség vádja alól, hogy a pápa kiátkozáshoz való *jogát* elismeri, de tagadja, hogy a rekriminált tételek *tényleg* benne vannak Jansenius művében. Pascal a *Vidéki levelek*ben az Arnauld álláspontjának a népszerűen megírt védelmét vállalja, miután Arnauld védekezése a Sorbonne előtt elbukott. Pascal azonban messze túllát Arnauld jogászi ügyeskedésén, a *Vidéki levelek* egyre inkább elegáns, világos, nagyvilági stílusban megírt moralizáló esszék lesznek, teológiai tekintetben pedig elhajlanak a hivatalos jansenista ideológiától a tradicionális, thomista felfogás felé.

[211] Görbék mozgások összetételéből való származtatása nem új, jól ismeri már a görög matematika is, de csak mint a kör és egyenes geometriájából adódó problémák – pl. kockamegkettőzés, körkvadratúra, szögharmadolás – segédgörbéivel foglalkozott velük. A XVII. században a mozgásösszetevésből származó görbék, közöttük a ciklois, vagy ahogy a generálására célozva nevezték, *roulette,* az érdeklődés központjába kerülnek. Descartes a mozgásösszetevés által generált görbék között elkülönít egy nagy csoportot, amelyikbe tartozó görbék minden egyes pontja véges algebrai egyenlettel adható meg, s rendszeres vizsgálataiban csak ezekre a görbékre szorítkozik. A nem ide tartozó görbékkel – amiket mechanikusoknak nevez – csak átmenetileg foglalkozik leveleiben. Pascal nem tesz ilyen különbséget a görbék között. Az ő számára egy görbét nem a generáló mozgás, hanem két egyeneshez, a „bázishoz" és a „tengelyhez" való viszonya jellemez.

az egyenesen legördülő kör egy pontja ír le – már a XVII. század elején vizsgálta Galilei, s a harmincas évek közepén az akkor éppen Galilei műveivel foglalkozó Mersenne atya körkérdést intézett leveleiben a francia matematikusokhoz a görbe jellegére, ívhosszára és a görbe alatti területre vonatkozóan. Bizonyos részletkérdésekre adott is valamiféle megoldást[212] a College de France matematikaprofesszora, Giles Personne (1602–1672), vagy ahogy szülőhelyéről nevezte magát, Roberval. Ez a megoldás nehézkes, mechanikus, inkább csak intuitíve megsejtett, semmint bizonyított volt. Nem is mulaszthatta el Roberval nagy ellenfele, Descartes, hogy egy ragyogó, egyszerű bizonyítással meg ne szégyenítse a hivalkodó párizsi professzort, aki élete egyik főfeladatának tekintette a hollandiai filozófus bosszantását.

1658-ban Descartes már nyolc éve halott, de híre egyre nő, nemcsak Hollandiában és Angliában, Párizsban is. Akadnak lelkes hívei a jezsuiták és a bencések között is, sőt, maga a jansenisták vezére a „nagy Arnauld" is vonzódik bizonyos tanításaihoz. Csak két hely van Párizsban, ahol maradéktalanul ellenségei Descartes-nak: Mme de Sablière kényeskedő szalonja és a College de France. Mme de Sablière szalonjában Descartes régi ellenfelének, Gassendinek a hívei uralkodnak és La Fontaine gúnyolja Descartes tanait az állatok és emberek közötti különbségről. A College de France-ban Roberval gyaláz mindent, amit valaha is tanított Descartes.

Roberval egyébként másokat is támadott, ha nem is olyan lelkesen mint Descartes-ot, ugyanis akárhová nézünk a XVII. század két középső negyedében, mindenütt ott látjuk Robervalt, prioritási harcokba keveredve. Roberval rakoncátlankodását egyes történészek azzal magyarázzák, hogy három évenként egy-egy új felfedezéssel kellett megvédenie tanszékét, s így a közbeeső felfedezéseit a védelemre tartogatva, mások megelőzték. Azonban Descartes-tal szembeni viselkedését semmiképpen sem lehet „önvédelemmel" magyarázni, s a prioritás-igényeit is alaposabban át kellene nézni ahhoz, hogy legalábbis részben jogos voltuk felől dönthessünk. Később egyébként sem szorult már tanszéke periodikus védelmére, s azért nem lett semmivel sem barátságosabb. Roberval mindenütt támad, ahol a francia, közelebbről a köréje tömörülő párizsi matematikusok érdekeit sértve látja. Ebben a tekintetben

212 Roberval egy megfelelő módon definiált görbe – compagne de la cycloide, a mai sinusgörbe – segítségével határozza meg a ciklois területét, teljesen a Cavalieri-féle indivisibiliamatematika szabályainak megfelelően. L. Moritz Cantor: *Vorlesungen über Geschichte der Matematik*, Zweiter Band. Erster Halbband, von 1200–1650. Leipzig [2]1899 (továbbiakban Cantor II) 878 – 880.

hasonlít a viselkedése a John Walliséhoz,[213] aki az angol matematikának tesz hasonló „szolgálatokat".

Blaise Pascalnak még atyai jóbarátja Roberval. Blaise apja, Étienne Pascal még első párizsi tartózkodása alatt, a harmincas években köt vele szoros barátságot, s már együtt harcolnak a Mersenne atya körül kialakuló kis tudóscsoport tagjaiként bizonyos, a csoporton kívül álló matematikusok által képviselt nézetek ellen. Étienne Pascal és Roberval kooperációja később átöröklődik a fiúra, s meglepő, milyen állhatatosan és hűséggel védi mindenütt Blaise Roberval igazát, ott is, ahol a mérges professzornak – mi előttünk nyilvánvalóan – nincs igaza. Pl. a parabola és a spirális ívhosszáról írott értekezésében, ahol az itáliai matematikusok Robervaléval azonos, de sokkal korábbi eredményeit még csak meg sem említi.[214]

A roulette versenyt lezáró vitában is Pascal metsző gúnyja elsősorban Roberval, két ellenfele ellen irányul. Az egyik, Lalouère Toulouse-i jezsuita professzor, azt „merészelte" állítani, hogy ugyanarra az eredményre jutott, de jobb módszerrel, mint Roberval. A másik, John Wallis pedig ugyanazzal a módszerrel kapott az 1655-ben megjelent *Arithmetica infinitorum* c. művében sokkal általánosabb eredményeket, amelyik módszerrel Roberval és Fermat már hosszú évek óta dolgoztak, de eddig még csak az eredményeiket tették közzé. Laouère és Wallis megsemmisítésén kívül a versenyt lezáró vitalevelek feladata a Toricelli Robervallal szembeni jogos prioritás-igényének a cáfolata és Descartes érdemeinek az elkendőzése volt. Őket úgyszólván teljesen kiirtja a ciklois-probléma előtörténetéből. A verseny résztvevői közül pedig egyedül Wren[215] munkája iránt tanúsít megértést, de a Wren által beküldött pályamű nem a kitűzött kérdésekre adott válasz volt, s egyébként is Wren antik módszert alkalmazott, s nem az új, Itáliából elindult indivisibilia-módszert, amivel Roberval és Pascal dolgoztak, s aminek a teljesítőképességét és francia eredetét voltak hivatva igazolni a *Roulette-levelek.* Mert ezek az írások a ciklois ürügyén voltaképpen ezt a Roberval–Pascal-féle módszert védik mások jogos vagy jogtalan prioritás-igényeivel szemben.

213 John Wallis (1616–1703) foglalkozására nézve anglikán teológus volt, a restauráció után királypárti érzelmeinek jutalmaképpen II. Károly káplánja, majd püspök lett. A forradalom alatt az oxfordi egyetemen tanított, egyik alapító tagja a Royal Society-nek. Ahol csak alkalma nyílott rá, erélyesen – és többnyire igazságtalanul – védte az angol matematikusok prioritás-igényeit.

214 *Lettre de A. Dettonville a Monsieur A. D. D. S. en lui envoyant la démonstration a la manière des anciens de l'égalité des lignes spirale et parabolique.* – Éd. Pléiade 313–327, 313–314.

215 Sir Christopher Wren (1632–1723) építész, matematikus és csillagász, a restauráció korabeli London városképének a legfőbb kialakítója. Mint matematikust, a ciklois rektifikációja tette híressé, ami iránt Pascal is elismeréssel adózott, s nem maradt rá hatás nélkül. L. Derek T. Whiteside: „Wren, the mathematician"' *Notes and Records of the Royal Society* 15 107–111, 1960.

A XVII. század egyik legtöbbre tartott, legféltettebb „szellemi tulajdona” ugyanis a módszer volt. Csalhatatlan módszereket dolgoztak ki az üdvözüléstől a szerencsejátékig, a drámaírástól az ABC tanításáig mindenre. S az a módszer, amit a *Roulette-levelek* Roberval és Pascal számára szeretnének biztosítani, semmiképpen sem nevezhető – ez már abban a korban világosan látszott – az ő tulajdonuknak. Hosszú fejlődés eredménye, amiben többek között Torricelli[216] és mesterei: Galilei és Cavalieri,[217] továbbá Descartes és John Wallis is fontos szerepet játszottak. Ebben a fejlődésben az újkori matematika egyik leghatalmasabb eszközének, az infinitézimális módszernek a megszületését lehet nyomon követni. Pascal propagandájának genialitását mi sem bizonyítja jobban, minthogy a legutóbbi időkig éppen a *Roulette-levelek*et tartották az első „integrálszámításról szóló értekezésnek.”[218]

Óvatosabb matematikatörténészek inkább szerettek „Integrálszámítás előtti integrálásról”[219] vagy indivisibilia-matematikáról beszélni. Az elnevezéseknél és dicsérő jelzőknél azonban súlyosabb hiba volt az, hogy az egész módszert sajnálatos módon „végtelen kicsi” elemekből összetevődő véges összeg előállításaként értették félre a matematikatörténészek,[220]

[216] Evangelista Torricelli (1608–1647) a XVII. század második negyedének egyik legjelentősebb matematikusa is. Működése mint kísérletezőnek, fizikusnak és matematikusnak egyaránt számos ponton érintkezik a Pascaléval és Robervaléval, s ez önmagában véve is kiindulópontot jelentett prioritás-vitákra, amit még fokozott, hogy a Torricelli módszereihez csatlakozó Wallis „védelmébe vette” mesterét Roberval–Pascal igényeivel szemben.

[217] Bonaventura Cavalieri (1598?–1647) Galilei tanítványa, a Galilei után fellendülő új itáliai matematikai fejlődés egyik elindítója és legnagyobb hatású mestere. 1621 és 29 között készült, 1635-ben megjelent műve, a *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota* a XVII. század új infinitezimális módszereinek első összefoglalása.

[218] Például Émile Picard: „C’est le premier Traité de calcul intégral” cit. J. Chevalier, Ed. Pléiade 175.

[219] Vö. Zeuthen, H. G.: *Geschichte der Mathematik im XVI. und XVll. Jahrhundert,* Leipzig, 1903, 248–300.

[220] Vö. Cantor II 877: Cavalieri betrachtete die Indivisibilien jeder Oberfläche nach Maassgabe unendlich vieler Linien, die eines Körpers nach Maassgabe unendlich vieler Flächen, und deshalb wurden Vorwürfe gegen Cavalieri erhoben, als meine dieser, die Oberfläche, der Körper beständen wirklich aus Linien, aus Flächen. – Cantor ezzel a kifogással a kortárs-matematikusokra, elsősorban Robervalra utal, de modern matematika történészek sem mindig mutatnak mélyebb megértést Cavalieri munkája iránt, mint Roberval. Vö. pl. Pierre Humbert: *Cet effrayant génie ... L’oeuvre scientifique de Blaise Pascal,* Paris 1947, 216: Cavalieri considérait les lignes, les surfaces et les volumes comme décomposables en une infinité d’éléments qu’il appelait indivisibles: une ligne était une accumulation de points, une surface une accumulation de droites, un volume, une superposition de plans. Telle qu’elle était ainsi proposée, l’idée était fausse, car il est bien évident qu’en entassant les uns sur les autres des plans, dont par définition l’épaisseur est nulle, on n’obtiendra jamais un volume d’épaiesseur non nulle: accumulez zero, cela donnera toujours zero. – Ez az idézet nemcsak azért érdekes, mert bizonyítja a tévedések szívós életét (Roberval–Humbert: 300 év), hanem azért is, mert a

míg A. Koyré egy alapvető tanulmányában meg nem magyarázta, hogy éppen ellenkezőleg, Cavalieri indivisibilia-geometriájában az ez ellen való tiltakozásról van szó.[221] Cavalieri módszerének a lényege nem „végtelen sok" „végtelen kicsi" elem „összegezése", hanem az antik, *reductio ad absurdum*ra alapuló kimeríthetetlensége elv megkerülése.[222] Cavalieri a síkalakzatokat párhuzamos egyenesek halmazának *(aggregatum)* tekinti, nem összegének. Két ilyen halmaz kétféleképpen hasonlítható össze, *collective, hoc est comparando aggregatum ad aggregatum,* és *distributive, sc. comparando sigillatim quamlibet rectam figurae ABCcba ... cuilibet rectae figurae EFGefg ... in direction existenti.*[223] Azaz, ha két alakzat azonos irányban vett elemei között kölcsönösen egyértelmű megfelelkezés állapítható meg, a két alakzat egészében is megfelel egymásnak. Az indivisibilia módszerben kontinuum számosságú halmazok összehasonlításáról van szó, s ezért nincs szükség határátmenetre. Az exhaustios eljárás és a limes módszer megbontja a kontinuumot, mert a természetes számok sora szerint rendezhető értékekkel közelít meg egy soha el nem érhető, ill. a $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ összefüggésben egy pontosan definiált matematikai szerkesztés eredményeként adódó határértéket. Cavalieri, a kontinuum számosságú halmazokban maradva, elkerüli ebből a kétféle – görög és modern – aritmetizációból adódó nehézségeket.

Ezt nem értették meg a matematikatörténészek, s ezért értették félre, egy helytelenül alkalmazott görög vagy modern eljárásnak, az indivi-

második mondat, amiben Humbert az indivisibiliamatematikát – ti. amit ő annak tart – kritizálja, éppen az indivisibilia módszer egyik alapelve. Végtelenül vékony elemek összegezésének érti félre *Cavalieri* módszerét még Otto Toeplitz is, *Die Entwicklung der infinitesimalrechnung.* Berlin–Göttingen–Heidelberg 1949, 57. – Érdemes kiemelni viszont, milyen tisztán látta már 1912-ben *Cavalieri* módszerének lényegét Léon Brunschvicg: L'essentiel de la méthode est dans la comparaison des elements générateur, qui permet de traiter chaque figure, plane ou solide, „in ratione omnium suorum indivisibilium collectíve et (si in iisdem reperiatur una quaedam communis ratio) distributive ad invicem comparatorum". Si l'on fait de plus appel à la considération de leur infinité, c'est uniquement afin de ne pas avoir à tenir compte de leur nombre. Léon Brunschvicg: *Les etapes de la philosophie mathématique*, Paris 1912, 166.

221 Koyré, A.: *Bonaventura Cavalieri et la géometrie des continues* – Évantail de l'histoire vivante. Hommage a Lucien Febvre I–II. Paris 1953, I 319–340.

222 Az antik kimeríthetetlenségi módszer jó összefoglalása található pl. B. L. van der Waerden: *Erwachende Wissenschaft*, Basel und Stuttgart 1956, 304–305, és főleg E. J. Dijksterhuis: *Archimedes,* Copenhagen 1956, 130–133. Dijksterhuis interpretációját foglalja össze és teszi modern matematikai logikai apparátussal könnyen hozzáférhetővé Whiteside alább idézett monográfiája.

223 Kollektíve, azaz halmazt halmazhoz hasonlítva, és disztributive, ti. adott irányban összehasonlítva *ABCcba* alakzat egy tetszőleges egyenesét … *EFGefg* alakzat egy tetszőleges egyenesével. cit.: Whiteside, Derek Thomas: Patterns of Mathematical Thought in the Later Seventeenth Century. – *Archive for History of Exact Sciences* 1 (1961) 179–388 (továbbiakban: Whiteside), 313.

sibiliamatematikát. Pascal azonban tökéletesen tisztában volt az indivisibiliamatematika lényegével. Az aritmetikai háromszög problémaköréből kinőtt *Potestatum numericarum summa*ban pontosan az indivisibilia elmélet szellemének megfelelően adja meg az egész számok hatványai között talált összefüggésekből a folytonos mennyiségek között fennálló analóg összefüggésekre való áttérés szabályát. Az elv, amely a diszkontinuus mennyiségekről a folytonos mennyiségekre való áttérést lehetővé teszi az, hogy „bármely számban is adunk folytonos mennyiségeket egy náluk magasabbrendű folytonos mennyiséghez, utóbbin azok semmit sem növelnek. Így pontok a vonalhoz, vonalak a felületekhez, felületek a testekhez semmit sem tesznek hozzá: vagy hogy számokról szóló traktátushoz jobban illő szavakat használjak, semmit sem tesznek hozzá a gyökök a négyzetekhez, a négyzetek a köbökhöz, köbök a kvadrato-kvadrátokhoz. Úgyhogy az alacsonyabbrendű mennyiségeket, mint nulla értékkel rendelkezőket, nem kell tekintetbe venni. Fentieket, amik az indivisibilia elméletben járatosak előtt jól ismertek, azért fűztem hozzá, hogy kitűnjön ebből a példából, amelyben a folytonos mennyiségek dimenzióival való számolást az egész számok hatványainak az összegéhez lehet kapcsolni, hogy látszólag legtávolabb eső dolgokat hogyan fűz egybe az egységet kedvelő természet.”[224]

A példa, amit az idézett szöveg említ, pár sorral feljebb olvasható, s nem egyéb, mint az akkor már jól ismert parabolakvadratúra általánosítása:

„A vonalak összessége úgy aránylik legnagyobbikuk négyzetéhez, mint . . . . 1:2.
A vonalak négyzeteinek az összessége úgy aránylik a legnagyobbikuk köbéhez, mint . . . . 1:3.
A vonalak köbeinek az összessége úgy aránylik a legnagyobb negyedik hatványához, mint. . . . . 1:4.

Tetszőleges fokú vonalak mindjének az összessége *(summa omnium)* úgy aránylik a legnagyobbjuk közvetlenül következő magasabb fokához, mint az egység eme magasabbfokú vonal kitevőjéhez.”[225]

A mi jelölésünkben:

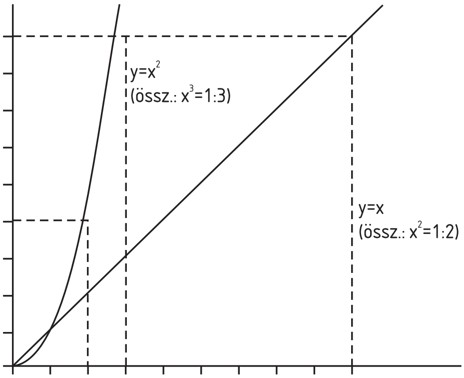
$$\frac{\int_0^x x^n dx}{x^{n+1}} = \frac{1}{n+1}$$

Azonban a mai formulák alkalmazása csak a megértés gyorsabbá tételére jó, a „summa omnium” nem $\int$ és a formula indoklásában nem

[224] *Potestatum numericarum summa* – Éd. Pléiade 166–171, 171.
[225] Uo. 171

összegezés, hanem az az analógia szerepel, amit Pascal az aritmetikai háromszög segítségével egész számok sorainak a hatványaira talált. Pl. a négyzetre emelés esetében: „Természetes számok bármely számmal kezdődő sorában az utolsó tagot közvetlenül követő szám négyzetéből levonva a legkisebb tag négyzetét és a tagok számát, az eredmény egyenlő lesz a tagok összegének a kétszeresével.”[226] Pl. ha a kérdéses számsor 5, 6, 7, 8, akkor $9^2 – 5^2 – 4 = 2 (5+6+7+8)$.

Innen az indivisibiliamatematika fent megadott elvei szerint a parabolák kvadratúrájánál, mivel itt a „tagok összegé”-nek *(aggregatum ex omnibus)* maga a parabola alatti terület felel meg, s a vonalak négyzetéhez képest első hatványukat nem kell figyelembe venni, azonnal megkapjuk a másodfokút parabolára fent megadott szabályt.



34. ábra

Az egész számokra kapott eredmények kontinuumra való alkalmazását tehát a végtelenek „hierarchiája” tette lehetővé, aminek a felfedezését a matematika- és filozófiatörténészek egészen a legutóbbi időkig Pascalnak tulajdonították, holott maga Pascal hangsúlyozta, hogy *quantum haec notitia ad spatiorum curvilineorum dimensioines conferat, satis norunt qui in indivisibilium doctrina tantisper versati sunt*.[227] A. Koyré vette észre először, hogy Pascal itt megelőző matematikusok munkájához kapcsolódik. „Ami az egész számok hatványainak az összegezése és az indivisibilia (folytonos mennyiségek) összegezése közötti összefüggést illeti – írja Koyré –, ez kétségkívül kevésbé ismert ügy volt, és sokkal újabb, de éppen ez alkotja az alapját Fermat és Roberval munkáinak, akinek a hatása úgy látszik felváltja Pascalnál Désargues hatását.”[228]

[226] Uo. 170.

[227] „Akik valamennyire is járatosak az indivisibilia elméletben, azonnal értik, mennyiben alkalmazhatók ezek a fogalmak görbék által határolt területekre”. Uo. 170–171.

[228] Koyré, *A.*: *Pascal savant*. P. CR. 259–295, 265. Koyré ebben az alapvető fontosságú tanulmányában – melyik Koyré tanulmány nem az? – azt mutatja ki, hogy Pascal távolról sem emelkedett annyira kora tudományos vizsgálatainak a színvonala felé, mint azt az eddigi, hagiographikus-jellegű Pascal irodalom állította. Pascal est un mathématicien d’un trés grand talent, qui a eu la bonne chance d’avoir été, dans sa prime jeunesse, forné par Désargues ou, du moins, d’en avoir sebi une profonde influence, et qui a eu la malchance d’avoir été, dans son âge műr, profondément influencé par Roberval (im. 270). – Jelen közlemény Koyré tanulmányának a téziséhez kapcsolódik, de szeretné kimutatni, hogy szerencsére Roberval hatása nem volt olyan mély, mint azt Koyré – s talán

Az egész számok hatványösszegei és a folytonos mennyiségek hatványai közötti párhuzam képezte azonban nemcsak Fermat és Roberval, hanem még inkább Wallis munkájának az alapjait is. Wallis *Arithmetica infinitorum*-át Fermat és Roberval jól ismerték, s régóta vitában állottak az angol matematikussal.[229] Carcavy, a roulette ürügyén kitűzött metodikai verseny egyik döntőbírája pedig nemcsak Mersenne utódja, hanem Roberval és Pascal barátja is volt, aki már Pascal Descartes-tal vívott prioritási vitájában is Pascal mellé állott.[230] A roulette-kihívás eleve úgy volt megtervezve, hogy Pascal dicsősége és Roberval prioritása biztosítva legyen.

Ezekben a következtetésekben kétségkívül igazat kell adnunk Koyrének. Azonban Koyré szerint metodikában sem hoztak semmi újat a *Roulette-levelek,* az alkalmazott módszer egyszerűen az indivisibiliamatematika „félreértése". Koyré véleménye szerint Pascal „úgy látszik nem értette meg Cavalieri fogalmainak a mélyebb értelmét, hiszen Cavalieri számára egy geometriai objektum indivisibilis elemei eggyel kevesebb dimenzióval rendelkeztek, mint ez az objektum maga."[231] Pascal viszont a *Roulette-levelek*ben úgy fogja fel a területet, mint „kis négyszögek indefiniált számának az összegét", s az így felfogott területet azonosnak veszi a Cavalieri által definiált „vonalak összegével."[232]

Ugyanez a véleménye a matematikatörténetben is kitűnően járatos Bourbaki-nak,[233] s ez volt már lényegében Cantor felfogása is.[234] Szerintük Roberval és nyomában Pascal „félreértették" vagy legalábbis átinterpretálták Cavalieri infinitezimális módszerét, de ez a „félreértés" termékeny volt, mert ebből született meg Leibniz kezén az integrálszámítás.

maga Pascal is – hitték. Pascal a Reberval-féle indivisibilia zsargon alatt visszatalál a tisztább görög forrásokhoz az infinitezimális matematika területén is.

229 L. Hofmann, J. E. *Geschichte der Mathematik* II., Berlin 1957, 36–37.

230 Descartes és Pascal között Mersenne halála után romlik el véglegesen a viszony, amikor a nagy tapintattal rendelkező és jóindulatú Mersenne feladatát, a tudósok egymás közötti levelezésének – ami akkor a tudományos folyóiratokat pótolta – lebonyolítását a jansenista-szimpatizáns Carcavy veszi át. Carcavy oly módon értesíti Descartes-ot pl. Pascal barométer-kísérleteiről is, ami a nagy filozófusra fölöttébb sértő volt. S már ekkor, 1649-ben kénytelen Descartes a ciklois-kérdésben is védekezni Roberval prioritás-igényeivel szemben: Car, pour l'aire de la ligne décrite par la Roulette, dont il s'est fort vanté, c'est Torricelli qui l'a trouuée: & c'est moy qui luy ay enseigné à en trouuer les tangents (Descartes levele Carcavyhoz, 1649. aug. 17-én. Œuvres, Adam-Tannery-féle kiadás V 391–401, 400.).

231 Koyré, A.: *Pascal savant*. P, CR. 269.

232 Uo. 270.

233 Bourbaki, Nicolas: *Éléments d'histoire des mathématiques,* Paris 1960., 194: Il est vrai que par la suite beaucoup de mathématiciens, tel que Roberval et Pascal, préfèrent voir, dans ces ordonnées de la courbe dont on fait la „somme", non des segments de droite comme Cavalieri, mais des rectangles de mème hauteur infiniment petite, ce qui n'est pas un grand progrès du point du vue de la rigueur (quoi qu'en dise Roberval).

234 Cantor II 877, de Cantor haladásnak tartja Roberval átértelmezését.

Pascal fentebb ismertetett vizsgálatai azonban azt mutatták, hogy ő tökéletesen tisztában volt az indivizibilia módszerrel, s ha a *Roulette-levelek*ben a vonal aggregátumok helyett végtelenül finomítható négyszög beosztás összegeként állítja elő a területet, annak más oka kell legyen, nem az indivisibilia módszer „félreértése". Roberval valóban azt hitte, hogy az indivisibilia módszert „javítja meg", amikor a „vonalösszeget" indefinit-kicsiny négyszögek összegével váltja fel. De Pascal csupán elnevezéseiben követi Robervalt, Pascalnál egészen másról van szó, nem az indivisibilia módszer „megjavításáról". Pascal a *Roulette-levelek*ben más módszert használ, mint amire még az aritmetikai háromszöggel kapcsolatos infinitézimális megfontolásaiban hivatkozott, a *Roulette-levelek* módszere nem az indivisibilia módszer többé.

Már Cantor felhívta rá a figyelmet,[235] hogy a XVII. század Newton–Leibniz előtti matematikájában az indivisibilia módszer mellett kifejlődik egy másik módszer is, amelyik az antikvitás megközelítő módszereihez kapcsolódva területeket keskeny területsávok, térfogatokat keskeny parallelepipeda számának a növelésével akart kimeríteni. *Exhaurire*: a szó is most lép fel először, Gregorius a Santo Vincentio[236] munkájában. Cantor nagy művét azonban G. Eneström kritikája s a nyomában orientálódó matematikatörténet-írás „megbízhatatlannak" minősítette,[237] s mikor több mint egy félévszázad múlva Whiteside újra felfedezi a XVII. század matematikájának ezt a fontos irányát, már nem is hivatkozik Cantorra.

Whiteside alapvető fontosságú monográfiájával egyebütt kell részletesen foglalkoznunk, itt csak az exhaustiós módszereket ismertető fejezetét futjuk át, mert enélkül Pascal infinitezimális matematikáját nem lehet megérteni. Whiteside fedezi fel, hogy a Cavalieri–Roberval-féle indivisibilia módszerekkel ellentétben, amelyek végeredményben kontinuum számosságú halmazok megfelelkezésén alapulnak, az exhaustiós módszerek utat nyitnak a végtelen, ill. a kontinuum aritmetizálása felé. Whiteside szerint a XVII. század úgy általánosítja az „egyszerű" görög exhaus-

235 Uo. 895.

236 Gregorius a S. Vincentio (1584–1667) belga jezsuita páter 1647-ben megjelent, de évtizedek óta készen levő műve, az *Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum coni,* Antwerpen 1647. számos nehezen érthető antik geometriai stílusban megírt tétel mellett néhány meglepően modern és a későbbiekben nagy jelentőségű elvet tartalmaz, amit elsősorban J. E. Hofmann nyomán – csak a legutóbbi évek történetírása kezd igazán értékelni. Lásd pl. Ch. Naux: „L'Opus geometricum de Grégorie de Saint-Vincent", *Revue d'Histoire des Sciences* 15 (1962), 93–104.

237 Egyedül George Sarton kelt ismételten Cantor nagy művének a védelmére. Kétségtelen, hogy Cantor, mint a késő tizenkilencedik század többi nagy történésze is – talán csak Burckhardt és Acton volt kivétel – túlságosan megértette a forrásait, ott is, ahol azok alig, vagy egyáltalán nem érthetőek. Cantor a tudománytörténet-írás kritika és interpretáció előtti korában írt, abban a boldog korban, amikor a történészek még elhitték, hogy a források valóban arról szólnak, ami le van írva bennük.

tiós technikát, hogy az „aequivalenssé válik egy konvex ponthalmazon értelmezett Cauchy–Riemann-féle határozott integrállal."[238]

Egyelőre tekintsünk el attól a ténytől, hogy a görög módszer csak azért látszik „egyszerűnek" Whiteside előtt, mert a valós számok jólrendezhetőségéből indul ki, s így a görög módszer bonyolult arányelméleti struktúráját a ponthalmazok elméletének a szellemében fogalmazhatja át.[239] A mi szempontunkból most az a fontos, hogy Whiteside interpretációját elfogadva, a görög módszer, Pascal módszere és a Riemann-integrál valóban nagyon közel kerülnek egymáshoz. A XVII. század matematikusainak a Whiteside által megfogalmazott „arkhimedészi modellt" csak az egyenlőség egyenlőtlenség melletti megengedésével kellett általánosítaniuk ahhoz, hogy alkalmassá váljon konvex görbék alatti területeknek a számítására.

Ebben a XVII. század által kibővített exhaustiós modellben centrális szerepet játszik a konvexitás fogalma. Már maga Pascal tisztában volt ezzel, és a *Dimension des lignes courbes*-ban külön *avertissement*-ként, elvként emeli ki: „Feltételezem az arkhimedészi elv érvényességét: Ha két, azonos síkban fekvő, közös végpontú görbe vonal ugyanazon oldal felé görbül, az, amelyik benne foglaltatik a másikban, rövidebb lesz mint az, amelyik magában foglalja."[240]

A matematikatörténet-írás, folyton Leibniz elődjét keresve Pascalban, Pascal matematikai oeuvre-jéből az „előremutató" (értsd: Leibniz felé mutató) vonásokat emelte ki: a „karakterisztikus háromszöget", a „görbe mentén történő integrálást", a „kettős integrálást"–, a „parciális integrálást", s átsiklott, mint az antikvitás felé való visszatérésen a *Dimension des lignes courbes* problematikáján.[241] Pascal maga is az antik módszer alkalmazásának nevezte ezt a művét, s a matematikatörténet-írás szívesen hitt neki. Ennek a műnek a módszere ugyanis valóban semmiképpen sem illeszthető be azokba a keretekbe, amiket a matematikatörténet-írás gyártott magának a Cavalieri–Torricelli–Roberval–Pascal-féle „indivisibilia" elméletről, mint a Leibniz-féle kalkulus „elődjéről".[242] Whiteside azonban kimutatta, hogy Pascal éppen ebben a művében, a „kibővített exhaustios modell" egyik legmesteribb alkalmazásával, a kor legfontosabb matematikai tendenciáihoz csatlakozik. S így ez a mű, ahe-

238 Whiteside 335.

239 Uo. 332–333.

240 Éd. Pléiade 320.

241 Hofmann, J. E.: *Geschichte der Mathematik* II. Berlin 1947. 42.: azonban mint *„bedeutende Einzelleistung"*-ot emeli ki.

242 Még az egyébként olyan jól tájékozott Bourbaki is. Im. 194. Egyedül Koyré hívta fel a figyelmet arra, hogy Pascal infinitezimális matematikájában nem szabad Leibniz „elődjét" látni, s hogy pl. a „karakterisztikus háromszög" Pascal számára egyáltalában nem „karakterisztikus", mivel Pascal ne pense pas *rapport,* il pense *objet* et c'est pour cela qu'il manque 1a décuverte leibnizienne... Koyré, im. 269.

lyett, hogy az antikvitás felé való visszatérést jelentene, a kor legjellegzetesebb matematikai tendenciáinak egyikét fejleszti tovább.

Az alábbiakban megkíséreljük kimutatni, hogy ezt a módszert használta Pascal már a *Roulette-levelek*ben is, csupán ott még az indivisibiliamatematikából származó elnevezések köntösébe öltöztette.[243] De ezt a módszert – Whitesidetől eltérően – nem tekintjük a Cauchy–Riemann-féle integrál elődjének, vagy éppen korai megfogalmazásának, mert Pascal módszeréből hiányzik a konvergencia, a határérték fogalma. Pascal módszerének a lényegét a XVII. század hasonló módszereihez viszonyítva kell megérteni.

Az exhaustiós módszer területszámításra való adaptálásának az ötlete nem új, hiszen ezt használta már Eudoxos a körterület számítására. S láttuk, hogy a XVII. században ez a módszer Luca Valerio,[244] Gregorius a Santo Vincentio és tanítványaik kezén fokozatosan újraéled. Gregorius a Santo Vincentio tanítványa volt A. Tacquet,[245] akinek kitűnő összefoglaló munkáit Pascal is jól ismerte.

És ezt a módszert alkalmazza, s hozzá éppen a ciklois területének a kiszámítására, Descartes is.[246] De nem úgy, amint azt Whiteside modern matematikai-logikai apparátussal dolgozó struktúra-analízise vázolja. És nem úgy, amint Pascal a *Dimension des lignes courbes*-ban. A Descartes eljárásában sajátságosan keveredik indivisibilia módszer és exhaustiós módszer. Az indivisibiliamatematikából megtartja azt az elvet, hogy két geometriai alakzat – folytonos halmaz – összehasonlítását azok elemeinek az összehasonlítására

[243] Jean Itard felismeri ezt a tényt. A *Lettre de Monsieur Dettonville a Monsieur Carcavi*-ból idézve azt a részt, ahol Pascal az indefinit számú négyszög összege helyett a somme des ordonnées elnevezés használatát indokolja (Éd. Pléiade 232), megjegyzi: En fait, c'est un résumé de la méthode d'exshaustion des Anciens, et de son expression plus rapide dans le langage des indivisibles. Jean Itard: „De l'algèbre symbolique au calcul infinitesimal." – *Histoire générale des sciences publiée sous la direction de René Taton, tome II. La science moderne (de 1450 a 1800).* Paris 1958, 207 207–241, 224.

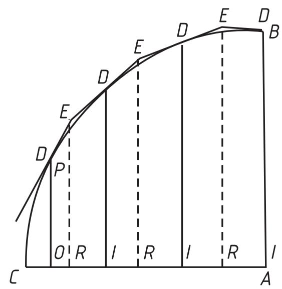
[244] Luca Valerio (1552–1608) 1604-ben megjelent *De centro gravitatis solidorum*-a éppen az antik exhaustiós eljárás felélesztésével hatott a XVII. századi infinitezimális módszerek fejlődésére. Már ez a mű is mutatja, hogy a XVII. századi infinitezimális módszerek szempontjából milyen jelentősek voltak a súlypont-problémák, amik Pascal roulette-kihívásának a lényegét is teszik. Erre a kérdésre nézve lásd Pierre Costabel: „Autour de la méthode de Galilée pour la détermination des centres de gravité", *Revue d'Histoire des Sciences* 8 (1955), 116–128.

[245] A. Tacquet (1612–1660) szerepét ebből a szempontból már Cantor felismerte, Cantor II 896. Andreas Tacquet: *Cylindricorum et annularium libri IV*... Antwerpen 1651 és a folytatását képező *Cylindricorum et annulorum liber quintus*... Antwerpen 1659 címen megjelent könyvei a kor kedvelt tankönyvei közé tartoznak. Lásd: Elisabeth Sauvenier–Goffin: Les sciences mathématiques et physiques a travers le fonds ancien de la bibliotheque de l'Université de Liège. II. Les XVII^e et XVIII siècles. – *Mémoires de la Société Royale des Sciences de Liège*. Cinquième sérietome V., 135.

[246] Descartes levele Mersenne-hez 1638. július 27-én. Adam–Tannery-féle kiadás, II 253– 288.

vezeti vissza. De a területet nem ezeknek az eggyel kisebb dimenziójú elemeknek, a vonalaknak az „összességeként” adja meg, mint ez az indivisibilia módszerben történik, hanem egy végtelenül finomítható területbeosztással kimeríthetetlen *összegként* definiálja. S éppen ez a keverés a lényege annak a módszernek is, amit Pascal a *Roulette-levelek*ben és a *Traité des sinus du quart de cercle*-ben használ. Pascal azonban sokkal világosabban, módszeresebben jár el, mint Descartes. Ami Descartes-nál egyszerű, „evidens” ötletként jelentkezik, az Pascalnál propositiókkal alátámasztott levezetés formáját ölti. Descartes két végtelenül finomítható területbeosztást akkor tekint egyenlőnek, ha a beosztások egyes elemei – a kis részterületek – egyenlőek: „Mivel, ha egy mennyiség minden része egyenlő egy másik mennyiség minden részével, az egész is szükségszerűen egyenlő az egésszel; és ez annyira világos fogalom, hogy azt hiszem, csupán a minden dolognak az igazsággal ellentétes névadás szenvedélyének a megszállottai tagadhatják.”[247]

Pascal nem evidenciára hivatkozik, hanem *definiál:* „Legyen (35. ábra) *ABC* egy körnegyed, melynek *AB* sugarát tekintsük tengelynek és a reá merőleges *AC* sugarat bázisnak; legyen *D* a körív egy tetszőleges pontja, melyből meghúzzuk a *DI* sinust az *AC* sugárra; és a *DE* érintőt, amelyen tetszés szerint vegyünk fel két *E* pontot s húzzunk ezekből merőlegeseket az *AC* sugárra.



35. ábra

Azt állítom, hogy a *DI* sinus és az *EE’* érintő szorzata egyenlő a bázis két párhuzamos közé bezárt *RR’* szakaszából és az *AB* sugárból alkotott szorzattal (36. ábra).

Az *AD* sugár ugyanis úgy aránylik a *DI* sinushoz, mint *EE’* aránylik *RR’*-höz vagy *EK*-hoz: ami világosan kitűnik a *DIA* és az *EKE’* derékszögű háromszögek hasonlóságából, utóbbi pedig az *EE’K* vagy *EDI* és *DAI* szögek egyenlőségéből következik.

I. Propositio

A körnegyed egy tetszőleges ívében vett sinusok összege egyenlő a bázis két szélső sinus közé zárt szakaszának és a sugárnak a szorzatával.

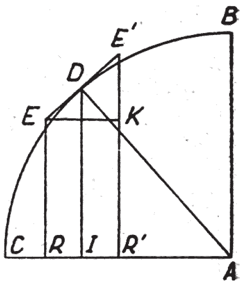
A bizonyítás előkészítése

Legyen *BP* egy tetszőleges körív, amit *D* pontokban indefiniált számú részre osztunk, ahonnan meghúzzuk a *PO*, *DI* stb. sinusokat: ... *AO* méri a *BAPO* ív szélső sinusai közötti távolságot. …

[247] Uo. 262.

Azt állítom, hogy *a DI* sinusok összege (megszorozva mindegyik a *DD* ívek egyikével, amint az magától értetődik) egyenlő az *AO* egyenes és az *AB* sugár szorzatával.

Mert minden *D* pontban meghúzva a *DE* érintőt, amelyek mindegyike *E* pontokban metszi a szomszédját, és meghúzva az *ER* merőlegeseket, látható, hogy mindegyik *DI* sinus és *EE* érintő szorzata egyenlő a megfelelő *RR* távolságok és az, *AB* sugár szorzataival. Így tehát a *DI* sinusok mindegyikét megszorozva a saját (egymás között mind egyenlő) *EE* érintőjével, az így kapott négyszögek halmaza (ensemble) egyenlő lesz az egyes *RR* szakaszok *AB* sugárral képezett négyszögeinek a halmazával; azaz (mivel mindegyik érintő meg van szorozva a sinussal és mindegyik szakasz az *AB* sugárral) a *DI* sinusok összege (somme) megszorozva mindegyik az *EE* érintők egyikével egyenlő az *RR* távolságok összegének, vagyis *AO*-nak az *AB*-vel képzett szorzatával. De mindegyik érintő egyenlő az egymás között egyenlő *DD* ívek egyikével. Úgyhogy az egyenlő kis ívek egyikével megszorzott sinusok összege egyenlő a sugár és az *AO* távolság szorzatával."[248]



36. ábra

Mi sem egyszerűbb, mint ezt az eredményt a vonal mentén vett integrálás nyelvére lefordítani, s ha az ember Leibniz felől gondolkozik, ez szinte elkerülhetetlen. De Pascal még annyira se ismerte Leibniz matematikáját, mint a mai matematikusok, viszont összehasonlíthatatlanul jobban ismerte náluk a görög matematikát és kora modern matematikai módszereit. Ismerte, egyetlen szóban utal is rá,[249] Descartes roulette területét megadó módszerét is. S ez a módszer lényegében, gondolati struktúráját tekintve ugyanaz, amit Pascal használ a fentebb idézett szövegben. Descartes a következőképpen jár el: vesz két területet, az egyik, a kör területe adott, a másikat, a ciklois egy szegmentumának a területét úgy kell kis, végtelenül finomítható területrészletekből megszerkeszteni, hogy mindegyik kis területrészletnek feleljen meg az adott kör egy-egy kis részlete. Ezt a ciklois-szegmentumban s

[248] *Traité des sinus du quart de cercle,* Éd. Pléiade 275–282, 275–277.

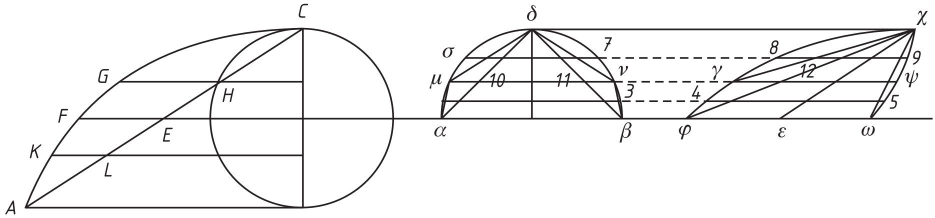
[249] *Histoire de la roulette* ... lo octobre 1658. Éd. Pléiade 194–200, 195: on recut leurs solution – írja Mersenne régi felhívására célozva – presque en même temps, l'une de M. de Fermat, conseiller au parlament de Toulouse, l'autre de feu M. Descartes; et toutes deux différentes l'une de l'autre, et encore de celle de M. de Roberval, de telle sorte néanmoins qu'en les voyant toutes il n'est pas dífficile de reconnaître qu'elle est celle de l'auteur, car il est vrai qu'elle a un caractère particulier, et qu'elle est prise par une voie si belle et si simple qu'on connaît bien que c'est la naturelle.

a neki megfelelő félkörben létesített háromszögbeosztással éri el, a két beosztás különböző alakú, de egyenlő területű háromszögeit megfeleltetve egymásnak. Magát a ciklois-szegmentumot egy jellegzetesen indivisibiliamatematikai megfontolással hozza olyan alakra, ahol ez az összehasonlítás könnyen elvégezhetővé válik: kimutatja két, a kérdéses ciklois-szegmentumban s egy félkörben felvett egyenes sereg egyes egyeneseiről, hogy egyenlő hosszúak. Ahhoz, hogy ebből a két terület egyenlőségére lehessen következtetni, az indivisibiliamatematika alapszabálya szerint a két egyenes seregnek azonosan irányítottnak kell lenni, azonos párhuzamos egyenesekből kell állani. De ezt az azonos irányítottságot létrehozva, Descartes, a kör és a ciklois-szegmentum azonos hosszúságú, párhuzamos egyenes szakaszai közötti összefüggést nemcsak arra használja fel, hogy segítségével a két terület egyenlőségét bizonyítsa. Ezen túlmenően egy-egy területbeosztást létesít a két összehasonlítandó területben az indefinit párhuzamos egyenesek felhasználásával, s az egyes részterületek páronkénti egyenlőségéből következtet a két egész terület egyenlőségére.[250]

A kis részterületek számát úgy kell szaporítani, *qu'on voudra à l'infini*[251] – írja Descartes –, hogy közben a két összterület egymásnak megfelelő részterületei egyenlőek maradjanak.

Pascal bizonyításában az adott terület – ami Descartes-nál a félkör volt – egy négyszög, az összehasonlítandó, kis részterületekből megszerkesztendő terület a sinusgörbe egy része alatti terület. A két területbeosztás egyenlőségének a kimutatására szolgál a *BC* körívet helyettesítő érintősokszög egyes kis *EE'K* elemi három szögeire alapított bevezető

[250] Az *AKFGCHELA* ciklois-szegmentumot Descartes egy egyszerű, de hosszadalmas indivisibilia geometriai megfontolással *φγχψωεφ* alakra hozza, ebben és egy *αδβ* félkörben azonos párhuzamos egyenes sereg egyeneseinek αβ és φω, μν és γψ szegmentumairól kimutatja, hogy egyenlőek, s ebből az indivisibilia geometria szabályai szerint következik a két idom, *αδβ* és *φγχψωεφ* egyenlősége. De Descartes nem elégszik meg ezzel a bizonyítással. A két idomon átfutó, indefinit számú párhuzamos vonalat arra is felhasználja, hogy egy-egy, a félkört, ill. a *φγχψωεφ* ciklois-szegmentumot egyre jobban megközelítő, indefinit számú háromszögbeosztást is létesítsen a segítségükkel, amelyeknek az egyes elemi háromszögeiről kimutatja, hogy egyenlő területűek.



37. ábra *38. ábra* *39. ábra*

[251] Idézett levél. Adam–Tannery-féle kiadás II., 262.

lemma, amit a matematikatörténet-írás a „karakterisztikus háromszög” bevezetéseként ismert félre. Pascalnál azonban szó sincs egy „véges” és egy „végtelen kicsi” háromszög összehasonlításáról, mint Leibniz-nál. Pascalnál ez a lemma egyszerűen két indefinit területbeosztás terület-egyenlőségének a kimutatására szolgál. Pascal matematikája, éppen úgy, mint a Descartes-é, sokkal precízebb, mint Leibniz és a Leibniz nyomában orientálódó matematika. Az infinitezimális módszerek területén egész a XIX. század elejéig nem érik el újra a pascali precizitást.

De ez a pascali precizitás egészen más jellegű, mint a XIX. századi. A végtelen finomítás ugyanis Pascalnál éppen úgy nem határátmenet jellegű, mint Descartes-nál. Nem szabad megtévesszen Pascal olyan megfogalmazása sem, hogy az *EE* sokszögbeosztás a végtelen finomítás esetében egyenlő lesz a *DD* körívvel, „mert ekkor az összes, egymás között egyenlő *EE* érintőknek az összege nem különbözik az egész *BP* ívtől, ill. az egymással egyenlő *DD* ívek összegétől, csak egy bármely adottnál kisebb mennyiséggel”.[252]

Csak mi ismerjük itt fel az érintősokszög beosztás „határértékét” a körívben, Pascalnál szó sincs a függvényfogalom által lehetővé tett, a limes-összefüggésben szereplő végtelenről. A Pascal végtelenje még az antik „kimeríthetetlen”. De a kimeríthetetlenséget a körülményes reductio ad absurdumra való hivatkozás helyett elvként mondja ki, s ezzel túllép a görög kimeríthetetlen-végtelen fogalmán a modern limes-végtelen felé. Ahhoz azonban, hogy a modern végtelennel összeejthető lenne, hiányzik belőle a konvergencia kritérium. Az a megállapítás hiányzik, hogy az egyre kisebb oldalhosszúságú érintősokszögek és a körív közötti különbségek természetes számok szerint rendezett sorában mindig találhatunk olyant, amelyiktől kezdve minden tag kisebb mint egy tetszőlegesen kicsiny ε, s hogy csak az ε-tól függ hanyadik lesz ez a különbség a természetes számok szerint elrendezett különbségek sorában.

Formulában: ha a $K_m = \left|(EE)_m - BP\right|$ különbségek $K_1, K_2, \ldots, K_m \ldots$ sorában minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik egy $N=N(\varepsilon)$ természetes szám úgy, hogy az n-ik különbség $K_n = \left|(EE)_n - BP\right| < \varepsilon$ hacsak $n > N$, akkor azt mondjuk, hogy a sorozat konvergens és határértéke BP; $\lim\limits_{n\to\infty} (EE)_n = BP$.

A mi számunkra ez az összefüggés definiálja a végtelent. A XVII. század azonban nem ismeri a határérték fogalmát,[253] és nem ismeri a függvény fogalmát sem úgy, ahogy azt ma értjük. De a végtelent, azt ismeri a XVII. század is, mint ahogy ismerték a görögök is. Azonban mind

[252] *Traité des sinus du qluart de cercle,* Éd. Pléiade 277.

[253] A végtelen sorok elméletének a kialakulása előtt nem célszerű határértékről beszélni, még abban az óvatosabb és módosított értelemben sem, ahogyan pl. Ugo Cassina teszi: *Il cocetto di limite in Luca Valerio e Pietro Mengoli*, Actes du Symposium International des sciences physiques et mathématiques dans la premiére moitié du XVIIe siècle. Pise–Vinci 16–18 Juin 1958. Paris 1960, 8–18.

a háromféle végtelen más és más. A XIX. század a függvényfogalom segítségével definiálta, mondhatnánk „skatulyába zárta” a végtelent. A görögök nem ismerték a függvényt, de valamire, ami bizonyos fokig helyettesítette ezt a matematika szívét jelentő fogalmat, nekik is szükségük volt. Ez volt az arány. De míg a függvény szinte természetéből következően kívánja magába zárni a zérust és a végtelent, az arány éppen ellenkezőleg, kiveti magából. Az arányelmélet számára a végtelen a nem-arány, az *alogos,* az irrationális. S ahol, mint pl. a körterület kiszámításánál nem lehet kiküszöbölni, ott megkerülik: azt bizonyítják, hogy a körterület soha nem meríthető ki semmiféle egyenes vonalak által határolt sokszöggel, bármilyen kicsire választjuk is a sokszögek oldalait. Ez a nem-kimeríthetőség azonban bizonyítható, s amit bizonyítani lehet, az van. Szabó Árpád vizsgálatai mutatták meg,[254] hogy a bizonyíthatóság kriteriuma milyen óriási jelentőségű volt a matematika kialakulása, szempontjából. S arra is ő hívta fel a figyelmet, hogy ez a kriterium a pontosan megadható és pontosan meg nem adható ellentétpárba alakulva még a Platon korabeli matematikai aranykorban is milyen nagy szerepet játszott a görög matematika fogalomalkotásában.[255]

A mi esetünkben ez a kriterium kétféle terület megkülönböztetésére vezetett. Vannak olyan területek, amik egyenes vonalak által határolt idomokkal kimeríthetők, s vannak olyanok, amik nem. Az előbbi területeket mindig pontosan át lehet alakítani négyzetté, utóbbiakat nem. Ezeket csak megközelíteni lehet, tetszés szerinti pontossággal. A görög matematika nagy hiányossága, hogy kitér ennek a megközelíthetőségnek a direkt, exakt definíciója elől, sohasem jut el a limes fogalom szilárd aritmetikai konstrukciójához. A görög matematika számára nincs határérték, a görög matematika számára csak „kimeríthetetlen” van. Ez a kimeríthetetlen, tartalmát illetően persze nagyon hasonlít a mi limes fogalmunkhoz, úgyannyira, hogy a modern és a görög matematikát egyaránt oly kitűnően ismerő és művelő B. L. van der Waerden azonosnak veszi a kettőt.[256] S ez így is van, ha a modern limes fogalom ismeretében interpretáljuk át a görög eljárást. De a görögök számára ott, ahol mi most jóldefi-

[254] Szabó Árpád: „Hogyan lett a matematika deduktív tudománnyá? I–II”. *Matematikai Lapok,* 8 (1957) 8–36, 232–247.

[255] Szabó, Á.: „Anfänge des euklidischen Axiomensystems.” *Archive for History of Exact Sciences,* 1 (1960) 37–106.

[256] Waerden, B. L. van der: *Erwachende Wissenschaft,* Basel und Stuttgart 1956., 306: Der moderne Limesbegriff ist in seiner vollen Schärfe darin vorhanden: Die einbeschriebenen Polygone nähern sich dem Kreis in dem präzisen Sinn, dass die Differenz kleiner gemacht werden kann als ein beliebig vorgegebenes Flächenstück. – Ugyanezzel a felfedezéssel Moritz Cantor még Wallist ajándékozta meg (Cantor II 901). Leghelyesebb talán, ha megtartjuk Cauchynak. A végtelen aritmetizációja – a határérték fogalma – a sorelmélet olyan fokú fejlettségét követeli meg, ami a XIX. század előtt nem található meg.

niált aritmetikai konstrukcióval dolgozunk, s pontok egymásbatolt végtelen soraival sűrítjük tele a teret, a görögök számára ott nem volt semmi. Ahol mi most egy korlátos halmaz egyetlen sűrűsödési pontját, a határértéket látjuk, ott a görögök egy általuk abszolútnak elismert érvényű, de *közvetett* bizonyítás, a reductio ad absurdum segítségével igazolják valaminek a létezését – adott esetben a körét –, de ezt a valamit nem tudják egy aritmetikai konstrukció segítségével megragadni.

A görög gondolkozás hanyatlásakor, a késő-hellenisztikus korban, amikor a matematika újra épp olyan szorosan összefonódik metafizikai megfontolásokkal, mint a görög gondolkozás kezdetekor,[257] a kör és a gömb esetében ez a bizonyíthatóság és mégis konkrétan meg-nem-ragadhatóság speciális metafizikai értelmet nyer. A körterület, ami nem mérhető és mégis van, mert értelemmel megragadható, magasabb fokú létezést jelent, mint az érzékszervekkel megragadható négyzeté. A kör és a gömb a neoplatonizmusban a magasabb fokú létezés szimbóluma lesz. Azonos az Egy-gyel, ami megint nem más, mint maga a létező, az Isten.

A keresztény gondolkozás ezt a kört kapja örökségül, a kört, amelyik magába zárja az egyet és a végtelent. A keresztény középkor egyik utolsó nagy gondolkozója, Nicolaus Cusanus foglalja talán össze legfrappánsabban ezt a szétágazó, évezredes kommentár-irodalmat: a végtelen a *coincidentia oppositorum* realizációja, ahol az Egyik és a Másik összeesnek, a végtelen egyenes kör, de egyúttal háromszög is, négyszög, ötszög, sokszög.[258] Kör, amelyiknek a középpontja mindenütt van, s kerülete nincsen sehol. A végtelennek csak *a létezését* ismerjük, a természetét nem.

Nous connaissons qu'il y a un infini et ignorons sa nature ... – írja Pascal a híres *Infini. Rien* fragmentumban.[259] A végtelen világmindenség *est une sphère infinie dont le centre est partout, la circonférence nulle part.*[260] Még a szavak is ugyanazok, mint Cusanusnál, akit egyébként Pascal valószínűleg nem ismert első kézből.[261] De erre nem is volt szüksége. Mióta

[257] Vö. Joja, Athanase: „Éléatisme et logique formelle" – *Études d'Historie et de Philosophie des Sciences*. Éditions de l'Académie de la République Populaire Roumaine 1962., 243–287, 287: Dans la conception des Éléates, PHYSIS s'est transformée en METAPHYSIS. Mais tout cela ne fut pas l'avanture personnelle d'un certain Parménide fils d'un certain Pyres, mais une avanture de la pensée humaine. Et point une simple aventure, mais une étape, une halte nécessaire.

[258] Tóth I. hívta fel rá a figyelmet, hogy ezzel a definícióval túllép a görög fogalmon az *aktuális végtelen* felé (I. Tóth: „La géométrie non euclidienne dans le développement de la pensée." – *Études d'Historie des Philosophie des Sciences* 53–70, 68), ami bizonyos fokig könnyíti az „exhaustios végtelen" és az „indivisibilia végtelen" közelítését.

[259] Pascal, Blaise: *Pensées sur la Religion et sur quelques autres sujets.* Avantpropos et notes de Louis Lafuma. Édition Delmas I–II Paris 1947, I C, 188.

[260] Uo. I 14°. 203.

[261] Mesnard szerint a hasonlóságok valószínűleg Gassendi közvetítésével magyarázhatók (P, CR. 380), de a *Pensées* végtelen fogalmához nagyon hasonló gondolatok találhatók,

M. de Gandillac kimutatta,[262] hogy a *Pensées* végtelenre vonatkozó kitételei milyen ősi, elterjedt és sokszor banalitásszámba menő megfogalmazásokon alapulnak, a filozófiatörténészek is egyre nagyobb súlyt helyeznek az irodalomtörténész G. Lanson figyelmeztetésére: Pascalnál csillogó stílus sokszor sejtet eredetit ott is, ahol a kor közismert banalitásait ismétli el.[263] A *Pensées*-ban az indivisibiliamatematika végtelenje – Le fini s'anéantit en présence de l'infini et devient un pur néant[264] – mellett megjelenik a görög-neoplatonikus végtelen is, a *Pensées* végtelen fogalmán ugyanazt a keverést látjuk, mint az 1658-as év matematikai termésében, aminek a kedvéért egy alkalmi fogfájás következtében abbahagyta volna a *Pensées*-n való munkát.

S ha hinni lehet a *Pensées* kronológiáját és eredeti elrendezését illetően oly nagy nehézségekkel küzdő Pascal-filológiának, akkor a matematikai szempontból centrális jelentőségű *Infini. Rien* töredék a *Pensées* genezise és felépítése szempontjából is központi jelentőségű, s lehet, hogy az egész nagy apologetikus mű alapötletét jelentené.[265] S akkor Amos Dettonville[266] és Salamon de Tultie[267] megmaradhat ugyanaz a Blaise Pascal. A *Roulette-levelek* és a *Pensées* ugyanazon a végtelen fogalmon épülnek.

A görögök megkerülték a végtelent, mint „kimeríthetetlent", a modern matematika befogta a limes fogalommal. Pascal a görögök által nyíltan feltárt „kimeríthetetlenséget" elrejtette az indivisibilia geometriából átvett elnevezések és néhol fogalmak mögé. Matematikai munkája leg-

mint Jean Orcibal kimutatta, Charonnál is („Le fragment infini-rien et ses sources" P, CR. 159–195).

262 Gandillac, M. de: „Pascal et le silence du monde". – P, CR. 342–385.

263 Brunet, Georges: *Un prétendu traité de Pascal. Le Discours sur les passions de l'amour.* Paris 1959, 47–48.

264 „A végleges megsemmisül a végtelen jelenlétében és puszta semmivé válik" – *Pensées,* Éd. Lafuma I C, 188.

265 Vö. Brunet, Georges: *Le Pari de Pascal,* Paris 1956, 47–48 és 50–51.: Or le Pari porte sur l'existance de Dieu, et a pour point de départ cette affirmation que „nous sommes incapables de connaitre ni ce qu'il est ni s'il est..." S így nem érvényes az Isten végtelenségére alapozó Istenbizonyíték, mert a végtelen létezését tudjuk." Nous connaissons l'existance de l'infini et ignorons sa nature, parce qu'il a étendue comme nous, mais non pas des bornes comme nous. Mais nous ne connaissons ni l'existence ni la nature de Diou, parce qu'il n'a ni étendue ni bornes." *(Pensées* éd. Lafuma I C, 188). Brunet szerint a Pari – az Isten létére történő „fogadáson" alapuló Istenbizonyíték – az infini-rien fragmentumból nő ki: A l'origine on trouve un projet de réfutation de la preuve de l'existence de Dieu fondée sur l'idée de l'infini (im. 118).

266 *Louis de Montalte*ból*,* amely név alatt Pascal a *Vidéki leveleket* kiadta, készített anagramma, amely alatt a *Roulette-levelek* és általában az 1658-as év matematikai termése megjelent.

267 *Louis de Montalte*ból, készített másik anagramma, amelyen Pascal a nagy apologetikus művét szándékozott publikálni.

végén, a *Dimension des lignes courbes*-ban szétválasztja az indivisibilia fasszádtól a görög lényeget, s ehhez a művéhez szinte törés nélkül csatlakozhatna Cauchy munkája. De Pascal itt is a XVII. század keretei között marad, a „kimeríthetetlenség” nála nem axiomatikus jellegű, a valós számtest jólrendezhetőségén alapuló fogás, mint nálunk, a „kimeríthetetlenség” nála metafizikai realitás. Ugyanúgy, mint még Cusanus számára, ugyanúgy, mint a kortársgondolkozás számára általában.

Ez elől a végtelen elől menekült Descartes az algebrai egyenletek pontos, tiszta világába. A behelyettesíthető világába. Amiből a függvények és a modern matematika formavilága nő ki, aminek a segítségével a XIX. század definiálja majd a végtelent.

VÉGTELEN SOROK ÉS FLUXIOK[358]

(A newtoni infinitézimális analízis kialakulásához)

Előző közleményünkben[359] röviden vázoltuk a XX. századi matematika-történet-írás állásfoglalását Newton infinitézimális analízisével kapcsolatban. Láttuk, hogy többnyire a Newton–Leibniz vita és a fizika-matematika ellentétpár felől közelednek a newtoni infinitézimális számítás fogalmainak történeti tisztázásához. Ez annyit jelent, hogy a differenciál- és integrálszámítás, a differenciálgeometria, a limesz-matematika, a sorelmélet és függvényelmélet felől érkeznek Newtonhoz. Olyan matematikai diszciplínák felől, amelyek a Leibnizi jelölési mód és algoritmus kifejlesztéseként és hiányosságainak fokozatos kiküszöbölésével nőttek naggyá. Ezzel párhuzamosan a matematikai gondolkozás fokozódó szigorodása, amelyik egyre pontosabb válaszfalat igyekezett vonni a matematika és annak fizikai alkalmazásai közé, eleve bizalmatlanul tekintett Newton fizikai fogalmakkal átszőtt infinitézimális meggondolásaira.

A matematikatörténészek, fordított Antoniusként dicsérni jönnek Newtont és eltemetik. Talán Jean Pelseneer fejezte ki legvilágosabban és legőszintébben ennek az interpretációnak a lényegét. Szerinte[360] – és ismételjük, hogy ebben a tudománytörténészek legnagyobb részének ugyanez az álláspontja – Newton érdeklődése sohasem volt igazán matematikai. Az infinitézimális módszert csupán új eredmények elérésére alkalmas eljárásnak tekintette. Sohasem tudott áttörni a modern matematikai felfogáshoz, mindvégig a görög matematika fogalmi körében maradt, az egyszerű, szép, harmonikus, ahogyan ő nevezte „simple & elegant" bűvkörében. Nem jutott el, jóllehet abban a korban élt, amit a *synthése algebrico-logique* korának nevez a matematika-történetírás, a matematika algebrai felfogásáig. Nem tudott csatlakozni ahhoz a vonalhoz, amelyik

358 Előzménye: Vekerdi László: Végtelen sorok és fluxiok. (A newtoni infinitézimális analízis kialakulása, II.) = Magyar Tudományos Akadémia Matematikai és Fizikai Osztályának Közleményei 14 (1964) No. 4. pp. 423–441.

359 Lásd kötetünkben Vekerdi László: 'A newtoni infinitézimális analízis kialakulása a XX. századi matematikatörténet-írás tükrében' c. tanulmányát!

360 Pelseneer, J.: Une opinion inedite de Newton sur "l'Analyse des Anciens" à propos de l'Analysis geometrica de Hugo de Omerique, *Isis,* 14, 163–165, 1930.

szakított a görög gondolkozásmóddal: Descartes, Fermat, Leibniz matematikájához. Korszakalkotó nagy műve a *Principia* éppen azért nem hatott a maga korában, mert a nehézkes, elavult görög geometriai módszereket alkalmazta benne. A *Principia* forradalmi fizikai gondolatait retrográd matematikai módszerekbe öltöztette és ez a tény különös kettősségre vezetett az angol tudományos élet fejlődésében. Newton fizikai kiválósága miatt szerzett tekintélye bizonyos fokig kötelezővé tette Angliában matematikai módszereinek az alkalmazását is, és ez a tény csaknem egy évszázadra visszavetette az angol matematikát a Leibnizi módszereket alkalmazó kontinenshez képest. Csak a XIX. század elején kezdik az angol matematikusok *to accept the „de-ism" of Leibniz in place of the „dot-age" of Newton*[361] – írja szellemesen Newton matematikai műveinek kitűnő ismerője és kiadója, J. F. Scott.

Leibniz szerencsés jelölése – Newton szerencsétlen pontjai, Leibniz bátor előretörése az infinitézimális analízis geometriai alkalmazásainak területén Newton régi, steril görög geometriai módszerekhez való ragaszkodása, Leibniz nagyobb érzéke az algebrai algoritmus iránt, Leibniz nagyobb szintetiko-kombinatorikus képessége, ez az állandó és csaknem elkerülhetetlen összehasonlítgatás Newton és Leibniz infinitézimális matematikája között szükségszerűen vezetett J. E. Hofmann kategorikus megállapításához: „A későbarokk matematikai csúcsteljesítménye a kalkulus felfedezése. Ez G. W. Leibniz, egy lipcsei professzor fiának a kizárólagos érdeme."[362]

Másfelől rámutatott a modern matematika-történetírás a Newtoni infinitézimális matematika elődeinek a hosszú sorára. Newton mestere, Isaac Barrow „fedezte fel" az „integrálás" és „differenciálás" inverz jellegét. Mercator és James Gregory fedezték fel a „transzcendens függvények" sorbafejtését. Fermat fedezte fel, hogy a „differenciál-hányados" a differenciahányados „határértékeként" értelmezendő. Gregorius a Santo Vincentio fedezte fel az infinitézimális analízis szempontjából annyira fontos összefüggést a logaritmus és az egyenlő szárú hiperbola területe között, Descartes a „differenciálegyenleteket", Galilei a fizikai problémából adódó „differenciálegyenlet integrálását", és így tovább.[363]

361 Scott, J. F.: *A history of mathematics,* London, 1958, 162: szójáték, lényegében ezt jelenti: a newtoni pontoskodást felváltotta a leibnizi deizmus.

362 Hofmann, J. E.: *Geschichte der Mathematik, 2. Bd.,* Berlin, 1957, 62.

363 Lényegében már Zeuthen így látta ezt (Zeuthen, H. G.: *Geschichte der Mathematik im XVI. und XVII. Jahrhundert,* Leipzig, 1903) s az infinitézimális számítás történetének újabb monográfusai, Toeplitz (Toeplitz, O.: *Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung,* Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1949) és Boyer (Boyer, C. B.: *The history of the calculus and its conceptual development,* New York 1949) szintén ezt a felfogást követik. Utóbbi szerint pl. a Newton és Leibniz között kitört prioritásharc okát elsősorban abban kell keresni, hogy azonos elődök munkáját folytatják, ill. veszik át.

Amit Newton matematikai munkájában újnak és meglepőnek tartották, az a modern matematika-történetírás szerint elődeitől származik s ezt sem ő fejleszti tovább és juttatja diadalra, hanem Leibniz. Mit fedezett fel Newton, aki – minden matematika-történetírás ellenére – mégiscsak a modern infinitézimális matematika egyik legnagyobb jelentőségű megteremtője volt? Mit tudott a matematikából Newton?

MODERN FOGALMAK ÉS A XVII. SZÁZADI MATEMATIKA

Lássuk először mit nem tudott.

1. Nem tudta, hogy mi a függvény. Sem ő, sem kortársai nem ismerték ezt az egyszerű, számunkra oly mindennapos és nélkülözhetetlen fogalmat.[364] Nem tudta, mit jelent egy adott számhalmaz minden egyes *x* eleméhez egy másik halmaz egy vagy több *y* elemét rendelni. Nem a hozzárendelés fogalma okozta a nehézséget. A Newton korabeli matematika kiterjedten dolgozott táblázatokban kifejezett összefüggésekkel. Newton maga jelentős helyet foglal el az interpolációs módszerek fejlesztésében. Az interpoláció pedig nem egyéb, mint új számértékek adott számértékekhez bizonyos szabályok szerint történő hozzárendelése. Azt is tudta Newton, hogy az algebrai egyenletek adott számokhoz rendelnek hozzá más számokat, de sohasem jutott eszébe *általánosságban* egy adott halmaz minden egyes eleméhez egy másik halmaz egy vagy több elemét ren-

[364] A függvényfogalom XVII. századi előtörténetét jól ismerteti Whiteside, D. Th: „Patterns of Mathematical thought in the later seventeenth century”, *Archive for History of Exact Sciences,* 1, 179–388, 1960. Az infinitézimális számítás fontos szerepét a függvényfogalom kialakulásában Boutroux ismerte fel (Boutroux, P.: *L'idéal scientifigue des mathématiciens,* Paris, [2]1955, 118–119.), szerinte viszont Newton semmi egyebet nem tett, mint létrehozta a „végtelen algebráját”, a véges algebrának a tetszőleges pontosság figyelembevételével történő folytatását (i. m. 129.). Boutroux végeredményben az Euler-féle függvényfogalmat vetíti vissza a XVII. századba, az algebrai és nem-algebrai *függvények* megkülönböztetését keresi ott, ahol nem erről van szó, hanem végtelen „egyenletekről” és infinitézimális számításról. Vö. Szőkefalvi-Nagy Béla: *Valós függvények és függvénysorok,* Budapest, 1954, 11.: „A valós változós függvények elmélete a differentiál- és integrálszámításnak Newton és Leibniz által a XVII. században történt felfedezésével kezdődött. E számítások tárgyának: a függvénynek a fogalma együtt fejlődött az elmélettel. Descartes a század első felében a 'geometriától' még minden olyan görbét távol kívánt tartani, amely nem definiálható algebrai műveletekkel. A differentiál- és integrálszámításból megszülető matematikai analízisben azonban rendre polgárjogot nyertek az algebraiakon kívül más egyszerű függvények is, mint a logaritmus, exponenciális, trigonometrikus és arcus függvények, s ezekkel együtt minden olyan függvény is, amely belőlük ered akár közvetlenül, akár az infinitézimális számítás eszközeivel: kvadratúrákkal vagy végtelen sorok összegeként. Legalábbis ezeket tekintette pl. Euler igazi függvényeknek”.

delni hozzá. Newton nem általánosítja a hozzárendelés fogalmát, s így ahol alkalmazza is ott sem szabad ebben „függvényt” látnunk. Nem szabad még az Euler-féle függvényfogalom értelmében sem, mert az Euler-féle függvényfogalom már a modern függvény szűk körben érvényes intuitív megsejtését jelenti.

2. Nem ismerte Newton a határérték fogalmát sem.[365] Több helyen beszél ugyan „eltűnő” és „megszülető” mennyiségekről, sőt ír – különösen levelezésében – minden adott értéknél kisebb eltéréssel történő megközelítésről is és kísérletet tesz a végtelen sorral nyert megközelítés esetében az elhanyagolás folytán előálló hiba megbecsülésére, de a határérték fogalmát, ami a konvergencia kritériumokkal körülbástyázottan a modern infinitézimális analízis lelkét jelenti, a határérték fogalmát nem ismeri. Újból nem azt akarjuk ezzel mondani, hogy nem *dolgozik* vele. Hiszen számos olyan feladatot old meg, amit mi a limesz-fogalom segítségével végzünk el. Szinte boszorkányos ügyességgel dolgozik végtelen sorokkal. Nyoma sincs nála Cavalieri bizonytalanságának vagy Wallis próbálgatásainak. Magabiztosan jár azon a területen, ahol előtte sötétben tapogatóztak, vagy – sokszor még James Gregory is – klasszikus módszerekkel megkerülve a problémát, indirekt bizonyítást alkalmaztak. De a határérték és a konvergencia fogalmát, azt, hogy „bármely kicsiny ε számhoz rendelhető egy N küszöbszám úgy...” – azt *nem ismeri.*

3. Nem ismerte a „folytonosság” fogalmát. Fölöslegesnek tűnik talán külön kiemelni ezt; mert mi a folytonosságot a függvényeknél vezetjük be a limesz-fogalom segítségével, de a folytonosságnak a mi mai felfogásunk szerint centrális jelentősége van a differenciálszámítás elméletében és így nem árt szem előtt, tartani, hogy ennek az elméletnek egyik megteremtője, Newton nem ismerte azt.

4. Ugyanezen okból jegyezzük meg, hogy nem ismerte a monotónia fogalmát sem.

5. Nem ismerte, még sík esetében sem, az analitikus geometriát,[366] helyesebben azt, amit ma ez alatt a kifejezés alatt értünk: a sík pontjaihoz rendelt számpárok közötti kapcsolatok vizsgálatát. Pl. az ellipszis számára nem a sík azon x, y pontjainak a helye, amelyek kielégítenek egy bizo-

[365] Lásd kötetünkben Vekerdi László: ’Infinitézimális módszerek Pascal matematikájában’ c. tanulmányát!

[366] A matematika-történetírás régen megcáfolta azt a makacsul tovább élő tévhitet, hogy Descartes „fedezte fel” az analitikus geometriát. Jól tudjuk, hogy nem ismerte a „Descartes-féle” koordinátarendszert sem. Vö. Boyer, C. B.: *History of analytic geometry,* New York. 1956.

nyos – a koordinátarendszertől függő másodfokú egyenletet. Newtonnak az ellipszis koordinátarendszertől független geometriai fogalom, kis és nagy átmérővel, fókuszokkal, érintőkkel és azoknak megfelelő átmérőkkel és ezek között a vonalak között fennálló arányokkal. Számára a geometria adekvát matematikai módszerét az arányok jelentették, nem az egyenletek. Newton sokat dolgozott egyenletekkel, de azt tartotta, hogy a két tudományt, geometriát és aritmetikát nem szabad összezavarni. Milyen gondosan ügyeltek a görögök ennek a kettőnek az elkülönítésére! S milyen sok bajt okoznak a modernek a kettő összekeverésével: elveszik a geometria „egyszerűségét és eleganciáját”.

Számunkra, akik sokszor napokig töprengünk a *Principia* egy-egy „egyszerű” ellipszis-tételén, amit modern analitikus geometriai módszerekkel percek alatt megértünk, különösnek tűnhet Newton ízlése. Azonban ha a Newtoni matematikát kívánjuk megérteni, alkalmazkodni kell hozzá. A függvény, a határérték, a folytonosság, a monotonia fogalmai és a koordináta geometria nélkül kell közelednünk a Newtoni analízishez.

A XVII. SZÁZADI ANGOL MATEMATIKA NUMERIKUS TRADÍCIÓI

A XVII. századi matematika egyik legfontosabb tette az algebrai egyenletekkel kifejezhető, Descartes által „geometrikus”-nak nevezett (algebrai) és az így ki nem fejezhető „mechanikus”-nak nevezett (transzcendens) problémák közötti különbségtétel s utóbbiak lépésről lépésre történő tisztázása volt. Az angol matematika azonban sohasem tett olyan éles különbséget geometrikus és mechanikus problémák között, mint a Cartesianus. Sőt, eleinte meg sem értik a mély megkülönböztetés lényegét.

William Oughtred, I. Károly korának legnagyobb matematikusa írta pl. egy mechanikus segédeszközökkel megoldható problémával kapcsolatban: „Vonalzók és körzők nem mechanikusak-e és mégis nem minden geometrikus problémát ezekkel oldunk meg? És nem használunk-e kúpszeleteket a maguk megfelelő műszereivel és maradunk mégis a nem-mechanikus problémák körében?”[367] A mechanikus problémákat épp úgy meg kell oldani, mint a geometrikusakat, a különbség csak az, hogy előbbiekben általában nem lehet teljes pontossággal számítani, meg kell elégedni megközelítésekkel. Ilyen megközelítő számításokba ütközünk mindenütt, ahol pl. a kör kerületének, ívhosszának vagy szögeinek a mérése szükséges: az egész trigonometriában. A trigonometrikus számítások a

[367] *Correspondence of scientific men of the seventeenth century. Ed. by* Stephen Peter Rigaud, 2 vols., Oxford, 1841. (Továbbiakban *Corr. Rigaud*) *I, 22,* Oughtred to Price Junii 6°. 1642, 60–63, 61.

XVI. és XVII. század során igen nagy jelentőségűekké váltak a geográfia és a hajózás fejlődése miatt, azért megkönnyítésükre nagy táblázatokat állítottak össze, s a sok számjegyű, megközelítő számokkal oly nehéz szorzás megkerülésére vezették be a logaritmust. Oughtred főműve, a *Clavis Mathematica* ezeknek a trigonometriai megközelítő számításoknak az ismertetését tartalmazza. Az angol matematika a gyakorlati számolás felől indulva nem látta olyan nagynak a különbséget geometriai és mechanikai problémák között, mint az elméleti megoldásokra törekvő Cartesianus. Angliában erős számolótradíció él a XVII. század elején, amely a kiszámíthatóságra helyezi a súlyt a matematikai problémákban, nem az elvi különbségekre.

Descartes geometriájához képest szinte gyerekesen hat ez a számolós angol matematika. Íme idézet egy egykorú levélből: „*A, E,* és *I* így okoskodtak: *A* azt mondotta, hogy ha 480 fonttal több pénzem lenne mint amennyi van, akkor annyi lenne, mint amennyi *E*-nek és *I*-nek van együtt; *E* azt mondotta: 480 fontot adva a pénzemhez, kétszer annyi lenne, mint *A* és *I*-nek; *I* azt mondotta: 480 fontot adva a pénzemhez, háromszor annyim lenne mint *A* és *E*-nek együtt...” Ezt és két hasonló kérdést Oughtredhez, kora legnagyobb angol matematikusához intézte a levélíró és hozzáfűzte: „Uram, tudom, hogy ön meg tud felelni a kérdésekre, vagy ha nem, úgy senki emberfia; mert nincs élő ember, aki többet tudna matematikából, mint ön...”[368]

Egyenletek felállítása, transzformálása valamilyen ismert alakra, a gyökök – szükség esetén táblázatok segítségével történő – pontos vagy közelítő kiszámítása a XVII. század közepén az angol matematika centrális problémaköre. Egyenletek és sohasem függvények. Ismeretlenekről van bennük szó, nem változókról, ismeretlenekről, amiket ki kell számolni vagy egyszerű aritmetikai műveletek, vagy ha ez nem lehetséges, táblázatok segítségével. Ehhez az egyenleteket különféle ügyeskedésekkel már ismert formára kell hozni, transzformálni kell. Az algebra ebben a felfogásban közönséges számolás, csupán a számok helyett betűkkel dolgozik. Amint Newton alapvető algebrai művében, az *Arithmetica universalis*-ban megfogalmazza, csupán annyiban különbözik a számokkal történő számolástól, hogy meghatározatlan jelekkel dolgozik az adott számok helyett.[369] Az egyenletekben az ismeretlent vagy ismeretleneket meghatározott számok helyett ezekkel az indefinit jelekkel kell kapcsolatba hozni.

368 *Corr. Rigaud I, 35,* R. Shuttleworth to Oughtred 22. Jan. 1656, 88–90.

369 Arithmetica universalis sive de compositione et resolutione arithmetica auctore Is. Newton, Eg. Aur. Cum commentario Johannis Castillionei Amstelodami 1761, 1. – Az Arithmetica universalis orosz fordítását kitűnő jegyzetekkel és kísérő tanulmánnyal adta ki A. P. Juskevics. (Iszaak N'juton,Vszeobscsaja arifmetika ili i kniga ob arifmeticseszkih szinteze i analize. Perevod, sztat'ja i kommentarii A. P. Juskevicsa. Moszkva 1948.) A következőkben ezt a két kiadást használjuk és Castill, ill. Juskevics jelzéssel idézzük.

Az egyenletek megoldása az ismeretleneknek ezen meghatározatlan jelek általi kifejezéséből áll s éppen ezért, mert jelekkel dolgozik, a megoldás általános érvényű: az algebra ilyen értelemben véve univerzális tudomány, amelyik tételekre vezet.[370] Ezek a tételek az egyenletek megoldására vonatkoznak. Az algebra Newton felfogásában az algebrai egyenletek megoldásának a tudományát jelenti. Olyan problémák oldhatók meg a segítségével, amiket egyenletekbe lehet önteni. De nem minden probléma fordítható le algebrai nyelvre már a geometriában sem, még kevésbé a mechanikában és a csillagászatban. Az algebra Newton szemében korlátolt tudomány. Csak előkészítője egy általánosabb, minden – vagy legalábbis minden *fontos* – probléma kezelésére alkalmas tudománynak, az analízisnek. A probléma megoldása azonban az analízisben is éppen úgy, mint az algebrában, *a kiszámítás.* Newton művei, még a legelvontabb matematikai munkái is, számolási szkémákkal vannak tele. Newton matematikájának egyik alapvető vonása a számolási könnyedség, a számolás szkematizálására való törekvés. Ebben teljesen az angol matematikai tradíció folytatója. Descartes univerzális módszert keresett a matematikában, Newton számolási szkémákát.

ALGEBRA ÉS INFINITÉZIMÁLIS ANALÍZIS

Az algebrát Newton az infinitézimális analízis bevezetésének tekintette. Ebből a szempontból nagyon fontos az *Arithmetica universalis* egyik fejezete,[371] amelyben Newton az egyenletek „határainak” (limites) a kiszámítását tárgyalja. Egy egyenlet határain azt a két számot értették, amelyek közé az egyenlet gyökei esnek. Newton úgy jár el a megkeresésükben, hogy lépésenként „redukálja” az egyenletet addig, amíg az az ismeretlent már csak első hatványon tartalmazza. Az egyenletek redukált sorába egymásután az 1, 2, ..., ill. –1, –2, ... értékeket helyettesíti be. Az a szám, amelynek a behelyettesítésére a redukált egyenletek mindegyike azonos előjelű eredményt ad a határ, ennél nincs az egyenletnek nagyobb pozitív vagy negatív gyöke.

Az eljárás lelke, a redukció nem Newton felfedezése. A holland Cartesianusok, elsősorban J. Hudde dolgozták ki. Az egyenletek redukciója a XVII. század hatvanas éveiben a matematikai kutatás egyik centrális kérdése volt. „Amit ön az algebra nagy kívánalmának tart – írja 1670-ben James Gregory Collinsnak – és Slusiustól vagy Ricciotól várja a megoldását, azt én könnyen megoldom (megbízható módon) általános érvénnyel így: legyen

370 *Juskevics* ... 7.
371 Caput IV.

$$x^5 - ax^4 - b^2x^3 + c^3x^2 - d^4x = N^5,$$

szorozzuk meg minden tagját saját kitevőjével, az így előálló egyenlet

$$5x^5 - 4ax^4 - 3b^2x^3 + 2c^3x^2 - d^4x = 0,$$

vagy

$$5x^4 - 4ax^3 - 3b^2x^2 + 2c^3x - d^4 = 0,$$

amely második egyenletnek bármely gyökét behelyettesítve az első egyenletbe x helyébe, az eredő mennyiség az az érték, amelyen túl (ha N^5-t nagyobbnak vesszük, mint az eredő mennyiség) az első egyenlet két gyökének lehetséges voltát veszíti el...”[372] A bizonyítást nem közli, az „túl fáradságos” – írja – „és felteszem, hogy kipróbálhatja anélkül is”[373] – fűzi hozzá.

A XVII. században nagy divat volt formulák közlése azok bizonyítása nélkül. Kézről kézre jártak a nagy matematikusok képletei és eljárásai, számpéldák tömegére alkalmazták matematikus és amateur tisztelőik – a kettő között a XVII. században nem volt olyan nagy szakadék, mint ma – s éppen ezek a példák okozták, hogy a műveltek kis köre lassan szinte átitatódott – ha sokszor csak felületesen is – matematikával.

A XVII. század matematikájában nagyon fontos szerepet játszottak az egyenletek, s a Hudde-féle módszertől azok néhány fontos tulajdonságának a megismerését várták. Elsősorban pl. azt, hogy milyen szélsőértékekkel rendelkezik egy adott egyenlet? Gregory 1672-ben hosszú levélben[374] magyarázta meg Collinsnak, hogyan kell használni a redukciós módszert az egyenletek maximum-minimumának a meghatározására. Az egyenletnek ott van szélsőértéke, ahol azt a redukált egyenlet gyökei mutatják. A maximum, ill. a minimum értékét pedig úgy kapjuk meg, hogy a redukált egyenlet gyökeit behelyettesítjük az eredeti egyenletbe.

Ez az egyszerű szabály, amit ma minden első éves matematikus azonnal helyére tesz, a XVII. század legnagyobb matematikusainak okozott súlyos fejtörőt. Tudták, hogy a szabály valamiképpen összefügg a görbéhez vont érintő meghatározásával. Tudták, hogy a redukált egyenletből a görbe sok más fontos tulajdonságára is lehet következtetni a szélsőértéken kívül. Pl. tudták azt, hogyha adva van két görbe metszését kifejező egyenlet, akkor a két görbe metszéspontjainak megfelelő összeeső gyököket a Hudde-féle redukcióval lehet meghatározni. Nem hiába nevezte Collins az egyenletek redukcióját az „algebra nagy desideratumának”.

Maga Newton már 1664-ben kimutatta egy megfelelőképpen felállított egyenlet Hudde-féle redukciójának a segítségével, hogy a kvadratúra

[372] *The Correspondence of Isaac Newton* (továbbiakban *Corr.)* Vol. I. 1661–1675. *Ed. by* H. W. Turnbull, Cambridge, 1959, 20, Gregory to Collins 23 Nov. 1670, 45–49, 45.

[373] Uo. 46.

[374] *Corr. Rigaud* II, 206, J. Gregory to Collins 14 Febr. 1672, 232–237.

és érintőszerkesztés összetartozó műveletek, sőt, ismerte már az összetartozás jellegét is: egy adott görbéhez érintőt szerkeszteni annyit jelent, mint meghatározni egy másik, alkalmasan felvett görbe alatti területet és megfordítva.[375]

Később ez a tétel lett az infinitézimális számítás ún. „fundamentalis tétele”, s e miatt a tétel miatt lett Barrow – aki hat évvel Newton kézirata után feltehetően először közölte azt nyomtatásban – az infinitézimális számítás egyik „felfedezője”.

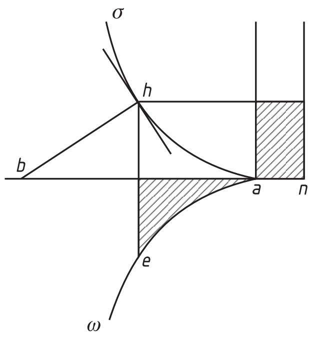
Azonban a XVII. század közepén, amikor nem ismerték a „primitív függvény” és a „derivált függvény” fogalmát – hiszen nem ismerték még a „függvény” fogalmát sem – akkor ennek a tételnek nem tulajdonítottak olyan nagy jelentőséget, mint ma. Az egyenletek redukciójának, annak igen. *Az* volt a „nagy desideratum” – ahogy Collins nevezi – nem a „Fundamentalsatz”. A fundamentális tétel csak azután vált az infinitézimális számítás alaptételévé, miután kezdtek függvényekben gondolkozni a matematikusok, s a tétel csak számukra mondja majd a „primitív függvény” és a „derivált függvény” inverz voltát. A végeredmény ugyanaz, de a sorrend különböző, s történeti szempontból ez nem közömbös. Mi a függvény felől haladunk a differenciálás és integrálás művelete felé, a fejlődés útja azonban fordított volt. Előbb tudtak differenciálni és integrálni, mint azt megmondani, hogy mi a „függvény”. A függvény fogalom megszületéséhez az egyik legfontosabb impulzust éppen az infinitézimális módszer kialakulása és gyors fejlődése szolgáltatta. A XVII. század nem függvényekben, hanem *egyenletekben* gondolkozott. Véges (algebrai) vagy végtelen sok tagú (transzcendens) egyenletekben, s az egyenletek tették a XVII. század matematikusai számára lehetővé a kvadratúra és az érintőszerkesztés közötti összefüggés definiálását.

„MÓDSZER KVADRÁLHATÓ GÖRBE VONALAK KVADRÁLÁSÁRA”

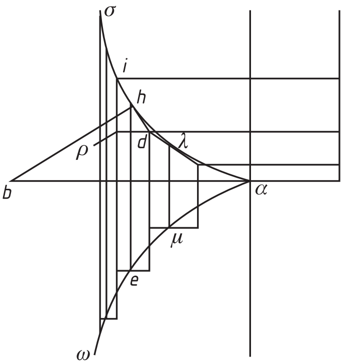
Az elv egyszerű: ha adva van két görbe úgy, hogy az egyik érintőjének az adatai határozzák meg a másik görbe alatti területet, akkor ez a terület mérhető, kvadrálható. Az érintő adatainak a meghatározása Descartes nyomán történt. Newton is Descartes módszerét alkalmazza 1664-es, az infinitézimális számítás „alaptételét” kimondó kéziratában: egy körrel metszi a görbét, amihez érintőt kell vonni, s azután egybeejti a két metszéspontot. Ekkor a kör és így ebben a pontban vont érintője is érinti a görbét. A metszéspontok egybeesését a kör és a görbe metszését kifejező egyenlet két gyökének az egybeesése adja meg. Ezáltal megkapja az érin-

[375] *Corr.* II, 190, A mannuscript by Newton (?1664), 164–167.

tőre merőleges egyenesnek, az érintő normálisának az adatait. Így megszerkesztve egy *σha* görbe minden *h* pontjában az érintőt, s az érintőt definiáló *bgh* normális háromszög $\frac{bg}{gh}$ oldalarányának tetszőleges *an*-szerését véve egy másik *aeω* görbe $ge = an\frac{bg}{gh}$ ordinátáinak, ez alatt a másik görbe alatti terület egyenlő lesz a tetszőleges *an* távolság és a görbe *h* pontjához tartózó *gh* ordináta szorzatával.



48. ábra



49. ábra

A bizonyítás nagyon egyszerű: Newton az érintősokszöggel helyettesíti a *σha* görbét és az érintősokszög *d, i, ...* csúcsaiból az *ab* egyenesre bocsátott merőlegesekkel kis téglalapokra osztja be az *aeω* görbe alatti területet, s azután a sokszög oldalait egyre kisebbnek véve, a téglalapbeosztás összege egyre jobban megközelíti az *aeω* görbe alatti terület értékét. A sokszög *h* pontjában – a *σha* görbe egy tetszőlegesen felvett pontja – azonban a *dρi* háromszögből megadott $\frac{i\rho}{\rho d}$ érintőarány a beosztás finomítása közben is állandó marad. Ugyanis bármely határon túl csökken is az érintősokszög *di* oldala, a *dρi* háromszög *dρ* és *iρ* oldalai mindig merőlegesek maradnak a *bgh* háromszög *gh* és *bg* oldalaira s így az érintő hajlását megadó $\frac{i\rho}{\rho d}$ arány mindig azonos marad s egyenlő a *bgh* normális háromszög állandó $\frac{bg}{gh}$ oldalarányával.

Mindezt nem mondja el ilyen részletesen Newton. Az eljárás, az érintő és a normális háromszögeknek ez a viselkedése, valamint a téglalapbeosztás finomításával történő területmeghatározás a XVII. század közepén már közismert. Közismert a hatvanas években az érintőszerkesztés és a kvadratúra közötti ilyen összefüggés is. A kor matematikusainak a leveleiben nagyon gyakran fordulnak elő ezt az összefüggést jelölő diagramok sokszor minden utalás nélkül. James Gregory 1668-ban nyomtatásban is közölte. Az elv már egy évtizeddel azelőtt megjelent egyébként nyomtatásban Franciaországban, Pascal alkalmazta a szinuszgörbe alatti terület meghatározására.[376]

Mint ismeretes, utóbbi vezette Leibnizet a „karakterisztikus háromszög" fogalmára. Az egész fogalomkör, amiből az infinitézimális számítás algoritmusa konkretizálódik, távolról sem új már a XVII. század közepén. „Karakterisztikus háromszög" és az érintőszerkesztés-kvadratúra közötti összefüggés – amiket Leibniz és Barrow nagy felfedezéseiként tart számon a történetírás – pl. már valószínűleg mint közismert anyag kerül egy 21 éves Cambridge-i diák, Isaac Newton Descartes-ból készített jegyzetei közé.

Nem az infinitézimális számítás geometriai alkalmazása, nem az érintőszerkesztés és kvadratúra közötti összefüggés felismerése az új ezekben a jegyzetekben. Még csak nem is az, hogy egyenletekbe önt egy geometriai problémát. Ezt Descartes-ból veszi, úgyannyira, hogy átveszi még a betű jelöléseit is. Az az eljárás sem új, ahogyan a probléma egyenletéből megkapja az érintési feltételt s így az *aeω* görbe *ge* ordinátáit. Ez az eljárás nem egyéb, mint a Hudde-féle redukció. „A kifejezésnek két egyenlő gyöke van és ezért megszorozzuk a Hudde-féle módszer szerint" – írja Newton.

Kis túlzással azt lehetne mondani, hogy ebben az 1664-es Newton kéziratban egyedül a cím az új: „Módszer kvadrálható görbe vonalak kvadrálására". Nem minden görbe vonal kvadrálására, hanem csak az olyan görbe vonalakéra, amik kvadrálhatók. Newton már 21 éves korában is Newton: a definíciók, a pontos meghatározás, az axiomatizálás mestere. A többiek, nem csak Collins, hanem még az olyan nagyon nagy matematikusok is, mint James Gregory, egyre-másra használják a „minden", az „általános" az „univerzális", jelzőket módszereikre. Newton igyekszik pontosan fogalmazni: „amik kvadrálhatók". Melyek azok a görbék, amelyek kvadrálhatók? Az 1664-es kézirat világosan felel erre: Olyan görbék, amelyeknek a területét egy másik görbe *érintősajátságai* adják meg. A kézirat két példát hoz fel, egy x^3/a egyenletű parabolát és egy a^3/x egyenletű hiperbolát. Ezeket az egyenleteket kombinálva a metsző kör egyenletével, a Hudde-féle redukcióval azonnal megkapjuk az érintési feltételt, az új, kvadrálható görbe egyenletét. Az x^3/a egyenletű

[376] *Traité des sinus du quart de cercle. = Oeuvres completes de Pascal, édition Pléiade. Texte établ eti annoté par* Jaques Chevalier. Paris 1954. 275–282, 275–277.

parabola esetében $ge = \frac{3xx}{a}$ lesz az új görbe egyenlete, az a^3/x hiperbola esetében pedig $ge = \frac{a^3}{xx}$. A $\frac{3xx}{a}$ görbe alatti területet $\frac{x^3}{a}$, az $\frac{a^3}{xx}$ alatti területet $\frac{a^3}{x}$ adja meg. A görbék kvadrálhatók, mert úgy vettük fel, hogy azok legyenek. A feltétel – ismételjük meg – az volt, hogy a kvadrálható görbe egyenletét egy másik görbe érintőjének az adatai szabják meg.

A megoldás, ha a kvadráltató görbe egyenlet, mint a fenti két példában, hatvány, nagyon egyszerű. Ha $\frac{3axx}{b}$ a görbe egyenlete, ahol a és b állandók, akkor a görbe alatti terület $\frac{ax^3}{b}$. Ha általánosságban $\frac{ax^m}{b}$ a kvadrálható görbe egyenlete, a terület $\frac{ax^{m+1}}{(m+1)b}$ lesz. Nem szükséges egész számokhoz ragaszkodni a kitevőben, lehet a kitevő bármilyen tört. És ha a kvadrálható görbe egyenlete nem egytagú, hanem hatványok összegéből vagy különbségéből áll, akkor a kvadratúra képlete tagonként alkalmazható. Ha pedig a görbe egyenlete nem hatványok összegéből álló kifejezés, akkor meg kell kísérelni ilyenné alakítani. Hogyan? Egyszerűen úgy, hogy elvégezzük a kijelölt műveleteket. *Számolni* kell az algebrai jelekkel, mintha csak közönséges számok lennének. „Ha $a + b = \frac{1}{a+b}$ – írja Newton 1665-ben –, elosztom 1-et (a + b)-vel úgy, mintha tizedes törtek lennének és az

$$\frac{1}{a} - \frac{b}{aa} + \frac{bb}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \frac{b^4}{a^5} \,\&\, c,$$

hányadost kapom, ami kitűnik abból is, ha mindkét részt (kifejezést) megszorzom (a + b)-vel. Ugyanígy vonom ki a gyököt (a^2 + b)-ből, mintha tizedestörtek lennének és azt találom, hogy

$$\sqrt{a^2 + b} = a + \frac{b}{2a} - \frac{bb}{8a^3} + \frac{b^3}{16a^5} \,\&\, c,$$

ami kitűnik, ha mindkét részt négyzetre emelem."[377]

Ugyanebben a kéziratában kimutatja azt is, hogyan adható meg m/n tetszőleges értéke esetében hatványok végtelen sorával egy $\overline{a+b}\}^{\frac{m}{n}}$ alakú kifejezés:

[377] *Corr.* II, 191. A mannuscript by Newton (?1665), 168–171, 170. A négyzetet a Newton korabeli matematika a betű megduplázásával jelöli, a harmadik hatványt már az általunk is használt módon. &*c* jel a mi +... jelünk megfelelője.

$$\overline{a+b\}}^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} \cdot \frac{b}{a} \cdot a^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} \cdot \frac{m-n}{2n} \cdot \frac{bb}{aa} \cdot a^{\frac{m}{n}} +$$

$$+ \frac{m}{n} \cdot \frac{m-n}{2n} \cdot \frac{m-2n}{3n} \cdot \frac{b^3}{a^3} \cdot a^{\frac{m}{n}} \,\&c$$

Az „új” itt sem a tételben van. Már Pascal használta a binomok kifejtésére az aritmetikai háromszöget és már arab szerzőnél is előfordul a „binomiális tétel”. De csak *egész* kitevők esetében. Newtonnál azonban m/n tetszőleges lehet, pl. 1/2, és akkor a sor éppen $a + b$ négyzetgyökét adja meg. Kifejthető pl. ennek a sornak a segítségével $1–xx$, az egység sugarú kör egyenlete, s az x hatványainak az összegéből álló kifejtett alakban tagonként végezhető el a kvadratúra. Közvetlen módszerrel egyszerűen megoldható a kör területének a kiszámítása, a közvetett és körülményes eudoxoszi és a pontatlan és nem egészen megalapozott indivizibilia módszer nélkül.

Így a bonyolultabb kifejezéseket sokszor kvadrálható alakra lehet hozni, ha elvégezzük rajtuk a kijelölt műveleteket, „mintha csak tizedes törtek lennének”. S ha az eredmény végtelen sor lesz, attól éppen úgy nem kell megijedni, mint ha pl. egy osztás vagy gyökvonás végtelen tizedes törtre vezet.

Az „infinitézimális számítást” már régen nem kellett felfedezni a XVII. század hatvanas éveiben. Descartes, Pascal, Fermat, Cavalieri, Torricelli, Ricci, Hudde és Sluse munkái után már nem volt erre szükség. De azt a tényt, hogy a végtelen hatványsorba fejthető kifejezések állítják elő a „kvadrálható görbéket”, azt fel kellett fedezni. Ezt nem tudták a többiek, csak Newton és James Gregory.

A két angol a hatvanas évek második felében egymástól függetlenül csaknem ugyanarra a nagy felfedezésre jutott. Függetlenül? Személy szerint kétségkívül igen. De nem szabad figyelmen kívül hagyni, hogy mindketten az angol matematikai tradíciónak megfelelően, konkrét számoláshoz szokott szemmel olvasták – a Cartesianus „geometriai algebrát” (ahogyan Descartes módszerét nevezhetnénk valamivel találóbban a mindenképpen anakronisztikus analitikus geometria helyett).

Mindketten kétségkívül jól ismerték a Cartesianus matematikát. James Gregory nem egyszer nyíltan is kifejezi Descartes iránti hódolatát.[378] Newton sokkal tartózkodóbb volt ebben a tekintetben. Descartes-ból indultak ki, de a végtelen sorok segítségével átlépték a Descartes által vont szigorú határvonalat a „geometriai” (algebrai) és „mechanikus” (transzcendens) problémák között. Azt a határvonalat, amit „Levelezése” ragyogó matematikájában maga Descartes is nem egyszer átlépett, s ami ellen

[378] *Corr. Rigaud* II, 220, J. Gregory to Collins 20 Aug. 1675, 269–272, 269.

– ha helytelen alapokon is – az angol matematika már Oughtred óta lázadt. De csak Gregory és Newton dolgozták ki, a végtelen sok tagú egyenletekkel való *számolás* segítségével a két nagy területet egységesítő *analízis* alapjait.

„ANALÍZIS VÉGTELEN SOK TAGÚ EGYENLETEKKEL...”

A XVII. század hatvanas éveinek végén, hetvenes éveinek elején egymással versengve küldik Newton és Gregory Collinsnak szebbnél szebb sorbafejtéseiket. Nagy figyelemmel kísérik egymás munkáját. „Nagyon szeretném megismerni – írja Gregory 1670. nov. 23-án Collinsnak – Mr. Newton módszerét a kéttagú egyenletek végtelen sorrá való alakításáról, amely formában logaritmusokkal megoldhatók: én bármely egyenletet át tudok alakítani végtelen sorrá, de nekem a logaritmusok semmit sem segítenek, mert az én soraimban nincs semmi *in ratione continua* (folytonos arányban). Van egy módszerem, amellyel nem-geometrikus problémákat (legalábbis amiket eddig tárgyaltam) végtelen sorba tudok átalakítani. ... Azt hiszem, hogy azok a sorok, amiket mellékelten küldök, némi hasonlóságot mutatnak azokhoz, amikről értesített, hogy Mr. Newton és Mr. Mercator felfedeztek: ezért volt, hogy oly gyakran kértem Önt, közölje velem az ő felfedéseiket.”[379]

Gregory tudta, hogy egy sorban jár Newtonnal. Még egy hónap sem telt el, s már újra ír Collinsnak: „Legutóbbi levelemben – írja – nem vettem észre, hogy Mr. Newton sora körcikkre (amit Ön régen küldött volt nekem) hasonló sorok sokaságával együtt következménye annak, amit én a logaritmusokra vonatkozóan küldöttem Önnek, *viz. Dato logarithmo invenire ejus numerum vel radicem potestatís cujuscumque purae in infinitam seriem permutare* (adott logaritmusból megkeresni a numerust vagy hatvány tetszőleges gyökét végtelen sorrá alakítani)”.[380]

Gregory a hatvanas évek legvégén ugyanott tart, ahol Newton. Felfedezte, hogy végtelen hatványsorba fejtett kifejezések tagonkénti kvadrálásával vagy redukálásával olyan kifejezések kvadrálhatók vagy redukálhatók, olyan kifejezésekkel megadott görbékhez szerkeszthető érintő, számítható súlypont, olyan egyenletek gyöke kereshető meg, amelyeknek zárt, kifejtetlen formáival szemben tehetetlenül áll a matematika. Amelyekkel szemben eddig legfeljebb egyes kivételes esetekben, fáradságos egyszeri módszerekkel értek el valamilyen eredményt. Általános módszerről eddig szó sem lehetett. Most a végtelen sorba való átalakítás és a hatványok kvadrálásának – redukálásának az összekapcsolásával olyan ál-

379 *Corr.* I, 20, Gregory to Collins 23 Nov. 1670, 45–49, 47.
380 *Corr.* I, 21, Gregory to Collins 19 Dec. 1670, 49–52, 49–50.

talános módszerhez jutottak, amely előtt nem állanak többé hozzáférhetetlenként az általános kezeléssel szemben eddig dacoló „mechanikus" problémák.

Azok a kifejezések, amelyeket addig táblázatokban összefoglalva, a gyakorlati számolás segédeszközeinek tekintettek: szögfüggvények és a hozzájuk tartozó körívek, a kamatos kamat táblázatok, a körív hosszát és a körcikk területét megadó táblázatok most mind elméleti megalapozottságot nyertek és sok közülük egymásból levezethetővé vált. A táblázatok adathalmazai mögött Gregory és Newton munkái nyomán kezdett felderengeni az *összefüggés.*

Azok a problémák, amelyeknek a megoldására eddig „mechanikus" eszközöket, ill. körző-vonalzó segítségével meg nem szerkeszthető görbéket kellett igénybe venni és táblázatokat szerkeszteni gyakorlati megoldásukra, mint pl. a szögharmadolás, szögötödelés, szöghetedelés..., ill. a nekik megfelelő négyzetgyök, negyedik gyök, hatodik gyök ... vonás; a különféle spirálisok, conchoid, ciklois ívhossz és szegmentum területmeghatározásai; a kör ívhossza és kvadratúrája ... egyszóval mindaz a hatalmas terület, amit Descartes mint „mechanikus" problémákat megpróbált távol tartani a geometria „tiszta" épületétől, a zárt algebrai alakban meg nem adható problémák egyre növő világa a végtelen sorok módszerével egyszerre bebocsátást nyert a „törvényes" matematika keretei közé.

Newton már hosszú évek óta dolgozott ezen a módszeren, amikor Gregory értesült róla. A nemes skót azonnal elismeri prioritását: közli Collins-szal, hogy addig semmit nem publikál ide vonatkozó kutatásaiból, amíg Newton műve meg nem jelenik.[381]

Várhatott volna Gregory, amíg Newton infinitézimális módszere napvilágot lát. A módszert előszónak szánta egy holland szerző, Kinckhuysen algebrájának tervezett angol kiadásához. A könyv sohasem jelent meg, a módszer rövid összefoglalását Newton 1669-ben elküldte Collinsnak. Ez a híres levél, a *De Analysi per Æquationes Numero Terminorum Infinitas*[382] a kvadratúra alaptételének a szabályokba foglalásával kezdődik. Az I. szabály a tetszőleges kitevőjű hatvány kvadrálási szabályát adja meg, a már ismertetett módon. A II. a „tagonkénti integrálhatóságot" mondja ki, s azután adja meg a számunkra jelen összefüggésben legfontosabb III. szabályt:

„Ha maga y értéke vagy annak valamely tagja a fentieknél összetettebb, egyszerűbb kifejezésekre kell visszavezetni; ugyanúgy dolgozva a betűkkel, mint ahogy az aritmetikában végzik a tizedes törtekkel az osz-

381 *Corr.* I, 25. Collins to Newton 5 July. 1671, 65–67.

382 = Isaaci Newtoni *Equitis aurati opuscula mathematica, philosophica, et philologica. Collegit partimque latine vertit ac recensuit* Joh. Castillioneus. I–III. Lausannae & Genevae 1744. I, 1–28.

tást, gyökvonást vagy többtagú egyenletek megoldását; és ezekből a kifejezésekből a keresett görbe alatti területet a fenti szabályok alkalmazásával azonnal megkapjuk.”[383]

Példaként az $\frac{aa}{b+x} = y$ hiperbola és a $\sqrt{aa - xx} = y$ kör esetében végzi el az osztást és gyökvonást, mintha közönséges számok lennének a betűk, s a kapott végtelen sorokra alkalmazva a II. és I. szabályt, azonnal megkapja – egy másik végtelen sor formájában – a hiperbola, ill. kör területét.

Harmadik példaként[384] egy harmadfokú egyenlet

$$y^3 - 2y - 5 = 0$$

megoldását mutatja be. Ez a példa nagyon jellemző Newton matematikai gondolkozására. Úgy jár el, hogy felvesz egy olyan számot, amely saját értékének 1/10-ével kevesebbel tér el a keresett számtól. Jelen esetben ez pl. 2. Azután $2 + p$ értéket helyettesít be az egyenletbe y helyébe és az így előálló

$$p^3 + 6p^2 + 10p - 1 = 0$$

egyenlet p gyökének a kiszámításában elhanyagolja p elsőnél magasabb hatványait. Így a $10p - 1 = 0$ egyenletből $p = 0{,}1$-et kap első közelítésként p-re. Most $0{,}1 + q$ értéket helyettesít a p egyenletében p helyébe s a kapott

$$q^3 + 6{,}3q^2 + 11{,}23q + 0{,}061 = 0$$

egyenletben a q elsőnél magasabb hatványait újból elhanyagolva kiszámítja $11{,}23q + 0{,}061 = 0$ egyenletből q-t. Az eljárást tetszés szerint folytatva, a részleteredmények összegezésével tetszés szerinti pontossággal megkapja a keresett gyököt: 2,094551...

A számpélda azonban csak arra való Newtonnak, hogy annak a mintájára járjon el általános esetben is. Áttéve a fenti eljárás lépéseit betűkbe, pl. az

$$y^3 + a^2y - 2a^3 + axy - x^3 = 0$$

egyenlet gyökét

$$y = a - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{64a} + \frac{131x^3}{512a^2} + \frac{509x^4}{16384a^3} \& c$$

alakban kapja meg, amiből az I. és II. szabály alkalmazásával azonnal megadja az y görbe alatti területet:

[383] Uo. 7.
[384] Uo. 10–11.

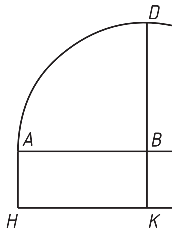
$$ax - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{192a} + \&c$$

Azután tárgyalja a módszer alkalmazásait „geometrikus”, majd „mechanikus” görbék esetében. A két eset semmiféle elvi különbséget nem jelent a módszer alkalmazása szempontjából. „Semmi olyanról nem tudok – írja – amire ez a módszer valamilyen formájában ne lenne kiterjeszthető. Sőt, ennek a. segítségével érintők húzhatók mechanikus görbékhez (akkor is, mikor másképpen nem lehet) és amit a közönséges analízis véges, állandó számú tagból álló egyenletekkel elvégez (amikor az lehetséges), ez végtelen egyenletekkel mindig teljesíti: úgyhogy ne kételkedjünk abban, hogy ezt is megilleti az analízis elnevezés (értsd: algebra). A számítások ugyanis ebben semmivel sem kevésbé biztosak, mint amabban, sem az egyenletek nem kevésbé egzaktak; mi, véges értelmű emberek nem tudjuk jelölni minden tagjukat és így felfogni sem, de mint megkövetelt mennyiségeket (quantitates desiseratas) egzakt módon felismerjük: ugyanúgy, mint ahogy véges egyenletek irracionális gyökeit sem vagyunk képesek sem számokkal, sem bármely analitikus módon úgy kifejezni, hogy az maradék nélkül, pontosan állíttassék elő valamely mennyiséggel.”[385]

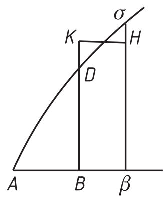
A dolgozat elején megadott I. szabály bizonyítását Newton a munka legvégén közli. A matematikatörténet-írás elsősorban ezt szokta kiemelni a *De Analysi ...* gazdag gondolatvilágából, mert a kifejlett differenciálszámítás felől nézve a differenciálhányados képzésének primitívebb formáját ismeri fel benne.[386] Valójában pedig ez a mű legkevésbé eredeti része, az itáliai iskola és Barrow mozgásgeometriai megfontolásainak a körében marad. A módszer egy geometrikus eljárás általánosítása. Úgy határozza meg az *AD* görbe alatti *ABD* területet, hogy a görbét a *BD* ordináta „egyenletes mozgásából” származtatja és a változó *BD* „momentummal” történő „növekvést” egy állandó *KB* egységnyi momentummal történő növekvéssel hasonlítja össze. A változó *BD* momentum által kisepert *ABD* terület így az állandó, egységnyi *KB* momentum által leírt *AHKB* területtel mérhető.[387]

Ezt a megfontolást viszi át algebrai formába és bizonyítja segítségével a mű elején megadott hatvány-integrálási szabályt. A *BD* momentumot egy kis *BKHβ* négyszöggel helyettesíti – mintegy „széthúzza” erre a négyszögre – és ezzel a kis négyszöggel megnövelt területet helyettesíti az

[385] Uo. 24–25.
[386] Pl. Child, J. M.: „Newton and the art of discovery”. = *Isaac Newton 1642–1727. A memorial volume ed. by* W. J. Greenstreet. London 1927, 117–129.
[387] *De Analysi ...* 19.



50. ábra



51. ábra

ABD területet kifejező egyenletbe. Ugyanakkor az *AB* helyébe a *Bβ*-val megnövelt értéket teszi be, az egyenletet rendezi, egyszerűsít, azután *Bβ-t* zérussal teszi egyenlővé és minden tagot elhagy, amiben előfordul.[388]

Ez a bizonyítás nem egyéb, mint a mozgásgeometriai területszámítás megfejelve Fermat érintőszerkesztési módszerével. Ennek megfelelően ugyanazok a kritikák hozhatók fel ellene, amiket a kortárs-matematikusok Descartes-tól kezdve oly gyakran s annyi joggal szegeztek szembe az új infinitézimális matematikával. Azokkal a bizonytalanságokkal terhelt ez a bizonyítás, amik miatt a XVII. század egyik legnagyobb matematikusa, Huygens, sohasem fogadta el az új módszereket.

A *De Analysi*...-ben különös fordulattal állunk szemben. Ami addig „érthetetlen” volt, a „mechanikus” problémák megoldása a végtelen egyenletek segítségével fogalmilag tisztázottá, gyakorlatilag tetszőleges pontossággal kiszámíthatóvá vált.

Ami addig egyszerűnek látszott, a közönséges algebrai egyenletekkel leírható „geometrikus” görbék kvadrálása viszont visszasüllyedt a descartesi tisztaságból a század jól-rosszul megfogalmazott infinitézimális módszereinek a zűrzavarába.

A FOLYTONOS FOLYÁS MATEMATIKÁJA: A FLUXIOSZÁMÍTÁS

A mi számunkra, akik a folytonos függvények ismeretében közeledünk a differenciálhatóság fogalma felé, ez a bizonyítás jobbnak látszik, mint amilyen valójában. Ne unjuk meg ismételni, hogy a XVII. század nem ismerte a függvények és a folytonosság fogalmát, de annál inkább az egyenleteket és a „matematikai” mozgást. Nem ismerte a differenciálhányadost, de tudta, hogy az érintőszámítás, maximum-minimum feladatok, egyenletek redukciója közös módszeren alapulnak. Tudta azt is, hogy ez a módszer speciális összefüggésben áll a kvadratúrával. A hatvanas évek-

[388] Uo. 27–28.

ben Newton és Gregory felfedezték, hogy ha az algebrai jelekkel ugyanúgy számolunk, mint a közönséges számokkal és ha a közönséges egyenletek helyett „végtelen egyenleteket” alkalmazunk, akkor semmi elvi különbség nincs az alkalmazott módszerek szempontjából a „geometrikus” és a „mechanikus”, nem-algebrai problémák között. A végtelen sorokkal történő analízis egységes nagy módszer, ez a módszer a matematikában. Ezért mondotta Newton, a nagy algebrista a „véges” algebráról, hogy az „kontárok matematikája.”

De hiányzott még az új analízis elméleti megalapozása. Annak a megadása, miféle mennyiségekre érvényesek a használt új módszerek.

A görög matematika az eudoxoszi arányelméletben találta meg a maga módszereinek ilyen jellegű megalapozását, a XIX. századi matematika a valós számok Dedekind-féle elméletében és a Cantor-féle halmazelméletben. A XVII. századi matematika a Newtoni fluxioszámításban.

A fluxioszámítás ebből a szempontból az egész XVI–XVII. századi matematikai fejlődés csúcsa. A fluxioelmélet definiálja azt a matematikai mennyiségfogalmat, amelyikre a XVII. század infinitézimális módszerei a legjobban illenek. Ez a fluxioelmélet lényege, nem nehézkes matematikai szimbolisztikája. A „végtelen egyenletekkel” való számolás a newtoni analízis jövőbe mutató oldala, ígéret-teljes kezdet, s mutatja a kezdet minden nehézségét és pontatlanságát. A fluxioszámítás teljesen a XVII. század fizikai-matematikai módszereihez alkalmazkodó elmélet; zárt és tökéletes a maga nemében.

A módszert Newton a *De Analysi...* végén közölt pontatlan mozgásgeometriai megfontolás továbbfejlesztésével építi ki. Már a hetvenes évek legelején készen van, s ezt a módszert rejti titkosírásba az 1676-ban Leibniznak írott híres levelében: „...tetszőleges számú fluens mennyiségből megtalálni a fluxiokat és megfordítva.”[389]

Nyomtatásban azonban csak 1736-ban jelent meg a módszer, *Methodus Fluxionum et Serierum Infinitarum cum ejusdem applicatione ad cutvarum geometriam*[390] címen. A *Methodus*-ban nagyon jól követhető a módszer genezise. A fluxioszámítás két problémára vezethető vissza, írja Newton. „I. A mindig (azaz bármely időpillanatban) megadott megtett út hosszúságából meghatározni az adott időben a mozgás sebességét, II. ha mindig adva van a mozgás sebessége, meghatározni egy adott időpillanatban a megtett utat.”[391]

A kérdésfeltevés azonnal mutatja a forrást: Galilei. Már maga ez a tény is arra utal, hogy a fluxioszámítás szerves része a XVII. század nagy

[389] *Corr.* II, 188, Newton to Oldenburg 24 Oct. 1676, 110–161, 115. „fluens” a mi terminológiánkban az időparaméter valamely folytonos függvénye, „fluxio” ennek idő szerint vett differenciálhányadosa.

[390] = *Opuscula* ... Castillioneus-féle kiadás I, 29–199.

[391] Uo. 53–54.

élményének, amit a világkép mechanizálódásának szokás nevezni. Ugyanezt mutatják az elnevezések is: „Mármost a következőkben fluenseknek nevezem azokat a mennyiségeket, amelyeket mintegy fokozatosan és határozatlanul növekvőknek tekintek...” Ezeket a mennyiségeket az ABC végéről vett betűkkel jelzi: *z, x, y, u,* ... „Azokat a sebességeket, amelyekkel az egyes, a mozgás által létrehozott fluensek nőnek (amely sebességeket fluxioknak vagy egyszerűen sebességeknek vagy celeritasnak nevezek) ugyanazon betűk felé tett ponttal fejezzük ki ..”[392]

Ezeknek az elnevezéseknek a segítségével a fenti két fizikai probléma következőképpen fordítható le matematikai nyelvre: „I. probléma. Határozzuk meg fluens mennyiségek között fennálló adott *relációból* azt a *relációt,* amely fluxioik között áll fenn”. És ugyanígy a „II. probléma. Fluxiokat tartalmazó adott egyenletből határozzuk meg, milyen *reláció* áll fenn a fluens mennyiségek között.”[393]

Az első probléma megoldása és a megoldás bizonyítása egyszerű, lényegében úgy történik, amint azt az 1664–65-ös kéziratban és a *De Analysi*...-ben láttuk. De pontosabban fogalmaz: „Fluens mennyiségek momentumai (azaz meghatározatlanul kicsiny részei, amelyeknek az idő meghatározatlanul kicsiny részeiben való csatlakozásával maguk a fluens mennyiségek folytonosan növekednek) úgy aránylanak, mint a sebességek, amelyekkel folynak vagy nőnek.

Ezért, ha valamelyik (tegyük fel, *x)* momentumát sebességének ($\dot{x}$) és a meghatározatlanul kicsiny mennyiségnek a szorzatával (azaz, $\dot{x}o$-val) reprezentáljuk, a többi *u, y, z*-nek a momentumát $\dot{u}o$, $\dot{y}o$, $\dot{z}o$-val kell reprezentálni, mivel $\dot{u}o$, $\dot{x}o$, $\dot{y}o$ & $\dot{z}o$ között ugyanaz az arány áll fenn, mint $\dot{u}$, $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ között.”[394] Ugyanaz az egyenlet, amely egy adott időben kifejezi a fluensek közötti relációt, megadja a fluensek $\dot{x}o$, $\dot{y}o$ stb. értékekkel megnövelt mennyiségei között fennálló relációt is. Behelyettesítve az $x + \dot{x}o$, $y + \dot{y}o$ stb. értékeket az egyenletbe, összevonva és egyszerűsítve, az o-t tartalmazó tagokat elhagyva azonnal megkapjuk az I. probléma megoldását.

A II. probléma már sokkal nehezebb, jóllehet elvben igen egyszerű. Az előbbi megfordítottja és így „megfordított műveletekkel kell megoldani.”[395] Ez a probléma nem egyéb, mint a kvadratúra általánosítása.

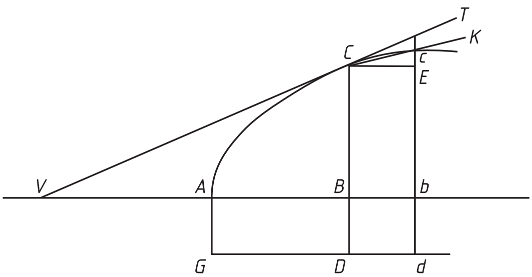
A tényleges keresztülvitel azonban csak a legegyszerűbb esetekben könnyű, már valamivel bonyolultabb fluxióegyenletek megoldása is komoly nehézségeket okoz. Mindenesetre mivel egyenletekről van szó, az algebrai egyenletek mintájára kell eljárni. Éppen ezért nevezi Newton a gyökvonás mintájára a fluensek fluxióegyenletből történő meghatározá-

[392] Uo. 54–55.
[393] Uo. 63.
[394] Uo. 59–60.
[395] Uo. 63.

sát a fluensek „kivonásának”. Az algebrai egyenletekhez hasonlóan, először osztályozni kell a fluxioegyenleteket, azután a normálalakoknak megfelelő, alkalmas egyszerű egyenleteket megoldani, végül gondoskodni olyan átalakításokról, amikkel egy tetszőleges fluxióegyenlet a megoldott alakok egyikére hozható.[396]

Newton világosan felismeri, hogy ez a probléma nem egyéb, mint egy speciális feladat, a kvadratúra általánosítása. Egy 1704-ben, az *Opticks* függelékeként megjelent összefoglalásában[397] fejti ki talán ezt legszebben. A probléma címe: *„Megkeresendők azok a görbék, amelyek kvadrálhatók”,* mutatja az 1664-es gondolatkörhöz való közvetlen csatlakozást. Legyen *ABC* a megkeresendő terület, *BC* a görbe ordinátája a *C* pontban, *AB* az abszcissza. Hosszabbítsuk meg *CB*-t *D*-ig úgy, hogy *BD* = 1 legyen és egészítsük ki az ábrát az *ABDG* parallelogrammával. Legyenek az *ABC* és az *ABDG* területek olyan arányban, mint *BC* és *BD.* Vegyünk fel mármost bármely egyenletet, amely a területek viszonyát definiálja, és ebből az az I propozícióval (ugyanaz, mint a *Methodus* ... első problémája) adódik a *BC* és *BD* ordináták relációja, amit kerestünk.”[398]

Az ábrán több vonal van, mint ami az itt mondottakhoz szükséges, mert annak a demonstrálására is szolgál, hogyan lesz a *Bb,* ill. *Ec* „születő növekmények” (augmentum nascentium) eltűnésekor „végső arányukból” (ultima ratio) az érintő hajlását megadó *CB : VB* arány. Ehhez „a *C* és *c* pontoknak teljesen össze kell esni. Matematikai dolgokban mégoly kis hibák sem megvetendők.”[399]



52. ábra

A Galilei–Torricelli-féle mozgásmatematikából kiindulva a fogalmak jelentős tisztázásáig ért el. Eltűntek a vonalakat „végtelen kis területekké” szétmosó mozgásmatematika bizonytalanságai. A számításhoz szük-

[396] Uo. 84–85.
[397] *De Quadratura Curvarum.* London 1704. = *Opuscula* ... Castillioneus-féle kiadás I, 201–244.
[398] Uo. 212.
[399] Uo. 205.

séges „folytonosságot” nem a szétkenés, hanem a fluxiok *definíciószerű* létezése biztosítja. Érintő pl. olyan görbékhez szerkeszthető, amelyeknek az ordinátáit és abszcisszáit kifejező mennyiségeknek fluxioik *vannak.* S ha azt akarjuk; hogy a görbe kvadrálható legyen, akkor a görbét kifejező egyenletnek egy fluens mennyiség fluxiojának *kell* lenni. Definíciószerűen. Mert „matematikai dolgokban még oly kis hibák sem megvetendők”.

A FLUENSEK HIERARCHIÁJA

Most már csupán a kvadrálható görbék általános alakját kell megtalálni. A legalkalmasabbak erre természetesen a végtelen hatványsorokkal előállított görbék, amelyekkel tagonként lehet bánni. Ezek egyben a legáltalánosabbak, mert ezekkel bármely görbe összehasonlítható megfelelő szabályok szerint. Az összehasonlítás megkönnyítésére Newton a legegyszerűbb görbék kvadratúráját két hatalmas táblázatban[400] adja meg, amely így kezdődik:

TÁBLÁZAT a kvadrálható egyszerű görbékről

A görbe alakja	A görbe alatti terület
Első forma	
$dz^{n-1} = y$	$\frac{d}{n} z^n = t$
Második forma	
$\frac{dz^{n-1}}{ee + 2efz^n + ffz^{2n}} = y$	$\frac{dz^n}{nee + nefz} = t$, *vagy* $\frac{-d}{nef + nffn^n} = t$
$\vdots$	$\vdots$

Itt z jelenti a görbe abszcisszáját, y a derékszögű ordinátáját, t a területet, d, e, f adott mennyiségek.

Hajlandók lennénk azt hinni, hogy az első nagyszabású integráltáblázatokkal állunk szemben. De figyeljük meg, hogy Newton táblázatai „formákat” tartalmaznak, nem formulákat. y és z még nem függő és független változók, hanem ismeretlenek. Még az egyenletek világában vagyunk, nem a függvényekében. Csupán a név hiányzik? A matematikában azonban sokszor éppen a dolgok nevükön nevezése a legnehezebb. És a legjellemzőbb: Newton más nevet mondott, nem a függvényét. Newton matematikája fluensek és fluxiok egymásra épülő hierarchiáján alapult. Min-

[400] Uo. 233.

den fluxio valamely fluens mennyiség fluxioja és egyben egy további fluxio fluense. Ebből azután minden más levezethető, ezt a tényt azonban definíciószerűen posztulálni kell. A matematika Newton számára az a tudomány, amelyik a fluens mennyiségekkel dolgozik. A mennyiség nem egyenesdarab, nem egész számokból összetevődő racionális tört, a matematikai mennyiség *fluens.* A növekvésnek, ill. a csökkenésnek, magának a *változásnak* az absztrakciója. A legnagyobb mértékben összetett valami, fluxiok végtelen egymásra következésének a lehetőségét rejti magába és ő maga más fluensek fluxioja. A fluensek közötti reláció még nem függvény. Ehhez túlságosan igényes. Kevés függvény lesz majd, amelyik kielégíti azokat a feltételeket, amiket a fluensek közötti relációk megkövetelnek. Egyszerűsíteni, kevésbé igényessé kell tenni ezt a túlságosan bonyolult mennyiségfogalmat ahhoz, hogy a XVIII. század nagy matematikusai kezében megszülethessen a függvény fogalma.

A FLUENS-FLUXIO MENNYISÉG ÉS A VÉGTELEN SOROK

Addigra az infinitézimális számítás már több mint egy évszázados múltra tekint vissza. S éppen az infinitézimális számítás gyors fejlődése tette lehetővé és szükségessé a függvényfogalom kialakulását. S ez a fogalom menti majd meg a különböző rendű „végtelen kicsinyek” zavaros rengetegében való elveszéstől, ahová – Leibniz iskolája nyomán – a XVIII. század során került. A XVII. századi infinitézimális analízis azonban a csúcsán – Newton és Gregory kezében – még nem annyira a „végtelen kicsi”, mint a „végtelen sok” analízise volt. De, ha szabad így kifejeznünk, egy „nyitott” végtelen soké, soroké, amelyeknek „se vége, se hossza”. Meg kellett állani az elejükön, a végük elveszett a végtelenben. A két legnagyobb, Newton és Gregory érezte, hogy ezen a téren tenni kellene valamit. Ők ketten sejtik a sorok konvergenciájának a jelentőségét. Newton becslést is próbál adni, mekkora hibát övet el egy adott végtelen sorban egy adott tag után következő végtelen sok tag elhagyásával. De – talán nagyon jellemző módon – Newton, aki alig követett el számolási hibát életében, ebben a becslésben téved. Éppen olyan felesleges lenne konvergenciakritériumokra alapító, modern sorelméletet keresni náluk, mint függvényt. A konvergencia elnevezést használja Newton is. De számára a sorok nem határértékük felé konvergálnak, hanem az „igazság” felé.[401]

Mégis, sorelméleti alapjainak legnagyobb bizonytalansága mellett is a sorok *alkalmazásában* sohasem téved. Bámulatos biztonsággal jár olyan területeken, ahová a mai sorelmélet birtokában is félve követi a matemati-

[401] *Corr.* I, 9, Newton to Collins January 1669/70, 18.

kus. De ez nem az alvajáró biztonsága, hanem a matematikusé, akin a határérték biztosító öve helyett a fluens-fluxio hierarchia biztosító kötele van. Ez szolgáltatja – definíciószerűen – a végtelen hatványsorba fejtéshez szükséges „differenciálhányadosok” létezését. A fluensek között felírt relációkat – definíciószerűen – mindig sorba lehet fejteni, s akkor már hozzáférhetők a végtelen soktagú egyenletekkel dolgozó analízis számára.

Éppen ezért, ha biztosítjuk, hogy az egyenleteinkben szereplő mennyiségek fluensek legyenek, a továbbiakban alkalmazott módszer szinte már nem is lényeges. Lehet ez könnyebb érthetőség kedvéért akár a megszokott, antik geometriai módszer is, mint a *Principiában.* A *Principia,* mint ismeretes, részletes fluxioelméleti bevezetéssel kezdődik, s később is folyton felbukkannak benne az antik geometriai köntös alatt a direkt infinitézimális módszerek. Láttuk már, hogy nem az infinitézimális módszereket, hanem az algebrai jelölési módot kerüli Newton a *Principiában.* Azt is láttuk, hogy a *Principiát* a Cartesiánus világrend legyőzésének tekintette.[402] Az algebrai jelölési mód pedig a XVII. század matematikusai és műkedvelői előtt erősen összeforrt Descartes nevével. Azonban Descartes eleve kizárta algebrájából a végtelen figyelembevételét igénylő „mechanikus” problémákat. Az ilyen „véges algebrára” mondotta Newton, hogy „kontárok algebrája”.

Kontároké? Lehet, hogy a bölcs dilettáns talán nem is tiltakozott volna nagyon az elnevezés ellen.

[402] Lásd kötetünkben Vekerdi László: ’A Principia születése’ c. tanulmányát!


GODEFROI GUILLAUME LEIBNITZ.
né le 3. Juillet 1646. mort le 14 Novembre 1716.
Il fut dans l'Univers connu par ses Ouvrages,
Et dans son Païs même, il se fit respecter :
Il instruisit les Rois, il éclaira les Sages,
Plus sage qu'eux il sut douter.
VOLTAIRE.

LEIBNIZ-VÁLTOZATOK[434]

I.

A XVII. század minden nagy tudósának és filozófusának az arca jó ismerősünk. *Galilei* (1564–1642) értelmet és akaratot sugárzó, dacos vonásai, *Descartes* (1596–1650) okos, gőgös, metsző tekintete, *Pascal* (1623–1662) bájos gyerekkori angyalképe és félelmes halotti maszkja, a nagy *Newton* (1642–1727) neuraszténiás vonásai, *Spinoza* (1632–1677) Ész és Isten jelenlétének eksztázisától tündöklő aszkéta arca: mind jó ismerősünk. Jól ismert Christian *Huygens* (1629–1695) nyílt, barátságos, kerek arca és John *Locke* (1632–1704) bizalmatlan, sovány, keserű vénasszonyfeje is. Jól ismert Thomas *Hobbes* (1588–1679) öntelt, felfuvalkodott, pökhendi képe és Pierre *Bayle* (1647–1706) okos, szelíd, komoly arca.

Leibnizről életében készült kép négy maradt, három egyazon művész, Andreas *Scheits* (1670–1735), hannoveri udvari festő alkotása. „Ez a négy Leibniz-portré – írta a Leibniz-ábrázolások legnagyobb szakértője, Hans Graeven – annyira különböző, hogy alaposabban megnézve, mindegyik teljesen más jellemet tükröz. A braunschweigi kép öntudatos, kissé édeskés kifejezésével olyan, mint valami agyonretusírozott fénykép, a wolfenbütteli kép gyenge, karakter nélküli. A berlini kép tiszta és szellemes kifejezésű, de túlidealizált. Ezekkel az udvari portrékkal ellentétben a kötött házikabátos firenzei kép sokkal emberségesebb, bensőséges élettel tele. …Próbáljuk a közöst, az ismétlődőt megkeresni a képekben: ez talán a szigorú tekintet, a tiszta, alacsony boltozatú, széles homlok, a kiugró járomív a pompás arckoponyán. Az orrgyök háromszöge mindegyik ábrázoláson feltűnően megrajzolt átmenetet képez a nagy, erőteljesen formált orrhoz. …Az orca beesett, az ívelt, elhúzott száj a szellemes udvaroncra utal, az energikus áll a céltudatos szellemre.”

Ugyanilyen nehéz lenne a művek és a levelezés alapján a belső arcképet megkeresni. Vagy még nehezebb, mert itt nem négy, hanem ezerféle Leibnizcel találkozhatnánk, aszerint hogy a tekintett írás – Leibniz még

[434] Előzménye: Vekerdi László: Leibniz-változatok. In: Kalandozás a tudományok történetében. Művelődéstörténeti tanulmányok. Bp., 1969. Magvető Kiadó pp. 81–108.

logikai és tudományos műveit is mindig valakinek vagy valakiknek írta – kinek szól. Leibniz mindig beszélget, és mindig a beszélgető partnerhez alkalmazkodik, témában és színvonalban egyaránt. Még nehezíti a helyzetet, hogy életműve mindent tartalmaz: logika, kombinatorika, matematika, fizika, politika, jog, állambölcselet, alkímia, heurisztika és számológépek elmélete, történeti forráskritika és szövegkiadás, könyvtártudomány, bányaművelés és bányagéptan, őstörténet, nyelvészet, tudományszervezés, spekulatív és gyakorlati teológia, metafizika, s még sok más szaktudomány található a szorgalmas tudós kiadott s máig kiadatlan műveiben. S ami a legcsodálatosabb: ez a sokféle tárgy egyáltalán nem keveredik, nem kavarog. Leibniz műveiben minden a legnagyobb rendben, minden a helyén, minden érthető, tiszta. S izgalmas, akár Pascal nehezen érthető s a ténylegesnél többet sejtető gondolattolulása. Közérthető, s mégis mindig el tudja kerülni Locke ásíttató unalmasságát és Hobbes szakállas közhelyeit. Kortársai körében egyedül nagy ellenfele, Pierre Bayle versenyezhet vele műveltség és írni tudás tekintetében. Ők ketten, Leibniz és Bayle a XVII. század végén megizmosodó tudományos és ismeretterjesztő folyóiratirodalom legnagyobb szállítói és ezen keresztül egy új, a természettudomány és matematika fejlődése szempontjából nagyon fontos olvasóközönség első nagy nevelői.

*

Gottfried Wilhelm Leibniz 1646. július 3-án született Lipcsében. Apja, aki a helybéli egyetemen az etika professzora volt, fiatalon meghalt. Az árván maradt gyermek kiolvasta az apa könyveit, majd megtanult mindent, amit a lipcsei és jénai egyetemeken tanulhatott (egy csomó lutheránus teológiát és jogot, skolasztikus filozófiát és logikát, egészen kevés elemi aritmetikát), és miután még jóformán gyerekfejjel beadott disszertációját tudós professzorai elutasították, örökre elhagyta Kelet-Németországot. Nürnberg egyetemén sikerrel doktorált. A tehetséges ifjút az akkori Németország egyetlen felelősségteljes fejedelme, Johann Philipp von Schönborn (1605–1674) mainzi érsek-választó udvarába hívta, s fontos politikai-jogi feladatokkal bízta meg. Az érsek-választó szolgálatában utazott Leibniz 1672-ben az akkori világ fővárosába, XIV. Lajos Párizsába. Itt ismerkedett meg a kor legfontosabb szellemi áramlatával, az új matematikai-természettudományos műveltséggel. Ismereteit két rövid londoni és egy hollandiai utazás egészítette ki. 1676 késő őszén tért vissza Németországba, miután a kor sok nagy tudósával és gondolkodójával megismerkedett.

A mainzi érsek-választó már nem élt, új gazdát kellett keresnie. Johann Fridrich von Braunschweig-Lüneburg hannoveri herceg szolgálatába lépett, s ettől kezdve élete végéig a Braunschweig-Lüneburg-i ház szolgálatában maradt mint könyvtáros, a harzi bányák felügyelője, a ház udvari történetírója, s két kedves hercegnő, Sophie és leánya, Sophie-Charlotte udvari filozófusa, társalkodója és barátja.

*

Amikor Leibniz fiatalkorában a mainzi érsek-választó szolgálatába állott, úgy látszott, hogy a harmincéves háború borzalmaiból kiemelkedő Németország jobb jövőt remélhet. Nyilvánvaló volt ugyan, hogy a vesztfáliai béke (1648) nyitva hagyta az utat a francia hatalom behatolása előtt, azonban a háborúban gazdaságilag és kulturálisan tönkrement Németországra a hasonlíthatatlanul fejlettebb nyugati szomszéd közvetlen hatása még előnyös is lehetett volna, feltéve, hogy a francia politikai terjeszkedéssel szemben valamiféle német egység erejét lehet érvényesíteni. Erre a szerepre az akkori körülmények között a Német–Római Császárság látszott a legalkalmasabbnak, s Leibniz, aki műveltsége és filozófiája tekintetében annyi mindent köszönhetett a franciáknak, ezért ragaszkodott élete végéig a Birodalom elvi egységéhez. Az egység érdekében bajlódott annyit a német világot tragikusan kettéhasító egyházszakadás megszüntetésével. Az egyházak újraegyesítésének a tervét a mainzi érsek-választó felvilágosult, toleráns udvarából hozta magával, s később, a hannoveri udvarban is ez volt politikai működésének egyik fő célja. Leibniz mindig inkább az elképzelt lehetőségek világában élt, a gyakorlati megvalósíthatóság iránt nem sok érzéke volt. S lehet, hogy a német világ akkori helyzetében éppen erre volt szükség.

A harmincéves háború derékba törte a német polgárság fejlődését, a vezetés mindenütt az arisztokrácia kezébe került. Ilyen körülmények között a francia fejű és német szívű műveltség a független s laza szövetségbe fűzött kisebb-nagyobb fejedelemségek s hercegségek felett inkább álom és lehetőség volt, semmint realizálható valóság, de olyan álom, amelyik majd a „német felvilágosodás" felnövő polgárságánál pótolni segített az évszázados elmaradottságot.

A német műveltség leginkább Leibniznek köszönheti, hogy nem pusztult el végleg a harmincéves háború őrültségében. Leibniznek, aki úgy közvetítette népének kora európai tudását, hogy egész Európa tanult belőle.

*

A XVII. század tudománya zárt, ezoterikus, nagyon kevés embernek megközelíthető világ volt. Descartes matematikáját és Newton műveit még százalékosan számítva is kevesebben értették, mint ma például a Hilbert-terek matematikáját és a Dirac-féle kvantumelméletet. A XVII. századi matematika és természettudomány nagy eredményei és egy nagyon művelt, akkori ember tudása között nagyobb szakadék volt, mint ma a Nobel-díjas tudós és a nyolc általános iskolát végzett diák tudása között. Ma ugyanis a különbség inkább csak kvantitatív: a diák sokkal kevesebbet tud *ugyanarról* a valamiről, amiről a tudós sokkal többet tud. A XVII. században azonban kvalitatív volt a különbség: néhány nagy tudós és filozófus egészen más világban élt és gondolkozott, mint a többi tudós és művelt ember. A néhány kivételes nagy tudós világa az akkor újonnan meghódított matematikai-természettudományos módszer volt, a többi művelt ember világa pedig, éppen úgy, mint a műveletlen nagyközönségé, a *tételes* vallás világa. A tételes vallások világából kellett átvezetni az embereket a természettudományos módszer új világába. Ez csak a vallásos világkép valamilyen tisztultabb, dogmamentes, türelmesebb formáján keresztül történhetett. A fontos a dogmamentesség és a *tolerancia* volt, nem a vallásos elemek kiirtása. A XVII. század nagy gondolkozói nem ateisták, rendszerükben valamilyen formában mindig helyet kapott a vallás. De mindnyájan egy-egy tisztultabb, tételektől mentes világképhez közeledtek, s küzdöttek a tételes vallások rideg, kegyetlen, értelmetlen dogmatizmusa ellen, s ebben a küzdelemben mindnyájan a természettudományok és a matematika új, nagy eredményeire támaszkodtak.

S közben megteremtették a természettudományok és a matematika fejlődéséhez elengedhetetlenül szükséges nyíltabb, kritikusabb, szabadabb klímát. A Galilei heorikus drámájától Leibniz és Bayle törhetetlen szorgalmú zsurnalizmusáig terjedő kor fontos jellemzője, hogy a bosszúálló, rettenetes, mindenütt jelenlevő isten uralmát felváltotta a szelíd, bűnbocsátó, seholsincsen isten uralma.

*

Két út állott a XVII. századi gondolkozás előtt, hogy a matematika és a természettudomány új eredményei alapján új világképet dolgozzon ki. Az egyik az volt, hogy ok-okozati láncba szedje a dolgokat s a történéseket. Ezt az utat követte a gondolkozók nagyobbik része, kiváltképpen az angolok: Hobbes, Newton, Locke. Szerintük megérteni annyi, mint ok-okozati összefüggést találni, a determizmus teljesen áthatotta gondolkozásukat, és a valóságot az ok-okozatiság rabláncára fűzték a teológiájé helyett. Itt istenre csak mint a lánc első szemére volt szükség, de a matematika és a természettudomány fogalmai is, mint idő, szám, folytonosság stb. segédeszközzé és fikciókká váltak a determinizmus mindent uraló valóságához képest.

Egészen másként gondolkozott Leibniz. „Elismerem – írja –, hogy az idő, a kiterjedés, a mozgás és a folytonosság általában azon módon, ahogyan a matematikában értik, csak eszmei dolgok, azaz dolgok, amelyek a lehetőségeket fejezik ki, egészen úgy, mint a számok. Hobbes a teret mint a létező képzetét határozta meg. Azonban helyesebben szólva a kiterjedés a *lehetséges együttlétezések* rendje, amint az idő a *nem egyszerre létező lehetőségek rendje*, amelyek azonban mégis összefüggenek egymással. Így tehát az egyik az együttlétező dolgokra, a másik a nem együtt létezőkre vonatkozik, melyeket az ember mégis létezőnek tekint, és ez az, amiért egymásra következnek. De Tér és Idő együttvéve az egész Világ lehetőségeinek rendjét alkotják, …s habár a természetben nincsenek soha teljesen egyforma változások, olyanok, amilyeneket a matematika által leírt mozgásfogalom követel, s szigorúan véve éppoly kevéssé vannak oly természetű valódi alakok, amilyeneket a geometria tanít, mert a való világ nem maradt meg a lehetőségek közömbösségében, hanem felosztásokba és tényleges sokaságokba jutott, melyeknek eredményei az előttünk megjelenő és legkisebb részeikben változatos jelenségek: mégis, a természet tényleges jelenségei nemkevésbé jól vannak elrendezve, s olyanoknak kell lenniök, hogy soha semmi ne történjék, ami megsértené a folytonosság törvényét és a matematika összes többi tökéletes pontosságú szabályait."

Az eleve meglevő szabály és rend, nem az oksági lánc szabja meg a valóság szerkezetét. „És ez oly igaz, hogy a világban tetszés szerint felvett pont mozgása meghatározott természetű vonal. …Ez a vonal kétségkívül egyenes vonal, ha az a pont egyedül lehetne a világon; most azonban a mechanika törvényei miatt valamennyi test összeműködésének az eredménye, és éppen ezen összeműködés által eleve meg van állapítva."

Egyetlen anyagi pont mozgásában is az *egész* világmindenség jelenléte tükröződik: nem csoda, ha minden ok-okozati láncra bonthatóság eleve reménytelen, akkor is, ha a történések *önmagukban* determináltak. Hogyan is lehetne gyakorló oksági láncokba fonni a világmindenség végtelenjét?

*

Csak az valósul meg, ami lehetséges, és minden lehetséges megvalósul. A valóság éppen a lehetségesség létezési formája. A lehetőség nem a logika durva „*A* nem lehet nem-*A*" törvénye, a lehetőségek birodalma maga a mindenség, melynek minden része mindig érvényesül minden pontjában. Minden pont szem-pont (a szót is ő teremtette: point de vue), ahonnan az egész mindenség látszik. „Ezt minden éleselméjűsége mellett sem látta eléggé Bayle úr, midőn azt hitte, hogy lehetséges a Buridán szamaráéhoz hasonló eset, és hogy az ember tökéletes egyensúlyban álló körülmények közé helyezve is, nem kevésbé volna képes választani. Meg kell ugyanis jegyeznünk, hogy a tökéletes egyensúly esete agyrém, amely sohasem következik be, minthogy a mindenség két egyenlő és hasonló részre sem nem osztható, sem nem szelhető. A mindenség nem olyan, mint az ellipszis vagy más hasonló tojásdad idom, mely a középpontján keresztül húzott egyenessel két megegyező részre osztható. A mindenségnek nincs középpontja, részei végtelenül változatosak. …Még az anyagnak legkisebb részeiben is teremtmények, élők, állatok, entelechiák és lelkek egész világa létezik, …nincsen a világegyetemben semmi míveletlen, terméketlen, halott, nincs káosz, nincs zavar, csak látszólag, körülbelül úgy, mint távolabbról szemlélt halastóban, amelyben csak zavaros mozgást látnánk és úgyszólván a halak sürgését-forgását, anélkül hogy magukat a halakat megkülönböztethetnők."

II.

Louis Couturat és Bertrand Russel Leibniz-monográfiája óta a leibnizi gondolkozás kiindulásának és középpontjának logikáját szokás tekinteni. Maga Leibniz is efféleképpen nyilatkozott öregkorában Gabriel Wagnernek, a hamburgi *Vernunftübungen* című filozófiai hetilap kiadójának: „…Mihelyst logikát kezdtem hallgatni – írja visszaemlékezve a lipcsei Nicolai-Schulében töltött éveire –, igen meghatott a gondolatok eloszlása és rendje, amit a logikában találtam. Rögtön észrevettem, már amennyire 13 éves gyerek ilyesmit észrevehet, hogy itt valami nagyszerű dolog rejtőzik. A legnagyobb örömöt az ún. osztályozásokban találtam, valósággal a világi dolgok mintáját láttam a predikamentumokban, és mindenféle logikakönyvben böngésztem, hogy valahol a legjobb és legrészletesebb efféle regiszterre találjak. …Az ismeretek ilyen tabulírozása közben addig gyakoroltam magam a különféle osztásokban és alosztásokban, míg ezekben láttam a gondolatok kapcsolatát és rendjük alapját. S ekkor azután volt mit hallgatni Ramistáknak és fél-Ramistáknak! Mihelyst összetartozó dolgok valamilyen regiszterét találtam, kiváltképpen ha nemre vagy közös tulajdonságra bukkantam, amelybe megadott fajtákból adott számú tartozott, mint pl. az indulatok száma vagy az erények száma vagy a bűnök száma, s táblázatba rendezve megnéztem, hogy is alakulnak egymás után a fajták, rendszerint azt láttam, hogy a felsorolás nem teljes, mindig még több fajtát lehetett az addigiakhoz csatolni. …Sok minden eszembe jutott ezzel kapcsolatban, időnként a tanítómnak is elmondtam egyetmást, pl., hogy nem lehetne-e ahhoz hasonlóan, mint ahogyan a simplex terminusokat (a fogalmakat) az ismert predikamentumokkal elrendezzük, nem lehetne-e, mondom, elrendezni így valamiféle predikátumokkal a komplex terminusokat, azaz az igazságokat is. Akkoriban ugyanis még nem tudtam, hogy amit keresek, éppen matematikusok bizonyításaiban találom meg."

Ezt a visszaemlékezést már a második gyerekkor küszöbén, 1697-ben írta Leibniz, amikor filozófiai rendszere végérvényesen készen volt. Annál fontosabb ez a gyerekkorba visszavetített párhuzam a teljes felsorolás lehetetlensége és a tökéletes matematikai dedukció között. Egyetlen általános tulajdonság sem meríthető ki egymást követő alosztások sorozatával, és bármilyen bonyolult igaz ítélet bebizonyítható. De az osztályozásokkal dolgozó elemzés és a formális bizonyítás mégsem két külön világ: összefüggenek az emberi megismerés síkján. Az általános fogalom ugyanis konkrét kategóriákkal való kimeríthetetlensége ellenére sem „flatus vocis”, mint középkori elődeinél, a nominalistáknál. Az általános fogalmak, az universaliák, emberi ismeretek, s mint ilyenek, szükségképpen konfúzusak. A nyelv, amit a dolgokról beszélve használunk, eleve pontatlan, a fogalmak a gondolkozás termékei, csak a dolgok valóságosak. De ha valahogyan a dolgokat a nyelv szavainál jobb jelekkel, „karakterekkel” lehetne jelölni, a matematika jeleihez hasonlóan, akkor néhány alkalmas karakter és a közönséges számok segítségével a gondolkozás különleges kombinációszámításra lenne redukálható. Ha ismernénk ennek az ideális, univerzális nyelvnek a szavait s a nyelvtanát, akkor a gondolkozás akár *gépesíthető* lenne.

Mindebben semmi eredeti gondolat nincsen, a nominalista felfogást Leibniz lipcsei tanára, Jacob Thomasius (1622–1684) lutheránus skolasztikájából vette át, az ideális nyelv álmát jénai professzorától, a lulliánus Erhard Weigeltől (1625–1699). Ha megmarad a német egyetemek középkort újratermelő s dédelgető világában, fényes értelme talán a skolasztikus filozófia reneszánszát eredményezte volna. Szerencsére a lipcsei egyetem visszadobta a túl fiatal és túl öntudatos ifjú titán doktori disszertációját, s a megsértett diák örökre odahagyta szülővárosát. Első állomása a Lipcsét Nürnberggel összekötő nagy kereskedelmi út nyugati végpontja volt. Az altdorfi egyetemen és Nürnbergben egészen más környezetbe került, mint amit Lipcse meg Jéna lutheránus skolasztikával telített egyetemein látott. Nürnberg volt a német világ legfontosabb itáliai kapuja, egy darab németföldi Itália, ahol beáramlott s transzformálódott a nagy déli példakép kereskedelme és kultúrája. A kíváncsi diákot minden érdekelte a mozgalmas városban: még a rózsakeresztesek közé is felvétette magát, egy félig tréfás, félig komoly alkimista írással. A német egyetemek középkorából Nürnberg reneszánszába cseppent diák megtanulta az emberek közötti mozgáshoz szükséges társadalmi „sliffet”. Diplomata lett.

*

De a XVII. század hatvanas éveiben Itália már a múltat képviselte, a német világ viszonylag leghaladottabb atomjai már régen nem Itália, hanem a két nyugati szomszéd, Franciaország és Hollandia után igazodtak. Főleg Franciaország hatott, politikai okok miatt is, igen erősen. A kis Rajna menti választók és hercegecskék mind Versailles-t utánozták, a Rajna menti német világ kultúrában és beszédben kétnyelvű lett, s egy része végleg beolvadt a fejlettebb gazdasági és szellemi kultúrájú francia nyelvterületbe. Az egyetlen erő, amely a hasonlíthatatlanul finomabb és magasabb francia műveltségnek ellenállhatott volna, a Szent Német–Római Császárság imaginárius egysége volt, ami ellen azonban a franciák mindig könnyen kijátszhatták a kis német fejedelemségek ragaszkodását „libertas”-aikhoz, a vallási ellentéteket, s nem utolsósorban a Habsburg-ház ülepét rágó törököt. Az öt tényező – francia-imádat, Német Birodalom képzete, a „libertas”-ok, vallási ellentétek és a török – különféle kombinációjából tevődött össze a XVII. század második felében a német világ bonyolult spektruma.

Ebben a pokoli zűrzavarban egyetlen német fejedelem látott tisztán: Johann Philipp von Schönborn (1605–1674), mainzi érsek-választó. Ez a francia fejű és német szívű nagyúr, aki mindig szívesen hangoztatta „paraszt származását”, egész életében a harmincéves háború sebeit igyekezett gyógyítani. Nagy építő volt, a német barokk terjengős eleganciája az ő udvarából áradt szét mindenfelé a német világban, egész Magyarországig. Bár hivatalból katolikus volt, katolicizmusa az a német augusztinianizmus, amit inkább csak külsőségek különböztetnek meg a lutheránus augusztinianizmus bensőséges Chrisztológiájától. Egyébként is uralkodásának egyik vezető elve volt a türelem; ő volt az első fejedelem Európában, aki megtiltotta a boszorkánypereket. Mint később kedves emberének, Leibniznek elárulta, Friedrich von Spee, a nagy német jezsuita-misztikus hatására. Johann Philipptől tudta meg Leibniz, hogy annak a híres boszorkányüldözés ellen írott könyvnek, amelyik egy protestáns pap fordításában terjedt el Németországban, Friedrich von Spee a szerzője.

Johann Philipp volt a Fejedelem, akit azután Leibniz egész életében keresett, s nem talált újra, soha. Johann Philipp volt a Hatalom, aki Isten eleve elrendelt jogi igazságait közvetíthette volna a Földre, a Hatalom, aki az isteni jog logikailag tiszta formuláit átültethette volna az emberi jogviszonyok zűrzavaros világába.

Johann Philipp értett hozzá, hogy udvarába gyűjtse a német világ legértelmesebb embereit. Az ő kancelláriáján dolgoztak a kor legjobb német politikusai, Arnold von Hörnigk, Wilhelm von Schröder s a nagy jogász, Johann Christian von Boineburg, Leibniz patrónusa. Az érsek-választó háziorvosa Johann Joachim Becher (1635–1682) volt, a híres paracelzista kémikus, a flogisztonelmélet előkészítője. A mainzi udvarban ismerte meg Leibniz későbbi legjobb barátját, Johann Daniel Crafftot (1624–1697), ezt a nyughatatlan, örökké mozgó, tervek és találmányok tömege alatt roskadozó Doktor Faustust, nagy álmodót, fejedelmek hitegetőjét, az új, nagy pénzeket kívánó és bonyolult mechanizmusokat használó technika egyik jellegzetes alakját.

Ez az új technológia sem volt német találmány, itáliai–holland–francia mesterek évszázados munkájának az eredménye volt. De mint mindent, amit utánozni kezdtek, a németek ezt is transzformálták, s a mechanizmusok kauzális elméletéből és gyakorlatából náluk álom lett: az élő természet, az eleven erők célszerű szolgálatába állításának az álma. Ott van az „erő” földben, vízben, szélben, állandó mennyiségben, fogyhatatlanul. Az ember feladata az „eleven erő” átalakítása. S ehhez az út a *természet* megismerésén át vezet. Nem a *mechanizmusokén*. Itt kezdődik a híres „Leibniz kontra Descartes” téma, Mainzban. S voltaképpen nem egyéb, mint a Descartes kontra Paracelsus-pör soron következő lépése.

*

Hogy megtehesse ezt a lépést, először meg kellett ismernie az ellenfélt. S Leibniz, egy időre legalábbis, karteziánus lett. A karteziánizmus sohasem volt a XVII. században általánosan elfogadott filozófia. Pontosabban, a karteziánizmust csak részben fogadták el: a mechanisztikus alapelveket és a geometrizmusát. Lélek és anyag összeférhetetlen dualizmusára építő metafizikáját vagy borzadva utasították el, vagy megpróbálták tompítani. A mechanizmus és geometrizmus azonban a kor leghőbb vágyait fejezte ki, s mindenki, még az antikarteziánusok is elfogadták.

Milyen lehetett a geometria szerepe a XVII. század középi emberek gondolkozásában? Leginkább talán a mi korunk „kibernetika” név mögött rejtőző komplexumához lehetne hasonlítani. Olyasvalami volt a geometria – mégpedig a klasszikus, Euklidész, Apollóniosz és Arkhimédész modorában elképzelt geometria –, amitől homályosan, közelebbről meg nem határozottan és meg nem határozhatóan a kor gondolkozásának univerzális megváltását várták. Aki „more geometrico” csinált valamit, azaz plauzibilis axiómákból levezetett tételek formájában, biztos lehetett a sikerben.

A német természetfilozófia és a skolasztikus logika világából érkező Leibniz megpróbált ugyanolyan jó geométerré válni, mint a többi párizsi filozófus. A kor legnagyobb geométere, Huygens tanította matematikára, s jóindulattal javítgatta az okos, de a geometriában járatlan politikus szarvashibáit. Talán az egész Leibniz-életmű viszonylag legjobban tisztázott része Leibniz matematikája, s ez elsősorban a modern matematikatörténet-írás ma élő legnagyobb szaktekintélyének, Jos. E. Hofmann úrnak köszönhető. A hatalmas Leibniz-irodalomból óriásként emelkedik ki Leibniz párizsi éveiről írott monográfiája. Ha a meggyőző, gazdag, de csak matematikus szakembereknek megközelíthető részleteket átugorva az összefoglalásra lapozunk, a következőket olvashatjuk Leibniz párizsi matematikai eredményeiről: „Egészében véve tudatos haladást láthatunk nála a régi, tisztán geometrikus szemléletmódtól a modern analitikus-funkcionális szemléletmód irányába. A szavakból jelekre tér át, és a kezdeti naiv indivizibiliaelképzelést (hogy ti. a felület ordinátái összességéből »van összetéve«) javított indivizibiliaelképzeléssel (a karakterisztikus háromszög segítségével) helyettesíti; a Leibniz-féle szimbolika pontosan ezt a felfogást tükrözi. Ezáltal megteremtette a sikeres differenciálgeometriai vizsgálatok előfeltételét…”

Lényegében ugyanezzel a „javított indivizibilia-elképzeléssel” dolgozott már jóval Leibniz előtt Pascal és Newton is, és megkísérelték, sokkal pontosabban, mint valaha is Leibniz, matematikailag teljesen precizírozni, a mi határátmenetünkhöz hasonlítható fogalmakat alkalmazva, az egész eljárást. Leibniz láthatóan sohasem törődött a kontinuum valamiféle „aritmetizálásával”. Skolasztikán nevelkedett gondolkozása feltehetően éppen ott nem látott semmi nehézséget, ahol a többiek szerint a probléma magva rejtőzött. Nem interpretálta elődeinél jobban az indivizibiliákat. Egyáltalán nem interpretálta. A szubsztanciális formák világába sorolta, s csak a *műveleti szabályokat* kereste, ahogyan létezésük *bic et nunc* meglátszik a dolgokon.

S a többi nagy skolasztikus gondolkozóhoz hasonlóan már csak a kész szabályokat közölte, évek múlva. A jegyzetei, ahogyan a szabályokhoz jutott, máig kiadatlanok. A múlt század szemérmes történészei tiszteletlenségnek érezték ezeknek a – ahogyan ők nevezték – „hibákkal” zsúfolt zseniális útkereséseknek a közlését. Azok a műveleti szabályok azonban, amiket Leibniz 1684-es *Acta Eruditorum*-beli cikkében közölt, tiszták és egyszerűek. Legkevésbé sem új az elvük: már Fermat és Descartes érintőszerkesztés-vitája mélyén ugyanez az elv rejtőzött. Leibniz nagy felfedezése a szabályok egyetlen egységes *műveletként*, a differenciálszámítás *algoritmusaként* való összefoglalása. Ez a nagy újság, a geometria interpretációtól függetleníthető *operatív* szemlélet. Az egyes szabályokat már régen ismerték. Senki nem vette azonban észre Leibnizig, hogy ezek a szabályok egy nagy és egységes számítás *alapműveletei*. Akárcsak az algebra műveleteivel, ezekkel az új műveletekkel is felírhatók egyenletek, s ahogyan a közönséges algebrai egyenletekből gyökvonással, ezekből a *differenciálegyenletekből* is meghatározott művelettel, az *integrálás* (megint megfelelő számítási szabályokkal megadott) *műveletével* ki lehet számítani a differenciálás jele alá foglalt „ismeretlent”. Ahogyan a differenciálás érintőszerkesztésként volt értelmezhető, az integrálás is *interpretálható* volt az indivizibiliák vagy a kor divatos geometriai transzformációinak a köntösébe öltöztetve. Leibniz a jobb megértés kedvéért tényleg megpróbálkozott efféle hagyományos interpretációkkal, s a kilencvenes évektől kezdve – a méltatlan támadásoktól is sértve – belebonyolódott a módszere indoklásába, a különféle „végtelen kicsinyekkel”. Ugyanakkor azonban – s ez volt a fontos – a differenciálás és integrálás *algoritmusának* alkalmazásával valóságos hálót font lazán összetartozó eredményekből a műveleti szimbólumok jele alatt szereplő „ismeretlen” köré; s észrevette, hogy a differenciál- és integrálszámítás hálójába befogott „ismeretlen” nem az többé, ami az algebrában volt. Új fogalom jött létre, s ezt új néven kellett nevezni. Leibniz a módszere által teremtett új fogalmat a lehető legszerencsésebb névvel *függvény*-nek nevezte. Új világ született a matematikában, a függvények elmélete, az analízis, ami nélkül az újkori természettudomány fejlődése elképzelhetetlen.

Leibniz módszere a matematikai egzaktság szempontjából kifogásolhatóbb, mint Newton vagy akár Pascal és Wallis eljárása. De egy differenciálatlanabb, ősibb és ígéretteljesebb gondolkozási mintáig menve vissza új, gazdag, százféle variánsra bomló és ezért alkalmazkodásképes matematika forrására bukkant. Newton híres félreértése, a „lusus Naturae”, nagyon találó félreértés volt. Éppen ez a *lusus naturae*, a természet játékos és tréfás kedve, a fejlődés motorja. Ahol ez kivész, megmerevednek a gondolatok. Lehet, hogy csonttá fagyott tökéletességben, mint Newton fluxiós-módszere. Folytatni azonban csak a sok-sok változatot megengedő játékot lehet.

*

Leibniz láthatóan nem szívesen indult Londonba és Hollandián át haza 1676 késő őszén. Ha nem kényszeríti a megélhetés, még sokáig Párizsban maradt volna. Mainzba nem mehetett vissza, két nagy patrónusa, az érsek-választó és Boineburg meghalt. A német duodec-fejedelemségek áttekinthetetlen, kusza mozaikja folyton változott. A weszfáliai béke bomlasztó hatása mostanra világosan manifesztálódott. A nyugati fejedelemségek francia hatás vagy uralom, a bajorok és szászok önmagukba zárt, elmaradt, feudálisnál is rosszabb arisztokratikus-rendi autarkiában, a császár törökkel küzdve és magyarokkal bajlódva: ez volt a Német Birodalom. Városok, ahogyan Itáliában, Franciaországban, Németalföldön, Angliában értették a „várost”, nem voltak. A társadalmi, gazdasági és szellemi élet gócpontjai fejedelmek és hercegecskék udvarai voltak. Ha valaki ebben az ezeregy-hercegországban érvényesülni akart, először is egy „von”-t kellett szerezzen magának, udvari frakkot és parókát. S ha szerencséje volt, s illően hajlott gerince, felléphetett szerény szereplőként a Hatalom karneválján, amit úgy hívtak, hogy Német Udvari Világ.

Leibniz *„Johann Friedrich von Braunschweig–Lüneburg hannoveri herceg”* szolgálatába lépett, udvari tanácsosként, s elsősorban a hercegi könyvtár felügyeletével megbízva. Johann Friedrich viszonylag értelmes herceg volt, sok pénzt elköltött a könyvtárára. Azonban hamar meghalt (1679), s utóda, Ernst August már egészen másféle ember volt. A könyvtár költségvetése jelentéktelenre zsugorodott, s Leibniz kénytelen volt másféleképpen hasznosítani magát. Ért a matematikához – ajánlkozott – s különféle alkalmazásaihoz: földméréshez, térképkészítéshez, az ország kereskedelmi mérlegének a megtervezéséhez. Több érdekes találmánya ismert, például a számológép, „amelynek modelljét – írta 1680 elején –, merem állítani, megcsodálták Párizsban. Több más matematikai gépet is feltaláltam, meg azután egy szerkezetet ágyúk és más igen nehéz tárgyak fogatolására”; s azután kínálja pumpákra, malmokra s más hasonló dolgokra alkalmazható találmányait.

A herceg birtokaihoz tartozó Harz-hegységi bányákban éppen efféle találmányok kellettek. Akkoriban a bányaüzem s az ércelőkészítés energiaforrása a vízierő volt, s így száraz esztendőkben a termelés erősen csökkent. Leibniz függetleníteni akarta a víz szeszélyétől a termelést, éspedig a levegőenergia szolgálatába állításával. Nagyszabású szélmalmok építését tervezte. „Ami a bányaműveket illeti – írja a harzi munkálatairól 1682-ben –, ezek víz- és most már szélművek is, és ilyen műveket használunk a víz kiszivattyúzására, az ércek kiemelésére és továbbítására, a zúzóművekben az ércek aprítására s végül a fújtatók üzemeltetésére. A vízművekhez tavak kellenek, árkok, vízfolyás. Kell a kerekeknek épület, kell vízvezeték, árkolás. A szélműveknek az az előnye a vízművekhez képest, hogy mennyiségük és erejük nem korlátozott. Mert vízikerék nem lehet több, mint vízesés, és a kerekeket sem lehet magasabbra csinálni a vízesésnél, és a lapátokat sem szélesebbre, mint ahogyan a víz mennyisége megszabja. Ezzel ellentétben, ahol egy szélmalom áll, állhat akár 10 is, és olyan magasra meg szélesre lehet csinálni, amilyenre csak akarjuk, ha már egyszer megy a dolog, s egyetlen legény akár 10 szélmalmot is eligazíthat, ha elég közel vannak egymáshoz…”

Újra meg újra magyarázza, részletesen, hivataloknak és hercegeknek, a szélmalmok előnyeit. S hogy a már meglévő vízműveket is használni lehessen, s hogy függetlenítse magát az időjárás szeszélyétől, zseniális energetikai megoldást gondolt ki: a „közvetett szélmalmok” rendszerét, amely „az egyébként túl mélyen folyó és vízkerekeinkre már nem hasznosítható vizet nagy mennyiségben a tartaléktóba emeli, ahonnan most már újból a vízikerekekre folyhat”. S hogy a víz felemelését minél gazdaságosabbá tegye, kidolgozott „egy roppant csodálatraméltó eszközt, amely erőveszteség nélkül, in distans, igen nagy távolságban tud operálni, és így vízikereknél applikálva, igen nagy erő- és költségmegtakarítás nyerhető, amely a bányagépészet legfőbb desiderátuma.” „Úgy járok el – írja egy másik levelében –, hogy levegővel tele csöveket alkalmazok, és ezzel lököm meg a vizet 100 lépésnél is nagyobb távolságból, s ha még messzebb akarok hatni, nem kell egyéb hosszabb csőnél.”

Leibniz zseniális technikai elképzeléseihez sem az anyagok, sem az emberek nem voltak elég jók. A csövek széthasadtak a nagy nyomás alatt, az első közvetett szélmalmok ugyan elkészültek, s ideig-óráig jártak is, de mindig eltört valami, folyton javítani kellett, a költség nőtt, a bányahivatal megunta a dolgot, s végül nyíltan szabotálta Leibniz kísérleteit.

„A Harz – írja az elkeseredett feltaláló – valóságos Teátruma a Természetnek s a technikának, mely kettő egymásnak feszülve hajtja ott egymást, hanem az emberek, azok azután nem *curios*-ok, inkább minden kísérletben kerékkötők, pedig itt különösen hasznos lenne minden curiositas és invenció…”

Ha csak fele igaz a sok kellemetlenkedésnek s ártásnak, amiről Leibniz beadványaiban panaszkodik – pedig Leibniz levelei mindig szárazak, tárgyilagosak –, már az is bőven elegendő bukása magyarázatára. 1685-ben végleg, megverten távozott a Harzból, de egykori munkatársai, igazi „curios” emberek, egyszerű bányamesterek, falusi kovácsok és gépészek, még évek múlva is értesítik a Tanácsos Urat a harzi újságokról. „Véletlenül láttam itt legutóbb egy közeli vendégfogadó előtt Krafft urat – írja Jobst Dietrich Brandshagen 1691-ben Clausthalból – a kocsijából kiszállni, és mivel tudom, hogy milyen hűséges barátja az Udvari Tanácsos Úrnak, hozzája léptem, és a Tanácsos Úr nevében felajánlottam szolgálatomat…”

Hiába harcolt Leibniz Don Quijoteként a jövendő szélmalmaival. Technikai géniusza s a társadalmi környezete között túlságosan nagy szakadék volt. Azonban a szél és a víz munkavégző képességével foglalkozva, a sok kísérlet után, a nyolcvanas évek végén, nyilván nem a harzi tapasztalataitól függetlenül fogalmazta meg a mechanikai munkavégző képesség, a mechanikai energia, vagy ahogyan ő nevezte, „eleven erő” megmaradásának az elvét. Az integrál- és differenciálszámítás algoritmusa mellett talán ez a legfontosabb a legmaradandóbb alkotása. S ezt az elméletet a víz- és szélerőművek bármilyen tökéletlen, de tényleges, kézzelfogható realizációja „váltotta ki”. Olyan az ember is, mint a többi állat: csak azt érti meg, amit megfog. Kiváltképpen a német ember, amint a „begreifen” szó is mutatja.

*

A bányavállalkozás csődje után az Udvari Tanácsos Úrnak új jogcímet kellett keresni Legkegyelmesebb Urainál az eltartásra. A Braunschweig–Lüneburgi ház szerencsés házasságok s még inkább más Házak szerencsétlensége miatt gyorsan emelkedett. Ernst August előtt a Választófejedelemség, a Ház előtt még szebb lehetőségek reménye fénylett. Kapóra jött Leibniz ajánlata: megírja a nagy jövőjű Ház múltját. Az ötlet alapja egy régi gyanúja volt, miszerint a Braunschweigi Ház és az Esték közös őstől származnak. A terv realizálása hosszas levéltári kutatásokat és utazást kívánt; a kutatás nagy részét ki lehetett adni albérletbe, s a megmaradt idővel értelmesebbet kezdeni: ez tetszett a tervben Leibniznek. Ha a Ház múltját levéltári adatokkal igazolhatóan a tiszteletre méltó középkor arisztokratikus homályáig lehet követni, az nem lehet közömbös a Ház jövőjére: ez vonzotta a tervben a herceget. Kisebb-nagyobb alkudozások után létrejött az egyezség, s Leibniz elkezdette egész életét kísérő, végeláthatatlan történetírói munkáját.

Egy hercegi ház történetét akarta megírni, de hogyan! Egy darab föld s egy nép története lehetett volna belőle, úgy, ahogyan még ma sem tudunk történelmet írni. „Hogy felségednek valami fogalma legyen – írja tervéről 1691-ben –, először is ennek a Földnek legrégibb korát kell tárgyalnom, attól kezdve, hogy valószínűleg (a Harz kivételével) az egész víz alatt állott; azután azt, miért találhatók a lüneburgi pusztán afféle „kígyónyelvek", mint Málta szigetén, amik nem egyebek, mint ősi tengeri lények fogai, aminthogy a Burmans-barlangban meg a scharzfeldi lyukban is ismeretlen állatok csontjai lelhetők; én magam is hoztam ilyeneket a Burmans-barlangból. Azután el kell mondani, hogyan töltődtek fel egész tengerek, s miért található meg a halak nyoma a kőben, mint a borostyánkőben a legyek, hogyan töltődtek meg a repedések érccel..."

Ezek után kell tárgyalni a földrész lakóit, a legrégibb időktől kezdve, archeológiai és nyelvészeti adatok alapján, míg eljutunk az írott emlékekig. Leibniz ezután figyelmeztet a perzsa és a német nyelv valamilyen „rokonságára". S miután mindezt részletesen tárgyalta volna, azután tervezte elkezdeni a Braunschweigi Ház közvetlen őseinek, a Welfeknek a történetét.

A Braunschweigi Ház és az Esték közös eredetét levéltári kutatással sokáig nem sikerült igazolnia. „Ezek után olyan szerencsés voltam – írja Leibniz a beszámolójában –, hogy egy pisai szerzetestől megtudtam, van Lombardiában egy kolostor, Vangadizza a neve, ahol sok régi őrgrófokat temettek el, és emlékek találhatók ott, amik hasznosak lehetnek az Esték története szempontjából. Odamentem, s látom, ott van eltemetve Azo Marchio, a Legfelségesebb Braunschweigi és Este Ház közös ősapja, feleségével, a Welf-Házból való Cunigundával."

*

Az itáliai utazás nemcsak a történetírónak hozott eredményt. Ez az út Leibniz egész életének a csúcsa. Itáliában végre olyan emberek között élt, akik értették és értékelték gondolatait, akikkel beszélgethetett a kor nagy kérdéseiről: a mozgásról, az új matematikai módszerekről, a folytonosság és a lélek problémáiról, a kegyelemről, az egyházak újraegyesítéséről, XIV. Lajos gonoszságáról, a törökökről, a német s az olasz nép jövőjéről s ezer, csak tudós és irodalmár embereknek fontos apróságokról, amit kívülállók meg sem tudnak érteni, s csak a „tudósok respublikájába" tartozók érzik az ízét.

Rómában az Accademia fisico-matematico tudósaival nap mint nap találkozott: Ciampinivel, Bianchinivel, Auzout-val. Sorra adták kézről kézre Vitale Gordani, Domenico Quarteroni, Giovanni Battista del Palagio. Francesco Bianchininek értekezést írt a kopernikánus világrend és az egyház tanításának összeegyeztethetőségéről, gyakran beszélgetett a Kínába induló jezsuita atyákkal, Páter Claudio Filippo Grimaldival és Páter Giovanni Laureatival, s kérte őket, hogy ne csak a keresztény hit terjesztésére ügyeljenek, hanem arra is, hogy feltárják Kína évezredes kultúráját s bölcsességét. XI. Innocent halálakor hosszú latin költeményben üdvözölte a trónra lépő VIII. Sándor pápát, abbate Raffael Fabrettivel járt a katakombákba. Annyira illett Rómába, hogy a Vatikáni könyvtárban ajánlottak állást neki. Firenzében Antonio Magliabechi, a Nagyherceg tudós könyvtárosa látta vendégül, s az Accademia del Cimento tagjaival beszélgetett, Vincenzo Vivianival, „Galilei utolsó élő tanítványával", Francesco Redivel, a Nagyherceg orvosával. Abbate Bodeni néven akkoriban Firenzében élt Rudolf Christian von Bodenhausen. Leibniz megígérte neki, hogy elküldi *Dynamiká*-ja kéziratát. Bolognában őslénytani kutatásait a kor legnagyobb anatómusával, Marcello Malpighivel beszélte meg, Pármában Benedetto Bacchinivel, a *Giornale De' Letterati* kiadójával találkozott, Páduában Charles Patinnel, a humanistával, Francesco Spoletivel és a kor egyik legnagyobb matematikusával, Stefano degli Angelivel értekezett. Itt volt igazán otthon, ennek a nagyszívű és a nyomorban is törhetetlen kedvű, tehetséges népnek a földjén… Egy egyszerű pisai szerzetes, Teofilo Marchetti, meghallván, hogy miben fáradozik a messziről jött tudós, üzent, hogy menjen el a Vangadizza kolostorba… S a boldog történész diadalmas levélben számolhatott be híres kollégájának, Pater Jean Mabillonnak a nagy eredményről.

*

Itáliából hazatérve még évekig tartott az élmény melegítő ereje, a filozófus nagy, végleges vázlatba foglalhatta háláját: jól van így, Uram, jól van. Azután lassan, alig észrevehetőket lépve, reá tört az öregség, a hatalom önzése, a magány. A német világ áttekinthetetlen mozaikja újból más erők szerint rendeződött, s a megvénült filozófus hiába keresett magának új, méltóbb gazdát az angol királlyá választott Georg Ludwignál.

III.

„Mint a kutyát, úgy temették el." A mai Leibniz-kutató generáció egyik ismert képviselője, Yvon Belaval írja ezt a mondatot szép, száraz, mindenféle romantikától, irodalomtól és hatásvadászattól mentes Leibniz-könyvében. A nagy filozófus, Birodalmi Báró, Cár tanácsosa, az új matematikai módszer megalkotója, a Berlini Akadémia létrehozója, uralkodók és hercegek barátja úgy halt meg, hogy jóformán észre sem vették. Egyedül a francia tudományos akadémia egyik ülésén emlékezett meg haláláról Fontenelle, de Fontenelle-nek az volt a foglalkozása, hogy kisebb-nagyobb emberek haláláról megemlékezzen. Ő volt a tudósok respublikájában a siratóasszony.

A XVIII. században két nagyon nagy író, Voltaire és Swift gúnyolta ki filozófiájának egy-egy alappillérét. A *Candide* (1759) máig a leibnizi etika leghűségesebb ismertetése, a *Micromégas*-ban pedig utolérhetetlenül világosan jellemzi Voltaire az eleve elrendelt harmónia elvét: „Hát te, barátom – fordult (Micromégas) egy Leibniz-hivőhöz, aki ott tartózkodott –, a te lelked micsoda? – Így válaszolt a Leibniz-hivő: – Mutató, mely az órákat mutatja, míg testem harangozik hozzá; vagy ha úgy kívánja, ő harangozik, míg a testem mutatja az időt; vagy a mindenség tükre a lelkem, és a testem a tükör szegélye: hiszen ez nyilvánvaló!"

Swift támadása még veszélyesebb, mert a leibnizi filozófia logikai alapjait rendíti meg, amikor Gulliver a nagy lagadói akadémián meglátogatja a spekulatív tudományok részlegét, ahol a tudósok a kombinatorikus-heurisztika segítségével kutatnak. A XVIII. században nem nagyon bíztak a kombinatorika heurisztikus erejében. Ma, a kombinatorikus módszerek nagy reneszánsza idején természetesen a XVII. századi kombinatorika s legnagyobb képviselője, Leibniz újból nagyon tisztelt. A XVIII. században azonban éppen úgy kacagtak a kombinatorikát kigúnyoló Swifttel, mint az eleve elrendelt harmóniát és a leibnizi optimizmust kigúnyoló Voltaire-rel.

Még méltatlanabbul bánt Leibnizcel a XIX. század: a német filozófiatörténet-írás Kant elődjét fedezte fel benne. Mert Pangloss úrhoz és a lagadói kombinatorikushoz tényleg van valami köze Leibniznek, Kanthoz azonban semmi. Lassan, a matematikai és formális logikai módszerek újfent divatbajöttével párhuzamosan kezdődött a XX. században a valóságosnak megfelelőbb Leibniz-kép megrajzolása, azonban még ma is nagyon távoli cél a leibnizi életmű teljes megértése. Magyar nyelven S. Beke Anna Leibniz-könyvében találhatja a legjobb tájékoztatást az olvasó.

A következőkben a fentebb idézett egyetlen mondatot próbáljuk kommentálni: „Mint a kutyát, úgy temették el."

Amikor Leibniz iskolába járt, a német nevelésben mindenfelé a skolasztika uralkodott. Katolikus és protestáns iskoláztatás ebben a tekintetben nem különbözött, talán a protestáns skolasztika még merevebb és még elmaradottabb volt, mert az új vallásban elevenebben élt a dogmatizmus. Különösen híres volt hitbéli szilárdságáról a lipcsei egyetem, ahol Leibniz atyja morálfilozófiát tanított. Mutatja az atyai ház szellemét az a kis anekdota, melyet később maga Leibniz szeretett mesélni. Még kicsi gyerek volt, mikor egy vasárnap reggel olyan magasról, hogy azt akkora gyerek ki nem szokta bírni élve, leesett. „Apám – írja Leibniz – azonnal isten különös kegyelmét ismerte fel ebben, s rögtön üzent a templomba, hogy istentisztelet után mondjanak hálaadó imát istennek. Erről az eseményről azután sokáig beszéltek a városban."

A lutheránizmusnak nem volt önálló filozófiája, a reneszánsz-arisztoteliánizmust vette át, s mellé válogatott fejezeteket az antik, középkori és reneszánsz misztika hatalmas birodalmából. A XVII. század első felében különösen a számmisztika, kabbala és kombinatorika különféle formái divatoztak a német világban. Raymundus Lullus (1232?–1315) *Ars magná*-ját újra és újra kiadták a XVII. század első felében, s a kor leghíresebb német tudósai írtak hozzá kommentárt, például Johann Heinrich *Alstedt* (1588–1638), a gyulafehérvári főiskola megszervezője, és Athanasius *Kircher* (1602–1680) atya, a jezsuita rend nagy tekintélyű természettudósa. A lutheránizmus és a németországi jezsuitizmus között gondolkozás tekintetében nem volt nagyon nagy különbség, ugyanazt a korhoz képest elmaradt, misztikus elemekkel kevert arisztoteliánizmust tanította mind a kettő.

A német gondolkozás a XVII. században nagyon elmaradt Itáliához, Franciaországhoz, Hollandiához, Angliához képest. Leibniz életművét ehhez az elmaradottsághoz kell mérni. Ő egymaga, emberfeletti szorgalommal teremtett a németeknek a kor színvonalának megfelelő filozófiát, matematikát, természettudományt és történetírást. S közben soha nem felejtette el, honnan indult, a XVII. századi német gondolkozás zavaros áradása alatt is megtalált valami ősi, még Cusanusból és a német reneszánsz mesteremberek józan bölcsességéből táplálkozó forrást. Cusanustól megtanulta azt a mély természetimádatot, amelyet Dilthey a németek igazi, „titkos" vallásának nevezett, a német polgároktól a tiszta beszédet, szorgalmat, munkaszeretetet, amit azután jelmondatként követett egész életében: *In Worten die Klarbeit, in Sachen den Nutzen* (a tiszta beszédet s a hasznos dolgokat keresd).

*

Leibniz egész életében szolgálatában állott valakinek, sohasem tudott olyan úri módra, szabadon filozofálni, mint Descartes. Ezt nem szabad elfelejteni, mert másként gondolkozik az ember, ha a fejével kell megkeresni a hasába valót. Kiváltképpen, ha valakinek olyan nagy az étvágya, mint Leibniznek. A mainzi érsek-választó, Johann Philipp von Schönborn (1605–1674) azonban igen jó gazdája volt Leibniznek, soha többet nem volt azután ilyen jó gazdája. Johann Philipp, akit a nép halála után „német Salamon" néven emlegetett, volt a harmicéves háborúban szörnyen elpusztított Németország legfőbb reménysége.

A harmincéves háború nemcsak emberéletben s anyagi javakban okozott borzasztó pusztítást (egyes becslések szerint Németország lakossága

16 millióról 6 millióra csökkent), teljesen megbénította a német nép gazdasági, társadalmi és szellemi fejlődését is. Az egykori büszke s gazdag városokkal ékes német birodalom helyén három és félszáznál több pici hercegség és fejedelemség civódott, s a harcias katona-arisztokratákat valószínűleg csak szegénységük akadályozta egymás tökéletes kiirtásában.

Pedig ez a kor máshol a nagy nemzeti államok kialakulásának a kora volt, s különösen a 20 milliósnál is nagyobb, Richelieu okos békepolitikája következtében megerősödött és egységessé vált Franciaországgal szemben a háromszázötven, egymás ellen mindig kijátszható fejedelemségből összetett német udvari világ ugyan hogyan is tudott volna helytállani? A harmincéves háborút formálisan befejező wesztfáliai béke (1648) is olyan volt, hogy a háború tényleges győztesei, a franciák, mindig beleszólhattak a német államocskák belügyeibe. A mainzi választó tudta ezt, s ha már így volt, igyekezett a francia védnökséget a béke fenntartására és minél több német állam szövetségbe egyesítésére használni. Ennek érdekében mindenfelé tompította a németséget széttépő vallási ellentétet, türelmes, józan egyházpolitikával remélte az egyházak újraegyesíthetőségét. Később – gondolta – a nemzetközi politikai helyzet kedvező alakulása esetén talán a német államszövetség a császár vezetése alatt még a franciákkal is szembenézhet. Addig is igyekezett mindent, ami hasznos, átvenni a sokkal fejlettebb nyugati szomszédtól: kultúrát, tudományt, politikai és diplomáciai tudást, gazdasági képzettséget, még a nyelvet is, ha előnyös volt. Ennek a nagy célnak az érdekében gyűjtötte össze a német világ legkiválóbb szellemi és gazdasági tehetségeit mainzi udvarába. Így került oda Leibniz is. Így lett „politikus”. Egész életében fáradozott azután, ha kellett, fejedelmek és hercegek ellenére is, hogy megszője a német haza politikai „háló-tervét”. A szót is ő teremtette, hogy „patriotizmus”. Ezt az imaginárius német hazát képviselve utazott a mainzi érsek-választó megbízásából 1672-ben Párizsba.

*

Ma már elképzelni is nehéz az ellentétet a pici német városka s a világ fővárosa között. A fiatal politikust azonban nem a fény, csillogás, szalonok, gazdagság, még csak nem is a társasági élet hallatlan édessége kápráztatta el, hanem az az új valami, aminek akkoriban Párizs volt a legfontosabb otthona: a matematikai-természettudományos műveltség. Hacsak tehette, mindig a tudósok társaságában sürgött-forgott. Hallgatta elméleti vitáikat, segített kísérleteikben. A kor legnagyobb matematikusa, maga a fényeselméjű Huygens (1629–1695) vállalta a matematikában teljességgel járatlan ifjú diplomata oktatását. Huygens figyelmeztette Leibnizet Pascal (1623–1662) munkáira és kézirataira. A szorgalmas ifjú másolt, naphosszat másolt, s Pascal sok műve a nagy másoló munkája következtében maradt a hálátlan utókorra. Pascaltól nemcsak matematikát tanult, talán elsősorban nem is matematikát. Valamit, ami Cusanuson nevelkedett gondolkozásához sokkal jobban illett Descartes racionalizmusánál, valamit, ami az ész értelmével egyenlő rangúnak tanította a szívét, valamit, ami a geometriai megértés merevségét a megsejtés finomságával enyhítette. Párizsban lett Leibniz, Pascal tanítványaként, „gondolkozó nádszál". A levegő minden rezdülésre érzékeny, sok hasonló társával együtt, s mégis különmozduló, önmagában teljes individuum. Később, tudományosabban, úgy mondja majd, hogy „monász".

Leibniz négy párizsi éve a matematika történetének legnagyobb csodája. Egy arisztotelészi szillogizmusokon és obskurus kombinációs-kabbalisztikán felnőtt keleti barbár megtalálta az egyedül alkalmas kulcsot ahhoz a természettudományos-matematikai műveltséghez, amelyet ő maga akkor még nem is ismert. Olyan nagy felfedezés volt, hogy a legtöbb matematikus, azonosnak gondolván a geometriát és a matematikát, meg sem értette sokáig, mi történt. Meg sem értették, hogy a matematikában vége lett a geometria egyeduralmának. Meg sem értették, hogy ezután majd sokkal szubtilisabb, sokkal finomabb, sokkal elképzelhetetlenebb, sokkal képtelenebb dolog lesz a matematika. Meg sem értették, hogy nincs helye semmiféle prioritásharcnak, mert Leibniz nem a differenciál- és integrálszámítás módszertanát fedezte fel, hiszen 1674-ben erre már nem volt szükség, felfedezték és kidolgozták azt tökéletesen mások: Galilei, Torricelli, Cavalieri, Roberval, Hudde, Slusius, James Gregory, Newton. Meg sem értették, hogy Leibniz sokkal egyszerűbbet és sokkal fontosabbat fedezett fel: az új matematikát, a függvények elméletét, az analízist. S ezen a területen csak két ember járt előtte, Pascal és Descartes. De Leibniz messzebbről jött, mint ők, s távolabb látott. Az ő hazájából még látszott a cusanusi misztika.

*

„Hol volt, hol nem volt, Vesztfáliában, Thunder-ten-Tronckh báró úr kastélyában… A báró úr egyike volt a tartomány leghatalmasabb urainak, már azért is, mert kastélya ajtóval és ablakokkal is dicsekedhetett. Sőt a kastély fogadótermét még faliszőnyeg is díszítette. A baromfiudvar kutyáiból szükség esetén vadászfalkát formálhatott; istállószolgái, ha kellett, hajtóknak is beváltak. S a falusi plébánost kinevezte házikáplánjának. Mindnyájan Nagyuramnak szólították, s udvariasan nevettek, ha mesélt nekik valamit."

Voltaire jellemzi így a derék Pangloss úr gazdáját, de ha röviden kellene jellemezni Pangloss úr mesterének, Leibniznek új gazdáit, a Lüneburg–Braunschweigi herceget, alig lehetne találóbb sorokat találni. Legalábbis akkor, amikor Leibniz a ház szolgálatába állott, 1676-ban. Nem-sokkal Leibniz szolgálatbalépte után ugyanis gyorsan emelkedni kezdett a Ház, szerencsés házasságok és nem utolsósorban Leibniz ügyes diplomáciája következtében. A döntő fordulatot a Ház életében Ernő-Ágost uralkodása (1679–1698) hozta. Ernő-Ágostnak sikerült kiharcolnia a kilencedik választófejedelemséget – Leibniz segítségével.

Ernő-Ágost leányát, Sophie-Charlotte-ot, a Brandenburgi választóhoz adta nőül, aki 1700-ban I. Frigyes néven porosz király lett. Brandenburg hatalma a XVII. század második felében fokozatosan nőtt, az északnémet síkság leghatalmasabb államképződménye lett. A nantes-i ediktum visszavonása (1685) után mintegy 6000 hugenotta menekült Franciaországból Berlinbe, s az ő szorgalmas munkájuk a nagy falut várossá növelte, igazi fővárossá. A Lüneburg–Braunschweigi Háznak jó kapcsolata volt XIV. Lajossal is és a Császárral is. A XVIII. század elején az angol trónviszonyok alakulása miatt komoly esélyes lett Ernő-Ágost fia, György-Lajos, I. Jakab király dédunokája.

Így lett a hannoveri udvar az európai dinasztikus politika egyik fontos centruma, s Leibniz fáradhatatlanul, különböző formában és minőségben szolgálta gazdáit. Volt a harzi bányák felügyelője és lángeszű bányagépész, mikor erre volt szükség, volt a Ház történetírója, s ennek ürügyén megteremtette a német középkor-történetírást és kritikai szövegkiadást; állandóan tárgyalt régi kedves tervéről, az egyházak újraegyesítéséről vagy legalább a protestáns egyházak egyesítéséről; megalapozta a földtörténetet, Bécsben a város repceolaj-világításáról tárgyalt, hosszú itáliai utazása alatt matematikusokkal, természettudósokkal és történészekkel értekezett; a század végén kibontakozó tudományos folyóiratirodalom legnagyobb szállítója volt Pierre Bayle (1647–1706) mellett.

Tanítványa, Sophie-Charlotte porosz királynő támogatásával megteremtette a német nép büszkeségét, a berlini tudományos akadémiát. A XVIII. század elején leginkább Berlinben élt, a királynő herrenhauseni kastélyában mindennapos vendég volt. A világpolitikai helyzet kedvezően alakult: XIV. Lajos ellen a spanyol örökösödési háborúban szövetkezett hatalmak: Anglia, Hollandia és a Császár végleg megállították a francia terjeszkedést, a töröktől felszabadított területen stabilizálódott a Császár uralma. Úgy látszott, hogy Leibniz politikai célja, amiért egész életében harcolt, megvalósulhat.

1705-ben váratlanul meghalt Leibniz leghűségesebb támogatója, Sophie-Charlotte. Berlinben nem volt maradása az irigyeitől, s Hannoverben, ahol már a buta, erőszakos, korlátolt György-Lajos uralkodott, gyanús szemmel nézték. Megpróbálta felajánlani szolgálatait Bécsnek, Nagy Péter cárnak – hiába. Mikor ura, György-Lajos 1714-ben az angol trónra jutott, az agg és érdemdús Udvari Tanácsos remélte, hogy magával viszi – hiába. Hiába minden tehetsége, ügyessége, érdeme, a hatalmasoknak nem volt szüksége rá. Bécsben nem kellett, mert nem akart katolizálni, Angliában nem kellett, mert a jelenléte sértette volna a nagy Newtont. A francia akadémián elsiratta Fontenelle, de az élve jelentkezőt a francia akadémia is elutasította. Sehol sem volt rá szükség. Pedig a XVIII. század a filozófusok százada volt, és sokkal jelentéktelenebb gondolkozók is híresek s gazdagok lettek.

*

A múlt század végén „glaszékesztyűs filozófusnak” nevezte egyik kommentátora, békülékeny és szelíd modorára célozva, diplomatikus ügyességére. Ez a jellemzés azonban nem egészen helytálló. Az „engedékeny” filozófus néhány nagyon lényeges, fontos kérdésben tapodtat sem engedett soha. S ahogy öregedett, egyre inkább ellentétbe került korával. Először a nagy elődök, Descartes és Spinoza rendszerét bírálta. Azután vita vitát követett a kortársakkal. Leibniz gondolkozása funkcionális volt, az ő világában minden összefüggött mindennel, mint a görög kozmoszban. Az új korszak gondolkozása kauzális, a jelenségeket az ok-okozati összefüggés láncára fűzték. Leibniz a lehetőségek gazdag világába ágyazta a jelenségeket, az ifjú filozófia Locke nyomán a tapasztalatok esetlegességétől függő ok-okozati viszonyon kívül nem ismert el semmit. Leibniz világa esztétikus és megbonthatatlan egész volt, a hit és az ész támogatta egymást benne. Az új gondolkozás egyik alaptétele volt, hogy hit és ész szigorúan elkülönítendő. A világ, amelyben Leibniz felnőtt, s amelyet szeretett, megváltozott. Túlságosan bonyolulttá vált, akár a kor látványos, nagy operáinak a színpada.

Leibniz gondolatvilága pedig egyre tisztult és egyszerűsödött. Lehet, hogy alapjában egész filozófiája, egész életműve nagyon egyszerű, akár azok a húsvéti énekek, amelyeket annyira szeretett. „Vannak mondatok – írja az öregember 1709-ben –, amelyek, akárhol találjuk, meghatnak s megtisztítanak. Száz nagyáriából alig akad egy-kettő, amelyet szépnek és nemesnek találnék, és megfigyeltem, hogy amit a szakemberek legtöbbre becsülnek, abban igen sokszor semmi sincsen. Az egyszerűség sokkal inkább meghat, mint a kölcsönzött díszek. Mi egyszerűbb, mint ennek a szövegnek nótája: Ecce quomodo moritur justus. Mégis, ahányszor csak hallom (és hányszor hallottam az idei böjtben, amint a kórista gyerekek fújták az utcán), mindig meghat, és megfigyeltem, hogy másoknak is tetszik.”

Ez az egyszerű összhang: ez az eleve elrendelt harmónia. És a monászok a világmindenség iskolás gyerekei. Vidáman, egymásra alig figyelve fújják a közös nótát, aminek még a szövegét sem értik: ecce quomodo moritur justus.