ДОКЛАДЫ

АКАДЕМИИ НАУК СССР

1980

ТОМ 251 № 6

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

УДК 519

Д. КАТОНА, Б.С. СТЕЧКИН

КОМБИНАТОРНЫЕ ЧИСЛА, ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ КОНСТАНТЫ И ВЕРОЯТНОСТНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

(Представлено академиком Ю.В. Прохоровым 25 X 1979)

В работе подводится итог решения задачи оценки уклонений сумм случайных независимых векторов линейного нормированного пространства. Решение достигнуто поэтапным усложнением рассматриваемых структур: системы подмножеств – системы векторов – системы случайных векторов.

1. Комбинаторные числа. Пусть S_n – неупорядоченное n-элементное $(|S| = n)$ множество. Число Турана $T(n,k,l)$ есть то наименьшее m, при котором существует система из l-подмножеств $F = \{S_l^{(i)}\}_{1 \leqslant i \leqslant m}$, $S_l^{(i)} \subset S_n$, для которой $\forall S_k \subset S_n$ $\exists S_l^{(i)} \in F$: $S_l^{(i)} \subset S_k$. Известно (см. [2, 4]), что

$$\lim_{n\to\infty} T(n,k,2)n^{-2} = \frac{1}{(2(k-1))}, \qquad \lim_{n\to\infty} T(n,k,l)n^{-l} \geqslant \frac{(k-l)!}{k!}.$$

2. Геометрические константы. Пусть X – линейное нормированное пространство и $\sigma_n = \{x_1, \ldots, x_n\}$ – система (т.е. совокупность не обязательно различных) векторов $x_i \in X$, $\|x_i\| \geqslant 1$. Подсистема $\sigma_l \subset \sigma_n$ есть l-система $\sigma_l = \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_l}\}$ такая, что $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_l \leqslant n$. Геометрическая константа определяется как число

$$\delta(l,k;X) = \inf_{\sigma_k \subset X} \max_{\sigma_l \subset \sigma_k} \Big\| \sum_{x \in \sigma_l} x \Big\|.$$

Известно (см. [3, 5]), что если H – по крайней мере $(k-1)$-мерное гильбертово пространство, то

$$\delta(l,k;H) = \sqrt{\frac{l(k-l)}{k-1}}. \tag{2}$$

Теорема 1. *Пусть $k > l$; тогда*

$$\inf_X \delta(l,k;X) = \delta(l,k;l_\infty^k) = \frac{l}{2l-1}, \tag{3}$$

где infimum *берется по всем линейным нормированным пространствам.*

Доказательство. Положим $\sigma_{l+1} = \{x_1, \ldots, x_{l+1}\}$ и

$$y_j = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{l+1} x_i, \qquad j = 1, \ldots, l+1.$$

Тогда для всякого $x_i \in \sigma_{l+1}$ справедливо тождество

$$lx_i = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{l+1} y_j - (l-1)y_i,$$

из которого, согласно неравенству треугольника, имеем

$$\max_j \|y_j\|(l + (l-1)) \geqslant l\|x_i\| \geqslant l,$$

что в силу произвольности σ_{l+1} и влечет (3) как нижнюю оценку. Для доказательства обратного неравенства в пространстве l_∞^k (пространство $\mathbf{R}^k$ с нормой $\|x\| = \max_{1 \leq i \leq k} |x_i|$) рассмотрим систему из k векторов размерности k вида

$$\left(-1, \frac{1}{2l-1}, \ldots, \frac{1}{2l-1}\right), \left(\frac{1}{2l-1}, -1, \ldots, \frac{1}{2l-1}\right), \ldots, \left(\frac{1}{2l-1}, \frac{1}{2l-1}, \ldots \ldots, -1\right).$$

Непосредственная проверка удостоверяет, что длина суммы любых l векторов этой системы равна $\frac{l}{2l-1}$.

3. Связь между T и δ существенна для дальнейшего.

Теорема 2 ([1]). *Во всякой системе $\sigma_n \subset X$ найдется по крайней мере $T(n, k, l)$ подсистем $\sigma_l \subset \sigma_n$ таких, что*

$$\left\| \sum_{x \in \sigma_l} x \right\| \geq \delta(l, k; X).$$

Положим $\tau_X(n, \delta, l) = \inf_{\sigma_n \subset X} \left| \left\{ \sigma_l \subset \sigma_n : \left\| \sum_{x \in \sigma_l} x \right\| \geq \delta \right\} \right|$; тогда теорема 2 эквивалентна неравенству

$$\tau_X(n, \delta, l) \geq T(n, k, l). \tag{4}$$

4. Вероятностные неравенства. Основной результат работы составляет

Теорема 3. *Пусть X – сепарабельное линейное нормированное пространство, $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_l$ – независимые и одинаково распределенные в нем случайные векторы.*

Тогда для любого $\delta \in \mathbf{R}^1$ справедливо неравенство

$$P\left\{ \left\| \sum_{i=1}^{l} \xi_i \right\| \geq x\delta \right\} \geq l! \lim_{n \to \infty} \tau_X(n, \delta, l) n^{-l} P\{\|\xi_i\| \geq x\}^l. \tag{5}$$

Следствием теорем 2 и 3 служит

Теорема 4. *Пусть X сепарабельно, а $\xi_1, \ldots, \xi_l$ – независимые и одинаково распределенные в X случайные векторы.*

Тогда при любом натуральном $k \geq l$ справедливо неравенство

$$P\left\{ \left\| \sum_{i=1}^{l} \xi_i \right\| \geq x\delta(l, k; X) \right\} \geq l! \lim_{n \to \infty} \frac{T(n, k, l)}{n^l} P\{\|\xi_i\| \geq x\}^l. \tag{6}$$

Действительно, достаточно в (5) положить $\delta = \delta(l, k; X)$ и воспользоваться теоремой 2 в форме (4).

Доказательство теоремы 3. Ориентированный l-граф на множестве вершин V есть пара $G = (V, E)$, где $E \subset V^l$, а элемент $e \in E$, $e = (v_1, \ldots, v_l) \in V^l$ именуется ориентированным l-ребром. Неориентированный l-граф понимается как результат факторизации всех ребер ориентированного l-графа по всем перестановкам элементов этих ребер, так что турановское число для ориентированных l-графов (в коих все ребра наличествуют вместе со всеми своими перестановками) будет не меньше $l!\,T(n, k, l)$. Если $G = (V, E)$ – ориентированный l-граф, а $W \subset V$, то через G_W обозначаем собственный подграф графа G, индуцированный вершинами W, т.е. $G_W = (W, E \cap W^l) = (W, E_W)$. Граф G^v назовем удвоением графа G (по вершине v), если G^v на вершинах $(V - \{v\}) \cup \{v', v''\}$ содержит те и только те ребра, которые можно получить из ребер G заменой в них v на v' или на v''. Класс конечных ориентированных l-графов $\mathcal{G}$ называем удвояемым, если всякое удвоение любого графа из этого класса тоже принадлежит этому классу. Класс графов $\mathcal{G}$ называем наследственным, если всякий собственный подграф любого графа из этого класса тоже принадлежит этому классу.

Пусть теперь $H(n, \mathcal{G}) = \min\limits_{G \in \mathcal{G}} \dfrac{|E|}{n^l}$, где $G = (V, E)$ — ориентированный l-граф на n вершинах V, $|V| = n$.

Пусть $M = (X, \sigma, \mu)$ — пространство с мерой. Бесконечный ориентированный l-граф $G = (X, E)$ называется измеримым, если E измеримо в произведении $M^l = (X^l, \sigma^l, \mu_l)$, а $\mu_l(E)$ — его мера. В ([6]) показано, что если E измеримо, $\mathcal{G}$ удвояем и наследствен, все конечные $E_W \in \mathcal{G}$, то предел $\lim\limits_{n\to\infty} H(n, \mathcal{G})$ существует и выполняется неравенство

$$\frac{\mu_l(E)}{\mu^l(X)} \geqslant \lim_{n\to\infty} H(n, \mathcal{G}). \tag{7}$$

Пусть теперь $\mathcal{G}$ состоит из всех конечных l-графов вида

$$\Big(\{\{x_1, \ldots, x_n\}: \ x_i \in X, \ \|x_i\| \geqslant x\}, \ \Big\{(x_{i_1}, \ldots, x_{i_l}): \ 1 \leqslant i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_l \leqslant n, \ \Big\|\sum_{j=1}^{l} x_{i_j}\Big\| \geqslant \delta x\Big\}\Big).$$

Очевидно, что $\mathcal{G}$ наследствен. Ясно, что $\mathcal{G}$ и удвояем: если удваиваем x_n, то получаемый граф совпадает с графом

$$\Big(\{x_1, \ldots, x_n, x_n\}, \ \Big\{(x_{i_1}, \ldots, x_{i_l}), \ 1 \leqslant i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_l \leqslant n: \ \Big\|\sum_{j=1}^{l} x_{i_j}\Big\| \geqslant \delta x\Big\}\Big),$$

что по определению лежит в $\mathcal{G}$. Ясно также, что

$$H(n, \mathcal{G}) \geqslant \frac{l!\,\tau_X(n, \delta, l)}{n^l}.$$

Пространство с мерой имеет вид

$$(\{x_i \in X: \ \|x_i\| \geqslant x\}, \ \sigma, P),$$

$$E = \Big\{(x_{i_1}, \ldots, x_{i_l}). \ 1 \leqslant i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_l \leqslant n, \ \Big\|\sum_{j=1}^{l} x_{i_j}\Big\| \geqslant \delta x, \ x_{i_j} \in X, \ \|x_{i_j}\| \geqslant x\Big\}.$$

Таким образом, прямое использование (7) влечет неравенство

$$\frac{P\Big\{\Big\|\sum\limits_{i=1}^{l} \xi_i\Big\| \geqslant \delta x\Big\}}{P\{\|\xi_i\| \geqslant x\}^l} \geqslant l! \lim_{n\to\infty} \frac{\tau_X(n, \delta, l)}{n^l}.$$

Теперь использование теорем 1, 4 и (1), (2) влечет

Следствие. *Во всяком сепарабельном X справедливы неравенства*

$$P\Big\{\Big\|\sum_{i=1}^{l} \xi_i\Big\| \geqslant \frac{xl}{2l-1}\Big\} \geqslant \frac{1}{l+1} P\{\|\xi_i\| \geqslant x\}^l; \tag{8}$$

$$P\{\|\xi + \eta\| \geqslant \tfrac{2}{3}x\} \geqslant \tfrac{1}{2} P\{\|\xi\| \geqslant x\}^2. \tag{9}$$

В гильбертовом пространстве справедливы неравенства

$$P\Big\{\Big|\sum_{i=1}^{l} \xi_i\Big| \geqslant x\sqrt{\frac{l(k-l)}{k-1}}\Big\} \geqslant \frac{1}{\binom{k}{l}} P\{|\xi_i| \geqslant x\}^l; \tag{10}$$

$$P\Big\{|\xi + \eta| \geqslant x\sqrt{\frac{2(k-2)}{k-1}}\Big\} \geqslant \frac{1}{k-1} P\{|\xi| \geqslant x\}^2. \tag{11}$$

5. **Замечание.** Естественный вопрос о точности полученных неравенств связан с точностью (4); в ряде случаев (4) неточно. Неравенство (11) неулучшаемо по коэффициенту правой части (и еще по показателю степени, если $k = 3$ и размерность $\geqslant 2$). По поводу малоразмерных пространств см. ([3]). Допустимо расширение этих неравенств на алгебраические структуры, например, коммутативные полугруппы.

Авторы выражают признательность всем, кто на протяжении долгого времени способствовал поэтапному продвижению в решении этой задачи, а именно: В. Арестов, В. Бердышев, М. Кантер, Д. Саас, А. Сидоренко, Г. Тушнадь, Г. Фейеш Тот.

Математический институт им. В.А. Стеклова
Академии наук СССР, Москва

Поступило
24 XI 1979

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Б.С. Стечкин,* Зборн.радова Мат.инст., Нова сер., 2 (10) (1977). [2] *П. Эрдеш, Дж. Спенсер,* Вероятностные методы в комбинаторике, М., ''Мир'', 1976. [3] *Д. Катона,* Теор. вероятн. и ее примен., т. 22, 3 (1977). [4] *G. Katona, T. Nemetz, M. Simonovitz,* Mat.Lapok, v. 15, 1–3 (1964). [5] *G. Katona,* ibid., v. 20, 1–2 (1969). [6] *G. Katona,* Combinatorics, J.Bolyai Math. Soc., v. 18, v. 2, Amsterdam – Oxbridge – N.Y., 1978.