GALILEI-RELATIVISZTIKUS FOLYADÉKMECHANIKA

Ván Péter
MTA WIGNER FIZIKAI KUTATÓKÖZPONT RÉSZECSKE- ÉS MAGFIZIKAI INTÉZET, BUDAPEST,
BME ENERGETIKAI GÉPEK ÉS RENDSZEREK TANSZÉK, BUDAPEST,
MONTAVID TERMODINAMIKAI KUTATÓCSOPORT, BUDAPEST

Megadjuk a nemrelativisztikus, más néven Galilei-relativisztikus disszipatív folyadékok alapmennyiségeit, mérlegeit, termodinamikai összefüggéseit és kiszámoljuk az entrópiaprodukciót a vonatkoztatási rendszertől függetlenül.

A szokásos alapmennyiségek, tömeg, impulzus, energia, hőáram, nyomás és diffúziós áramsűrűség, a harmadrendű energia-lendület-tömegsűrűség tenzor tér- és időszerű komponenseiként adódnak. Levezetjük az alapmennyiségek és mérlegek transzformációs szabályait és bebizonyítjuk, hogy a nemegyensúlyi termodinamikai keretelmélet, azaz a Gibbs-reláció, az extenzivitási feltétel és az entrópiaprodukció is abszolút, azaz független a vonatkoztatási rendszertől. Végül értelmezzük és felírjuk a szokásos relatív kontinuitási-Fourier-Navier-Stokes-féle egyenleteket.

Az elmélet egyik következménye, hogy a belső energia, kinetikus energia és a teljes energia közti kapcsolat a Galilei-kovariáns energia transzformációs szabálya.

1. BEVEZETÉS

A kis sebességű fizikai folyamatokra vonatkozó tapasztalataink leírására kialakult az abszolút, mozgástól függetlenül múló idő fogalma. A tér azonban ekkor is relatív, különbözik az egyes megfigyelők számára. A nemrelativisztikus téridő Galilei-relativisztikus. A nagy sebességű mozgások és a fizika mezőelméletei alapján ismert (speciális) relativisztikus téridő fogalmai segítségével a négydimenziós, abszolút időt és relatív teret tartalmazó, klasszikus téridőnek is adhatunk pontos matematikai modellt [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]. Mivel mindennapi tapasztalataink körében magabiztosabban mozgunk, ezért egy ilyen modell haszna prediktív fizikai elméletként első pillantásra nem nagyon világos. Ne feledjük azonban, hogy a klasszikus térfogalom fejlődése folyamán a matematikai eszközöknek a valódi fizikai tartalomhoz történő igazítása mennyire fontos volt. Például a koordinátázás kiküszöbölése és az absztraktabb, valós számhármasok helyett vektorterekre alapozott modell és jelölésmód lényegesen megkönnyítette az elvi kérdések megfogalmazását és átlátását. Ma már a koordinátamentes jelölés és az erre alapozott számítási módszerek általánosan elterjedtek a mérnöki gyakorlatban is.

Ebben a munkában az egykomponensű folyadékok példáján amellett érvelünk, hogy az időt is érdemes bevonnunk egy hasonló leírásba, ilyen módon a koordinátázáshoz hasonlóan kiküszöbölve a vonatkoztatási rendszert a folyadékok leírásából. Így a legmegszokottabb összefüggéseink átláthatóbbak, világosabbak, szebbek és legfőképpen általánosíthatóbbak, ezáltal végső soron alkalmazhatóbbak lesznek.

A Galilei-relativisztikus téridő legfontosabb sajátossága, hogy az idő abszolút, azaz függetlenül telik a különféleképpen mozgó megfigyelők számára. Az *abszolút* jelzőt a továbbiakban pontosan ilyen értelemben, a vonatkoztatási rendszertől való függetlenség jelzésére fogjuk használni, élesen megkülönböztetve a hasonló jelentésű, de többféle értelemben használt objektív vagy kovariáns jelzőktől.

Régóta ismeretes, hogy tér és az idő nem vektortér, hanem valójában affin tér, hiszen nincs kitüntetett középpontja [1, 3, 4]. A mi tárgyalásunkban ez most nem fontos, ezért bármily egyszerű is a megfelelő általánosítás, ebben a munkában lényegében csak vektorterek fordulnak elő, a Galilei-relativisztikus téridő egy egyszerűsített modelljét használjuk. Az A. Függelékben adjuk meg pontosabban, hogy milyen értelemben. Hasonlóan nem foglalkozunk a mértékegységek megfelelő matematikai reprezentációjával, bármennyire is érdekes ez gyakorlati és elvi szempontból is [9, 10].

A középpontmentesség, illetve a mértékegységek elégtelen matematikai reprezentációja mellett megszokott téridő képünkben van egy másik probléma, amely első pillantásra az előbbiektől is egyszerűbbnek és kevésbé fontosnak tűnhet: *az abszolút idő nem részhalmaza a négydimenziós Galilei-relativisztikus téridőnek*. Időnek és térnek nincs bezárt szöge, ezért azt $\mathbb{R}^4$-ként, vagy más módon euklidészi terek Descartes-szorzataként reprezentálva máris megfigyelőtől függ a leírásunk. Az idő megfelelő reprezentációjának nagyon lényeges következményei vannak. Egyik legfontosabb, hogy nemrelativisztikus fizikai elméletekben téridő vektorok és kovektorok között nincs kitüntetett megfeleltetés. Ebben a tekintetben a Galilei-relativisztikus téridő nem határesete a bonyolultabb matematikájú speciális vagy általános relativitáselméletnek, az objektív fizikai mennyiségek kezelése különbözik a relativisztikus számításokban megszokottól, a relativisztikus számításokban járatosak számára is odafigyelést igényel. Például másodrendű tenzornak és kotenzornak nincs nyoma (spurja). Ezért téridőkovektornak nincs abszolút divergenciája és téridővektornak nincs abszolút rotációja. Ugyancsak ennek a következménye, hogy vektorok és kovektorok nem ugyanúgy transzformálódnak, vagyis egyik megfigyelő relatív mennyiségeit átszámolva a másik megfigyelő mennyiségeire más a szabály. A harmadik lényeges dolog, ahol a Galilei-relativisztikus téridő különbözik a speciális relativisztikustól, az, hogy nemcsak a téridőmennyiségek abszolútak, hanem típustól függően azok bizonyos részei is. Vektor időszerű komponense, kovektor térszerű komponense abszolút.

Számos olyan probléma jelentkezik a nemrelativisztikus fizikában, amely a téridő pontatlan modellje miatt lép fel.

1. Egyik legfontosabb és nagyon sokrétűen vitatott az úgy nevezett anyagi objektivitás elve. Az elv fizikailag magától értetődő állítást fogalmaz meg, azt mondja ki, hogy az anyag független a megfigyelőtől és ezért az anyagot leíró fizikai mennyiségek, vonatkozó mozgásegyenletek és anyagtörvények is azok kell legyenek. Nemrelativisztikusan, az abszolút idő miatt, általában csak a hármasvektorként reprezentálható mennyiségekre vonatkozó transzformációs invarianciaként adják meg az elv matematikai megfogalmazásait. Könnyen látható, hogy kontinuumok esetén a szokásos inerciarendszerekre alapozott Galilei-transzformációra invariáns formák megkövetelésénél több kell, ezért az elv legelfogadottabb, Nolltól származó megfogalmazása a forgásinvarianciát is megköveteli [11, 12, 13, 14, 15]. Mind a megfogalmazás, mind maga az elv nagyon kiterjedt vitát gerjeszt máig is a kontinuumfizika alapjai iránt érdeklődők körében. A legfontosabbnak tűnő munkák a teljesség igénye nélkül: [16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41].

   A Galilei-relativisztikus téridő-modell segítségével megmutatható, hogy egyrészt a formális invariancia (forgó megfigyelő szögsebességétől való függetlenség) nem megfelelő követelmény, sőt a vonatkoztatási rendszertől való függetlenség megkövetelheti, hogy a transzformációs szabályok tartalmazzák a relatív mozgás jellemzőit [42]. Ez a Galilei-transzformáció esetén elég nyilvánvaló, mint látni is fogjuk. Másrészt pedig téridő szempontból a Noll-féle anyagi objektivitás definíció önellentmondásos [43].

2. A kontinuummechanikai alapmennyiségektől szintén elvárható a vonatkoztatási rendszertől függetlenség. Például a véges rugalmas deformáció végtelen sok Nollértelemben objektív mértéke helyett a téridőmodell egyértelműen kitüntet egyetlen természetes deformációfogalmat [44, 45, 46], amely más szempontokból is megkülönböztetett [47, 48, 49, 50, 51].

3. Egy másik problémakör a folyadékok leírásának alapmennyiségére, a folyadék sebességére vonatkozik. Brenner szerint a kontinuitási egyenletben és a lendületmérlegben előforduló sebességek nem nyilvánvalóan ugyanazok [52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61]. Ez a kérdés analóg a relativisztikus elméletekben felmerülő áramlásválasztás kérdésével [62]. Végső soron az a kérdés, hogy mi tulajdonképpen a folyadék sebessége? Mi mozog a folyadékban, a tömege, lendülete vagy energiája? Van választásunk ennek kijelölésében? Mivel az összes egyenletünkben relatív

sebességek fordulnak elő, ezért ennek a kérdésnek megválaszolásához a téridőviszonyok pontos átgondolása is szükséges.

4. Egy másik, természetesen felvetődő szempont a relativisztikus disszipatív folyadékok elméletével való konzisztencia. Ennek kapcsán talán a legszembetűnőbb eltérés, hogy relativisztikusan az energia-impulzus tenzor kovariáns és ennek természetes része az energia, transzformációs tulajdonságai pedig ebből következnek. Mi lehet az ennek megfelelő fizikai mennyiség Galilei-relativisztikusan? A kinetikus energia a relatív sebességgel kifejezve nyilvánvalóan nem objektív mennyiség. De tulajdonképpen hogyan transzformálódik az energia?

5. Természetesen a statisztikus leírásokkal, pontosabban a kinetikus gázelmélettel való konzisztencia is lényeges. Hiszen onnan kiindulva a téridő-beágyazottság meghatározható, legalábbis bizonyos transzformációs szabályokra következtethetünk [63, 64]. Másrészt pedig a kontinuum-alapmezőknek és az ezekre vonatkozó mozgásegyenleteknek a származtatási módja (Chapman–Enskog- vagy momentumsorfejtéssel) a termodinamikai mennyiségekre vonatkozóan is informatív, például az energia a nyomással szoros kapcsolatban határozódik meg. Ugyanakkor érdekes módon magának a kinetikus elméletnek az objektivitása is kérdésessé vált az elégtelen téridő modell használata miatt [64].

6. Kérdés még a kontinuumok esetén lokális egyensúlyként értelmezett termodinamikai háttér relatív vagy abszolút volta is. Relativisztikusan a mozgó testek termodinamikai leírásától, beleértve elsősorban a Gibbs-relációt, alapvetően elvárjuk a kovarianciát, és ez egy lényeges kérdés már speciális relativitáselmélet kezdetei óta (lásd pl. [65]). Érdekes módon nemrelativisztikusan ez csak ritkán merül fel [66], pedig a lokális egyensúly csak lokális homogenitást jelent. A termodinamikai mennyiségek Galilei-invarianciája egyáltalán nem nyilvánvaló, gondoljunk csak az előző pontban emlegetett energiára. Ezért az egész Gibbs-reláció Galilei-invarianciája sem az. Ugyanide tartozik a disszipáció, illetve a termelődő hő objektivitása is. Függhet ez attól, hogy milyen vonatkoztatási rendszerből nézem?

A továbbiakban a legegyszerűbb, Galilei-relativisztikus folyadékok abszolút alapmezőit, a rájuk vonatkozó mérlegeket, termodinamikai összefüggéseket és végül az entrópiaprodukciót számoljuk ki. Ezzel párhuzamosan a relatív, szokásos tárgyalást is beillesztjük a gondolatmenetbe, párhuzamosan megadva a megfelelő transzformációs szabályokat és a pontos feltételeket is, amelyekkel az abszolút egyenletekből a relatív kontinuitás-Navier–Stokes–Fourier-egyenletrendszer megkapható.

Ebben az írásban egy sajátos indexes formalizmust használunk, amely remélhetőleg elégé áttekinthető és rugalmas ahhoz, hogy a folyadékmechanika relatív térvektorainak egyszerűen megértsük a vonatkoztatási rendszertől független értelmét, illetve az abszolút téridő tenzorokkal számításokat végezzünk. Háromféle indexet vezetünk be. A Galilei-relativisztikus téridő tenzorainak kontravariáns komponenseit felső $a, b, c, ...$, a kovariáns komponenseket alsó $a, b, c, ...$ indexekkel jelöljük. Továbbra is az abc elejéről választva, de felülvonással a térszerű négyesvektori és négyeskovektori indexeket jelöljük, $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, ..$-vel. A megszokott relatív háromdimenziós vektorok és tenzorok indexeit megkülönböztetetten $i, j, k, l, ..$ jelöli. A téridőmodellt, az alkalmazott számítási módot és jelölésrendszert részletesen a Függelékek tartalmazzák. A tárgyalás kezdettől fogva alapoz a Galilei-relativisztikus téridőmodell alapjait ismertető (A) és a legfontosabb transzformációs szabályokat levezető (B) Függelékek részletes ismeretére.

2. Mérlegek és transzformációs szabályaik

A kontinuumfizika alapvető mérlegei az egyes fizikai mennyiségek extenzivitását kifejező téridő-sűrűségvektorok négyesdivergenciái. Egy adott téridőtartományban a fizikai mennyiség megváltozása a térfogatban történő lokális változásból és annak határán történő kiáramlásból adódik össze. Ezt szokásosan megfelelő széthasított mennyiségekkel fejezzük ki. Tehát egy A^a vektormező esetén annak $A^a = Au^a + A^{\bar{a}}$ u-formáját használva:

$$\partial_a A^a = (\tau_a(d_u - u^b\partial_b))(Au^a + A^{\bar{a}}) = d_u A + A\partial_{\bar{a}} u^a + \nabla_{\bar{a}} A^{\bar{a}} = 0, \tag{1}$$

ahol a téridőindex, $\bar{a}$ térszerű index. $A = \tau_a A^a$ és $A^{\bar{a}} = \pi^{\bar{a}}_b A^b$ az A^a vektor idő- és u-térszerű részei, illetve $d_u = u^a\partial_a$ és $\nabla_{\bar{a}} = \delta^b_{\bar{a}}\partial_b$ a téridő deriválás idő- és térszerű része, azaz a relatív u-időderivált és az abszolút térderivált (lásd A. Függelék). (1) az abszolút mérleg mérleg u-relatív mennyiségekkel, az A^a téridő vektor és a ∂_a deriválás u-időszerű és u-térszerű részeivel kifejezett formája.

A relatív mérlegeket többféle módon is meg szokás adni, aszerint, hogy a mérleg egyes részei milyen sebesség szerint vannak széthasítva idő- és térszerű részekre. Ha a deriválást, a négyes sűrűséget és az u^a sebességmezőt is u^a szerint széthasított relatív formában adjuk meg, akkor:

$$\partial_a A^a \overset{u}{\prec} \begin{pmatrix} d_u & \nabla_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ A^i \end{pmatrix} = d_u A + \nabla_i A^i = 0. \tag{2}$$

Amennyiben u^a-t a közeg lokális sebességének tekintjük, akkor ez a közeghez rögzített *anyagi* (szilárd testek esetén anyagi sokaságon értelmezett) formája az abszolút mérlegnek. A mérleg *szubsztanciális* formáját akkor kapjuk, ha egy másik "labor" vonatkoztatási rendszer u'^a sebességével széthasított idő- és térszerű mennyiségeket fejezzük ki az u^a

komponensekkel:

$$\begin{pmatrix} d_{u'} & \nabla'_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' \\ A'^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_u - v^i\nabla_i & \nabla_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ A^i + Av^i \end{pmatrix} = d_u A + A\nabla_i v^i + \nabla_i A^i = 0, \quad (3)$$

ahol $v^i = u^a - u'^a$ a külső, labormegfigyelőnek a közeghez képesti relatív sebességét jelöli. A mérleg *lokális* formáját akkor kapjuk, ha a szubsztanciális mérlegben az u'^a szerint széthasított deriváltnak megtartjuk u'^a szerinti komponenseit:

$$\begin{pmatrix} d_{u'} & \nabla'_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' \\ A'^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{u'} & \nabla_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ A^i + Av^i \end{pmatrix} = d_{u'} A + \nabla_i (A^i + Av^i) = 0. \quad (4)$$

A külső, labormegfigyelő szerinti $d_{u'}$ időderiváltat a szokásos parciális időderiváltat, az abszolút térderiválás pedig az A'^i lokális áramsűrűségre hat, amit az A^i szubsztanciális u-áramsűrűséggel fejeztünk ki.

Tehát a mérlegek három alapvető alakja, azaz az anyagi, a szubsztanciális és a lokális forma a közeg u^a és a megfigyelő u'^a sebességmezője szerinti széthasított négyesderivált és széthasított négyesvektormező kombinációitól függ. Mindegyik alak a vektormező abszolút, vonatkoztatási rendszertől független négyesdivergenciája két tetszőleges négyessebességmező segítségével kifejezve. A Galilei-transzformációs szabályok segítségével közvetlenül is belátható a mérlegek vonatkoztatási rendszertől független volta [40].

Az alapvető fizikai mennyiségek azonban nemcsak négyesvektorok, hanem magasabb vagy alacsonyabb rendű tenzorok is lehetnek. A speciális relativitáselmélet alapján például egy energia- vagy tömegimpulzus tenzor bevezetése látszik kézenfekvőnek. Kérdés, hogy Galilei-relativisztikusan mi lehet az egykomponensű folyadékokat jellemző fizikai mennyiség?

2.1. Hányad rendű tenzor vagy kotenzor?

A Galilei-relativisztikus téridő szigorúbb feltételeket jelent, mint a speciális relativisztikus, mert a téridővektorok és kovektorok között csak a lineáris szerkezet jelent összeköttetést. Téridő-kovektormezőnek, -kotenzormezőnek nem képezhető divergenciája és így mérlege sem lehet alapvető, illetve vegyes tenzoroknak nem tudjuk sem a szimmetrikus, sem az antiszimmetrikus részét képezni.

Másrészt az ismert fizikai mennyiségeknek ismert transzformációs tulajdonságai vannak. A vonatkoztatási rendszertől független, téridőre alapozott tárgyalás esetén a tér- és időszerű komponensek transzformációs szabályai következnek a téridőn definiált mennyiségek tulajdonságaiból. Ezt az elméleti keretet kell összehangolni a tapasztalattal. Például az energiasűrűség transzformációs szabálya elvileg ismert. Legalábbis tudjuk, hogy a hármasvektorok a helyzethez hasonlóan Galilei-traszformálódnak. Azonban van néhány más, kézenfekvően transzformációs szabálynak tekinthető megszokott összefüggésünk is. Például, a teljes energia a belső és a kinetikus energia összege, ami azt jelentik, hogy az anyaghoz rögzített vonatkoztatási rendszerből nézve az energia maga az belső energia, ahhoz képest adott sebességgel mozogva pedig kiegészítődik a kinetikus energiával. Ezek szerint, az energiasűrűség transzformációs szabálya a tapasztalat szerint:

$$e_T = e_b + \frac{\rho}{2}v^2.$$

A fő kérdés, hogy ez alapján miféle fizikai mennyiségről lehet szó? A B. Függelékben megadtuk, hogy egy transzformációs szabály két különböző megfigyelő, azaz vektormező, által idő- és térszerű részekre bontott négyestenzorok komponenseinek viszonyát adja meg a relatív sebességek segítségével. Kiszámoltuk továbbá a téridő vektorok, kovektorok és a másodrendű tenzorok transzformációs tulajdonságait. Ez alapján látjuk, hogy egy legalább másodrendű tenzor valamelyik komponenséről lehet szó. Másodrendű kotenzor idő-időszerű komponense, másodrendű tenzornak pedig a tér-térszerű komponense, amelyik sebességgel négyzetesen transzformálódik.

Mivel másodrendű kotenzornak Galilei-relativisztikusan nem képezhetjük a divergenciáját, ezért az energia lehet például egy *harmadrendű kontra-kokovariáns tenzor* idő-időszerű komponense. A fenti transzformációs szabály egyértelműen ilyen tenzort eredményez, feltételezve, hogy az energia skalár mennyiség, továbbá, hogy másodrendű kotenzornak nem létezik a négyes divergenciája, és így nem írható fel a abszolút mérlege.

Egy másik lehetőség, hogy figyelembe vesszük a kinetikus elmélettel való kompatibilitás követelményét is. Ekkor észrevesszük, hogy energia egy másodrendű tenzornak a nyoma, pontosabban az egyrészecske-valószínűségsűrűség függvény sebességgel képezett második momentumának nyomaként adódik [64, 67]. A kinetikus elméletben ezzel összefüggésben, az ideális gáz nyomásra vonatkozó állapotegyenletével összekötve kapjuk az energiát. Téridő-szempontból azonban másodrendű tenzor nem elegendő, hiszen az energiamérleghez az energia árama, azaz a következő momentum, mint harmadrendű hármastenzor is kell. Ezt kiválóan mutatja a másodrendű tenzoron alapuló Galilei-relativisztikus abszolút elmélet, ahol az energiamérleg függetlenül léphet csak fel [68]. A kinetikus elmélet harmadik momentumára tekintettel pedig megsejthetjük, hogy a fenomenologikus elméletben harmadrendű kontravariáns tenzor az alapmennyiség. Ennek divergenciája egyszerre kell megadja a Galilei-relativisztikus kontinuumelmélet alapmérlegeit a tömegre, a lendületre és az energiára vonatkozóan. A következő fejezetekben megmutatjuk, hogy ennek az alapmennyiségnek a segítségével valóban következetes elméletet építhetünk fel.

Meglepő módon elég hasonló eredményt kapunk akkor is, ha feltesszük, hogy egy harmadrendű kontra-kokovariáns tenzor az alapmennyiség. Mindkét esetben ugyanazok a transzformációs szabályok és ugyanaz az entrópiaprodukció. (A transzformációs szabályokat illetően lásd a C. Függeléket.) A kinetikus elmélettel való teljes kompatibilitás azonban egyértelműen a harmadrendű kontravariáns tenzor választását tünteti ki, ezért a továbbiakban ezt tekintjük a Galilei-relativisztikus kontinuumok objektív fizikai alapmennyiségének.

3. A TÖMEG-LENDÜLET-ENERGIA TENZOR ÉS TRANSZFORMÁCIÓS SZABÁLYAI

Ezek után tekintsünk egy $Z^{abc} : M \to \mathbb{M} \otimes \mathbb{M} \vee \mathbb{M}$ tenzormezőt, az egykomponensű egyszerű anyag *tömeg-lendület-energia tenzorának* nevezünk. Feltételezzük, hogy a tenzormező második és harmadik rendjében szimmetrikus, ezt jelzi a $\vee$ szimbólum az értékkészlet jelölésében. A továbbiakban ezt a szimmetriát nem jelöljük külön, csak utalunk rá a fontos esetekben. Ez a tenzor egy tetszőlegesen adott $u^a \in V(1)$ négyessebességgel képzett komponenseivel a következő általános u-formába írható:

$$\begin{aligned} Z^{abc} &= z^{bc}u^a + z^{\bar{a}bc} \\ &= \left(\rho u^b u^c + p^{\bar{b}}u^c + u^b p^{\bar{c}} + e^{\bar{b}\bar{c}}\right) u^a + \left(j^{\bar{a}}u^b u^c + P^{\bar{a}\bar{b}}u^c + P^{\bar{a}\bar{c}}u^b + q^{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}\right), \end{aligned} \tag{5}$$

ahol

$$\begin{aligned} z^{bc} &= \tau_a Z^{abc}, \\ z^{\bar{a}bc} &= \pi^{\bar{a}}_{d} Z^{dbc}. \end{aligned} \tag{6}$$

Ez a két komponens a sűrűségek és az áramok tenzorai, azaz a z^{bc} tömeg-lendület-energiasűrűség tenzor, illetve $z^{\bar{a}bc}$ a diffúzió-nyomás-energiaáramsűrűség tenzor. τ_a az időkiértékelés, $\pi^{\bar{a}}_{b}$ pedig a négyesvektorok u-térszerű részét képező u-projekció. A további jelölések pedig:

- $\rho = \tau_b\tau_c z^{bc} = \tau_a\tau_b\tau_c Z^{abc}$ a tömeg-lendület-energia tenzor idő-idő-időszerű része, a *sűrűség*.
- $p^{\bar{b}} = \pi^{\bar{b}}_{d}\tau_c z^{dc} = \tau_a\pi^{\bar{b}}_{d}\tau_c Z^{adc}$ a tömeg-lendület-energia tenzor idő-idő-térszerű része, a *lendületsűrűség*. A tenzor szimmetriája miatt ez megegyezik a $p^{\bar{c}} = \tau_b\pi^{\bar{c}}_{d} z^{bd}$ idő-tér-időszerű résszel.
- $e^{\bar{b}\bar{c}} = \pi^{\bar{b}}_{d}\pi^{\bar{c}}_{e} z^{de} = \tau_a\pi^{\bar{b}}_{d}\pi^{\bar{c}}_{e} Z^{ade}$ az *energiasűrűség-tenzor*, a Z^{abc} tenzor idő-tér-térszerű része.
- $j^{\bar{a}} = \pi^{\bar{a}}_{d}\tau_b\tau_c Z^{dbc}$ a *diffúziós áramsűrűség*, a Z^{abc} tenzor tér-idő-időszerű része.
- $P^{\bar{a}\bar{b}} = \pi^{\bar{a}}_{d}\pi^{\bar{b}}_{e}\tau_c Z^{dec}$ a *nyomás*, a Z^{abc} tenzor tér-idő-térszerű része. A tenzor szimmetriája miatt ez egyenlő $P^{\bar{a}\bar{c}} = \pi^{\bar{a}}_{d}\tau_b\pi^{\bar{c}}_{e} Z^{dbe}$ -vel.

– $q^{\bar{a}\bar{b}\bar{c}} = \pi^{\bar{a}}_{d}\pi^{\bar{b}}_{e}\pi^{\bar{c}}_{f}Z^{def}$ az *energiaáramsűrűség-tenzor*, a Z^{abc} tenzor tér-tér-térszerű része.

Ezenkívül, a megfelelő tenzorok rendjét kettővel redukálva bevezetjük az energiasűrűséget és a hőáramsűrűséget, a kinetikus elmélet definícióinak megfelelően:

– $e = \frac{1}{2}e^{\bar{a}}_{\bar{a}}$ az *energiasűrűség*,

– $q^{\bar{a}} = \frac{1}{2}q^{\bar{a}\bar{b}}_{\bar{b}}$ a *hőáramsűrűség*.

3.1. Az idő- és térszerű részek transzformációs szabályai

Az u'^{a} sebességgel képzett idő- és térszerű komponenseket az u^{a} sebességgel képzett komponensekkel kifejezve nevezzük az adott objektív fizikai mennyiség transzformációs szabályának. A B. Függelékben megadtuk az első és másodrendű tenzorok transzformációs szabályait, amelyet úgy kapunk, hogy a tenzorok u-formáját az u' sebesség szerint hasítjuk szét. A tömeg-lendület-energia tenzor esetén is ugyanígy járunk el.

Az u'-energiát az Z^{abc} tenzor u-komponenseivel és a $v^{\bar{a}} = u^{a} - u'^{a}$ relatív sebességgel fejezzük ki. Ha az előbbiekhez hasonlóan u^{a}-t a folyadék, u'^{a} pedig a megfigyelő sebességének tekintjük, akkor $v^{\bar{a}}$ a folyadék sebessége a megfigyelőhöz képest. Ekkor az alábbi transzformációs szabályok a megfigyelő széthasított mennyiségeit adják meg a folyadék megfelelő széthasított fizikai mennyiségeivel kifejezve.

A ρ sűrűség Galilei-invariáns:

$$\rho' = \tau_{a}\tau_{b}\tau_{c}Z^{abc} = \rho. \tag{7}$$

A lendületsűrűség úgy transzformálódik, mintha sűrűséggel négyesvektort alkotnának:

$$\begin{aligned} p'_{\bar{b}} &= \pi'^{\bar{b}}_{d}\tau_{c}z^{dc} = \pi'^{\bar{b}}_{d}\tau_{c}(\rho u^{d}u^{c} + p^{\bar{d}}u^{c} + u^{d}p^{\bar{c}} + e^{\bar{d}\bar{c}}) = (\delta^{\bar{b}}_{\bar{d}} - u'^{b}\tau_{d})(\rho u^{d} + p^{\bar{d}}) \\ &= p^{\bar{b}} + \rho v^{\bar{b}}. \end{aligned} \tag{8}$$

Az (ön)diffúziós áramsűrűség a lendületsűrűséghez hasonlóan a sűrűséggel vett négyesvektor térszerű komponenseként transzformálódik:

$$j'^{\bar{a}} = j^{\bar{a}} + \rho v^{\bar{a}}. \tag{9}$$

Az energiasűrűség viszont nem Galilei-skalár:

$$
\begin{aligned}
e' &= \frac{\delta_{\bar{b}\bar{c}}}{2}\pi'^{\bar{b}}{}_{d}\pi'^{\bar{c}}{}_{e}z^{de} = \frac{\delta_{\bar{b}\bar{c}}}{2}(\delta^{\bar{b}}_{\bar{d}} - u'^{b}\tau_d)(\delta^{\bar{c}}_{\bar{e}} - u'^{c}\tau_e)\left(\rho u^d u^e + p^{\bar{d}}u^e + u^d p^{\bar{e}} + e^{\bar{d}\bar{e}}\right) \\
&= \frac{\delta_{\bar{b}\bar{c}}}{2}\left(\rho v^{\bar{b}}v^{\bar{c}} + p^{\bar{b}}v^{\bar{c}} + v^{\bar{b}}p^{\bar{c}} + e^{\bar{b}\bar{c}}\right) = e + p_{\bar{a}}v^{\bar{a}} + \frac{\rho}{2}v_{\bar{a}}v^{\bar{a}}. \qquad (10)
\end{aligned}
$$

A nyomástenzor transzformációja:

$$
\begin{aligned}
P'^{\bar{a}\bar{b}} &= \pi'^{\bar{a}}{}_{d}\pi'^{\bar{b}}{}_{e}\tau_c Z^{dec} = (\delta^{\bar{a}}_{\bar{d}} - u'^{a}\tau_d)(\delta^{\bar{b}}_{\bar{e}} - u'^{b}\tau_e)\left(\rho u^d u^e + p^{\bar{d}}u^e + u^d j^{\bar{e}} + P^{\bar{d}\bar{e}}\right) \\
&= P^{\bar{a}\bar{b}} + p^{\bar{b}}v^{\bar{a}} + j^{\bar{a}}v^{\bar{b}} + \rho v^{\bar{a}}v^{\bar{b}}. \qquad (11)
\end{aligned}
$$

Végül a legbonyolultabb a hőáramsűrűség transzformációs szabálya:

$$
\begin{aligned}
q'^{\bar{a}} &= \frac{\delta_{\bar{b}\bar{c}}}{2}q'^{\bar{a}\bar{b}\bar{c}} = \frac{\delta_{\bar{b}\bar{c}}}{2}\pi'^{\bar{a}}{}_{d}\pi'^{\bar{b}}{}_{e}\pi'^{\bar{c}}{}_{f}Z^{def} \\
&= \frac{\delta_{\bar{b}\bar{c}}}{2}(\delta^{\bar{a}}_{\bar{d}} - u'^{a}\tau_d)(\delta^{\bar{b}}_{\bar{e}} - u'^{b}\tau_e)(\delta^{\bar{c}}_{\bar{f}} - u'^{c}\tau_f)\left(\left(\rho u^e u^f + p^{\bar{e}}u^f + u^e p^{\bar{f}} + e^{\bar{e}\bar{f}}\right)u^d + \right. \\
&\qquad \left.\left(j^{\bar{d}}u^e u^f + P^{\bar{d}\bar{e}}u^f + P^{\bar{d}\bar{f}}u^e + q^{\bar{d}\bar{e}\bar{f}}\right)\right) \\
&= q^{\bar{a}} + (e + p_{\bar{b}}v^{\bar{b}} + \frac{\rho}{2}v_{\bar{b}}v^{\bar{b}})v^{\bar{a}} + P^{\bar{a}\bar{b}}v_{\bar{b}} + j^{\bar{a}}\frac{v^{\bar{b}}v_{\bar{b}}}{2}. \qquad (12)
\end{aligned}
$$

A hagyományos 3-as indexes jelölésekkel összefoglalva a transzformációs szabályokat:

$$\rho' = \rho, \qquad (13)$$
$$p'^{i} = p^i + \rho v^i, \qquad (14)$$
$$j'^{i} = j^i + \rho v^i, \qquad (15)$$
$$e' = e + p_i v^i + \frac{\rho}{2}v^2, \qquad (16)$$
$$P'^{ij} = P^{ij} + \rho v^i v^j + p^j v^i + j^i v^j, \qquad (17)$$
$$q'^{i} = q^i + v^i\left(e + p_j v^j + \frac{\rho}{2}v^2\right) + P^{ij}v_j + j^i\frac{v^2}{2}, \qquad (18)$$

Az abszolút tárgyalásban két újszerű fizikai mennyiség bukkant fel. A tömegnek általában van nem konvektív áramsűrűsége, ez volt j^i, illetve van lendületsűrűség mindenféle relatív sebességtől függetlenül, amelyet p^i-vel jelöltünk. Szerepük részletesebb elemzéséhez fel kell írnunk a folyadék abszolút és széthasított mérlegeit.

4. Az egykomponensű folyadékok alapmérlege és komponensei

A tömeg-lendület-energia tenzor divergenciájából vezethetjük le a hagyományosan három külön egyenletként jelentkező alapmérlegek rendszerét. Az abszolút forma:

$$\begin{aligned}\partial_a Z^{abc} &= \partial_a \left(z^{bc}u^a + z^{\bar{a}bc}\right) = \dot{z}^{bc} + z^{bc}\partial_a u^a + \partial_a z^{\bar{a}bc}\\ &= (\dot{\rho}u^c + \rho\dot{u}^c + \dot{p}^{\bar{c}})u^b + (\rho\dot{u}^b + \dot{p}^{\bar{b}})u^c + p^{\bar{b}}\dot{u}^c + p^{\bar{c}}\dot{u}^b + \dot{e}^{\bar{b}\bar{c}} +\\ &\left(\rho u^b u^c + p^{\bar{b}}u^c + u^b p^{\bar{c}} + e^{\bar{b}\bar{c}}\right)\partial_a u^a + u^b u^c \partial_a j^{\bar{a}} + j^{\bar{a}}u^c\partial_a u^b + j^{\bar{a}}u^b\partial_a u^c +\\ &P^{\bar{a}\bar{b}}\partial_a u^c + u^c\partial_a P^{\bar{a}\bar{b}} + P^{\bar{a}\bar{c}}\partial_a u^b + u^b\partial_a P^{\bar{a}\bar{c}} + \partial_a q^{\bar{a}\bar{b}\bar{c}} = 0^{bc}.\end{aligned} \tag{19}$$

Itt bevezettük a pontot az u-idődederivált jelölésére, $u^a\partial_a = d_u = \dot{}$. (19) időszerű része a tömeg-lendület mérleg:

$$\tau_c\partial_a Z^{abc} = \dot{\rho}u^b + \rho\dot{u}^b + \dot{p}^{\bar{b}} + (\rho u^b + p^{\bar{b}})\partial_a u^a + u^a\partial_a j^{\bar{a}} + j^{\bar{a}}\partial_a u^b + \partial_a P^{\bar{a}\bar{b}} = 0^b. \tag{20}$$

A tömeg-lendület mérleg időszerű része pedig a tömegmérleg:

$$\tau_b\tau_c\partial_a Z^{abc} = \dot{\rho} + \rho\partial_a u^a + \partial_a j^{\bar{a}} = 0, \tag{21}$$

illetve térszerű része a lendületmérleg:

$$\pi^{\bar{b}}{}_d\tau_c\partial_a Z^{adc} = \rho\dot{u}^b + \dot{p}^{\bar{b}} + p^{\bar{b}}\partial_a u^a + j^{\bar{a}}\partial_a u^b + \partial_a P^{\bar{a}\bar{b}} = 0^{\bar{b}}. \tag{22}$$

Az energia mérlege a tömeg-lendület-energia mérleg tér-térszerű része, illetve annak nyoma:

$$\begin{aligned}\frac{\delta_{\bar{b}\bar{c}}}{2}\pi^{\bar{b}}{}_d\pi^{\bar{c}}{}_e\partial_a Z^{ade} &= \frac{\delta_{\bar{b}\bar{c}}}{2}\Big(\dot{e}^{\bar{b}\bar{c}} + e^{\bar{b}\bar{c}}\partial_a u^a + p^{\bar{b}}\dot{u}^c + p^{\bar{c}}\dot{u}^b + P^{\bar{a}\bar{b}}\partial_a u^c + P^{\bar{a}\bar{c}}\partial_a u^b\\ &\qquad + \partial_a q^{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}\Big)\\ &= \dot{e} + e\partial_a u^a + p^{\bar{b}}\dot{u}_b + P^{\bar{a}}_{\bar{b}}\partial_a u^b + \partial_a q^{\bar{a}} = 0.\end{aligned} \tag{23}$$

Egyszerű további számítással, az abszolút (19) mérleg u'^a szerinti széthasításával kapjuk a szubsztanciális, relatív mérlegeket. Az u'^a megfigyelő a hozzá képest $v^{\bar{a}} = u^a -$ $- u'^a$ sebességgel mozgó folyadékra vonatkozó saját lokális mérlegegyenleteit a folyadék mennyiségekkel kifejezve:

$$\dot{\rho} + \rho\partial_i v^i + \underline{\partial_i j^i} = 0 \tag{24}$$

$$\underline{\dot{p}^i + p^i\partial_j v^j} + \rho\dot{v}^i + \underline{j^u\partial_j v^i} + \partial_j P^{ji} = 0^i, \tag{25}$$

$$\dot{e} + e\partial_i v^i + \partial_i q^i + \underline{p_i\dot{v}^i} + P^{ij}\partial_i v_j = 0. \tag{26}$$

Ezek a tömeg, az lendület és az energia mérlegei. Az energia mérlege látszólag belső energia mérlegére vonatkozik, összhangban azzal, hogy a megfigyelő számára e' a teljes energia és e a belső. A szokásosan felírt mérlegektől az újonnan fellépő j^i (ön)diffúziós áramot és a p^i sajátlendületet tartalmazó tagokban különbözik. Ez a két fizikai mennyiség a P^{ij} nyomástenzorra és a q^i hőáramsűrűségre vonatkozó további feltételek megadását teszi szükségessé az egyenletek lezárásához. A mérlegek lezárásához a termodinamikai feltételeket kell megvizsgálnunk.

5. A mozgás termosztatikája, avagy termosztatodinamika

A szakasz címe önellentmondónak látszik, ugyanakkor jól megmutatja a mozgást is tartalmazó 'termosztatika' paradigmatikus dilemmáját. A termodinamika irodalmában a sebesség nem lehet állapothatározó. Galilei-relativisztikusan ez a kérdés megvizsgálható.

5.1. Abszolút relációk

A klasszikus „egyensúlyi" termodinamika, azaz a termosztatika valójában nemegyensúlyi és időfüggő. [1] Más részről érdemes figyelembe venni a relativisztikus kinetikus elméletben levezetett/beépített termodinamikai hátteret, esetleg egyből a szokásos kereteket meghaladó módon [71, 72].

Termodinamikai alapfeltevésünk teljesen megszokott, csak téridőszempontból kifejtve. Adott az entrópia-négyesvektormező, amely adott megfigyelőre nézve sűrűség és áram is: $S^a = su^a + s^{\bar{a}}$. Ennek sűrűsége az extenzívek sűrűségeitől függ azaz egy szimmetrikus másodrendű téridőtenzor függvénye: $s = s(z^{bc})$. Ez az összefüggés megfigyelőfüggetlen, mert mind az entrópiasűrűség, mind a tömeg-lendület-energiasűrűség tenzor abszolút. Ennek a függvénynek a deriváltja a termodinamikai intenzív mennyiségek szimmetrikus másodrendű kotenzora, amit a továbbiakban *kémiaipotenciál-termosebesség-hőmérséklet kotenzornak* nevezünk és β_{bc}-vel jelölünk. Tehát $\frac{ds}{dz^{bc}} = \beta_{bc}$. Ezt a deriválást termodinamikai szokás szerint Gibbs-relációnak hívjuk és jelöljük:

$$ds = \beta_{bc} dz^{bc}. \tag{27}$$

Részletes felírásához elnevezzük az intenzív mennyiségek abszolút kotenzorának komponenseit. E kotenzor egy tetszőleges u^a sebességmező segítségével a következőképpen hasítható tér- és időszerű komponensekre (lásd (75) az A. Függelékben):

$$\beta_{bc} = \beta_b \tau_c + \beta_{b\bar{e}} \pi_c{}^{\bar{e}} = (\beta \tau_b + \beta_{\bar{d}} \pi_b{}^{\bar{d}})\tau_c + (\beta_{\bar{e}} \tau_b + \beta_{\bar{d}\bar{e}} \pi_b{}^{\bar{d}})\pi_c{}^{\bar{e}}. \tag{28}$$

[1] Akit az ezzel kapcsolatos a szokásos félreértések és összemosások zavarnak, mindenképpen olvassa el Matolcsi Tamás nagyszerű könyvét angolul, vagy könnyedebb verzióját magyarul [69, 70].

Itt az egyes fizikai mennyiségek a következőek:

– Az energia tenzorhoz konjugált intenzív a β_{bc} kotenzor tér-térszerű része, ennek nyomából képezzük a β *reciprok hőmérsékletet*:

$$\beta = \frac{1}{T} = \frac{1}{6}\delta^{\bar{b}\bar{c}}\delta_{\bar{c}}{}^{e}\delta_{\bar{b}}{}^{d}\beta_{de} = \frac{2}{3}\beta_{\bar{b}}{}^{\bar{b}}. \tag{29}$$

Mivel most az energia tenzoriális formáját nem vizsgáljuk, ezért speciálisan feltételezzük, hogy a reciprok hőmérséklet kotenzor az egységtenzorral arányos:

$$\beta_{\bar{b}\bar{c}} = \frac{\beta}{2}\delta^{\bar{b}\bar{c}}. \tag{30}$$

– A μ *kémiai potenciál* a kémiaipotenciál-termosebesség-hőmérséklet kotenzor idő-időszerű részéből képezhető:

$$\mu = -Tu^b u^c \beta_{bc}. \tag{31}$$

– A sajátlendülethez tartozó w_b intenzív mennyiséget *termosebességnek* fogjuk nevezni, és a következőképpen adjuk meg:

$$w_{\bar{b}} = -2Tu^c\delta_{\bar{b}}{}^{d}\beta_{dc}. \tag{32}$$

Ezek után a Gibbs-reláció u-széthasított formája ezek után a következőképpen számolható:

$$\begin{aligned} ds = {} & \beta_{bc}dz^{bc} = \\ & -\beta\left(\mu\tau_b\tau_c + \frac{1}{2}(w_{\bar{d}}\pi_b{}^{\bar{d}}\tau_c + w_{\bar{e}}\pi_c{}^{\bar{e}}\tau_b) - T\beta_{\bar{d}\bar{e}}\pi_b{}^{\bar{d}}\pi_c{}^{\bar{e}}\right)\times \\ & \quad \left(u^b u^c d\rho + \rho u^c du^b + \rho u^b du^c + u^c dp^{\bar{b}} + p^{\bar{b}}du^c + u^b dp^{\bar{c}} + p^{\bar{c}}du^b + de^{\bar{b}\bar{c}}\right) \\ & = -\beta\left(\mu d\rho + \rho w_{\bar{b}}du^b + \rho w_{\bar{b}}dp^{\bar{b}} - p_{\bar{b}}du^b - de\right). \end{aligned} \tag{33}$$

Tehát az abszolút Gibbs-reláció u-széthasított mennyiségekkel felírva végül az alábbi formát ölti:

$$de = Tds + \mu d\rho + w_{\bar{a}}dp^{\bar{a}} + (\rho w_a - p_a)du^a. \tag{34}$$

Ezenkívül képezhetjük a négyes entrópia Legendre-transzformáltját, bevezetve az $\tilde{S}^a$ konjugált entrópiát:

$$S^a - \beta_{bc}Z^{abc} = \tilde{S}^a. \tag{35}$$

Ez semmiféle feltételt nem jelent mindaddig, amíg a jobboldali négyesvektor általános. Bontsuk fel $\tilde{S}^a$-t célszerűen egy tetszőlegesen adott u^a négyessebességgel párhuzamos és térszerű komponensekre a többi mennyiséghez hasonlóan:

$$\tilde{S}^a = \beta p(u^a + r^{\bar{a}}), \tag{36}$$

ahol $r_{\bar{a}}u^a = 0$. Ekkor a (35) vektoregyenlet abszolút időszerű részét, az *extenzivitási relációt*, a kifejezés τ_a-val történő szorzásával kapjuk:

$$s - \beta\mu\rho - \beta w_{\bar{b}}p^{\bar{b}} - \beta e = \beta p, \tag{37}$$

illetve az u-térszerű rész, az entrópiaáram kifejezése, az u-ra merőleges $\pi^{\bar{a}}_{\bar{b}}$-vel projekcióval adódik:

$$s^{\bar{a}} - \beta\mu j^{\bar{a}} - \beta p^{\bar{a}\bar{b}} w_{\bar{b}} + \beta q^{\bar{a}} = \beta p r^{\bar{a}}. \tag{38}$$

5.2. Termodinamikai összefüggések transzformációs szabályai

Az entrópia deriváltjaként bevezetett intenzív mennyiségek kotenzor komponensei, ezért a B. Függelék (97) egyenlete alapján egy u'^a sebesség szerinti idő- és térszerű komponenseket egy másik, u^a sebesség által széthasított komponensekkel és a $v^{\bar{a}} = u^a - u'^a$ relatív sebességgel kifejezve kapjuk a transzformációs szabályokat:

$$\beta' = \beta, \tag{39}$$

$$w'^i = w^i + v^i, \tag{40}$$

$$\mu' = \mu - w_i v^i - \frac{v^2}{2}. \tag{41}$$

A négyesvektorokra vonatkozó (78) transzformációs szabályok és $\tilde{S}^a$ (36) felbontása alapján adódik, hogy

$$p' = p \qquad \text{és} \qquad r'^i = r^i + v^i. \tag{42}$$

Ezeknek és a ρ, $p^{\bar{a}}$, e extenzívekre vonatkozó (13), (14) és (16) transzformációs szabályok alapján ellenőrizhetjük, hogy a (37) abszolút extenzivitási reláció Galilei-invariáns:

$$e' + p - Ts - \mu'\rho - w'_i p'^i = e + p - Ts - \mu\rho - w_i p^i = 0. \tag{43}$$

Az entrópiaáram-sűrűség transzformációs szabálya szerint pedig térvektor, ahogy elvárható:

$$s'^i = \beta(q'^i - \mu' j'^i - P'^{ij} w'_j + p r'^i) = \beta(q^i - \mu j^i - P^{ij} w_j + p r^i) + s v^i = s^i + s v^i, \tag{44}$$

ahol felhasználtuk β, q^i, μ, j^i, P^{ij}, w_i, p és r^i előzőekben levezetett transzformációs szabályait.

Fontos még a relatív formában megadott Gibbs-reláció,

$$de = Tds + \mu d\rho + w_i dp^i \tag{45}$$

transzformációs értése is. Ez alapján, ha valamely megfigyelő a fenti Gibbs-relációt állapítja meg, akkor a hozzá képest v^i sebességgel mozgó folyadék fizikai mennyiségeivel ez az összefüggés úgy fejezhető ki, hogy

$$de' - Tds - \mu' d\rho - w'_i dp'^i = de - Tds - \mu d\rho - w_i dp^i - (\rho w_i - p_i) dv^i. \tag{46}$$

Tehát a Gibbs-reláció abszolút, de nem Galilei-invariáns, különböző megfigyelők általában a relatív sebesség változásától függően az energia megváltozását mérhetik. Kivéve, ha az utolsó tag nulla, azaz

$$w^i = \frac{p^i}{\rho}. \tag{47}$$

Ez az összefüggés egy állapotegyenlet, *impulzusfeltételnek* nevezzük a továbbiakban. Az intenzív termosebesség speciális függését adja a sajátimpulzustól és a sűrűségtől. Ha teljesül, akkor a Gibbs-reláció Galilei-invariáns.

5.3. Abszolút entrópia, relatív állapotegyenletek

Az entrópiasűrűség potenciálja az intenzívek tenzorának, azok deriváltként történő definíciója szerint, (27) alapján. Az abszolút (27) összefüggés szerint az entrópiasűrűség egyváltozós függvény, változója a tömeg-lendület-energiasűrűség tenzor. Az entrópiasűrűség abszolút, a változója is, de ezt a változót széthasított formájával is kifejezhetjük. Azaz ha azt nézzük, hogy egy adott u'^a megfigyelő entrópiasűrűség-függvénye hogyan függ a megfigyelt folyadék saját sűrűségétől, saját lendületsűrűségétől és saját energiasűrűségétől, akkor a megfigyelő és a folyadék relatív sebességétől is függeni fog.

(46) jobb oldali Gibbs-relációja a megfigyelő u'-mennyiségeinek a folyadék u-mennyiségeivel kifejezett termodinamikai viszonya. A Gibbs-reláció ebben a formában hasonlít a megfigyelőket keverő szubsztanciális mérlegekre. Az u'-széthasítást u-mennyiségekkel reprezentáljuk, ennek megfelelően a Gibbs-reláció – szubsztanciális formája – mozgó kontinuumokra a következő:

$$de = Tds + \mu d\rho + w_i dp^i + (\rho w_i - p_i) dv^i. \tag{48}$$

Ezt a kifejezést lehet a szubsztanciális mérlegekkel együtt az entrópiaprodukció kiszámítására használni, ez a Gibbs-reláció hagyományos relatív értelmezése. (48) analóg a relativisztikus esetben a kinetikus kompatibilitás figyelembe vételével kapott alakkal [71, 72, 73], azzal a különbséggel, hogy itt az utolsó tagban a sűrűség szerepel, relativisztikusan pedig az entalpia.

A (48) Gibbs-relációban a sebesség nem független változó. Vizsgáljuk az impulzusra és a relatív sebességre vonatkozó intenzív mennyiségek között fennálló Maxwell-relációt, azaz a vegyes parciális deriváltak egyenlőségére vonatkozó feltételt. Ezt célszerű izoterm folyamatokra vizsgálni:

$$\frac{\partial^2 e}{\partial v^j \partial p^i} = \frac{\partial w_i}{\partial v^j} = \frac{\partial(\rho w_j - p_j)}{\partial p^i} = \frac{\partial^2 e}{\partial p^i \partial v^j}. \tag{49}$$

Mivel $w^j(\rho, p^i, e, v^i)$ állapotfüggvényen kívül a többi mennyiség változó, ezért (49) tekinthető a termosebesség meghatározására vonatkozó parciális differenciálegyenletnek:

$$\frac{\partial w_i}{\partial v^j} = \rho \frac{\partial w_j}{\partial p^i} - p_j. \tag{50}$$

Ennek általános megoldása

$$w^i(\rho, p^i, e, v^i) = \frac{p^i}{\rho} + A^{ij}\left(v_j + \frac{p_j}{\rho}\right) + \hat{w}^i, \tag{51}$$

ahol A^{ij} és $\hat{w}^i$ tetszőleges ρ, e függvények. A továbbiakban nem vizsgáljuk ezeknek a függvényeknek a fizikai jelentését, és azt tételezzük fel, hogy nullák. Vegyük észre, hogy ekkor, más gondolatmenettel, de ismét a (47) állapotegyenletet kaptuk.

Ez a szokott lendület-tömeg-sebesség viszony termodinamikai általánosítása, nem kötődik a mechanikai levezetésekben feltételezett speciális alakú Lagrange-függvény létezéséhez, amelynek formája a Newton-egyenlet következménye, és Noether-tétel sem kell hozzá.

6. Abszolút entrópiamérleg

Az abszolút termodinamikai feltételekből következő (34) Gibbs-reláció és (38) entrópiaáram megadják, hogy adott entrópiasűrűség és u-entrópiaáram hogyan függ a megfelelő termodinamikai intenzív állapotjelzőktől. Így ki tudjuk fejezni az abszolút entrópiaprodukciót az u-hasított mennyiségekkel:

$$\begin{aligned}\partial_a S^a &= \dot{s} + s\partial_a u^a + \partial_a s^{\bar{a}} = \\ &\beta\dot{e} - \beta\mu\dot{\rho} - \beta w_{\bar{a}}\dot{p}^{\bar{a}} + \beta(p_{\bar{a}} - \rho w_{\bar{a}})\dot{u}^a + s\partial_a u^a + \\ &\partial_a\left(\beta q^{\bar{a}} - \beta\mu j^{\bar{a}} - \beta P^{\bar{a}\bar{b}} w_{\bar{b}} + \beta p r^{\bar{a}}\right).\end{aligned} \tag{52}$$

Behelyettesítve a (21), (22) és (23) tömeg, lendület és energiamérlegeket, felhasználva a (37) extenzivitási relációt, illetve annak és a (34) Gibbs-reláció következményeként adódó alábbi Gibbs-Duhem relációt,

$$\beta dp = -hd\beta + \rho d(\beta\mu) + p^{\bar{a}} d(\beta w_{\bar{a}}) - \beta(\rho w_{\bar{a}} - p_{\bar{a}})du^a, \tag{53}$$

azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\partial_a S^a = &(s - \beta e + \beta\mu\rho + \beta w_{\bar{a}} p^{\bar{a}})\partial_a u^a + q^{\bar{a}}\partial_a\beta - j^{\bar{a}}\partial_a(\beta\mu) - \\
&\beta P^{\bar{a}}{}_{\bar{b}}\partial_a(u^b + w_{\bar{b}}) + \beta w_{\bar{a}} j^{\bar{b}}\partial_b u^a - P^{\bar{a}\bar{b}} w_{\bar{b}}\partial_{\bar{a}}\beta + \beta p\partial_a r^{\bar{a}} + r^{\bar{a}}\partial_a(\beta p) = \\
&(\rho r^{\bar{a}} - j^{\bar{a}})\left(\partial_a(\beta\mu) - \beta w_{\bar{b}}\partial_a u^b\right) + \\
&\quad\left(q^{\bar{a}} - hr^{\bar{a}} - (P^{\bar{a}\bar{b}} - r^{\bar{a}}p^{\bar{b}})w_{\bar{b}} + pr^a\right)\partial_a\beta - \\
&\quad\beta\left(P^{\bar{a}}_{\bar{b}} - r^{\bar{a}}p_{\bar{b}} - p\delta^{\bar{a}}{}_{\bar{b}}\right)\partial_a(u^b + w^{\bar{b}}) + \beta p\partial_a(r^{\bar{a}} - w^{\bar{a}}) = \\
&(\rho r^{\bar{a}} - j^{\bar{a}})\,\partial_a\left(\beta\left(\mu + \frac{w^2}{2}\right)\right) + \\
&\quad\left(q^{\bar{a}} - er^{\bar{a}} - (P^{\bar{a}\bar{b}} - r^{\bar{a}}p^{\bar{b}})w_{\bar{b}} - (\rho r^{\bar{a}} - j^{\bar{a}})\frac{w^2}{2}\right)\partial_a\beta - \\
&\quad\beta\left(P^{\bar{a}}{}_{\bar{b}} - j^{\bar{a}}w_{\bar{b}} - r^{\bar{a}}(p_{\bar{b}} - \rho w_{\bar{b}}) - p\delta^{\bar{a}}{}_{\bar{b}}\right)\partial(u^b + w^{\bar{b}}) + \beta p\partial_a(r^{\bar{a}} - w^{\bar{a}}) \geq 0.
\end{aligned} \tag{54}$$

A fenti egyenlőtlenség a Galilei-relativisztikus folyadékok abszolút entrópiaprodukciója. Az elvárt módon kvadratikus kifejezés első tagja az anyagáramlásra vonatkozik, a $j^{\bar{a}}$ diffúziós áramsűrűség a konstitutív mennyiség benne. A szorzat másik felében pedig a megfelelő termodinamikai erőt, a kémiai potenciál gradiensét figyelhetjük meg. A második tag a termikus eredetű entrópiaprodukció, ahol a $q^{\bar{a}}$ hőáramsűrűség a konstitutív mennyiség és a reciprok hőmérséklet gradiense, $\partial_a\beta$ a termodinamikai erő. Végül a harmadik tag a mechanikai eredetű disszipációval azonosítható, benne a $P^{\bar{a}\bar{b}}$ nyomástenzorral, mint konstitutív mennyiséggel és a sebesség gradiensével mint termodinamikai erővel. Pontosabban a viszkozitás szempontjából releváns sebesség a tetszőlegesen választott u^a és a $w^{\bar{a}}$ termikus sebesség összege. Figyeljük meg, hogy u^a, a folyadék sebességmezője expliciten csak itt, a mechanikai disszipációt leíró részben, a sebességgradiensben szerepel. A negyedik tag új, benne az $r^{\bar{a}}$ nyomássebesség tekinthető konstitutív mennyiségnek. Ez a tag nulla, ha a nyomássebesség azonos a termikus sebességgel.

Az abszolút entrópiaprodukció egyenlőtlensége tehát megoldható, a kvadratikus forma minden tagjában vannak konstitutív mennyiségek. Emiatt bevezethetőek termodinamikai erők és áramok, és közöttük a szokott lineáris kapcsolat feltételezve kapjuk az egyenlőtlenség megoldását, az együtthatók előjelei megfelelően választva. A konstitutív elmélet analóg a hagyományossal, és le is zárja az alapmérlegek differenciálegyenlet-rendszerét, mert az ott szereplő szokásos alapváltozók, a ρ sűrűség, u^a sebesség és T hőmérséklet mellett a konstitutív mennyiségeket az entrópia egyenlőtlenségnek megfelelően rögzíthetjük. A $w^{\bar{a}}$ termikus sebesség pedig az entrópia parciális deriváltja, termodinamikai értelemben intenzív mennyiség, állapotegyenlet rögzíti, amit ráadásul jól meg is tudtunk határozni (47)-ben és (51)-ben. De vajon mit jelent és hogyan egyszerűsíthető az erők és áramok termikus sebessséget tartalmazó bonyolult formája? Ezt vizsgáljuk a következő szakaszban.

7. Mi a folyadék sebessége?

Az entrópiaprodukció negyedik tagjának szerepét nem vizsgáljuk a továbbiakban, hiszen amennyiben a relativisztikus kinetikus elmélettel összhangban a konjugált entrópiavektor térszerű részét párhuzamosnak választjuk a hőmérsékletvektorral, akkor könnyen értelmezhető egyszerű formulákat kaphatunk. Tegyük fel tehát, hogy

$$r^{\bar{a}} = w^{\bar{a}}. \tag{55}$$

Ekkor a fenti entrópiaprodukció a következő alakúra egyszerűsödik:

$$\begin{aligned}\partial_a S^a = (\rho w^{\bar{a}} - j^{\bar{a}})\, \partial_a \left(\beta\left(\mu + \frac{w^2}{2}\right)\right) + \\ \left(q^{\bar{a}} - w^{\bar{a}}(e - p^{\bar{b}} w_{\bar{b}}) - (\rho w^{\bar{a}} - j^{\bar{a}} \frac{w^2}{2} - P^{\bar{a}\bar{b}} w_{\bar{b}}\right) \partial_a \beta - \\ \beta\left(P^{\bar{a}}_{\ \bar{b}} - j^{\bar{a}} w_{\bar{b}} - w^{\bar{a}}(p_{\bar{b}} - \rho w_{\bar{b}}) - p\delta^{\bar{a}}_{\ \bar{b}}\right) \partial_a (u^b + w^{\bar{b}}) \geq 0.\end{aligned} \tag{56}$$

Érdemes felírnunk az abszolút entrópiaprodukciónak egy külső, u'^a megfigyelő szemszögéből megjelenő relatív formáját. Legyen szokás szerint a relatív sebesség $u^a - u'^a = v^{\bar{a}}$. Azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\partial_a S^a = \left(\rho w^i - j^i\right) \partial_i \left(\frac{1}{T}\left(\mu + \frac{w^2}{2}\right)\right) + \\ \left(q^i - w^i(e - p^k w_k + \rho + \frac{w^2}{2}) + j^i \frac{w^2}{2}) - P^{ik} w_k\right) \partial_i \frac{1}{T} - \\ \frac{1}{T}\left(P^{ik} + \rho w^i w^k - w^i p^k - j^i w^k - p\delta^{ik}\right) \partial_i (v_k + w_k) \geq 0.\end{aligned} \tag{57}$$

Megjegyzés: ugyanezt kapjuk, ha a relatív, szubsztanciális mérlegek (24), (25) és (26) segítségével, illetve a (48) relatív Gibbs-reláció és a megfelelő Gibbs–Duhem-reláció és entrópiáramsűrűség ((38) relatív formája) segítségével számoljuk ki az entrópiaprodukciót. Természetesen ezeket az összefügéseket (és lehetőleg a fizikai mennyiségek transzformációs szabályait is) valahonnan meg kell tudnunk. Téridőmodell nélkül ez nehezen elképzelhető.

Hogyan zárjuk le az egyszerű folyadékok mozgásegyenleteit, azaz hogyan tehető az egyenletek száma az ismeretlenek számával egyenlővé? Vagyis mi a konstitutív elmélet? Vegyük észre, hogy a fenti entrópiaprodukció szokásos lineáris megoldásából kapott három összefüggés nem elég az egyenletrendszer lezárásához, hiszen az alapváltozóink megszokott rendszere, azaz a sűrűség, belső energia és a folyadék sebessége mellett két további mezőt kellene megadnunk: a folyadék p^i sajátimpulzusát és a termosebességet, w^i-t. Viszont két további lehetőségünk is van, hogy lezárjuk a konstitutív elméletet. Egyrészt w^i-re termodinamikai állapotegyenlet vonatkozik. Másrészt pedig vegyük észre, hogy tulajdonképpen eddig nem rögzítettük, hogy mit is értünk folyadéksebesség alatt, hiszen a fenti egyenletrendszerben a relatív sebességmező tetszőleges lehet, bármely két megfigyelő között. Egyiket valamilyen fizikai módon célszerű a folyadékhoz rögzíteni. A folyadék sebességének rögzítését *áramlásválasztásnak* nevezzük.

Elvileg a sebességet rögzíthetjük a folyadék tetszőleges extenzív tulajdonságához, például a tömeghez ($j^i = 0$), energiához ($q^i = 0$) vagy lendülethez ($p^i = 0$), de bonyolultabb módon is. Ezek után a relatív sebesség már a folyadék tömegének, energiájának, illetve lendületének áramlását jellemzi a külső megfigyelőhöz képest. Bonyolultabb áramlásokra példa tiszta anyagi (tömeg) és energiaáram keveréke [73]. Van szabadságunk az áramlás rögzítésére, amit az abszolút egyenletekben az u^a sebesség tetszőleges választása jelent. Az egyes választások azonban gyakorlati szempontból nem egyenértékűek. Az entrópiaprodukció fenti formája azt sugallja, hogy az áramlásválasztások közül különösen egyszerű konstitutív függvényeket kapunk, ha az áramlást a termosebességhez kötjük, azaz $w^i = 0$ módon választjuk a folyadék sebességét. Ezt a választást nevezhetjük *termoáramlásnak*. Ekkor az entrópiaprodukció:

$$\partial_a S^a = -j^i \partial_i \frac{\mu}{T} + q^i \partial_i \frac{1}{T} - \frac{1}{T} \left(P^{ij} - p\delta^{ij} \right) \partial_i v_j \geq 0. \tag{58}$$

Ez a választás természetes is abban az értelemben, hogy visszapillantva a diffúziós áramsűrűség, hőáramsűrűség, impulzussűrűség és nyomás (15), (18), (14) és (17), illetve a kémiai potenciál, a hőmérséklet és a termikus sebesség (41), (39) és (40) transzformációs szabályaira, felismerhetjük egy olyan u' megfigyelő fizikai mennyiségeit, amelynek relatív sebessége a folyadék u sebességére vonatkoztatva pontosan $v^i = -w^i$. Ezért tehát az entrópiaprodukció (58) formája azonos minden, a termoáramlással definiált közeghez képest v^i sebességgel mozgó megfigyelő számára.

Ahogy az előző fejezet mozgási termosztatika elemzése mutatta, a sebesség és az impulzus viszonyára az entrópia létezése egy kitüntetett állapotegyenletet eredményez a termodinamikai sebesség és a sajátimpulzus között, azaz $p^i = \rho w^i$. Ez azt jelenti, hogy a termoáramlás választása ezzel az állapotegyenlettel egyben lendületáramlást is jelent. Vagy, fordítva, ha a folyadék lendülete az, ami áramlik, akkor az állapotegyenlet miatt az áramlás egyúttal a termosebességgel történik.

	Diffúziós	Termikus	Mechanikai
Erő	-$\partial_i \frac{\mu}{T}$	$\partial_i \frac{1}{T}$	$\partial_i v_j$
Áram	j^i	q^i	-$\frac{1}{T}\left(P^{ij} - p\delta^{ij}\right)$

1. TÁBLÁZAT. Termodinamikai erők és áramok

Ebben az esetben, tehát a $w^i = 0$ termoáramlással definiált, és $p^i = \rho v^i$ termosebesség állapotegyenlettel megadott közegre a (24), (25) és (26) relatív tömeg-, lendület- és energiamérlegek szubsztanciális formája:

$$\dot{\rho} + \rho \partial_i v^i + \partial_i j^i = 0 \tag{59}$$

$$\rho \dot{v}^i + j^j \partial_j v^i + \partial_j P^{ji} = 0^i, \tag{60}$$

$$\dot{e} + e \partial_i v^i + \partial_i q^i + P^{ij} \partial_i v_j = 0. \tag{61}$$

Az abszolút (34) és (37) Gibbs-reláció és extenzivitási relációk megfelelő relatív formában a következőképpen írhatók:

$$de = Tds + \mu d\rho + v_i d(\rho v^i), \to de_b = Tds + \mu_b d\rho, \tag{62}$$

$$e + p = Ts + \mu\rho + \rho v^2 \to e_b + p = Ts + \mu_b \rho, \tag{63}$$

ahol $e_b = e - \rho\frac{v^2}{2}$ a *belső energia* és $\mu_b = \mu + \frac{v^2}{2}$ a *belső kémiai potenciál*. Ezekkel a mennyiségekkel a termodinamikai alapösszefüggések a szokott formában írhatóak. Az extenzivitási relációban a mozgási energiát a nyomáshoz szokták sorolni a kémiai potenciál helyett. A Bernoulli-egyenletként jelenik meg az extenzivitási reláció és benne a dinamikus nyomás (a torlónyomás és statikus nyomás különbsége).

Az entrópia (38) áramsűrűségének vonatkozó relatív formája:

$$s^i = \frac{1}{T}\left(q^i - \mu j^i - P^{ij} v_j + p v^i\right). \tag{64}$$

Az (59)–(64) termodinamikai összefüggések és a mérlegek alapján az entrópiaprodukció közvetlenül számolható, és pontosan (58) lesz. Ennek megfelelően az 1. táblázatban megadott termodinamikai erőket és áramokat azonosíthatjuk.

Lineáris összefüggést feltételezve, izotrop folyadékra azt kapjuk, hogy

$$j^i = -\xi \partial_i \frac{\mu}{T} + \chi_1 \partial_i \frac{1}{T}, \tag{65}$$

$$q^i = -\chi_2 \partial_i \frac{\mu}{T} + \lambda \partial_i \frac{1}{T}, \tag{66}$$

$$P^{ij} = p\delta^{ij} - \eta_v \partial_k v^k \delta^{ij} - \eta\left(\partial^i v^j + \partial^j v^i - \frac{2}{3}\partial_k v^k \delta^{ij}\right). \tag{67}$$

Itt ξ az (ön)diffúziós együttható, χ_1 és χ_2 a Soret–Dufour-együtthatók, λ a termodinamikai hővezetési együttható (mert $\lambda_F = T^2\lambda$ a Fourier-féle hővezetési együttható), η_v és η a térfogati és nyíró viszkozitás.

Az alapmérlegek (59)–(61) rendszere, együtt a (65), (66) és (67) konstitutív összefüggésekkel zárt és az (ön)diffúziós áramsűrűség kivételével azonos a szokásos kontinuitás-Fourier–Navier–Stokes-egyenletrendszerrel. Az öndiffúziós áramsűrűség nem küszöbölhető ki áramlásválasztással, elhagyása fizikai feltételt jelent.

8. Összefoglalás

Ebben a munkában megmutattuk, hogy a nemrelativisztikus, azaz Galilei-relativisztikus, egykomponensű disszipatív folyadékok hogyan tárgyalhatóak a vonatkoztatási rendszertől függetlenül, és milyen feltételekkel kaphatjuk meg a leírásukra általában használt vonatkoztatási rendszertől függő, relatív Fourier–Navier–Stokes-egyenletrendszert. A vonatkoztatásirendszer-függetlenséget a Matolcsi-féle Galilei-relativisztikus téridőmodell keretei között tárgyaljuk [5, 6], ahol a Galilei-relativisztikus téridő az eredeti Weyl-féle, affin terekre alapozott koncepció kibontott matematikai megfogalmazása. Tárgyalásunk vektortereket használ, és indexes formalizmusra alapozott egyszerű számítási módszert vezet be.

A fizikai alapmennyiség a tömeg-lendület-energia tenzor, egy két indexében szimmetrikus harmadrendű négyestenzor. Ez kompatibilis a kinetikus elmélet momentumsorfejtésével, például az energia bevezetését illetően. Ennek négyesdivergenciája a folyadék tömeg-energia-lendületének megmaradását adja, amelyet tetszőlegesen adott négyessebesség a tömegmérlegre, lendületmérlegre és energiamérlegre bont. A harmadrendű négyestenzor négyesdivergenciája egy másodrendű négyestenzor-egyenlet. A tömegmérleg ennek idő-időszerű, az impulzusmérleg az idő-térszerű része (illetve a szimmetria miatt tér-időszerű is), az energiamérleg pedig a tér-térszerű résznek, amely egy másodrendű hármastenzor egyenlet, a nyoma.

Az abszolút tárgyalásból levezettük a relatív fizikai mennyiségek és a mérlegek transzformációs szabályait. Az elmélet egyik következménye, hogy a belső energia, kinetikus energia és a teljes energia közti szokásos kapcsolat egy transzformációs szabály. A kinetikus energia tartalmazza a folyadék sajátlendületét, amely általában nem köthető valamely relatív sebességhez. Nincs abszolút energia, de van kovariáns energia, azaz az energia egy abszolút mennyiség meghatározott része.

A termodinamika is vonatkoztatási rendszertől függetlenül adódik, pusztán annyit feltételezve, hogy az entrópia négyesvektor időszerű része, az entrópiasűrűség a tömeg-lendület-energia sűrűségtől függ. Ez vonatkoztatási rendszertől független, abszolút állítás.

Az entrópiasűrűség deriváltja adja az intenzív mennyiségek másodrendű négyestenzorát, a hőmérséklet-termosebesség-kémiai potenciál tenzort, abszolút módon. A mozgási mennyiségeket is tartalmazó Gibbs-reláció szubsztanciális formája tartalmazza az impulzushoz konjugált intenzív mennyiséget, a termosebességet és a relatív sebességet is, de a teljes formula vonatkoztatási rendszertől független. Ekkor viszont a mozgási intenzívekre vonatkozó állapotegyenletek nem függetlenek. A vegyes parciális deriváltak egyenlősége, a megfelelő Maxwell-reláció az impulzussűrűséget a termosebesség és a sűrűség szorzataként adja, lényegében egyértelműen.

Mivel az entrópiaáram formája is következmény és levezethető az alapfeltevésekből, az entrópia négyesvektor divergenciáját, az entrópiaprodukciót ezek után abszolút módon számolhatjuk. A folyadék áramlása tetszőlegesen rögzíthetjük, akár a tömeghez (Eckart-áramlás), akár az energiához (Landau–Lifsic-áramlás), illetve más módokon is.

Az entrópiaprodukció konkrét formája megmutatja, hogy a folyadék mozgását érdemes a termosebességhez kötni. Ekkor az impulzusfeltétel állapotegyenlete miatt a mindenkori megfigyelőhöz viszonyított relatív sebességgel adható meg a relatív impulzussűrűség és a vonatkoztatási rendszertől független entrópiaprodukció lényegében a megszokott formát ölti. Az eltérés az öndiffúziós tag jelenléte. Ezt nem lehet megfelelő áramlásválasztással kiküszöbölni úgy, hogy a többi tag szokott formáját megőrizzük. Ha nullának tekintjük, akkor az az anyagra vonatkozó fizikai feltételként interpretálható, vagy megsérti az entrópiaprodukció elvárt függetlenségét a vonatkoztatási rendszertől.

Megjegyzések:

- Ha a Galilei-relativisztikus alapmennyiség harmadrendű kontra-kokotenzor, ugyanolyan mérlegegyenleteket kapunk, azonos transzformációs szabályokkal. Ekkor az energia és hőmérséklet helyett a tömegsűrűség és a kémiai potenciál reprezentálódik másodrendű hármastenzorként. Ez az alapmennyiség a kovariáns komponensei miatt azonban nem kompatibilis a kinetikus elmélet momentum-sorfejtésével kapott egyenletrendszerrel. A transzformációs szabályokat a C. Függelékben kiszámoltuk.

- Az egyszerű anyagok semleges körülmények közötti stabilitása alapvető az egész fizikában. E nélkül nincs objektív megfigyelés, a nem reprodukálhatóak a jelenségek. Ennek az elvnek fizikai-matematikai modellje a termodinamika maga. Az entrópia létezése és növekedése, az egész termodinamikai keretrendszer ezt eredményezi és ezt jelenti. A termodinamika ilyen felfogása egyúttal önellenőrzési lehetőség is. Elvárható, hogy az egyszerű folyadék homogén egyensúlya elszigetelt rendszerben pusztán a termodinamikai feltételek miatt stabil legyen. A most levezetett folyadékmodell ehhez teljesít egy fontos szükséges feltételt.

  Belátható, hogy a kapott (59)–(61), (65)–(67) egyenletrendszer generikusan stabil, azaz a homogén egyensúlya linearisan stabil, ha a termodinamikai stabilitás teljesül (az entrópia konkáv) és a transzportegyütthatók nemnegatívak, illetve

$$\xi \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\mu}{T} - \lambda \frac{\partial}{\partial e} \frac{1}{T} + (\chi_1 + \chi_2) \frac{\partial}{\partial e} \frac{\mu}{T} \geq 0. \tag{68}$$

Itt az első két tag és a harmadik tag együtthatója termodinamikai feltételek miatt nemnegatív, egyedül az utolsó tagban szereplő parciális derivált vezethet az egyenlőtlenség sérüléséhez.

– Ennek a munkának a főmotivációját a relativisztikus folyadékok hasonló problémái jelentették [74, 75, 76, 62, 77, 65, 71, 72, 78, 79, 73].

A. Függelék. Galilei-relativisztikus téridő

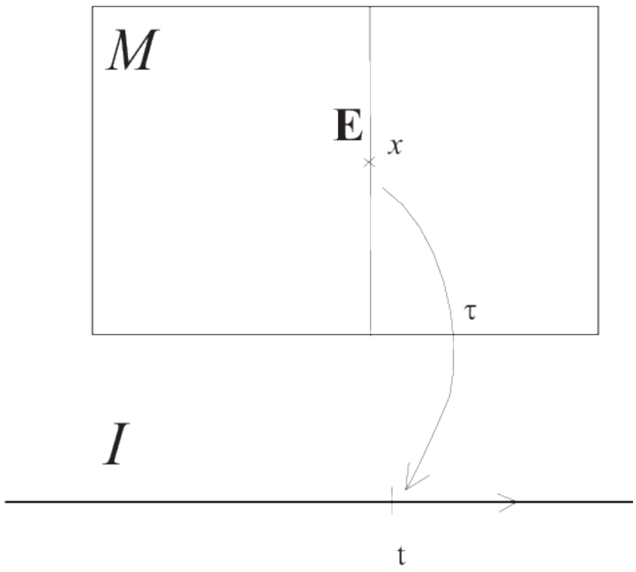
Itt röviden ismertetésre kerül a Galilei-relativisztikus téridőmodell.

A Galilei-relativisztikus téridőmodellben van:

1. Az M *téridő* az $x \in M$ *események* (vagy *villanatok*) négydimenziós irányított affin tere az $x^a \in \mathbb{M}$ *téridőtartamok* négydimenziós vektortere felett.
2. Az I *idő* egy dimenziós irányított affin tér a $t \in \mathbb{I}$ időtartamok egydimenziós irányított vektortere felett.
3. A $\tau : M \to I$ *időkiértékelés* egy affin szürjekció a $\tau_a : \mathbb{M} \to \mathbb{I}$ lineáris leképezés, az *időtartamkiértékelés* felett.
4. $\mathbb{D}$ a *távolság* mértékegyenese, amely egydimenziós irányított vektortér.
5. A $\delta_{\bar{a}\bar{b}} : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \to \mathbb{D} \otimes \mathbb{D}$ euklidészi szerkezet egy szimmetrikus bilineáris leképezés, ahol $\mathbb{E} := Ker(\tau) \subset \mathbb{M}$ a *térvektorok* háromdimenziós lineáris altere.

$\mathbb{M}$ duálisát, azaz az $\mathbb{M} \to \mathbb{R}$ lineáris leképezések vektorterét $\mathbb{M}^*$-al jelöljük. $\mathbb{M}^* = Lin(\mathbb{M}, \mathbb{R})$ elemeit kovektoroknak nevezzük és alsó indexszel jelöljük. Hasonlóképpen $\mathbb{E}$ duálisa $\mathbb{E}^*$. Ezek az indexek absztraktok abban az értelemben, hogy nem vonatkoznak semmilyen koordináta- vagy vonatkoztatási rendszerre, egyszerűen a különféle rendű és típusú tenzoriális mennyiségek egyértelmű jelölését jelentik. A felső index kontravariáns, az alsó index kovariáns, kovektor komponenseket jelöl.

Az $x, y \in M$ események között *időtartamot* $\tau(x) - \tau(y) = \tau_a x^a$ módon számoljuk, ahol $x^a = x - y$. Két esemény *egyidejű*, ha a közöttük eltelt időtartam nulla. Két egyidejű esemény különbsége *térszerű* vektor. Ezeket felülhúzott indexszel, megkülönböztetett



1. ÁBRA. A Galilei-relativisztikus téridő, időpontok és világvonalak.

módon jelöljük: $x^{\bar{a}} \in \mathbb{E}$, illetve $x_{\bar{a}} \in \mathbb{E}^*$. Egy $x^{\bar{a}}$ térszerű vektor *hossza* $\|x\| = \sqrt{x^{\bar{a}}\delta_{\bar{a}\bar{b}}x^{\bar{b}}}$, ahol $\delta_{\bar{a}\bar{b}} = Id_{\mathbb{E}}$.

A modell legfontosabb elemeit az 1. ábrán mutatjuk be. Láthatjuk, hogy az idő és az időkiértékelés egy fóliázást vezet be a téridőn: az egyidejű események térszerű altereinek egymásutánja hűen modellezi klasszikus tér- és időfogalmunkat.

Ha x_a egy kovektor, azaz egy $x_a : \mathbb{M} \to \mathbb{R}$ lineáris leképezés, akkor annak $\mathbb{E}$-re történő megszorítását, $x_{\bar{a}} \in \mathbb{E}^*$-t az eredeti x_a kovektor abszolút térszerű részének nevezzük. A *megszorítás projekciójának* jelölésére bevezetjük a $\delta_{\bar{b}}^{a} \in Lin(\mathbb{M}^*, \mathbb{E}^*)$ jelölést. Tehát $\delta_{\bar{a}}^{b} x_b = x_{\bar{a}}$. Fontos megjegyezni, hogy az euklidészi szerkezet lehetővé teszi $\mathbb{E}$ és $\mathbb{E}^*$ azonosítását, de ezt nem tehetjük meg $\mathbb{M}$-vel és $\mathbb{M}^*$-al, mert nincs rajta sem euklidészi, sem pszeudoeuklidészi szerkezet: a téridőtartamok vektorterén nincsenek téridőhosszak. Absztrakt indexes jelölésünkben a, b, c, d, e, f, g indexeket használunk a négydimenziós téridő abszolút fizikai mennyiségeire, $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}, \bar{e}, \bar{f}, \bar{g}$ indexeket a háromdimenziós tér fizikai mennyiségeire a téridőbe ágyazva értendőek. Továbbá i, j, k, l, m-el jelöljük a szokásos háromdimenziós relatív mennyiségek indexeit, ha a relatív sebesség is megjelenik a formulákban. Ez fog előfordulni a különféle transzformációs szabályoknál, illetve amikor a szokásosan szereplő formulákat értelmezzük. Az ilyen indexek két abszolút sebességmező jelenlétét jelzik.

A vektorok és kovektorok fenti jelölésrendszere azt a tényt formalizálja, hogy az idő nincs beágyazva a téridőbe.

A.1. Széthasítások

A téridőben történő létezést világvonalak segítségével, időből téridőbe léképező $r : I \to M$ *világvonalfüggvényekkel* írjuk le. A világvonalfüggvényeknek a téridő szerkezetéből következő triviális tulajdonsága, hogy $\tau(r(t)) = t$. Ennek megfelelően bármilyen időpontban képezett időderiváltjaik, a Galilei-relativisztikus *négyessebességek* olyan speciális négyesvektorok, amelyek időkiértékelése, $\tau_a u^a = 1$. Egy *négyesvektor* fizikai mennyiség *térszerű részét* egy adott u^a négyessebesség irányú vetületével képezzük. Az u^a irányú vetítő függvény, az u*-projekció* $\pi^{\bar{a}}_{\ b} = \delta^a_{\ b} - u^a\tau_b : \mathbb{M} \to \mathbb{E}$ lesz, ahol $\delta^a_{\ b}$ az identitás $\mathbb{M}$-en.

A τ_a időkiértékelés és az előbbi u-projekció mellett még két fontos függvényünk van, amely az $\mathbb{M}$ téridőtartamokat az $\mathbb{I}$ időtartamokkal és az $\mathbb{E}$ térvektorokkal kapcsolja össze. A négyes kovektorokat térszerűre megszorító előbbi $\delta_{\bar{b}}^{\ a} \in Lin(\mathbb{M}^*, \mathbb{E}^*)$ függvény duálisával a $\delta^a_{\ \bar{b}} \in Lin(\mathbb{E}, \mathbb{M})$ függvénnyel ágyazhatunk be hármasvektorokat a téridőbe, időtartamhoz egy négyessebességgel hozzárendelhetünk egy téridőtartamot, hiszen $u^a : \mathbb{I} \to \mathbb{M}$. A négy alapvető leképezést még egyszer felsoroljuk:

- $\tau_a : \mathbb{M} \to \mathbb{I}$,
- $u^a : \mathbb{I} \to \mathbb{M}$,
- $\pi^{\bar{a}}_{\ b} = \delta^{\bar{a}}_{\ b} - u^a\tau_b : \mathbb{M} \to \mathbb{E}$,
- $\delta^a_{\ \bar{b}} : \mathbb{E} \to \mathbb{M}$,

A duálisaik a megfelelő duális terek közötti leképezéseket adják meg:

- $\tau_a : \mathbb{I} \to \mathbb{M}^*$,
- $u^a : \mathbb{M}^* \to \mathbb{I}$,
- $\pi^{\ \bar{b}}_{a} : \mathbb{E}^* \to \mathbb{M}^*$,
- $\delta_{\bar{b}}^{\ a} : \mathbb{M}^* \to \mathbb{E}^*$.

Itt felhasználtuk, hogy egydimenziós vektorterek kanonikusan azonosíthatóak duálisukkal (idő = koidő), a transzponáltakat pedig az indexek eltolásával jelöltük. A fentiekből a következő azonosságok vezethetőek le:

$$\tau_a u^a = 1, \quad \tau_a \delta^a_{\ \bar{b}} = 0_{\bar{b}}, \quad \pi^{\bar{b}}_{\ a} u^a = (\delta^b_{\ a} - u^b\tau_a)u^a = 0^{\bar{b}} \quad \pi^{\bar{a}}_{\ b}\delta^b_{\ \bar{c}} = \delta^{\bar{a}}_{\ \bar{c}}. \tag{69}$$

Két ábrába összefoglalva megjegyezhetőbbek a viszonyok:

$$\mathbb{E} \underset{\delta^a_{\bar b}}{\overset{\pi^{\bar a}_{\ b}}{\leftrightarrows}} \mathbb{M} \underset{u^a}{\overset{\tau_a}{\rightleftarrows}} \mathbb{I} \qquad\qquad \mathbb{E}^* \underset{\pi_b^{\ \bar a}}{\overset{\delta_{\bar b}^{\ a}}{\leftrightarrows}} \mathbb{M}^* \underset{\tau_a}{\overset{u^a}{\rightleftarrows}} \mathbb{I}^*$$

A fenti diagramok felső sorának leképezései egy téridővektor és kovektor idő- és térszerű részre történő széthasítását adják meg.

A.2. Vektor u-formája

A vektorok maguk előállíthatóak egy u^a sebességgel széthasított részeikből. A továbbiakban az ilyen előállítást a vektor *u-formájának* nevezzük. Legyen például A^a egy téridővektor. Ekkor idő- és u-térszerű részeinek és a széthasító u^a négyessebesség segítségével előállítható:

$$A^a = Au^a + A^{\bar a}, \tag{70}$$

ahol $A = \tau_a A^a$ a vektor időszerű része, $A^{\bar a} = \pi^{\bar a}_{\ b} A^b$ pedig az u-térszerű része. Vektor időszerű része nem függ u-tól, ezért abszolút, a térszerű része viszont függ. Speciálisan egy u^a sebességvektor időszerű része 1, egy másik u'^a sebesség szerinti térszerű része pedig

$$\pi'^{\bar a}_{\ b} u^b = (\delta^a_{\ b} - u'^a \tau_b) u^b = u^a - u'^a = v^{\bar a},$$

u^a *relatív sebessége* u'^a-hoz képest.

Galilei-relativisztikus téridőn az extenzív mennyiségek természetes módon négyesvektorok, amelyek időszerű része a sűrűség, u-térszerű része az áramsűrűség. Az extenzív mennyiségek sűrűsége független a széthasító sebességtől, térszerű része nem. Látni fogjuk, hogy az u-függetlenség Galilei-invarianciát is jelent.

A.3. Kovektor u-formája

Hasonló módon kovektorok is általánosan felírhatók u-idő és térszerű komponenseik és a széthasításhoz használt négyessebesség segítségével. Egy B_a kovektor:

$$B_a = B\tau_a + \pi_a^{\ \bar b} B_{\bar b}. \tag{71}$$

ahol $B = u^a B_a$ és $B_{\bar a} = \delta_{\bar a}^{\ b} B_b$.

Figyeljük meg, hogy B_a térszerű és u-időszerű részei valóban $B_{\bar a}$ és B, de ellentétben a vektor (70) előállításával itt ez közvetlenül nem látszik. Továbbá fenti felbontásban figyelnünk kell, hogy $\pi_a^{\ \bar b}$ nem szedhető szét két részre, pontosabban $u^{\bar b} B_{\bar b}$ önmagában nem képezhető, hiszen $B_{\bar{b}} \in \mathbb{E}^*$ és $\mathbb{E}^*$ nem részhalmaza $\mathbb{M}^*$-nak. Tehát a fenti formula $B_a = = B\tau_a + B_{\bar{a}} - \tau_a u^{\bar{b}} B_{\bar{b}} = (B - u^b B_{\bar{b}})\tau_a + B_{\bar{a}}$, kényelmesnek tűnő csoportosítása végső soron helytelen. Azonban a térszerű-időszerű felbontás szemléletessége, és az abszolút térszerű rész önálló megjelenése miatt a számolások áttekinthetőségéből származó előnyök nagyobbak, mint a hibázás lehetősége, ezért a továbbiakban mégis használni fogjuk, ügyelve arra, hogy $\pi_a^{\bar{b}}$ két része pontosan szerepeljen a formulákban.

Speciálisan a téridő deriválása ∂_a, mint kovektor, a következőképpen írható fel egy u^a négyessebesség szerint széthasított idő- és térszerű komponenseivel:

$$\partial_a = \tau_a(d_u - u^b \nabla_{\bar{b}}) + \nabla_{\bar{a}}, \tag{72}$$

ahol $d_u = u^a \partial_a$ az u-időderivált, $\nabla_{\bar{a}}$ pedig a térderivált. Az időderivált u-függő, a térderivált nem az.

Megadjuk a másodrendű tenzorok u-széthasított részekből összetett formáját is.

A.4. Tenzor u-formája

Egy $T^{ab} \in \mathbb{M} \otimes \mathbb{M}$ kontra-kontravariáns tenzor u-formája a következő:

$$T^{ab} = t u^a u^b + u^a t^{\bar{b}} + t^{\bar{a}} u^b + t^{\bar{a}\bar{b}}, \tag{73}$$

ahol

- $t = \tau_a \tau_b T^{ab}$ a T^{ab} tenzor *idő-időszerű rész*e. Láthatóan ez u-független, abszolút.
- $t^{\bar{a}} = \pi^{\bar{a}}_b T^{bc} \tau_c$ a T^{ab} tenzor *tér-időszerű része*, illetve $t^{\bar{b}} = \tau_c T^{ca} \pi_a^{\bar{b}}$ az *idő-térszerű rész*.
- $t^{\bar{a}\bar{b}} = \pi^{\bar{a}}_c T^{cd} \pi_d^{\bar{b}}$ a T^{ab} tenzor *tér-térszerű része*.

A.5. Vegyes tenzor u-formája

Egy $Q^a_b \in \mathbb{M} \otimes \mathbb{M}^*$ kontra-kovariáns tenzor u-formája a következő:

$$\begin{aligned} Q^a_b = q^a \tau_b + \pi_b^{\bar{c}} q^a_{\bar{c}} = q u^a \tau_b + q^{\bar{a}} \tau_b + u^a \pi_b^{\bar{c}} q_{\bar{c}} + q^{\bar{a}}_{\bar{c}} \pi_b^{\bar{c}} = \\ (u^a(q - u^c q_{\bar{c}}) + q^{\bar{a}} - q^{\bar{a}}_{\bar{c}} u^c)\, \tau_b + q_{\bar{b}} u^a + q^{\bar{a}}_{\bar{b}}, \end{aligned} \tag{74}$$

ahol

- $q^a = u^b Q^a_b$, a Q^a_b vegyes tenzor *ko-időszerű része*,

- $q^{a}_{\bar{b}} = \delta^{c}_{\bar{b}} Q^{a}{}_{c}$, a $Q^{a}{}_{b}$ vegyes tenzor u-független *ko-térszerű része*
- $q = u^{b} \tau_{a} Q^{a}{}_{b}$, a $Q^{a}{}_{b}$ vegyes tenzor *idő-időszerű része*,
- $q^{\bar{a}} = u^{b} \pi^{\bar{a}}{}_{c} Q^{c}{}_{b}$, a $Q^{a}{}_{b}$ vegyes tenzor *tér-időszerű része*,
- $q_{\bar{b}} = \tau_{a} \delta_{\bar{b}}{}^{c} Q^{a}{}_{c}$, a $Q^{a}{}_{b}$ vegyes tenzor *idő-térszerű része*. Ez a rész u-független, abszolút.
- $q^{\bar{a}}_{\bar{b}} = \pi^{\bar{a}}{}_{c} \delta_{\bar{b}}{}^{d} Q^{c}{}_{d}$, a $Q^{a}{}_{b}$ vegyes tenzor *tér-térszerű része*,

A.6. KOTENZOR u-FORMÁJA

Egy $R_{ab} \in \mathbb{M}^* \otimes \mathbb{M}^*$ ko-kovariáns tenzor u-formája a következő:

$$\begin{aligned} R_{ab} = r_{a}\tau_{b} + r_{a\bar{c}}\pi_{b}{}^{\bar{c}} = \left(r\tau_{a} + r_{\bar{c}}\pi_{a}{}^{\bar{c}}\right)\tau_{b} + r_{\bar{c}}\tau_{a}\pi_{b}{}^{\bar{c}} + r_{\bar{c}\bar{d}}\pi_{b}{}^{\bar{c}}\pi_{a}{}^{\bar{d}} = \\ \left(r - 2r_{\bar{c}}u^{c} + r_{\bar{c}\bar{d}}u^{c}u^{d}\right)\tau_{a}\tau_{b} + \left(r_{\bar{b}} - r_{\bar{b}\bar{d}}u^{d}\right)\tau_{a} + \left(r_{\bar{a}} - r_{\bar{a}\bar{d}}u^{d}\right)\tau_{b} + r_{\bar{a}\bar{b}}, \end{aligned} \tag{75}$$

ahol

- $r_{a} = u^{b} R_{ab}$, az R_{ab} kotenzor *ko-időszerű része*,
- $r_{a\bar{b}} = \delta_{\bar{b}}{}^{c} R_{ac}$, az R_{ab} kotenzor u-független *ko-térszerű része*,
- $r = u^{a} u^{b} R_{ab}$, az R_{ab} kotenzor *idő-időszerű része*,
- $r_{\bar{a}} = \delta_{\bar{a}}{}^{c} u^{b} R_{cb}$, az R_{ab} kotenzor *tér-időszerű része*, illetve $r_{\bar{b}} = \delta_{\bar{b}}{}^{c} u^{a} R_{ac}$, az *idő-térszerű része*,
- $r_{\bar{a}\bar{b}} = \delta_{\bar{a}}{}^{c} \delta_{\bar{b}}{}^{d} R_{cd}$, az R_{ab} kotenzor *tér-térszerű része*. Ez az u-független rész.

B. FÜGGELÉK. MEGFIGYELŐK ÉS GALILEI-TRANSZFORMÁCIÓ

A téridőmodell pontosan tükrözi azt a mindennapi tapasztalatunkat, hogy az idő tőlünk függetlenül telik, de a tér, a környezetünkben levő tárgyak által kirajzolt környezet szubjektív, megfigyelőfüggő. Az idő abszolút, a tér relatív. A relatív szempontokat a megfigyelők segítségével értelmezzük. Egy megfigyelő általában a téridőn megadott globális sima sebességmező (lásd [6]), amit a továbbiakban egyetlen sebességgel, lényegében lokálisan reprezentálunk. A lokálisan egyetlen sebességet gondolatban az egész téridőre kiterjesztve, azaz globális homogén sebességmezőt bevezetve kapjuk az inerciális megfigyelőket. A megfigyelő alatt általában adott tartományon sima sebességmezőt értünk [6], nem kell, hogy mindenütt értelmezett, azaz globális legyen. Minden esetben elegendő, hogy adott téridőpontban négyessebessége időre és térre bontja a téridőt, és az abszolút fizikai mennyiségeket idő- és térszerű részekre hasítja fel a téridő minden pontjában. Éppen ezért a transzformációs formulák és egyenletek nemcsak a szokásos inerciális megfigyelőkre vonatkozó Galilei-transzformációk, hanem – amennyiben a széthasító sebesség állandósága nincs kihasználva – minden megfigyelőre vonatkoznak. Az abszolút jelző általánosan megfigyelőfüggetlenséget jelent.

Láthattuk, hogy egy Galilei-relativisztikus téridőmodellben egy sebességmező segítségével egyértelműen meg tudjuk adni a fizikai mennyiségek idő- és térszerű részeit. Egy másik sebességmező pedig másképpen bontja idő- és térszerű részre ugyanazt az abszolút fizikai mennyiséget. Azt is ki tudjuk számolni, hogy egyik megfigyelő által észlelt komponensekből hogyan képződnek egy másik megfigyelő által észlelt idő- és térszerű komponensek. Ezeket a *transzformációs szabályokat* egy téridőmodellben egyértelműen kiszámolhatjuk, nem szükséges intuitívan bevezetni.

B.1. Vektorok

Láttuk, hogy egy A^a vektort az u^a megfigyelő $A = \tau_a A^a$ időszerű és $A^{\bar{a}} = \pi^{\bar{a}}_{b} A^b$ u-térszerű részekre bontja. A nemrelativisztikus fizikai elméletek téridőtudatlanul ezeket a mennyiségeket önállóan használják, leválasztva a téridőről. Két különböző u^a és u'^a négyessebesség általában különböző idő- és térszerű komponenseket eredményezhet:

$$A^a \overset{u}{\prec} \begin{pmatrix} A \\ A^i \end{pmatrix}, \qquad A^a \overset{u'}{\prec} \begin{pmatrix} A' \\ A'^i \end{pmatrix},$$

ahol $i = 1{,}2{,}3$ hármasvektor indexeit jelöli, $\overset{u}{\prec}$ pedig az u^a szerinti széthasítást. A megfigyelők közötti váltást megadó transzformációs szabályok megmondják, hogy az A' és A'^i hogyan függ A-tól és A^i-tól. Téridőmodellünkben ezt egyszerűen úgy számolhatjuk ki, hogy a u^a-val széthasított komponensekkel kifejezett fizikai mennyiséget, jelen esetben ez $A^a = Au^a + A^{\bar{a}}$-t, széthasítjuk u'^a szerint. Tehát egy vektor időszerű komponense:

$$A' = \tau_a A^a = \tau_a (Au^a + A^{\bar{a}}) = A, \tag{76}$$

nem változik, nem transzformálódik, azaz Galilei-invariáns. Ez nem meglepő, mert a széthasító függvény nem függ a sebességektől. Egy A^a vektor térszerű komponense:

$$A'^{\bar{a}} = \pi'^{\bar{a}}_{\ b} A^b = \left(\delta^a_{\bar{b}} - u^a \tau_b\right)\left(Au^b + A^{\bar{b}}\right) = Au^a + A^{\bar{a}} - Au'^a = A^{\bar{a}} + A(u^a - u'^a). \tag{77}$$

Az u^a-nak u'^a-ra vonatkoztatott relatív sebességére bevezetjük a $v^{\bar{a}} = u^a - u'^a$ jelölést és áttérünk hármasindexekre. Ekkor a négyesvektor térszerű komponensének transzformációs szabálya

$$A'^i = A^i + Av^i,$$

pontosan a szokásos Galilei-transzformáció. Az i, j, k hármasindexek megjelenése általában azt jelzi, hogy az adott formulában egyszerre két sebességmező is jelen van a relatív sebesség miatt. A teljes transzformációs szabály:

$$\begin{pmatrix} A' \\ A'^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ A^i + Av^i \end{pmatrix}. \tag{78}$$

Speciálisan a sebességek transzformációs szabálya ebből közvetlenül is származtatható. Egy négyessebesség önmaga szerinti széthasítása

$$u^a \overset{u}{\prec} \begin{pmatrix} 1 \\ 0^i \end{pmatrix}.$$

Illetve a térszerű komponensének transzformációs szabálya egyszerűen a relatív sebességet adja,

$$\pi'^{\bar{a}}_{\ b} u^b = (\delta^a_{\ b} - u'^a \tau_b) u^b = u^a - u'^a = v^{\bar{a}}, \tag{79}$$

ahogy ezt vártuk is. A teljes szabály furcsán hat:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ v^i \end{pmatrix}, \tag{80}$$

de egyszerűen azt jelenti, hogy az önmagához képest ’állónak’ tekintett u^a megfigyelő állása másik u'^a megfigyelő számára v^i sebességgel történő mozgásnak látszik. Fontos megértenünk, hogy az összes többi transzformációs szabály jelentése mutatis mutandis ugyanezt jelenti.

Általában csak a Galilei-invariáns fizikai mennyiségeket tartják vonatkoztatási rendszertől függetlennek, holott nemcsak azok, hanem transzformálódó mennyiségek megfelelő kombinációja is abszolút lehet, amennyiben egy abszolút téridőmennyiségről van szó. Egy négyesvektorral megadott abszolút fizikai mennyiség (pl. egy extenzív) időszerű komponense (a sűrűsége) Galilei-invariáns és ezért abszolút, a térszerű komponense (azaz az áramsűrűsége) transzformálódik, ezért nem abszolút, de ez nem változtat semmit azon, hogy az egész extenzív vektorsűrűség abszolút. Ugyanez érvényes a sebességre, ahol a négyessebesség abszolút, annak ellenére, hogy látszólag csak a térszerű komponens hordoz fizikai információt. Téridőmodellben megfogalmazva egy fizikai elméletet pontosan eldönthető, hogy függ-e a vonatkoztatási rendszertől, vagy nem.

B.2. Kovektorok

Láttuk, hogy egy B_a kovektort az u^a sebesség $B = u^a B_a$ időszerű és $B_{\bar{a}} = \delta^b_{\bar{a}} B_b$ térszerű részekre bont. A kovektorok széthasított komponenseit alsó indexszel és sorvektorokkal reprezentáljuk:

$$B_a \overset{u}{\prec} (B, B_i).$$

Az előbbiek alapján az időszerű komponens transzformációs szabálya:

$$B' = u'^a B_a = u'^a(B\tau_a + \pi_a^{\bar{b}} B_{\bar{b}}) = B - v^{\bar{a}} B_{\bar{a}}, \tag{81}$$

ahol felhasználtuk (79)-t, illetve a (69) azonosságokat. A térszerű komponens transzformációs szabálya:

$$B'_{\bar{a}} = \delta_{\bar{a}}^{\ b} B_b = \delta_{\bar{a}}^{\ b}(B\tau_b + \pi_b^{\bar{c}} B_{\bar{c}}) = B_{\bar{a}}, \tag{82}$$

A teljes szabály:

$$(B', B'_i) = (B - v^i B_i, B^i). \tag{83}$$

Ezt például a ∂_a téridőderiválásra alkalmazva kapjuk, hogy:

$$(d_{u'}, \nabla'_i) = (d_u - v^i \nabla_i, \nabla_i). \tag{84}$$

Speciálisan, ha az u^a sebesség valamely közeg sebességmezője, u'^a pedig egy megfigyelőé, akkor d_u a szubsztanciális időderivált, v^i a megfigyelőnek a közeghez viszonyított sebessége és $d_{u'} = d_u - v^i \nabla_i$ a $d_{u'} = \partial_t$ parciális időderivált és a d_u szubsztanciális időderivált közötti összefüggés: $\partial_t = d_t - v^i \nabla_i$.

B.3. TENZOROK

Egy T^{ab} másodrendű kontravariáns tenzort az u^a megfigyelő $t = \tau_a \tau_b T^{ab}$ idő-időszerű, $t^{\bar{a}} = \pi^{\bar{a}}_{\ c} \tau_b T^{cb}$ idő-térszerű és $t^{\bar{a}\bar{b}} = \pi^{\bar{a}}_{\ c} \pi^{\bar{b}}_{\ d} T^{cd}$ tér-térszerű komponensekre hasít szét. Azaz

$$T^{ab} \overset{u}{\prec} \begin{pmatrix} t & t^i \\ t^j & t^{ij} \end{pmatrix}.$$

A megfelelő transzformációs szabályok a következő módon számolhatóak. Az idő-időszerű komponens invariáns:

$$t' = \tau_a \tau_b T^{ab} = t. \tag{85}$$

Az idő-térszerű komponens transzformációs szabálya olyan, mint egy hármasvektoré:

$$t'^{\bar{a}} = \pi'^{\bar{a}}_{\ c} \tau_b T^{cb} = (\delta^a_{\ c} - u'^a \tau_c)(t u^c + t^{\bar{c}}) = t u^a - t u'^a + t^{\bar{a}} = t^{\bar{a}} + t v^{\bar{a}}. \tag{86}$$

A tér-térszerű komponensé bonyolultabb:

$$\begin{aligned} t'^{\bar{a}\bar{b}} = \pi'^{\bar{a}}_{\ c} \pi'^{\bar{b}}_{\ d} T^{cd} = \pi'^{\bar{a}}_{\ c} \pi'^{\bar{b}}_{\ d} (t u^c u^d + t^{\bar{c}} u^d + u^c t^{\bar{d}} + t^{\bar{c}\bar{d}}) = \\ t v^{\bar{a}} v^{\bar{b}} + t^{\bar{a}} v^{\bar{b}} + t^{\bar{b}} v^{\bar{a}} + t^{\bar{a}\bar{b}}. \end{aligned} \tag{87}$$

Itt ismét felhasználtuk (79)-t, illetve azt, hogy térszerű vektorok tetszőleges sebességirányban vett vetülete maga a térszerű vektor $\pi^{\bar{a}}_{\ b} t^{\bar{b}} = (\delta^a_{\ b} - u^a \tau_b) t^{\bar{b}} = t^{\bar{a}}$.

A teljes transzformációs szabály:

$$\begin{pmatrix} t' & t'^i \\ t'^j & t'^{ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & t^i + t v^i \\ t^j + t v^j & t^{ij} + t^i v^j + t^j v^i + t v^i v^j \end{pmatrix}. \tag{88}$$

B.4. VEGYES MÁSODRENDŰ TENZOROK

Egy $Q^a_{\ b}$ másodrendű kontra-kovariáns tenzort az u^a megfigyelő $q = \tau_a u^b Q^a_{\ b}$ idő-időszerű, $q^{\bar{a}} = \pi^{\bar{a}}_{\ c} u^b Q^c_{\ b}$ tér-időszerű, $q_{\bar{b}} = \tau_a \delta_{\bar{b}}^{\ d} Q^a_{\ d}$ idő-térszerű és $q^{\bar{a}}_{\ \bar{b}} = \pi^{\bar{a}}_{\ c} \delta_{\bar{b}}^{\ d} Q^c_{\ d}$ tér-térszerű komponensekre hasít szét. Azaz

$$Q^a_{\ b} \overset{u}{\prec} \begin{pmatrix} q & q^i \\ q_j & q^i_j \end{pmatrix}.$$

A megfelelő transzformációs szabályok a következő módon számolhatóak. Az idő-időszerű komponensre:

$$q' = \tau_a u'^b Q^a_{\ b} = u'^b (q\tau_b + \pi_b^{\ \bar{c}} q_{\bar{c}}) = q - v^{\bar{c}} q_{\bar{c}}. \tag{89}$$

A hármasvektornak kinéző idő-térszerű komponens nem transzformálódik:

$$q'_{\bar{b}} = \tau_a \delta_{\bar{b}}^{\ c} Q^a_{\ c} = \delta_{\bar{b}}^{\ c} (q\tau_c + \pi_c^{\ \bar{d}} q_{\bar{d}}) = q_{\bar{b}}. \tag{90}$$

Itt felhasználtuk, hogy $\delta_{\bar{b}}^{\ c}\tau_c = 0_{\bar{b}}$ és $\delta_{\bar{b}}^{\ c}\pi^{\ \bar{a}}_{c} = \delta^{\ \bar{a}}_{\bar{b}}$. A tér-időszerű komponens transzformációs szabálya:

$$q'^{\bar{a}} = \pi'^{\bar{a}}_{\ c} u_{\bar{b}} Q^c_{\ b} = \pi'^{\bar{a}}_{\ c} (qu^c + q^{\bar{c}} - u^c v^{\bar{d}} q_{\bar{d}} - q^{\bar{c}}_{\ \bar{d}} v^{\bar{c}}) = q^{\bar{a}} + qv^{\bar{a}} - v^{\bar{a}} v^{\bar{b}} q_{\bar{b}} - q^{\bar{d}}_{\ \bar{b}} v^{\bar{b}}. \tag{91}$$

A tér-térszerű komponens transzformációs szabálya:

$$q'^{\bar{a}}_{\ \bar{b}} = \pi'^{\bar{a}}_{\ c} \delta_{\bar{b}}^{\ d} Q^c_{\ d} = \pi'^{\bar{a}}_{\ c} (q_{\bar{b}} u^c + q^{\bar{c}}_{\ \bar{b}}) = q^{\bar{a}}_{\ \bar{b}} + v^{\bar{a}} q_{\bar{b}}. \tag{92}$$

Itt ismét felhasználtuk az eddigi azonosságokat. A teljes transzformációs szabály:

$$\begin{pmatrix} q' & q'_i \\ q'^j & q'^j_{\ i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q - v^i q_i & q_i \\ q^j + v^j(q - v^k q_k) - q^j_{\ k} v^k & q^j_{\ i} + q_i v^j \end{pmatrix}. \tag{93}$$

B.5. MÁSODRENDŰ KOTENZOROK

Egy R_{ab} másodrendű ko-kovariáns tenzort az u^a megfigyelő $r = u^a u^b R_{ab}$ idő-időszerű, $r_{\bar{a}} = \delta_{\bar{a}}^{\ c} u^b R_{cb}$ tér-időszerű és $r_{\bar{a}\bar{b}} = \delta_{\bar{a}}^{\ c} \delta_{\bar{b}}^{\ d} R_{cd}$ tér-térszerű komponensekre hasít szét. Azaz

$$R_{ab} \overset{u}{\prec} \begin{pmatrix} r & r_i \\ r_j & r_{ij} \end{pmatrix}.$$

A megfelelő transzformációs szabályok a következő módon számolhatóak. Az idő-időszerű komponensre:

$$\begin{aligned} r' = u'^a u'^b R_{ab} = u'^a u'^b \left(r\tau_a\tau_b + r_{\bar{c}} \pi_a^{\ \bar{c}} \tau_b + r_{\bar{c}} \tau_a \pi_b^{\ \bar{c}} + r_{\bar{c}\bar{d}} \pi_b^{\ \bar{c}} \pi_a^{\ \bar{d}} \right) = \\ u'^a \left(r\tau_a + r_{\bar{c}} \pi_a^{\ \bar{c}} - r_{\bar{c}} \tau_a v_{\bar{b}} - r_{\bar{c}\bar{d}} v_b \pi_a^{\ \bar{d}} \right) = r - 2r_{\bar{c}} v^c + r_{\bar{c}\bar{d}} v_c v^{\bar{d}}. \end{aligned} \tag{94}$$

Az idő-térszerű komponens transzformációs szabálya:

$$r'_{\bar{a}} = \delta_{\bar{a}}^{\ c} u'^b R_{cb} = \delta_{\bar{a}}^{\ c} \left(r\tau_c + r_{\bar{d}} \pi_c^{\ \bar{d}} - r_{\bar{d}} \tau_c v^{\bar{d}} - r_{\bar{d}\bar{e}} v^{\bar{e}} \pi_c^{\ \bar{d}} \right) = r_{\bar{a}} - r_{\bar{a}\bar{d}} v^{\bar{d}}. \tag{95}$$

A tér-térszerű komponens invariáns:

$$r'_{\bar{a}\bar{b}} = \delta_{\bar{a}}^{\ c} \delta_{\bar{b}}^{\ d} R_{cd} = r_{\bar{a}\bar{b}}. \tag{96}$$

Itt ismét felhasználtuk az eddigi azonosságokat. A teljes transzformációs szabály:

$$\begin{pmatrix} r' & r'_i \\ r'_j & r'_{ji} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r - 2v^i r_i + v^i v^j r_{ij} & r_i - v^j r_{ij} \\ r_j - v^k t_{jk} & r_{ij} \end{pmatrix}. \tag{97}$$

C. Függelék: Harmadrendű vegyes kontra-kokotenzor transzformációs szabályai

A fentiek alapján tekintsünk egy $M^a_{bc} : M \to \mathbb{M} \otimes \mathbb{M}^* \otimes \mathbb{M}^*$ tenzormezőt, amelyet az egykomponensű egyszerű anyag *energia-impulzus-tömeg tenzorának* fogunk tekinteni. Feltételezzük, hogy a tenzormező kovariáns indexeiben szimmetrikus. Egy adott $u^a \in \in V(1)$ négyessebességgel képzett komponenseivel a következő általános formába írható:

$$\begin{aligned} M^a_{bc} &= m_{bc} u^a m^{\bar{a}}_{bc} = \\ &\left(e\tau_b\tau_c - \frac{1}{2} p_{\bar{d}} \pi^{\bar{a}}_{\ b} \tau_c - \frac{1}{2} p_{\bar{e}} \pi^{\bar{e}}_{\ c} \tau_b + \frac{1}{2} \rho_{\bar{d}\bar{e}} \pi^{\bar{d}}_{\ b} \pi^{\bar{e}}_{\ c} \right) u^a + \\ &\left(q^{\bar{a}} \tau_b \tau_c - \frac{1}{2} P^{\bar{a}}_{\bar{d}} \pi_b^{\ \bar{d}} \tau_c - \frac{1}{2} P^{\bar{a}}_{\bar{e}} \pi_c^{\ \bar{e}} \tau_b + \frac{1}{2} m^{\bar{a}}_{\bar{d}\bar{e}} \pi_b^{\ \bar{d}} \pi_c^{\ \bar{e}} \right), \end{aligned} \tag{98}$$

ahol

$$m_{bc} = \tau_a M^a_{bc}, \qquad \text{és} \qquad m^{\bar{a}}_{\ bc} = \pi^{\bar{a}}_{\ d} M^d_{bc}. \tag{99}$$

Ezek a sűrűségek és áramok tenzorai, m_{bc} az energia-impulzus-tömegsűrűség kotenzor, illetve $m^{\bar{a}}_{\ bc}$ az energiaáramsűrűség-nyomás-diffúziós áramsűrűség tenzor. A további részek pedig:

- $e = u^b u^c m_{bc} = \tau_a u^b u^c M^a_{bc}$ az energia-lendület-tömeg tenzor idő-idő-időszerű része, az *energiasűrűség*.
- $p_{\bar{a}} = -2u^c \delta_{\bar{b}}^{\ d} m_{dc} = -2\tau_a u^c \delta_{\bar{b}}^{\ d} M^a_{dc}$ az energia-lendület-tömeg tenzor idő-idő-térszerű részéhez kötődő, a *lendületsűrűség*, illetve $p_{\bar{a}} = -2u^b \delta_{\bar{c}}^{\ d} m_{bd} = -2\tau_a u^b \delta_{\bar{c}}^{\ d} M^a_{cd}$ az idő-tér-időszerű részhez tartozik.

– $\rho_{bc} = 2\delta_{\bar{b}}{}^{d}\delta_{\bar{c}}{}^{e} m_{de} = 2\tau_a \delta_{\bar{b}}{}^{d}\delta_{\bar{c}}{}^{e} M^a_{de}$ a tömegsűrűség-kotenzor, az M^a_{bc} tenzor *idő-tér-térszerű részéhez* kötődik.

– $q^{\bar{a}} = u^c u^b m^{\bar{a}}{}_{bc} = u^c u^b \pi^{\bar{a}}{}_d M^d_{bc}$ az *energiaáramsűrűség*, az M^a_{bc} tenzor *tér-idő-időszerű részéhez*.

– $P^{\bar{a}}_{\bar{b}} = -2u^c \delta_{\bar{b}}{}^{e} m^{\bar{a}}{}_{ec} = -2u^c \delta_{\bar{b}}{}^{e} \pi^{\bar{a}}{}_d M^d_{ec}$ a *nyomás*, az M^a_{bc} tenzor *tér-idő-térszerű részéhez* tartozik és a tenzor szimmetriája miatt ez egyenlő $P^{\bar{a}}_{\bar{c}} = -2u^b \delta_{\bar{c}}{}^{e} m^{\bar{a}}{}_{be}$-vel.

– $M^{\bar{a}}_{\bar{b}\bar{c}} = 2\delta_{\bar{b}}{}^{e}\delta_{\bar{c}}{}^{f} \pi^{\bar{a}}{}_d M^d_{ef}$ a *diffúziós áramsűrűség*, az M^a_{bc} tenzor *tér-tér-térszerű részenek* kétszerese.

A változó előjelek és kettes faktorok oka, hogy a hagyományos mennyiségeket a mérlegekben és a transzformációs szabályokat a lehető legpontosabban szeretnénk visszakapni.

C.1. A tér- és időszerű részek transzformációs szabályai

Az adott objektív fizikai mennyiség transzformációs szabályának azt nevezzük, amikor u'^a sebességgel képzett idő- és térszerű komponenseket az u^a sebességgel képzett komponensek és a relatív sebesség függvényében adjuk meg. A B. Függelékben megadtuk, a különféle első és másodrendű tenzorok transzformációs szabályait. A számítás során a tenzorok u-formáját az u' sebesség szerint hasítjuk szét. A tömeg-energia-lendület tenzor esetén is hasonlóan járunk el:

Az u'-energia az M^a_{bc} tenzor u-komponenseivel és a $v^{\bar{a}} = u^a - u'^a$ relatív sebességgel kifejezve:

$$\begin{aligned} e' &= u'^b u'^c \tau_a M^a_{bc} = u'^b u'^c \left(e\tau_b\tau_c - \frac{1}{2} p_{\bar{d}}\pi^{\bar{d}}{}_b\tau_c - \frac{1}{2} p_{\bar{e}}\pi^{\bar{e}}{}_c\tau_b + \frac{1}{2}\rho_{\bar{d}\bar{e}}\pi^{\bar{d}}{}_b\pi^{\bar{e}}{}_c \right) \\ &= e + p_{\bar{a}}v^{\bar{b}} + \frac{\rho_{\bar{a}\bar{b}}}{2} v^{\bar{a}}v^{\bar{b}}. \end{aligned} \tag{100}$$

Az u'-lendületsűrűség pedig:

$$\begin{aligned} p'_{\bar{b}} &= -2u'^c \delta_{\bar{b}}{}^{d} \tau_a M^a_{dc} = u'^c \delta_{\bar{b}}{}^{d} \left(-2e\tau_b\tau_c + p_{\bar{d}}\pi^{\bar{d}}{}_b\tau_c + p_{\bar{e}}\pi^{\bar{e}}{}_c\tau_b - \rho_{\bar{d}\bar{e}}\pi^{\bar{d}}{}_b\pi^{\bar{e}}{}_c \right) \\ &= p_{\bar{b}} + \rho_{\bar{b}\bar{c}}v^{\bar{c}}. \end{aligned} \tag{101}$$

A ρ_{ab} sűrűség abszolút, nem transzformálódik:

$$\rho'_{\bar{b}\bar{c}} = 2\delta_{\bar{c}}{}^{e}\delta_{\bar{b}}{}^{d}\tau_a M^a_{de} = \rho_{\bar{b}\bar{c}}. \tag{102}$$

Az energiaáramsűrűség transzformációs szabálya:

$$
\begin{aligned}
q'^{\bar{a}} = u'^b u'^c \pi'^{\bar{a}}_{\ d} M^d_{\ bc} = u'^b u'^c \left(\left(e\tau_b\tau_c - \frac{1}{2} p_{\bar{d}}\pi^{\bar{a}}_{\ b}\tau_c - \frac{1}{2} p_{\bar{e}}\pi^{\bar{e}}_{\ c}\tau_b + \frac{1}{2}\rho_{\bar{d}\bar{e}}\pi^{\bar{d}}_{\ b}\pi^{\bar{e}}_{\ c} \right) \right) v^{\bar{a}} + \\
+ u'^b u'^c \pi'^{\bar{a}}_{\ f} \left(q^{\bar{f}}\tau_b\tau_c - \frac{1}{2} P^{\bar{d}}_{\bar{f}}\pi_b^{\ \bar{f}}\tau_c - \frac{1}{2} P^{\bar{d}}_{\bar{e}}\pi^{\ \bar{e}}_{c}\tau_b + \frac{1}{2} m^{\bar{d}}_{\ \bar{f}\bar{e}}\pi_c^{\ \bar{e}}\pi_b^{\ \bar{f}} \right) \\
= q^{\bar{a}} + (e + p_{\bar{b}} v^{\bar{b}} + \frac{\rho_{\bar{b}\bar{c}}}{2} v^{\bar{b}} v^{\bar{c}}) v^{\bar{a}} + 2P^{\bar{a}}_{\bar{b}} v^{\bar{b}} + \frac{1}{2} m^{\bar{a}}_{\ \bar{b}\bar{c}} v^{\bar{b}} v^{\bar{c}}.
\end{aligned}
\tag{103}
$$

A nyomás transzformációja:

$$
\begin{aligned}
P'^{\bar{a}}_{\bar{b}} = -2u'^c \delta_{\bar{b}}^{\ e} \pi'^{\bar{a}}_{\ d} M^d_{\ ec} = u'^c \left(p_{\bar{b}}\tau_c - \rho_{\bar{b}\bar{e}}\pi^{\bar{e}}_{\ c} \right) v^{\bar{a}} + \\
+ u'^c \delta_{\bar{b}}^{\ e} \pi'^{\bar{a}}_{\ f} \left(P^{\bar{d}}_{\bar{f}} \pi_b^{\ \bar{f}} \tau_c - m^{\bar{d}}_{\ \bar{f}\bar{g}} \pi_c^{\ \bar{g}} \pi_e^{\ \bar{f}} \right) \\
= P^{\bar{a}}_{\bar{b}} + p_{\bar{b}} v^{\bar{a}} + \rho_{\bar{b}\bar{c}} v^{\bar{c}} v^{\bar{a}} + m^{\bar{a}}_{\ \bar{b}\bar{c}} v^{\bar{c}}.
\end{aligned}
\tag{104}
$$

Végül pedig a diffúziós áramsűrűség a következőképpen transzformálódik:

$$
m'^{\bar{a}}_{\ \bar{b}\bar{c}} = 2\delta_{\bar{b}}^{\ e}\delta_{\bar{c}}^{\ f}\pi'^{\bar{a}}_{\ d} M^d_{\ ef} == m^{\bar{a}}_{\ \bar{b}\bar{c}} + \rho_{\bar{b}\bar{c}} v^{\bar{a}}. \tag{105}
$$

A hagyományos jelölésekkel összefoglalva írhatjuk, hogy:

$$
e' = e + p_i v^i + \frac{\rho_{ij}}{2} v^i v^j, \tag{106}
$$

$$
p'_i = p_i + \rho_{ij} v^j, \tag{107}
$$

$$
\rho'_{ij} = \rho_{ij}, \tag{108}
$$

$$
q'^i = q^i + v^i(e + p_j v^j + \frac{\rho_{jk}}{2} v^j v^k) + P^i_j v^j + \frac{m^i_{\ jk}}{2} v^k v^j, \tag{109}
$$

$$
P'^i_j = P^i_j + p_j v^i + \frac{\rho_{jk}}{2} v^i v^k + \frac{m^i_{\ jk}}{2} v^k, \tag{110}
$$

$$
m'^i_{\ jk} = m^i_{\ jk} + \rho_{jk} v^i. \tag{111}
$$

Egy fontos speciális eset, amikor a tömeg- és a diffúziós áramsűrűség tenzorok identitások a kovariáns komponenseikben, azaz $\rho_{jk} = \rho\delta_{jk}$ és $m^i_{jk} = j^i\delta_{jk}$. Ekkor

$$
e' = e + p_i v^i + \frac{\rho}{2} v^2, \tag{112}
$$

$$
p'_i = p_i + \rho v_i, \tag{113}
$$

$$
\rho'_{ij} = \rho_{ij}, \tag{114}
$$

$$
q'^i = q^i + v^i(e + p_j v^j + \frac{\rho}{2} v^2) + P^i_j v^j + j^i \frac{v^2}{2}, \tag{115}
$$

$$
P'^i_j = P^i_j + p_j v^i + \rho v^i v_j + j^i v_j, \tag{116}
$$

$$
j'^i = j^i + \rho v^i. \tag{117}
$$

(118)

Ezek a transzformációs tulajdonságok pontosan megegyeznek a harmadrendű, minden indexében kontravariáns tömeg-lendület-energia tenzor megfelelő komponenseire vonatkozó (13)-(18) transzformációs tulajdonságokkal. A megfelelő mérlegek szintén azonosak, és az entrópiaprodukció formája szintén ugyanolyan. A két reprezentáció között az intenzív mennyiségek transzformációs szabályai, illetve a relativisztikus és a kinetikus elmélettel történő kompatibilitás követelményével lehet különbséget tenni.

KÖSZÖNETMONDÁS

Fülöp Tamásnak, aki mindig mondta, hogy van abszolút energia. Ugyan végül nem kotenzornak tűnik, de még az sincs kizárva.

A munkát az OTKA K81161 és K104260 pályázatai támogatták.

IRODALOM

[1] H. Weyl. *Raum-Zeit-Matterie*. Julius Springer, Berlin, 1918. In German.

[2] H. Weyl. *Space-Time-Matter*. Methuen and Co. Ltd., London, 1922.

[3] P. Havas. Four-dimensional formulations of Newtonian mechanics and their relation to the special and the general theory of relativity. *Reviews of Modern Physics*, pages 938–965, 1964.

[4] M. Friedman. *Foundations of Space-Time Theories (Relativistic Physics and Philosophy of Science)*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1983.

[5] T. Matolcsi. *A Concept of Mathematical Physics: Models in Mechanics*. Akadémiai Kiadó (Publishing House of the Hungarian Academy of Sciences), Budapest, 1986.

[6] T. Matolcsi. *Spacetime Without Reference Frames*. Akadémiai Kiadó Publishing House of the Hungarian Academy of Sciences), Budapest, 1993.

[7] Fülöp T. A tér nem abszolút – a téridő, mint a Galilei-féle relativitási elv következménye. In Fülöp T., editor, *Új eredmények a kontinuumfizikában*, volume 8 of *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár*, chapter 1, pages 11–35. Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2008.

[8] T. Matolcsi and P. Ván. Absolute time derivatives. *Journal of Mathematical Physics*, 48:053507–19, 2007. math-ph/0608065.

[9] G. I. Barenblatt. *Scaling, self-similarity, and intermediate asymptotics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

[10] László András. Conformal invariance without referring to metric. 2014.

[11] J. G. Oldroyd. On the formulation of rheological equations of state. *Proceedings of Royal Society of London, A*, 200:523–541, 1949.

[12] W. Noll. Space-time structures in classical mechanics. In *The foundations of mechanics and thermodynamics (Selected papers by Walter Noll)*, pages 204–210. Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1974. originally: pp28-34, Delaware Seminar in the Foudnations of Physics, Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 1967.

[13] W. Noll. Five contributions to natural philosophy. 2004. www.math.cmu.edu/∼∼wn0g/noll/FC.pdf.

[14] W. Noll. A frame free formulation of elasticity. *Journal of Elasticity*, 83:291–307, 2006.

[15] W. Noll and B. Seguin. Basic concepts of thermomechanics. *Journal of Elasticity*, 101:121–151, 2010.

[16] G. Jaumann. Geschlossenes System physikalischer und chemischer Differentialgesetze (I. Mitteilung). *Sitzungsberichte der kaiserliche Akademie der wissenschaften in Wien*, CXVII(Mathematisch IIa):385–528, 1911.

[17] W. Noll. A mathematical theory of the mechanical behavior of continuous media. *Archives of Rational Mechanics and Analysis*, 2:197–226, 1958/59.

[18] I. Müller. On the frame dependence of stress and heat flux. *Archive of Rational Mechanics and Analysis*, 45:241–250, 1972.

[19] D. G. B. Edelen and J. A. McLennan. Material indifference: a principle or a convenience. *International Journal of engineering Science*, 11:813–817, 1973.

[20] F. Bampi and A. Morro. Objectivity and objective time derivatives in continuum physics. *Foundations of Physics*, 10(11/12):905–920, 1980.

[21] A. I. Murdoch. On material frame-indifference, intrinsic spin and certain constitutive relations motivated by the kinetic theory of gases. *Archive of Rational Mechanics and Analysis*, 83:185–194, 1983.

[22] G. Ryskin. Misconception which led to the "material frame indifference" controversy. *Physical Review E*, 32(2):1239–1240, 1985.

[23] G. Ryskin. Reply to "comments on the 'material frame indifference' controversy". *Physical Review E*, 36(9):4526, 1987.

[24] C. G. Speziale. Comments on the "material frame indifference" controversy. *Physical Review E*, 36(9):4522–4525, 1987.

[25] C. G. Speziale. A review of material frame-indifference in mechanics. *Applied Mechanical Reviews*, 51(8):489–504, 1998.

[26] B. Svendsen and A. Bertram. On frame-indifference and form-invariance in constitutive theory. *Acta Mechanica*, 132:195–207, 1999.

[27] A. Bertram and B. Svendsen. On material objectivity and reduced constitutive equations. *Archive of Mechanics*, 53:653–675, 2001.

[28] M. Massoudi. On the importance of material frame-indifference and lift forces in multiphase flow. *Chemical Engineering Science*, 57:3687–3701, 2002.

[29] A. I. Murdoch. Objectivity in classical continuum physics: a rationale for discarding the 'principle of invariance under superposed rigid body motions' in favour of purely objective considerations. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 15:309–320, 2003.

[30] I-S. Liu. On Euclidean objectivity and the principle of material frame-indifference. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 16:177–183, 2003.

[31] A. I. Murdoch. On criticism of the nature of objectivity in classical continuum physics. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 17:135–148, 2005.

[32] I-S. Liu. Further remarks on Euclidean objectivity and the principle of material frame-indifference. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 17:125–133, 2005.

[33] A. Yavari, J. E. Marsden, and M. Ortiz. On spatial and material covariant balance laws in elasticity. *Journal of Mathematical Physics*, 47:042903, 2006.

[34] M. Frewer. More clarity on the concept of material frame-indifference on classical continuum mechanics. *Acta Mechanica*, 202:213–246, 2009.

[35] P. M. Mariano. SO(3) invariance and covariance in mixtures of simple bodies. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 40:1023–1030, 2005.

[36] P. M. Mariano. Geometry and balance of hyperstresses. *Rendiconti dei Lincei Matematica Applicata*, 18:311–331, 2007.

[37] P. M. Mariano. Cracks in complex bodies: covariance of tip balances. *J. of Nonlinear Science*, 18:99–141, 2008.

[38] W. Muschik. Objectivity and frame indifference, revisited. *Archive of Mechanics*, 50:541–547, 1998.

[39] W. Muschik and L. Restuccia. Changing the observer and moving materials in continum physics: Objectivity and frame-idifference. *Technische Mechanik*, 22(3):152–160, 2002.

[40] W. Muschik and L. Restuccia. Systematic remarks on objectivity and frame-indifference, liquid crystal theory as an example. *Archive of Applied Mechanics*, 78(11):837–854, 2008.

[41] W. Muschik. Is the heat flux density really non-objective? A glance back, 40 years later. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 24(24):333–337, 2012.

[42] T. Matolcsi and T. Gruber. Spacetime without reference frames: An application to the kinetic theory. *International Journal of Theoretical Physics*, 35(7):1523–1539, 1996.

[43] T. Matolcsi and P. Ván. Can material time derivative be objective? *Physics Letters A*, 353:109–112, 2006. math-ph/0510037.

[44] Fülöp T. Kontinuumok kinematikájának új értelmezése. In Fülöp T., editor, *Új eredmények a kontinuumfizikában*, volume 8 of *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár*, chapter 3, pages 55–99. Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2008.

[45] Fülöp T. és Ván P. Véges rugalmas és képlékeny deformációk leírása. In Fülöp T., editor, *Idő és térderiváltak anyagtörvényekben*, volume 10 of *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár*, pages 99–151. Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2010.

[46] T. Fülöp and P. Ván. Kinematic quantities of finite elastic and plastic deformations. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 35:1825–1841, 2012. arXiv:1007.2892v1.

[47] C. Eckart. The thermodynamics of irreversible processes. IV. The theory of elasticity and anelasticity. *Physical Review*, 73(4):373–382, 1948.

[48] H. Xiao O.T. Bruhns and A. Mayers. Constitutive inequalities for an isotropic elastic strain energy function based on Hencky's logarithmic strain tensor. *Proc. Roy. Soc. London A*, 457:2207–2226, 2001.

[49] C.O. Horgan and J.G. Murphy. A generalization of Hencky's strain-energy density to model the large deformations of slightly compressible solid rubbers. *Mechanics of Materials*, 79:943–950, 2009.

[50] F. Osterbrink P. Neff, B. Eidel and R. Martin. A Riemannian approach to strain measures in nonlinear elasticity. *C. R. Acad. Sci.*, 342:254–257, 2014.

[51] Patrizio Neff, Ionel-Dumitrel Ghiba and Johannes Lankeit. The exponentiated Hencky-logarithmic strain energy. Part I: Constitutive issues and rank–one convexity. *Preprint*, 2014. arXiv:1403.4675.

[52] H. Brenner. Kinematics of volume transport. *Physica A*, 349:11–59, 2005.

[53] H. Brenner. Navier-Stokes revisited. *Physica A*, 349:60–132, 2005.

[54] H. Brenner. Fluid mechanics revisited. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 370(2):190–224, 2006.

[55] H. Brenner. Bi-velocity hydrodynamics: Single-component fluids. *International Journal of Engineering Science*, 47(9):930–958, 2009.

[56] H. Brenner. Diffuse volume transport in fluids. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 389(19):4026–4045, 2010.

[57] H. Brenner. Beyond Navier–Stokes. *International Journal of Engineering Science*, 54:67–98, 2012.

[58] H. Brenner. Steady-state heat conduction in a gas undergoing rigid-body rotation. comparison of Navier–Stokes–Fourier and bivelocity paradigms. *International Journal of Engineering Science*, 70:29–45, 2013.

[59] H. Brenner. Conduction-only transport phenomena in compressible bivelocity fluids: Diffuse interfaces and Korteweg stresses. *Physical Review E*, 89(4):043020, 2014.

[60] D. Bedeaux, S. Kjelstrup, and H.C. Öttinger. On a possible difference between the barycentric velocity and the velocity that gives translational momentum in fluids. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 371(2):177–187, 2006.

[61] H. C. Öttinger. Weakly and strongly consistent formulations of irreversible processes. *Physical Review Letters*, 99(13):130602(4), 2007.

[62] P. Ván. Generic stability of dissipative non-relativistic and relativistic fluids. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, page 02054, 2009. arXiv: 0811.0257.

[63] T. Ruggeri. Galilean invariance and entropy principle for systems of balance laws. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 1(1):3–20, 1989.

[64] I. Müller and T. Ruggeri. *Rational Extended Thermodynamics*, volume 37 of *Springer Tracts in Natural Philosophy*. Springer Verlag, New York-etc., 2nd edition, 1998.

[65] T. S. Bíró and P. Ván. About the temperature of moving bodies. *EPL*, 89:30001, 2010. arXiv:0905.1650v1.

[66] Horváth Róbert. A mozgási energia fogalmának egy új értelmezése. *KLTE MFK Tudományos Közleményei*, 23:29–33, 1997.

[67] R. L. Liboff. *Kinetic Theory (Classical, Quantum, and Relativistic Descriptions)*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1990.

[68] T. Matolcsi. On material frame-indifference. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 91(2):99–118, 1986.

[69] T. Matolcsi. *Ordinary thermodynamics*. Akadémiai Kiadó (Publishing House of the Hungarian Academy of Sciences), Budapest, 2005.

[70] T. Matolcsi. *Közönséges termodinamika*. Scholar Könyvkiadó, 2012.

[71] P. Ván. Kinetic equilibrium and relativistic thermodynamics. *EPJ WEB of Conferences*, 13:07004, 2011. arXiv:1102.0323.

[72] P. Ván and T.S. Biró. First order and generic stable relativistic dissipative hydrodynamics. *Physics Letters B*, 709(1-2):106–110, 2012. arXiv:1109.0985[nucl-th].

[73] P. Ván and T.S. Biró. Thermodynamics and flow-frames for dissipative relativistic fluids. In G. Chacón-Acosta, García-Perciante A.L., and A. Sandoval-Villalbazo, editors, *Plasma Physics and Relativistic Fluids*, volume 1578 of *AIP Conf. Proceedings*, pages 114–121, 2014. Proceedings of the V Leopoldo García–Colín Mexican Meeting on Mathematical and Experimental Physics, El Colegio Nacional, September 9-13, 2013. Mexico City. arXiv:1310.5976.

[74] P. Ván and T. S. Bíró. Relativistic hydrodynamics - causality and stability. *The European Physical Journal - Special Topics*, 155:201–212, 2008. arXiv:0704.2039v2.

[75] P. Ván. Internal energy in dissipative relativistic fluids. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 3(6):1161–1169, 2008. arXiv:07121437 [nucl-th].

[76] T. S. Bíró, E. Molnár, and P. Ván. A thermodynamic approach to the relaxation of viscosity and thermal conductivity. *Physical Review C*, 78:014909, 2008. arXiv:0805.1061 (nucl-th).

[77] P. Ván and T. S. Bíró. Transformations of relativistic temperature - Planck-Einstein, Ott, Landsberg and Doppler formulas as particular cases. Wolfram Demonstration Project, 2009.

[78] P. Ván and T. Biró. Dissipation flow-frames: particle, energy, thermometer. In M. Pilotelli and G. P. Beretta, editors, *Proceedings of the 12th Joint European Thermodynamics Conference*, pages 546–551, Brescia, 2013. Cartolibreria SNOOPY. ISBN 978-88-89252-22-2, arXiv:1305.3190.

[79] Ván P. Nemegyensúlyi termomechanika. volume 16 of *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár*, pages 339–344, Budapest, 2013. Hantken Kiadó.