

## SZILÁRDTEST-REOLÓGIAI IDŐFÜGGÉS MEGHATÁROZÁSA A VOLTERRA-ELV ÁLTAL INSPIRÁLVA

Fülöp Tamás – Szücs Mátyás

BME ENERGETIKAI GÉPEK ÉS RENDSZEREK TANSZÉK, BUDAPEST  
MONTAVID TERMODINAMIKAI KUTATÓCSOPORT, BUDAPEST

*A Volterra-elv egy olyan módszer, mellyel egy lineáris reológiai anyagtörvényű szilárd közeg mechanikai folyamatát egy egyszerűbb feladat: a megfelelő Hooke-rugalmasságtani probléma megoldásából származtathatjuk. A Volterra-elv sajnos korlátozott érvényességi körű, például időfüggő peremfeltételek esetén – így például egy alagútnyitás okozta reológiai időfüggés meghatározására – nem alkalmazható. Ad azonban egy ötletet: a Hooke-állandók időfüggővé tételét, mellyel bizonyos időfüggő peremfeltételű reológiai problémák megoldhatóak, amint azt itt két alagútnyitási példán bemutatjuk. A módszer általánosításával a jövőben remélhetőleg bonyolultabb, csak numerikusan kezelhető Hooke-feladatok reológiai kiterjesztései is megoldhatóak lesznek – e törekvésünkhöz a motivációt Marta Doležalová munkássága adta.*

### 1. A CÉLKITŰZÉS MEGFOGALMAZÁSA

Tekintsünk egy homogén, izotrop Hooke-rugalmas közeget, azaz melyben bármely  $\mathbf{r}$  helyen a  $\boldsymbol{\sigma}$  feszültségtenzor és az  $\boldsymbol{\varepsilon}$  deformációtenzor között

$$\boldsymbol{\sigma}^{\text{dev}} = E^{\text{dev}} \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{dev}}, \quad \boldsymbol{\sigma}^{\text{sph}} = E^{\text{sph}} \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{sph}}, \quad E^{\text{dev}} = 2G, \quad E^{\text{sph}} = 3K \quad (1)$$

alakú anyagtörvény – konstitúciós összefüggés – teljesül, ahol  $^{\text{dev}}$  és  $^{\text{sph}}$  a tenzorok deviatorikus (nyom nélküli) és gömbi (az  $\mathbf{1}$  egységtenzorral arányos) részét jelölik:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{sph}} = \frac{1}{3}(\text{tr } \boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{1}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{sph}} = \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{sph}} \mathbf{1}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{dev}} = \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{sph}}. \quad (2)$$

Ha ezt kiegészítjük a mechanikai mozgásegyenlet erőegyensúlyi közelítésével és a deformációtenzor „duplaörvény-mentességével”:

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \overleftarrow{\nabla} = \mathbf{0}, \quad \overrightarrow{\nabla} \times \boldsymbol{\varepsilon} \times \overleftarrow{\nabla} = \mathbf{0}, \quad (3)$$

továbbá a közeg által kitöltött tartomány peremére kirótt megfelelő peremfeltételekkel – alábbi példánkban: a feszültség normálirányú komponensének előírt értékével –, akkor a probléma megoldása létezik és egyértelmű.

Ez a megoldás létezik és egyértelmű, de nem feltétlenül könnyű megkapni ezt a bizonyos megoldást. Ugyan lineáris egyenletrendszerrel van dolgunk, de míg (1)-ben a tenzorok deviatorikus része közötti kapcsolat eltér a gömbi részek közöttitől ( $E^{\text{dev}} \neq E^{\text{sph}}$  esetén), addig a (10)-beli mindkét egyenlet a deviatorikus és gömbi komponens összezsoltására, összegére ró ki feltételt – a peremfeltételek pedig szintén. Ennek megfelelően a feladat jóval komplikáltabb, mint egy egyszerű potenciálfeladat.

Ezért amikor egy ilyen szituáció reológiai általánosításával találkozunk, ahol az időbeliség is bejön a képbe, ésszerű törekvés, hogy a feladat térbeli bonyolultságával ne kelljen foglalkozni: próbáljunk meg a megfelelő rugalmasságtani megoldásra támaszkodni. Hogyan néz ki egy (lineáris) reológiai általánosítás: (1) helyett

$$\mathcal{S}^{\text{dev}} \boldsymbol{\sigma}^{\text{dev}} = \mathcal{E}^{\text{dev}} \boldsymbol{\epsilon}^{\text{dev}}, \quad \mathcal{S}^{\text{sph}} \boldsymbol{\sigma}^{\text{sph}} = \mathcal{E}^{\text{sph}} \boldsymbol{\epsilon}^{\text{sph}} \quad (4)$$

áll előttünk, ahol  $\mathcal{S}^{\text{dev}}$ ,  $\mathcal{S}^{\text{sph}}$ ,  $\mathcal{E}^{\text{dev}}$  és  $\mathcal{E}^{\text{sph}}$  a  $\frac{\partial}{\partial t}$  időderiváló operátor polinomjai: az elméletileg és kísérletileg egyaránt kitüntetett [1, 2, 3] Kluitenberg–Verhás-modellcsalád esetén például

$$\mathcal{S}^{\text{dev}} = 1 + \tau^{\text{dev}} \frac{\partial}{\partial t}, \quad \mathcal{E}^{\text{dev}} = E^{\text{dev}} + \hat{E}^{\text{dev}} \frac{\partial}{\partial t} + \hat{\hat{E}}^{\text{dev}} \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^2, \quad (5)$$

$$\mathcal{S}^{\text{sph}} = 1 + \tau^{\text{sph}} \frac{\partial}{\partial t}, \quad \mathcal{E}^{\text{sph}} = E^{\text{sph}} + \hat{E}^{\text{sph}} \frac{\partial}{\partial t} + \hat{\hat{E}}^{\text{sph}} \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^2, \quad (6)$$

melyben az együtthatók további anyagi paraméterek. A peremfeltételek mellett pedig már kezdeti feltételekre is szükség van.

Láthatóan itt a deviatorikus és a gömbi rész még sokkal függetlenebbül akar alakulni, jóval nehezebb biztosítani, hogy továbbra is minden időpillanatban teljesítse az összegük a (10) feltételeket, továbbá a peremfeltételeket is. Ezért nagy értékű tehát, ha Hooke-rugalmasságtani információkra támaszkodva nem kell a térbeli feltételekkel bajlódunk, hanem koncentrálnunk az időfüggés behozta bonyodalmakra.

Egy ilyen lehetőséget nyújt a Volterra-elv [4, 5, 6], mely szerint a reológiai megoldás megkapható úgy, hogy a Hooke-rugalmas megoldásban az  $E^{\text{dev}}$ ,  $E^{\text{sph}}$  állandókat az  $\mathcal{S}^{\text{dev}}$ ,  $\mathcal{S}^{\text{sph}}$ ,  $\mathcal{E}^{\text{dev}}$ ,  $\mathcal{E}^{\text{sph}}$ -ből képzett megfelelő operátorokkal helyettesítjük, és a kapott időbeli differenciálegyenleteket megoldjuk. Sajnos a Volterra-elv nem tétel, azaz nem ismeretesek pontos matematikai szinten, hogy ez az út mikor járható és mikor nem. Az elvégzendő számítás módja is felvet matematikai kérdéseket. Emellett több szerző is felhívja a figyelmet, hogy az elv időfüggő peremfeltételek esetén nem alkalmazható [5, 6].

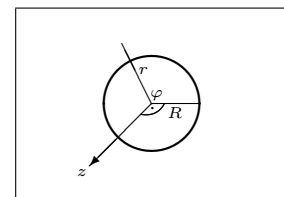
Alagút-reológiai feladatok megoldásához tehát például nem használható, ahol az üregnyitás – mint megkerülhetetlenül időfüggő, sőt többnyire igencsak rövid időskálán változó peremfeltétel – indítja el a közeg időbeli folyamatát (mely aztán hónapokig-évekig tartó mozgást jelent).

Azonban ha közvetlenül nem is alkalmazhatjuk a Volterra-elvet ilyen helyzetekben, a benne rejlő mélyebb gondolatot – hogy próbáljunk támaszkodni a térbeli feltételekre ismert megoldásra – más módon is kiaknázzhatjuk. Ebben az alternatív változatban a Hooke-állandókat nem operátorokkal, hanem időfüggő függvényekkel helyettesítenénk. Mintha az anyag rugalmasságtani állandói időfüggővé válnának. Ekkor minden pillanatban kielégítettük a térbeli feltételeket – egy épp aktuális  $E^{\text{dev}}(t)$ ,  $E^{\text{sph}}(t)$  értékpárral –, így csak az ezekre generálódó időbeli differenciálegyenleteket kell megoldani.

Közelebről megnézve, a térbeli feltételek egy része  $\sigma$ -ra vonatkozik (ilyen a mozgásegyenlet és a feszültségperem – a továbbiakban ilyen peremfeltételekre fogunk szorítkozni), másik része  $\varepsilon$ -ra (a duplaörvény-mentesség). Így a térbeli feltételrendszer úgy is teljesíthető, ha megengedjük, hogy a feszültség rugalmasságtani megoldásába tett  $E_{\sigma}^{\text{dev}}(t)$ ,  $E_{\sigma}^{\text{sph}}(t)$  pár eltérhet a deformáció megoldásába tett  $E_{\varepsilon}^{\text{dev}}(t)$ ,  $E_{\varepsilon}^{\text{sph}}(t)$  pártól. Ha ez a négy szabad függvény nem lenne elegendő a (4) jelentette feltételek kielégítésére, akkor több ilyen feszültség-megoldás szuperpozíciójaként is kereshetjük a megoldást, különböző  $E_{\sigma}^{\text{dev}}(t)$ ,  $E_{\sigma}^{\text{sph}}(t)$  párokkal, és a deformáció ugyanígy kereshető szuperpozícióként. Az itt vizsgált egyszerűbb geometriájú konkrét esetekben erre nem lesz szükség, viszont bonyolultabb helyzeteket a jövőben majd ilyen megoldáskombinációk formájában szeretnénk megpróbálni tárgyalni.

## 2. HOMOGEN, IZOTROP FESZÜLTÉGMEZŐBEN NYITOTT ALAGÚT

Az „időfüggő állandók” ötletének működését először egy olyan egyszerű eseten mutatjuk meg, melyre a megoldás más úton már ismert [8, 9]. Egy végtelen, hengerszerű alagút nyitását tekintjük izotrop (csak gömbi részt tartalmazó), helyfüggetlen feszültségmezőben. A nyitást úgy modellezzük, hogy a hengerpalást mentén előírt peremfeltételt, a normális feszültségkomponenst egy időfüggő szorzó révén egy  $[t_1, t_2]$  időintervallum során fokozatosan nullává tesszük. A  $t < t_1$  időkre a kiinduló, ún. primer feszültségmező uralkodik: a hengerhez illeszkedő  $r, \varphi, z$  hengerkoordinátarendszerben egyetlen komponens értékével az egész feszültség – és így az egész deformáció – jellemezhető:



$$\sigma(t < t_1) = \bar{\sigma} = \bar{\sigma}^{\text{sph}} = \bar{\sigma}_{rr} \mathbf{1}, \quad \varepsilon(t < t_1) = \bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}^{\text{sph}} = \frac{1}{E^{\text{sph}}} \bar{\sigma}^{\text{sph}}. \quad (7)$$

A megnyitott ( $t > t_2$ ),  $R$  sugarú alagút esetén két peremfeltétel van jelen:

$$\sigma_{rr}(R, \varphi, z) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \boldsymbol{\sigma}(r, \varphi, z) = \bar{\boldsymbol{\sigma}} \quad (8)$$

(utóbbi egy aszimptotikus feltétel). A nyitás során  $\sigma_{rr}(R, \varphi, z)$ -t csökkentenénk le  $\bar{\sigma}_{rr}$ -ről nullára.

Az itt bemutatandó módszerhez olyan időfüggő peremfeltételek lesznek szükségesek, ahol minden peremfeltétel ugyanazzal a  $\lambda(t)$  időfüggő függvénnyel kell átskálázódjon. Ha a helyzet nem ilyen, mint jelen példánkban (mert a végtelenbeli feltétel időfüggetlen marad), akkor a problémát szétszedjük ilyenek összegére. Esetünkben ez egyszerűen a primer mező levonásával érhető el, ezért a továbbiakban a

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} := \boldsymbol{\sigma} - \bar{\boldsymbol{\sigma}}, \quad \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} := \boldsymbol{\varepsilon} - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (9)$$

ún. kiegészítő mezőkre átfogalmazott

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \overleftarrow{\nabla} = \mathbf{0}, \quad \overrightarrow{\nabla} \times \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \times \overleftarrow{\nabla} = \mathbf{0}, \quad \hat{\sigma}_{rr}(R, \varphi, z) = -\bar{\sigma}_{rr}, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \hat{\boldsymbol{\sigma}}(r, \varphi, z) = \mathbf{0} \quad (10)$$

Hooke-rugalmasságtani feladat lesz a kiindulópontunk, melynek ismert megoldása [9, 8]

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{r}) = \hat{\boldsymbol{\sigma}}^{\text{dev}}(\mathbf{r}) = \bar{\sigma}_{rr} \begin{pmatrix} -\frac{R^2}{r^2} & & \\ & \frac{R^2}{r^2} & \\ & & 0 \end{pmatrix} =: \hat{\boldsymbol{\sigma}}_1(\mathbf{r}), \quad \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{r}) = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\text{dev}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{E^{\text{dev}}} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_1(\mathbf{r}) \quad (11)$$

(az elmozdulásmezőnek nevezett mennyiséggel nem lesz szükséges foglalkoznunk). Az alábbiak szempontjából két fontos tulajdonságot figyeljünk itt meg: hogy a feszültség tisztán deviatorikus, és hogy független a rugalmasságtani állandóktól. Dimenziós alapon annyit tudhattunk számolás nélkül, hogy mivel a peremfeltétel feszültséget ír elő, a megoldás ezzel arányos kell legyen, következésképp csak a dimenziótlan

$$\eta := \frac{E^{\text{dev}}}{E^{\text{sph}}} \quad (12)$$

kombinációtól [avagy a  $\nu = (1 - \eta)/(2 + \eta)$  Poisson-tényezőttől] függhet. Történetesen az eredmény ennél speciálisabbnak bizonyul:  $\eta$ -függetlennek.

Az alagútnyitást a már mondottak alapján a

$$\hat{\sigma}_{rr}(t, R, \varphi, z) = \lambda(t) \cdot [-\bar{\sigma}_{rr}] \quad (13)$$

módon modellezzük, ahol  $\lambda(t)$ -ről elég annyit megkötnünk, hogy

$$\lambda(t) := \begin{cases} 0, & \text{ha } t \leq t_1, \\ 1, & \text{ha } t \geq t_2, \\ \text{közben sima.} & \end{cases} \quad (14)$$

Az ehhez tartozó – továbbra is rugalmasságtani – megoldás

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{el}}(t, \mathbf{r}) = \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{el}}^{\text{dev}}(t, \mathbf{r}) = \lambda(t) \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}_1(\mathbf{r}), \quad \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\text{el}}(t, \mathbf{r}) = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\text{el}}^{\text{dev}}(t, \mathbf{r}) = \frac{\lambda(t)}{E^{\text{dev}}} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}_1(\mathbf{r}). \quad (15)$$

Ezzel előkészítettük a terepet az „időfüggő állandók” módszeréhez egy (4) reológiai közeg tárgyalásához: a (15) megoldásban egyedül előforduló  $E^{\text{dev}}$  Hooke-rugalmasságtani együttható helyére helyettesítünk egy ismeretlen időfüggő függvényt:

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{reol}}(t, \mathbf{r}) = \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{reol}}^{\text{dev}}(t, \mathbf{r}) = \lambda(t) \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}_1(\mathbf{r}), \quad \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\text{reol}}(t, \mathbf{r}) = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\text{reol}}^{\text{dev}}(t, \mathbf{r}) = \frac{\lambda(t)}{E_{\varepsilon}^{\text{dev}}(t)} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}_1(\mathbf{r}). \quad (16)$$

Egy ilyen megoldás minden pillanatban kielégíti a térbeli feltételeket, hiszen minden pillanatban egy Hooke-rugalmasságtani probléma megoldása: az egyetlen tennivalónk (4) kirovása.

Esetünkben ez is egyszerű: a gömbi egyenlet triviálisan teljesül, egyedül az

$$\mathcal{S}^{\text{dev}} \lambda = \mathcal{E}^{\text{dev}} \kappa, \quad \kappa(t) := \frac{\lambda(t)}{E_{\varepsilon}^{\text{dev}}(t)} \quad (17)$$

egyenlet oldandó meg, olyan kezdeti feltételekkel, sőt, előélettel, hogy  $\kappa(t < t_1) = 0$  (üregnyitás előtt a kiegészítő feszültség és deformáció nulla). Ennek az egyenletnek egyértelmű megoldása van, tehát készen vagyunk. Az eredményt összehasonlíthatjuk az ismert, más úton nyert megoldással [8, 9], és megnyugtató egyezést találunk.

### 3. HOMOGÉN, ANIZOTROP FESZÜLTSGMEZŐBEN NYITOTT ALAGÚT

A második, bonyolultabb példánk az előző általánosítása: tetszőleges – de továbbra is helyfüggetlen –  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$  primer mezőben nyitunk hengerverszerű üreget. A nyitás utáni kiegészítő mezők Hooke-rugalmas esetben [7]<sup>1</sup>:

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{r}) = c(\eta) \hat{\boldsymbol{\sigma}}_1(\mathbf{r}) + \hat{\boldsymbol{\sigma}}_2(\mathbf{r}), \quad c(\eta) = \frac{1 - \eta}{2 + \eta}, \quad \hat{\boldsymbol{\sigma}}_1(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & -4 \left(\frac{R}{r}\right)^2 \bar{\sigma}_-(\varphi) \end{pmatrix}, \quad (18)$$

$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_2(\mathbf{r}) =$

$$= \begin{pmatrix} -\left(\frac{R}{r}\right)^2 \bar{\sigma}_+ - \left[4\left(\frac{R}{r}\right)^2 - 3\left(\frac{R}{r}\right)^4\right] \bar{\sigma}_-(\varphi) & \left[2\left(\frac{R}{r}\right)^2 - 3\left(\frac{R}{r}\right)^4\right] \bar{\sigma}_{r\varphi}(\varphi) & -\left(\frac{R}{r}\right)^2 \bar{\sigma}_{rz}(\varphi) \\ \left[2\left(\frac{R}{r}\right)^2 - 3\left(\frac{R}{r}\right)^4\right] \bar{\sigma}_{r\varphi}(\varphi) & \left(\frac{R}{r}\right)^2 \bar{\sigma}_+ - 3\left(\frac{R}{r}\right)^4 \bar{\sigma}_-(\varphi) & \left(\frac{R}{r}\right)^2 \bar{\sigma}_{\varphi z}(\varphi) \\ -\left(\frac{R}{r}\right)^2 \bar{\sigma}_{rz}(\varphi) & \left(\frac{R}{r}\right)^2 \bar{\sigma}_{\varphi z}(\varphi) & 0 \end{pmatrix} \quad (19)$$

<sup>1</sup> Megoldásukat ellenőriztük és néhány kisebb sajtóhibát kijavítottunk.

a  $\bar{\sigma}$  primer feszültségmezővel kapcsolatos

$$\bar{\sigma}_+ = \frac{1}{2}(\bar{\sigma}_{xx} + \bar{\sigma}_{yy}), \quad \bar{\sigma}_-(\varphi) = \frac{1}{2}(\bar{\sigma}_{xx} - \bar{\sigma}_{yy}) \cos(2\varphi) + \bar{\sigma}_{xy} \sin(2\varphi), \quad (20)$$

$$\bar{\sigma}_{r\varphi}(\varphi) = -\frac{1}{2}(\bar{\sigma}_{xx} - \bar{\sigma}_{yy}) \sin(2\varphi) + \bar{\sigma}_{xy} \cos(2\varphi), \quad (21)$$

$$\bar{\sigma}_{rz}(\varphi) = \bar{\sigma}_{xz} \cos \varphi + \bar{\sigma}_{yz} \sin \varphi, \quad \bar{\sigma}_{\varphi z}(\varphi) = -\bar{\sigma}_{xz} \sin \varphi + \bar{\sigma}_{yz} \cos \varphi, \quad (22)$$

segédjelölésekkel, és

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} &= \frac{1}{E^{\text{sph}}} \left\{ \frac{c(\eta)}{\eta} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_1^{\text{dev}} + \frac{1}{\eta} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_2^{\text{dev}} + c(\eta) \hat{\boldsymbol{\sigma}}_1^{\text{sph}} + \hat{\boldsymbol{\sigma}}_2^{\text{sph}} \right\} \\ &= \frac{1}{E^{\text{sph}}} \left\{ \frac{c(\eta)}{\eta} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_1^{\text{dev}} + \frac{1}{\eta} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_2^{\text{dev}} + [c(\eta) + 1] \hat{\boldsymbol{\sigma}}_1^{\text{sph}} \right\}, \end{aligned} \quad (23)$$

ahol felhasználtuk azt az észrevételt is, hogy  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1^{\text{sph}} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}_2^{\text{sph}}$ . Értelemszerűen a hengerpalást menti peremfeltétel itt is a primer mező  $rr$ -komponensének ellentettjével való egyenlőség.

Az üregnyitást is az előző esethez hasonlóan egy  $\lambda(t)$  szorzóval modellezzük, és ekkor ez a szorzó kerül rá a fenti feszültség- és deformáció-megoldásra, ugyanúgy, ahogy az előbb (11)-ből (15)-re jutottunk:

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{el}}(t, \mathbf{r}) = \lambda(t) \left\{ c(\eta) \hat{\boldsymbol{\sigma}}_1(\mathbf{r}) + \hat{\boldsymbol{\sigma}}_2(\mathbf{r}) \right\}, \quad (24)$$

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\text{el}}(t, \mathbf{r}) = \frac{\lambda(t)}{E^{\text{sph}}} \left\{ \frac{c(\eta)}{\eta} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_1^{\text{dev}} + \frac{1}{\eta} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_2^{\text{dev}} + [c(\eta) + 1] \hat{\boldsymbol{\sigma}}_1^{\text{sph}} \right\}. \quad (25)$$

A reológiai eset megoldását ismét a Hooke-rugalmasságtani állandók helyére helyettesített időfüggvényekkel reméljük megtalálni: jelen esetben a feszültségbeli  $\eta$ -t is helyettesítjük, egy

$$\eta_{\sigma}(t) := \frac{E_{\sigma}^{\text{dev}}(t)}{E_{\sigma}^{\text{sph}}(t)} \quad (26)$$

ismeretlen függvénnyel, a deformációbelit pedig egy másik,

$$\eta_{\varepsilon}(t) := \frac{E_{\varepsilon}^{\text{dev}}(t)}{E_{\varepsilon}^{\text{sph}}(t)} \quad (27)$$

kombinációval, és természetesen maga a deformációban szereplő  $E^{\text{sph}}$  helyére is  $E_{\varepsilon}^{\text{sph}}(t)$ -t írunk. Mivel a feszültség  $E_{\sigma}^{\text{dev}}(t)$ -nek és  $E_{\sigma}^{\text{sph}}(t)$ -nek csak a hányadosától függ, e két függvény egyike szabadon megválasztható vagy éppen rögzíthető, ezért élhetünk a legegyszerűbb,  $E_{\sigma}^{\text{sph}}(t) := E^{\text{sph}}$  választással.

Három szabad, keresett függvényünk van tehát. Ezekre a (4) reológiai összefüggések épp három egyenletet rónak ki. Ugyanis a deformációban három lineárisan független

tenzormező szuperponálódik:  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1^{\text{dev}}(\mathbf{r})$ ,  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_2^{\text{dev}}(\mathbf{r})$  és  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1^{\text{sph}}(\mathbf{r})$ . Így mindegyik független mező időfüggővé vált együtthatójára egy-egy egyenlet fog származni: az első kettőére a deviatorikus, a harmadikéra a gömbi reológiai összefüggésből. Lássuk is ezeket az egyenleteket konkrétan:

$$\mathcal{S}^{\text{dev}}[\lambda c(\eta_\sigma)] = \mathcal{E}^{\text{dev}}\left(\frac{\lambda}{E_\varepsilon^{\text{sph}}}\frac{c(\eta_\varepsilon)}{\eta_\varepsilon}\right), \quad (28)$$

$$\mathcal{S}^{\text{dev}}\lambda = \mathcal{E}^{\text{dev}}\left(\frac{\lambda}{E_\varepsilon^{\text{sph}}}\frac{1}{\eta_\varepsilon}\right), \quad (29)$$

$$\mathcal{S}^{\text{sph}}\{\lambda[c(\eta_\sigma) + 1]\} = \mathcal{E}^{\text{sph}}\left\{\frac{\lambda}{E_\varepsilon^{\text{sph}}}[c(\eta_\varepsilon) + 1]\right\}. \quad (30)$$

Ez az egyenletrendszer egy kissé zűrösen néz ki, de valójában jelentősen leegyszerűsíthető. Bevezetve ugyanis a

$$\lambda_1 := \lambda c(\eta_\sigma), \quad \kappa := \frac{\lambda}{E_\varepsilon^{\text{sph}}}\frac{1}{\eta_\varepsilon}, \quad \kappa_1 := \frac{\lambda}{E_\varepsilon^{\text{sph}}}\frac{c(\eta_\varepsilon)}{\eta_\varepsilon} \quad (31)$$

segédfüggvényeket, továbbá észrevéve, hogy

$$c(\eta) + 1 = \frac{1}{\eta}[1 - 2c(\eta)], \quad (32)$$

a következő letisztult, lineáris differenciálegyenlet-rendszert kapjuk e három ismeretlen segédfüggvényre ( $\lambda$  pedig ugyebár előírt):

$$\mathcal{S}^{\text{dev}}\lambda_1 = \mathcal{E}^{\text{dev}}\kappa_1, \quad (33)$$

$$\mathcal{S}^{\text{dev}}\lambda = \mathcal{E}^{\text{dev}}\kappa, \quad (34)$$

$$\mathcal{S}^{\text{sph}}(\lambda_1 + \lambda) = \mathcal{E}^{\text{sph}}(\kappa - 2\kappa_1). \quad (35)$$

Kezdeti feltételként a kiegészítő mezők nulláról indulnak, ez mindhárom segédfüggvényre azonosan nulla előéletet jelent. Ekkor e differenciálegyenlet-rendszer megoldása egyértelmű. A segédfüggvényekből pedig az eredeti keresett  $E_\sigma^{\text{dev}}$ ,  $E_\varepsilon^{\text{dev}}$ ,  $E_\varepsilon^{\text{sph}}$  függvények egyértelműen határozhatók meg.

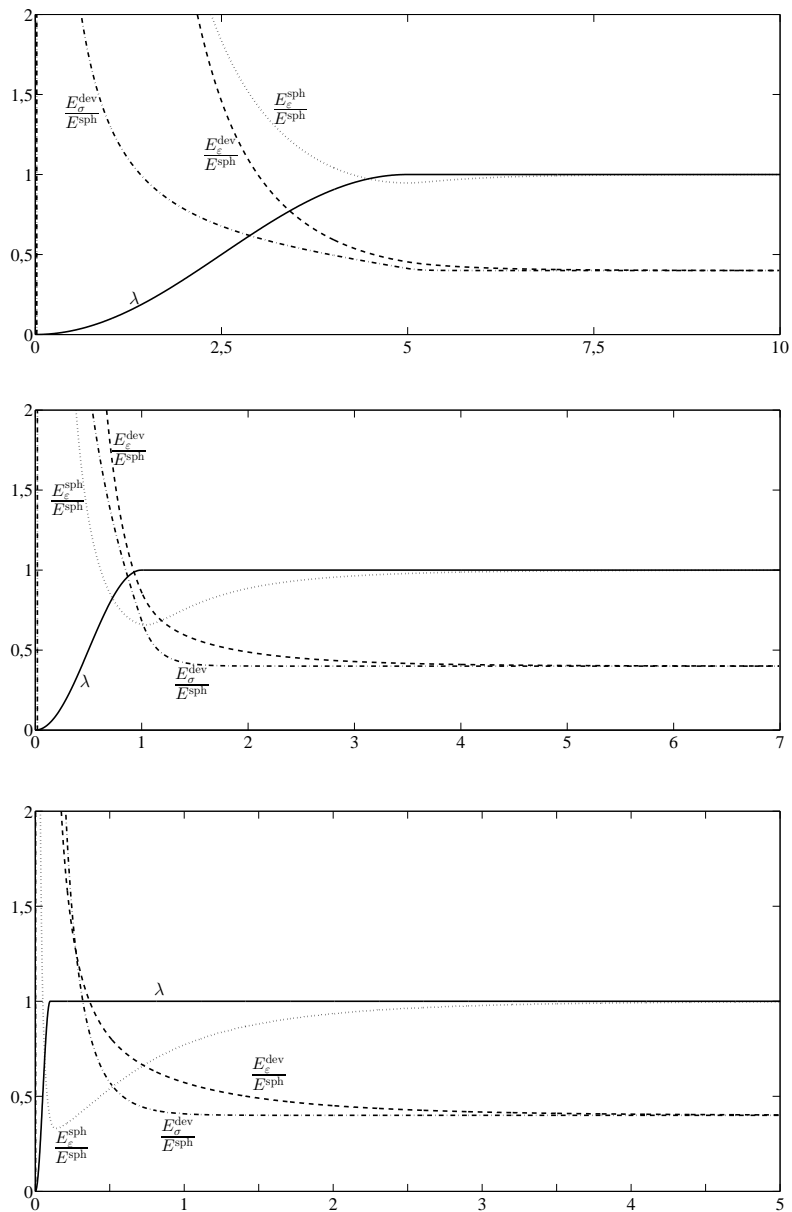
#### 4. AZ ANIZOTROP ESET MEGOLDÁSA KELVIN–HOOKE-REOLÓGIA ESETÉN

Általános vizsgálatok helyett most a legegyszerűbb reológia, a deviatorikusan Kelvin-, térfogatilag Hooke-modell esetére mutatjuk meg a megoldást, amikor is (4) konkrétan a következő egyenletpárt jelenti:

$$\boldsymbol{\sigma}^{\text{dev}} = E^{\text{dev}}\boldsymbol{\varepsilon} + \hat{E}^{\text{dev}}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{dev}}, \quad \boldsymbol{\sigma}^{\text{sph}} = E^{\text{sph}}\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{sph}}. \quad (36)$$

Az üregnyitás menetét jellemző  $\lambda$  függvény menetét a következőnek választottuk:

$$\lambda(t) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \sin \left( \pi \frac{t - t_1 + t_2}{2} \right) \right]. \quad (37)$$



1. ÁBRA. Lassú, közepes és gyors üregnyitás

Bár egy lineáris egyenletrendszer ilyen speciális inhomogén taggal analitikusan is megoldható, szemléltetés céljából elegendő egy numerikus, egyszerű időléptetéses megoldás is.

A feladatban két időskála van, a reológiai  $\hat{E}^{\text{dev}}/E^{\text{dev}}$  és az üregnyitás sebességét jellemző  $t_2 - t_1$ . Az időlépésközt a kisebbik időskála pl. 1/100-adrésének választhatjuk.



Kíváncsiak voltunk lassú, a közepes és a gyors üregnyitás esetére egyaránt (ez alatt a két időskála viszonya értendő). Egy közepes Poisson-tényező-értéket választottunk:

$$\nu = 0,25 \quad \implies \quad \eta = 0,4. \quad (38)$$

A három keresett függvényt,  $E_\sigma^{\text{dev}}$ -t,  $E_\epsilon^{\text{dev}}$ -t és  $E_\epsilon^{\text{sph}}$ -t a rögzített  $E_\sigma^{\text{sph}} = E^{\text{sph}}$ -vel leosztva a három hányados egyértelműen határozódik meg a megoldásból, ezeket ábráztuk három nyitási sebesség esetére: amikor a reológiai időskála jóval kisebb a nyitás időskálájánál, amikor összemérhetőek, és amikor a nyitás ideje a sokkal rövidebb.

Főleg a gyors nyitás esetén szembeszökő, hogy mindhárom keresett függvény még jóval a nyitás után is időfüggően viselkedik. Ez látszik tehát  $E_\sigma^{\text{dev}}(t)/E^{\text{sph}} = \eta_\sigma(t)$ -n, így a megfelelő  $\nu_\sigma(t) := [1 - \eta_\sigma(t)]/[2 + \eta_\sigma(t)]$  „időfüggő effektív Poisson-tényezőn” is. Ezt látva leszűrhetjük, hogy megoldásunk eltér a [7]-ben található, a Volterra-elvet alkalmazni próbáló megoldástól, amelyben a nyitás után  $\nu_\sigma(t)$  állandó, értéke a Hooke-rugalmas értékkel egyezik.

## 5. TOVÁBBI TENNIVALÓK ÉS LEHETŐSÉGEK

Vizsgálatainkban egyelőre idáig jutottunk. Egy következő feladat az anizotrop esetre más módon kiszámolt reológiai megoldással [7] való részletesebb összevetés.

Egy másik továbblépési lehetőség más analitikusan ismert Hooke-rugalmaságtani megoldások reológiai kiterjesztése, a módszer további tesztelése. Bonyolultabb, több helyfüggő tenzormezőből szuperponálódó megoldások esetén a legfeljebb négy szabad időfüggvény kevés lehet a sok független időbeli egyenlet megoldásához. Meg lehet viszont próbálni több ilyen megoldás időfüggő együtthatós szuperpozíciójaként keresni a megoldást.

Logikusan ezután következik az a cél, hogy a módszert használhatóvá tegyük numerikusan – például végesesemes módon – meghatározott Hooke-rugalmaságtani megoldásokból építkezésre. Ennek gyakorlati haszna jelentős lenne. Megjegyezzük mindamelllett, hogy már az analitikusan tárgyalható feladatok megoldása is értékes, mert tesztelni lehet velük más analitikus vagy numerikus megoldások jóságát is.

## KÖSZÖNETMONDÁS

Köszönettel tartozunk Marta Doležalovának, aki csoportjával az itt tárgyaltaknál sokkal bonyolultabb, összetettebb problémákat oldott meg, és aki magyarázataival sokat segít

tett, hogy átláthassuk a talaj- és kőzetmechanikai számítási feladatokban rejlő kihívásokat. Munkássága komoly motiváció és inspiráló erő volt.

Köszönjük Asszonyi Csabának, hogy ilyen erősen ambicionálta, hogy a Montavid Termodinamikai Kutatócsoport foglalkozzon az itt vizsgált feladatkörrel. Intuíciója, kérdésfelvetései sokat segítettek kutatásunkban. Béda Gyula pedig a Volterra-elv megvilágításában volt nagy segítségünkre.

Munkánkat az OTKA K81161 pályázata támogatta.

## IRODALOM

- [1] Asszonyi, Cs. – Ván, P. – Szarka, Z.: Izotróp kontinuumok rugalmas és képlékeny állapota, *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár 5, Műegyetemi Kiadó*, Budapest, 2007.
- [2] Asszonyi, Cs. – Fülöp, T., – Ván, P.: Distinguished rheological models for solids in the framework of a thermodynamical internal variable theory, *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, megjelenés alatt, online megjelent: 2014.11.20, <http://dx.doi.org/10.1007/s00161-014-0392-3>.
- [3] Asszonyi, Cs. – Fülöp, T., – Ván, P.: Kiténtetett szilárdtest-reológiai modellek egy belső változós termodinamikai elmélet keretében, *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika 2015 ISRM Konferencia*. In: Fülöp, T., (szerk.), *Termodinamikai módszertan – kontinuumfizikai alkalmazások*, *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár 19, Egyesület a Tudomány és Technológia Egységéért*, Budapest, 2015, pp11–34 (jelen kötetben).
- [4] Béda, Gy. – Kozák, I. – Verhás, J. (1986): *Kontinuummechanika, Műszaki Könyvkiadó*, Budapest, p208.
- [5] Rabotnov, Ju. N.: *Elements of hereditary solid mechanics*, Mir Publishers, Moscow, 1980.
- [6] Gromov, V. G.: On the mathematical content of Volterra's principle in the boundary value problem of viscoelasticity, *PMM 35*, 1971, pp869–878.
- [7] Asszonyi, Cs. – Szarka, Z. – Béda, Gy.: Körszelvényű földalatti folyosók körül kialakuló mechanikai mezők, *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika 2010 ISRM Konferencia*. In: Asszonyi, Cs. (szerk.), *Kontinuummechanikai feladatok megoldásáról*, *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár 9, Műegyetemi Kiadó*, Budapest, 2009, pp115–171.
- [8] Fülöp, T. – Béda, Gy.: Hengerszimmetrikus alagút körüli reológiai időfüggés, *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika 2010 ISRM Konferencia*. In: Asszonyi, Cs. (szerk.), *Kontinuummechanikai feladatok megoldásáról*, *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár 9, Műegyetemi Kiadó*, Budapest, 2009, pp99–114.
- [9] Fülöp, T. – Béda, Gy.: Rheological dynamics of tunnels – an analytical investigation, in: I. Vrkljan (ed.), *Rock Engineering in Difficult Ground Conditions – Soft Rocks and Karst*, *Proceedings of the Regional Symposium of the International Society for Rock Mechanics (ISRM)*, 29–31 October 2009, Cavtat near Dubrovnik, Croatia, *Taylor & Francis Group*, London, 2010, pp441–447.