АНАЛИЗ ДВУХ КОМБИНАТОРНЫХ СУММ, ХАРАКТЕРИЗУЮЩИХ СКОРОСТЬ ЭВМ С БЛОЧНОЙ ПАМЯТЬЮ

Г. П. ЕГОРЫЧЕВ*, А. М. ИВАНИ** и А. И. МАКОСИЙ*

* Институт Физики СО АН СССР, 666036 Красноярск

** Кафедра Вычислительной техники Университета им. Л. Этвеша, 1088 Будапешт, Музэум крт. 6–8.

(Поступило 14. 3. 1985)

Резюме. Цель работы — нахождение асимптотики двух комбинаторных сумм. Первая из них характеризует скорость ЭВМ с блочной памятью для случайного, а вторая — для шагового поведения программ. Вычисления последовательно проводятся с помощью метода интегрального представления комбинаторных сумм, далее с помощью методов Лапласа и перевала.

1. Математическая модель и скорость ЭВМ с блочной памятью

1.1. Математическая модель. Рассмотрим следуюшую схему ЭВМ с блочной памятью [1,5]. ЭВМ состоит из центрального процессора и оперативной памяти, которая разбита на блоки $B_1, \ldots, B_n$.

Программы описываются с помощью последовательностей обращений к блокам памяти $\omega = r_1, r_2, \ldots, r_k$. Здесь k — длина программы (число выполненных операций), а r_i $(i = 1, \ldots, k)$ — обращения к блокам памяти, где $r_i \in N = \{1, \ldots, n\}$. Множество последовательностей длины k обозначим через N^k.

Предполагаем, что за единицу времени выполняются все очередные обращения, которые отличаются друг от друга. Поэтому выполнения программы ω можно получить путём разбиения последовательности ω на подпоследовательности $\varphi_1(\omega)$, $\varphi_2(\omega)$, $\ldots$ по следующим правилам:

а) элементы каждой подпоследовательности различны;

б) первый элемент каждой подпоследовательности, за исключе нием $\varphi_1(\omega)$, тождественен одному из членов предыдущей подпоследо вательности.

Такое разбиение последовательности является взаимно однозначным. Длина любой подпоследовательности может быть 1, 2, $\ldots$, $n-1$ или n. Таким образом, время выполнения $\tau(\omega)$ программы ω есть число подпоследовательностей при указанном разбиении ω. Например, если $\omega = 1, 3, 4, 3, 2, 2, 5$, то $\varphi_1(\omega) = 1, 3, 4$, $\varphi_2(\omega) = 3, 2$, $\varphi_3(\omega) = 2, 5$, а $\tau(\omega) = 3$.

Вероятностные свойства («поведение») программ описываются с помощью однородной марковской цепи, которая задаётся вектором начальных вероятностей $p = (p_1, \ldots, p_n)$ и матрицой $P = [p_{ij}]$ переходных вероятностей. Таким образом, множество программ длины k моделируется последовательностью случайных величин

$$\sigma_k = \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k, \tag{1.1}$$

для которой $P(\xi_1 = i) = p_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ и $P(\xi_{t+1} = j \mid \xi_t = i) = p_{ij}$ $(t = 1, \ldots, k-1$, и $i, j = 1, \ldots, n)$.

Будет рассмотрено два класса программ, для обоих полагаем $p_i = 1/n$ $(i = 1, \ldots, n)$. Переходные вероятности

$$\mathrm{RAN} = \begin{bmatrix} 1/n & \ldots & 1/n \\ \vdots & & \\ 1/n & \ldots & 1/n \end{bmatrix} \text{ и } \mathrm{STEP} = \begin{bmatrix} \beta\alpha\beta & \ldots & \beta\beta \\ \beta\beta\alpha & \ldots & \beta\beta \\ \vdots & & \\ \beta\beta\beta & \ldots & \beta\alpha \\ \alpha\beta\beta & \ldots & \beta\beta \end{bmatrix}, \tag{1.2}$$

где $\beta = (1-\alpha)/(n-1)$. Первая модель называется случайной, вторая — шаговой.

1.2. Скорость ЭВМ с блочной памятью. Скорость ЭВМ с блочной памятью $V(n, M)$ для данной модели поведения M определим с помощью скоростей $V_t(n, M)$ в t-ый $(t = 1, 2, \ldots)$ момент времени.

Пусть $q = n^t$. Разобьём все последовательности $\omega \in N^q$ на подпоследовательности. Тогда по определению

$$V_t(n, M) = \sum_{\omega \in N^q} |\varphi_t(\omega)| P(\omega, M), \tag{1.3}$$

где $\varphi_t(\omega)$ — длина t-той подпоследовательности в ω, а $P(\omega, M)$ — вероятность ω по M в пространстве N^q. Тогда скорость $V(n, M)$ определим как

$$V(n, M) = \lim_{m \to \infty} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} V_i(n, M). \tag{1.4}$$

Для простоты в следующем применим обозначения $V(n, \mathrm{RAN}) = V(n)$ и $V(n, \mathrm{STEP}) = V(n, \alpha)$.

1.3. Явные формулы скоростей для случайной и шаговой модели поведения. Теперь покажем, как скорость зависит от числа блоков. Для полноты повторим оригинальное доказательство [1].

Лемма 1.1. *Если $n \geq 1$, то*

$$V(n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2 (n-1)!}{n^i (n-i)!}. \tag{1.5}$$

Доказательство. Изучим распределение вероятностей для длины первой подпоследовательности $\varphi_1(\omega)$ в $\omega \in N^q$. Поскольку $P_{ij} = 1/n$, то

$$(1.6) \qquad \sum_{\substack{\omega \in N^q \\ |\varphi_1(\omega)|=i}} P(\omega, \mathrm{RAN}) = \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \dots \frac{n-i+1}{n} \cdot \frac{i}{n} = \frac{i(n-1)!}{n^i(n-i)!}.$$

Отсюда следует, что

$$V_1(n, \mathrm{RAN}) = \sum_{i=1}^{n} iq_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2(n-1)!}{n^i(n-i)!}.$$

То же рассуждение применимо к остальным подпоследовательностям $\varphi_2(\omega), \dots, \varphi_t(\omega)$ и скоростям $V_2(n, \mathrm{RAN}), V_3(n, \mathrm{RAN}), \dots$. Отоюда в силу определения (1.4) следует (1.5). □

Скорость $V(n, \alpha)$ зависит от числа блоков n и «вероятности шага» α следующим образом [2].

Лемма 1.2. *Если $n \geq 1$ и $0 \leq \alpha \leq 1$, то*

$$(1.7) \qquad V(n, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{i-1} \binom{i-1}{j} x_{i-j,\, n-j} \alpha^j \beta^{i-1-j},$$

где

$$(1.8) \qquad x_{i,\, n} = (n-1)_{i-1} - \sum_{j=1}^{i-1} \binom{i-1}{j} x_{i-j,\, n-j}.$$

Доказательство. Пусть $\eta_1, \eta_2, \dots$ обозначают случайные величины, где η_t — длина t-той подпоследовательности в элементах N^q. В случае шаговой модели распределения этих величин независимы друг от друга и одинаковы. Поэтому достаточно определить распределение случайной величины η_1, чтобы получить величину $V(n, \alpha)$, т. е.

$$(1.9) \qquad V(n, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} iP(\eta_1 = i).$$

Легко видеть, что (1.9) равносильно соотношению

$$(1.10) \qquad V(n, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} iP(\eta_1 \geq i),$$

где $P\ (\eta_1 \geq i)$ — вероятность того, что первые i обрашений отличаются друг от друга.

Будем говорить, что для данной последовательности $\omega = r_1, \dots, r_k$ пара (r_t, r_{t+1}) $(1 \leq t \leq k)$ представляет α-переход, если $r_{t+1} \equiv r_t + 1 \pmod n$; в противном случае назовём эту пару β-переходом. Пусть $C_n(j, i)$ обозначает число подпоследовательностей длины i различных элементов N, в которых j раз встречается α-переход, а первый элемент равен 1. Тогда

$$(1.11) \qquad V(n, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{i-1} \alpha^j \beta^{i-1-j} C_n(j, i).$$

Остаётся определить числа $C_n(j, i)$. Заметим, что имеется $\binom{i-1}{j}$ возможных размещений α-переходов и β-переходов в последовательности длины i, содержащей j раз α-переходы. Пусть $C_n^0(j, i)$ — число последовательностей различных элементов N, для которых первые i переходов являются α-переходами, а остальные $i-j-1$ переходов — β-переходами. Тогда, очевидно, имеем

$$C_n(0, i) = C_n^0(0, i), \quad C_n(i-1, i) = C_n^0(i-1, i).$$

Далее, поскольку существует только одна последовательность из i элементов с $(i-1)$ α-переходами и с начальным элементом 1, то

$$C_n^0(i-1, i) = 1 \quad (1 \le i \le n). \tag{1.12}$$

Суммарное число последовательностей длины i из элементов N, начинающихся с I, равно

$$(n-1)_{i-1} = (n-1)(n-2)\ldots(n-i+1). \tag{1.13}$$

Заметим, что $(n-1)_0 = 1$.

Отсюда следует, что

$$(n-1)_{i-1} = \sum_{j=0}^{i-1} C_n(j, i). \tag{1.14}$$

Наконец, рассматривая $N' = \{1, \ldots, n-1\}$ и не учитывая последний α-переход, получим, что число последовательностей длины $i-1$ для параметров $j-1$ и $n-1$ равны числу последователностей длины i для пар j и n:

$$C_n^0(j, i) = C_{n-1}^0(j-1, i-1) \; (1 \le j \le i-1 \le n-1). \tag{1.15}$$

Первое краевое условие получим из (1.12):

$$C_n^0(0, 1) = 1. \tag{1.16}$$

Второе краевое условие получим из того, что в последовательности длины 2 с начальным элементом 1, содержащей один β-переход, имеет место $r_2 \not\equiv 1$ и $r_2 \not\equiv 2$, так, что

$$C_n^0(0, 2) = n-2. \tag{1.17}$$

Из (1.15) имеем

$$C_n^0(j, i) = C_{n-j}^0(0, i-j). \tag{1.18}$$

Между данными коэффициентами имеет место соотношение

$$C_n(j, i) = \binom{i-1}{j} C_n^0(j, i). \tag{1.19}$$

Теперь из (1.14) и (1.19) имеем

$$C_n(0, i) = C_n^0(0, i) = (n-1)_{i-1} - \sum_{j=1}^{i-1} \binom{i-1}{j} C_n^0(j, i). \tag{1.20}$$

Подставляя $C_n^0(j, i)$ из (1.18) в (1.20) получим

$$C_n^0(0, i) = (n-1)_{i-1} - \sum_{j=1}^{i-1} \binom{i-1}{j} C_{n-j}^0(0, i-j). \tag{1.21}$$

Далее, переходя к обозначениям $X_{i,n} = C_n^0(0, i)$, получаем (1.7), и, подставляя (1.18) и (1.19) в (1.11) — формулу (1.8). □

2. Интегральное представление скоростей

2.1. Интегральное представление скорости $V(n)$. Сначала приведём новую форму для $V(n)$, которая облегчит дальнейшее исследование. Доказательство этой формулы дадим с помощью метода интегрального представления комбинаторных сумм [6].

Лемма 2. 1. *Если $n \geq 1$, то*

$$V(n) = \frac{n!}{n^n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n^k}{k!}. \tag{2.1}$$

Доказательство. Пусть

$$f(n) = \frac{n!}{n^n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n^k}{k!} \quad \text{и} \quad g(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!\, k^2}{(n-k)!\, n^k} = \frac{(n-1)!}{n^n} \sum_{k=1}^{n} \frac{n^{n-k} k^2}{(n-k)!}.$$

Докажем теперь лемму путём нахождения одинаковых интегральных представлений для сумм $f(n)$ и $g(n)$. Обозначим $(2\pi i)^{-1} = a$. Известно [6], что

$$\frac{n^k}{k!} = a \int\limits_{|z|=\varphi} \frac{e^{nz} dz}{z^{k+1}}. \tag{2.2}$$

На основе

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^2 x^k = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$$

имеем

$$k^2 = a \int\limits_{|z|=\varphi} \frac{z(1+z)dz}{(1-z)^3 z^{k+1}}. \tag{2.3}$$

Заменяя в $g(n)$ под знаком суммы коэффициенты по формулам (2.2) и (2.3) на соответствующие интегралы, распространяя суммирования по k от 0 до ∞ (это возможно, так как при $k = 0$ и при $k > n$ интегралы равны нулю), меняя знаки суммирования и интегрирования, под знаком интеграла находим сумму геометрической прогрессии (эта сумма абсолютно и равномерно сходится, если положить $\varphi_1 < \varphi_2$).

Понижая кратность интеграла, представляя его как повторный и применяя теорему о вычётах, получаем следующую цепочку равенств (здесь $h(x)$ обозначает функцию $x(1+x)(1-x)^{-3}$):

$$\frac{n^n}{(n-1)!}g(n) = \sum_{k=1}^{n} a \int\limits_{|z|=\varphi_1} \frac{e^{nz}dz}{z^{n-k+1}}\, a \int\limits_{|w|=\varphi_2} \frac{h(w)dw}{w^{k+1}} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a^2 \int\limits_{\substack{|z|=\varphi_1\\|w|=\varphi_2}} \frac{e^{nz}h(w)dz\wedge dw}{z^{n-k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} a^2 \int\limits_{\substack{|z|=\varphi_1\\|w|=\varphi_2}} \frac{e^{nz}h(w)dz\wedge dw}{z^{n-k+1}w^{k+1}} = a^2 \int\limits_{\substack{|z|=\varphi_1\\|w|=\varphi_2}} \frac{e^{nz}h(w)dz\wedge dw}{z^{n-1}(w-z)} =$$

$$= a \int\limits_{|w|=\varphi_2} \frac{e^{nw}h(w)dw}{w^{n+1}} = a \int\limits_{|w|=\varphi} \frac{z(1+z)}{(1-z)^4}\bigg|_{w=ze^{-z}} \frac{dw}{w^{n+1}}.$$

Заменяя в $f(n)$ коэффициенты по формулам (2.2), подобным путём имеем

$$f(n) = \frac{n!}{n^n}\, a \int\limits_{|z|=\varphi} \frac{e^{nz}dz}{(1-z)z^n}. \tag{2.4}$$

Если в (2.8) положим $ze^{-z} = w$ и применим формулу

$$na \int\limits_{|w|=\varphi} \frac{A(w)dw}{w^{n+1}} = a \int\limits_{|w|=\varphi} \frac{A'(w)dw}{w^n}, \tag{2.5}$$

то получим то же интегральное представление для $f(n)$, как получено в конце предыдущей цепочки для $g(n)$. □

Из доказательства Леммы 2.1. непосредственно вытекает интегральное представление для $V(n)$.

Лемма 2.2. *Если* $n \geq 1$, *то*

$$V(n) = \frac{n!}{n^n}(2\pi i)^{-1} \int\limits_{|z|=\varphi} \frac{e^{nz}dz}{(1-z)z^n}. \tag{2.6}$$

Асимптотику $V(n)$ нетрудно получить, применяя к интегралу (2.6) метод перевала. Единственной вырожденной точкой перевала подинтегральной функции является точка $z_0 = 1$. Так как эта точка является также особой – полюсом порядка 1, то метод перевала даёт асимптотический ряд для $V(n)$, вычисление коэффициентов которого, однако, связано с трудоёмкими выкладками. Их можно избежать, если использовать другое интегральное представление для $V(n)$.

Лемма 2.3. *Если* $n \geq 1$, *то*

$$V(n) = n\int_0^{\infty} e^{-nt}(1+t)^n dt - 1. \tag{2.7}$$

Доказательство. Если известное интегральное представление факториалов

$$m! = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$$

заменим в (2.1), то имеем

$$V(n)+1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!k!} \cdot \frac{(n-k)!}{n^{n-k}} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \int_0^\infty e^{-t} \left(\frac{t}{n}\right)^{n-k} dt =$$

$$= \int_0^\infty e^{-t} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{t}{n}\right)^{n-k} \right) dt = \int_0^\infty e^{-t} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n dt = n \int_0^\infty e^{-nt} (1+t)^n dt,$$

откуда непосредственно следует (2.7). □

Замечание. В [4] Лемма 2.1. и формула, эквивалентная (2.7) доказаны с помощью дифференциальных уравнений и преобразований сумм. Также следует заметить, что первый из авторов в 1983-ом году дал элементарное доказательство Леммы 2.1. Поскольку в данной работе хотелось продемонстрировать некоторые возможности метода интегрального представления комбинаторных сумм [6], то приведены соответствующие доказательства.

2.2. Интегральное представление скорости $V(n, \alpha)$. Выше показано, что $V(n, \alpha)$ определяется из соотношения (1.7), где числа $x_{k,n}$ удовлетворяют разностным соотношениям (1.8). Если положить

$$x_{k-j,\, n-j}/(k-j-1)! = y_{k-j,\, n-j},$$

то (1.8) перепишется в виде

$$\sum_{j=0}^{k-1} \frac{y_{k-j,\, n-j}}{j!} = \binom{n-1}{k-1}. \tag{2.8}$$

Используя метод интегрального представления сумм можно получить явное выражение для $y_{k,n}$ (следовательно и для $x_{k,n}$).

Лемма 2.4. *Если* $n \geq 1$ *и* $1 \leq k \leq n$, *то*

$$y_{k,n} = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-1)^j}{j!} \binom{n-j-1}{k-j-1}. \tag{2.9}$$

Доказательство. Пусть $A(u, V)$ — производящая функция для чисел $y_{k,n}$, т.е.

$$y_{k,n} = a^2 \int\limits_{\substack{|u|=r_1 \\ |v|=r_2}} \frac{A(u, v) du \wedge dv}{u^{k+1} v^{n+1}}.$$

Тогда

$$\sum_{j=0}^{k-1}\frac{y_{k-j,\,n-j}}{j!}=\sum_{j=0}^{k-1}a^2\int\limits_{\substack{|u|=r_1\\|v|=r_2}}\frac{A(u,v)du\wedge dv}{u^{k-j+1}v^{n-j+1}}\,a\int\limits_{|w|=r_3}\frac{e^w dw}{w^{j+1}}=$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty}a^3\int\limits_{\substack{|u|=r_1\\|v|=r_2\\|w|=r_3}}\frac{A(u,v)e^w du\wedge dv\wedge dw}{u^{k+1}v^{n+1}(w-uv)}=a^2\int\limits_{\substack{|u|=r_1\\|v|=r_2}}\frac{A(u,v)e^{uv}du\wedge dv}{u^{k+1}v^{n+1}}.$$

Так как

$$\binom{n-1}{k-1}=a\int\limits_{|u|=r_1}\frac{(1+u)^{n-1}du}{u^k}=a^2\int\limits_{\substack{|u|=r_1\\|v|=r_2}}\frac{u(1+u)^{n-1}du\wedge dv}{u^{k+1}v^{n+1}(1-v(1+u))},$$

то из (2.8) имеем

$$A(u,v)=\frac{ue^{-uv}}{(1+u)(1-v(1+u))}.$$

Разложив $A(u,\ V)$ в ряд Тейлора в окрестности начала координат получаем (2.9). □

Замечание. Явный вид для чисел $x_{k,n}$ впервые найден в [3] путём установления эквивалентности этой задачи известной комбинаторной задаче перечисления беспорядков.

Теперь, подставляя интегральное представление для чисел $x_{k,n}$ в (1.7), находим новую форму для скорости $V(n,\alpha)$.

Лемма 2.5. *Если* $n\geq 1$ *и* $0\leq\alpha\leq 1$, *то*

(2.10)
$$V(n,\alpha)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}\beta^k k!\frac{(\alpha/\beta-1)^j}{j!}\binom{n-j-1}{k-j}.$$

Доказательство. Пусть $(2\pi i)^{-1}=a$ и $\beta^{k-1}(k-1)!=b$. Тогда

$$V(n,\alpha)=\sum_{k=1}^{n}b\sum_{j=0}^{k-1}a\int\limits_{\substack{|u|=r_1\\|v|=r_2\\|w|=r_3}}\frac{A(u,v)\exp\left(\frac{\alpha}{\beta}w\right)du\wedge dv\wedge dw}{u^{k-j+1}v^{n-j+1}w^{j+1}}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}b\int\limits_{\substack{|u|=r_1\\|v|=r_2}}\frac{A(u,v)\exp\left(uv\frac{\alpha}{\beta}\right)du\wedge dv}{(1+u)(1-v(1+u))u^{k+1}v^{n+1}}=$$

$$= \sum_{k=1}^{n} ba^2 \int\limits_{\substack{|u|=r_1\\|v|=r_2}} \frac{u\exp\left(uv\left(\frac{\alpha}{\beta}-1\right)\right)du\wedge dv}{(1+u)(1-o(1+u))u^{k+1}v^{n+1}} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} ba \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\left(\frac{\alpha}{\beta}-1\right)^j}{j!} \int\limits_{|u|=r_1} \frac{du}{(1+u)^{j-n+1}u^{k-j}} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{k-1} b\, \frac{\left(\frac{\alpha}{\beta}-1\right)^j}{j!} \binom{n-j-1}{k-j-1}.$$

Отсюда заменой $k-1 = k$ получаем (2.10). □

Далее найдено интегральное представление для $V(n,\alpha)$.

Лемма 2.6. *Если* $n \geq 1$ *и* $0 \leq \alpha < 1$, *то*

(2.11)
$$V(n,\alpha) = = n!\beta(2\pi i)^{-1} \int\limits_0^1 \int\limits_{|u|=r} \frac{\exp(u/(\alpha-1))}{1-t(1-t)u} \left[\frac{\exp\left(u\left(\frac{1}{1-\alpha}-t\right)\right)}{u(1-t(1-t)u)}\right]^n dt\wedge du.$$

Доказательство. Используя в (2.10) интегральное представление

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = \int\limits_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt,$$

$$\binom{n}{k} = a \int\limits_{|w|=r} (1+w)^n w^{-k-1}dw \quad (0<r<\infty)$$

для B-функции и биномиальных коэффициентов, по той же схеме вычислений получаем цепочку равенств

$$V(n,\alpha) = n!\,\beta^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{k} \frac{\Gamma(k)\Gamma(n-j)}{\Gamma(n+k-j)} \binom{n+k-j}{n} \cdot$$

$$\cdot \frac{(\alpha/\beta-1)^j}{j!(1-\alpha)^{n-k-1}} \frac{(n-1)^{n-k-1}}{(n-k-1)!} = n!\,\beta^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{k} \cdot$$

$$\cdot\left\{\left(\int\limits_0^1 t^k(1-t)^{n-j-1}dt\right)\binom{n+k-j}{n}\frac{(\alpha/\beta-1)^j}{j!}\frac{\beta^{n-k-1}}{(n-k-1)!}\right\} =$$

$$= n!\,\beta^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{k}\left\{\int_0^1 \frac{\beta^{n-k-1}}{(n-k-1)!}(1-t)^{n-k-1}\left(\frac{\alpha n-1}{1-\alpha}\right)^j\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\frac{t^j}{j!}\binom{n+k-j}{n}t^{k-j}(1-t)^{k-j}dt\right\} = n!\beta^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{k}\int_0^1\left\{a\left(\int_{|u|=r_1}\frac{\exp(\beta(1-t)u)du}{u^{n-k}}\right)\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\, a\left(\int_{|v|=r_2}\frac{\exp\left(\frac{\alpha n-1}{1-\alpha}dv\right)}{vj+1}\right)a\int_{|w|=r_3}\frac{dw}{(1-t(1-t)w)^{n+1}w^{k-j+1}}\right\}dt =$$

$$= n!\beta^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{\infty}a^3\int_0^1\int_{\substack{|u|=r_1\\|v|=r_2\\|w|=r_3}}\frac{\exp\left(\beta(1-t)u+\frac{\alpha n-1}{1-\alpha}tv\right)dt\wedge du\wedge dv\wedge dw}{u^{n-k}\,v^{j+1}(1-t(1-t)w)^{1+n}} =$$

$$= n!\beta^{n-1}a^3\int_0^1\int_{\substack{|u|=r_1\\|v|=r_2\\|w|=r_3\\r_1<r_2<r_3}}\frac{\exp\left(\beta(1-t)u+\frac{\alpha n-1}{1-\alpha}tv\right)dt\wedge du\wedge dv\wedge dw}{u^n(1-t(1-t)w)^{n+1}(w-u)(v-w)} =$$

$$= n!\beta^{n-1}a\int_0^1\int_{|u|=r}\frac{\exp\left(\beta(1-t)u+\frac{\alpha n-1}{1-\alpha}tu\right)dt\wedge du}{u^n(1-t(1-t)u)^{n+1}},$$

откуда уже следует (2.11). □

3. Асимптотический анализ скоростей

3.1. Асимптотика для $V(n)$. Геллерман [1] эмпирическим путём установил, что

$$0{,}96n^{0{,}56} < V(n) < 1{,}04\cdot n^{0{,}56}\quad (1\le n\le 45).$$

Вулихман [5] доказал, что скорость растёт не быстрее, чем квадратичный корень из числа блоков, а в [4] получена оценка

$$\left|V(n)-\sqrt{\frac{\pi n}{2}}\right| < 1.$$

В следующей лемме мы получим асимптотический ряд для $V(n)$. В соответствии с формулой (2.7) задача сводится к нахождению асимптотики интеграла

$$I(n) = \int_0^\infty e^{-nt}(1+t)^n\,dt = \int_0^\infty e^{n[\ln(1+t)-t]}\,dt.$$

Лемма 3.1. *Для интеграла $I(n)$ справедливо разложение*

$$I(n) \approx \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)\frac{\varphi^{(k+1)}(0)}{k!}n^{-\left(\frac{k+1}{2}\right)},\quad n\to\infty,$$

где функция $\varphi(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\ln(1+\varphi(t))-\varphi(t)\equiv -t^2,\quad \varphi(0)=0. \tag{3.1}$$

Доказательство. Интеграл $I(n)$ является интегралом Лапласа и его асимтотика определяется точками, в которых достигается $\max\limits_{t\in[0,\infty)} S(t)$, где $S(t)=\ln(1+t)-t$. Ясно, что этот максимум достигается в единственной точке $t_0=0$. Так как $S'(t_0)=0$ и $S''(t_0)\neq 0$, то $t_0=0$ является также невырожденной критический точкой функции $S(t)$. Тогда из теоремы о неявной функции следует, что существует функция $t=\varphi(\tau)$, определённая в некоторой окрестности точки $\tau=0$ и приводящая $S(t)-S(t_0)$ к квадратичному виду, т.е. $S(\varphi(\tau))-S(t_0)\equiv -\tau^2$. Основной вклад в асимптотику $I(n)$ будет давать интеграл по достаточно малой окрестности точки t_0. Имеем

$$I(n) = \int_0^\infty e^{nS(t)}\,dt = \int_0^\delta e^{nS(t)}\,dt + \int_\delta^\infty e^{nS(t)}\,dt = I_1(n)+I_2(n),$$

где $\delta>0$ — достаточно малое число.

Сделав в интеграле $I(n)$ замену $t=\varphi(\tau)$ мы будем находиться в условиях применимости известной леммы Ватсона (см., например, [7], стр. 31)

$$I_1(n) = \int_0^\delta e^{nS(t)}\,dt = \int_0^{\delta_1} e^{-nt^2}\varphi'(t)\,dt,$$

которая утверждает, что

$$I_1(n) \approx \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)\frac{\varphi^{(k+1)}(0)}{k!}n^{-\left(\frac{k+1}{2}\right)},\quad n\to\infty.$$

Величина $I_2(n)$ экспоненциально мала по сравнению с любым членом асимптотического ряда для $I_1(n)$. □

Из Лемм 2.1, 2.3 и 3.1 вытекает

Теорема 3.1. *Скорость* $V(n)$ *представима асимптотическим рядом*

$$V(n)\approx\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)\frac{\varphi^{(k+1)}(0)}{k!}n^{-\frac{k-1}{2}}-1=\sqrt{\frac{\pi n}{2}}-\frac{1}{3}+\frac{1}{12}\sqrt{\frac{\pi}{2n}}+$$

$$+O\left(\frac{1}{n}\right),\ n\to\infty,$$

где функция $\varphi(t)$ *определена в* (3.1).

Замечание. Из этого асимптотического представления видно, что $V(n)$ растёт как $\sqrt{n}$ при $n\to\infty$. Покажем, что $V(n)$ возрастает монотонно, т.е. для любого $n\geq 1$ $V(n+1)-V(n)>0$. Так как

$$V(n)=n\int_0^{\infty}e^{-nt}(1+t)^n\,dt=\left(\frac{e}{n}\right)^n\int_n^{\infty}e^{-t}t^n\,dt,$$

то нужно показать, что

$$\left(\frac{e}{n+1}\right)^{n+1}\int_{n+1}^{\infty}e^{-t}t^{n+1}\,dt-\left(\frac{e}{n}\right)^n\int_n^{\infty}e^{-t}t^n\,dt>0,$$

или, что то же самое,

$$\left(\frac{n+1}{e}\right)^n+e\int_{n+1}^{\infty}e^{-t}t^n\,dt-\left(\frac{n+1}{n}\right)\int_n^{\infty}e^{-t}t^n\,dt>0.$$

Это неравенство станет очевидным, если его представить в виде

$$\left(\frac{n+1}{e}\right)^n-\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\int_n^{n+1}e^{-t}t^n dt+e\int_{n+1}^{\infty}e^{-t}t^n dt-\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\int_{n+1}^{\infty}e^{-t}t^n dt>0,$$

так как

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n<e\quad\text{и}\quad\int_n^{n+1}e^{-t}t^n dt\leq\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Также следует заметить, что монотонность $V(n)$ впервые доказали Бокова Е. Е. и Цатурян Г. К., причём элементарным путём.

3.2. Асимптотика для $V(n,\alpha)$. Используя (2.11) с помощью метода перевала получаем следующее утверждение.

Теорема 3.2. *При фиксированном* $\alpha \in [0, 1-\delta]$ *для некоторого* $\delta > 0$ *верно*

$$V(n,\alpha) \approx \sqrt{\frac{\pi(n-1)}{2(1-\alpha^2)}}, \quad n \to \infty. \tag{3.2}$$

Доказательство. Рассмотрим интеграл

$$I(n,\alpha) = a \int_0^1 \int_{|u|=r} \frac{\exp\left(\frac{u}{\alpha-1}\right)}{1-t(1-t)u} \left[\frac{\exp\left[u\left(\frac{1}{1-\alpha}-t\right)\right]}{u(1-t(1-t)u)}\right]^n dt \wedge du =$$

$$= a \int_0^1 \int_{|u|=r} h(t,u)[f(t,u)]^n \, dt \wedge du,$$

где

$$h(t,u) = \exp\left(u/(\alpha-1)\right)/\left(1-t(1-t)u\right),$$

$$f(t,u) = \exp\left[u\left(\frac{1}{1-\alpha}-t\right)\right]/\left(u(1-t(1-t)u)\right).$$

Основной вклад в асимптотику интеграла даёт достаточно малая окрестность точки $(t_0, u_0) = (0, 1-\alpha)$ так как в ней достигается

$$\min_{0<r<u} \max_{\substack{|u|=r \\ 0 \le t \le 1}} |f(t,u)|.$$

Обозначим $\ln f(t,u)$ через $S(t,u)$. Тогда $\nabla S(t_0,u_0) = 0$, $\det S''(t_0,u_0) \ne 0$, т.е. точка (t_0, u_0) является невырожденной критической точкой функции $S(t,u)$. Тогда в некоторой окрестности этой точки функцию $S(t,u)$ можно привести к виду $-t^2-u^2$, т.е. существует отображение $\varphi(t,u) = \left(\varphi_1(t,u), \varphi_2(t,u)\right)$, такое, тчо

$$S\left(\varphi_1(t,u), \varphi_2(t,u)\right) - S(t_0,u_0) = -t^2-u^2.$$

Этот факт вытекает из известной леммы Морса (см. например, [7], стр. 65). С учётом этого имеем

$$I(n,\alpha) \sim (2\pi i)^{-1} \int_{\substack{\xi^2_1+\xi^2_2<r \\ \xi_1\xi_2 \ge 0}} \Omega(\xi_1,\xi_2) \exp\left(n(-\xi_1^2-\xi_2^2)\right) d\xi_1 \, d\xi_2,$$

где

$$\Omega(\xi_1,\xi_2) = h\left(\varphi_1(\xi_1,\xi_2), \varphi_2(\xi_1,\xi_2)\right) \det \varphi'_\xi(\xi).$$

Применяя к данному интегралу метод Лапласа получаем асимптотический ряд для $I(n, \alpha)$:

$$I(n, \alpha) \approx \frac{e^n}{(1-\alpha)^n} |\det S''(t_0, u_0)|^{-1/2} \sum_{k=0}^{\infty} a_k n^{-\left(\frac{2+k}{2}\right)}, \quad n \to \infty,$$

$$a_k = \Gamma\left(\frac{2+k}{k}\right) \int\limits_{\substack{|x|=1 \\ x_1 \geq 0}} \Omega_k(x)\, \omega(x),$$

где $\Omega_k(x)$ – однородные полиномы степени k, участвующие в разложении $\Omega(\xi_1, \xi_2)$ в ряд Тейлора, $\omega(x) = x_1 dx_2 - x_2 dx_1$.

Как видно, вычисление коэффициентов этого разложения довольно трудная задача. Относительно просто выглядит главный член асимптотического разложения, который выражается через собственные числа матрицы – гессиана функции $S(t, u)$ точке (t_0, u_0) и имеет вид

$$I(n, \alpha) = \frac{e^n}{2n(1-\alpha)^{n-1}\sqrt{1-\alpha^2}} \left[\frac{1}{e} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right], \quad n \to \infty.$$

С учётом этого разложения получаем (3.2). □

Замечание. Из формулы (3.2) непосредственно следует, что скорость $V(n, \alpha)$ монотонно растёт по n при фиксированных α и монотонно растёт по α при фиксированных n, если положить n достаточно большим. Случай меньших n требует дополнительного исследования.

Заключение

Можно ожидать, что исследованный в этой работе метод интегрального представления комбинаторных сумм в сочетании с известными и новыми методами оценки интегралов окажется эффективным при оценке решений для достаточно широкого круга новых комбинаторных задач, допускающих представление через сумму произведений комбинаторных чисел.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Hellermann H.:* Digital Computer Principles. Mc Graw Hill, New York, 1967.

[2] *Burnett G. J.* and *Coffman E. G.:* Combinatorial problem related to interleaved memory systems. *Journal of ACM* 22 (1973), 39—45.

[3] *Stone H. S.:* A note on a combinatorial problem of Burnett and Coffman. *Comm. of ACM* **17** (3) (1974), 165—166.

[4] *Iványi A.* and *Kátai I.:* Estimates for speed of computers with interleaved memory systems. *Annales Univ. Sci. Budapest., Sectio Math.* **19** (1976), 153—164.

[5] *Вулихман В. Е.:* Исследование методов организации оперивной памяти и потока информации. Кандидатская диссертация, Москва, МГУ, 1972.

[6] *Егорычев Г. П.:* Интегральное представление и вычисление комбинаторны сумм. Новосибирк, Наука, 1977. Перевод на английском языке : *Egorychev G. P*x Integral Representation and Computation of Combinatorial Sums. (Trans. of Math: Monographs). Amer. Math. Soc., Providence, 1984.

[7] *Федорюк М. В.:* Метод перевала. Москва, Наука, 1977.