

# OTKA TO48721 Pályázat

## Rendezetlen rendszerek statisztikus fizikája

### témavezető: Iglói Ferenc

### Zárójelentés

A pályázat keretében nagy szabadsági fokú fizikai rendszerek kooperatív viselkedését vizsgáltuk időfüggetlen rendezetlenség jelenlétében. A vizsgálatok során általában ezen rendszerek szinguláris pontjait és azok környezetét tanulmányoztuk, ahol a determinisztikus (termikus, kvantumos illetve sztochasztikus) fluktuációk, az erős korrelációk és a rendezetlenség együttes hatása érvényesült. A vizsgált problémák ezért érdekes és gyakran teljesen újszerű kérdéseket vetettek fel, melyek elméleti vizsgálatához technikai szempontból is igényes és modern módszereket kellett alkalmaznunk.

A vizsgált problémák a determinisztikus fluktuációk jellegét tekintve három fő csoportba tartoznak. *Rendezetlen kvantum rendszereket* alacsony hőmérsékleten, ill.  $T=0$ -án vizsgáltunk, amikor nem a termikus, hanem a kvantum fluktuációk dominálnak. Itt a vizsgálatok egyik része a gyakorlati alkalmazásokhoz is kapcsolódó modell rendszerek (Heisenberg modell, Hubbard modell) fázisdiagramjának az un. erős rendezetlenségi renormálási csoport (RCS) módszerrel történő vizsgálatára vonatkozik. Egy másik vizsgálati kör a kiterjedt kvantumrendszerek kvantumállapotainak összefonódási tulajdonságaira és az azt jellemző Neumann-féle entrópia meghatározására vonatkozik. Ezen a témán az utóbbi években nagyon intenzív vizsgálatok folynak a fizika különböző területein.

A pályázatban vizsgált másik problémakör nemegyensúlyi, illetve *egyensúlytól távoli folyamatokra* vonatkozik. Itt a rendezetlenség szerepét hajtott rácsgázok (mint az egyszerű kizárási folyamat, vagy a zerus hatókörű folyamat) esetén vizsgáltuk. Ugyancsak tanulmányoztunk nemegyensúlyi kritikus relaxációs folyamatokat is, ahol egy rendezetlen, vagy részben rendezett kezdeti állapotból hirtelen a kritikus pontjára hűtjük le a rendszert.

A harmadik vizsgált témakörben olyan *klasszikus statisztikus mechanikai rendszereket* tekintettünk, amelyeknél a rendezetlenség lényegesen befolyásolja a kritikus viselkedést. Példaként említjük azon rendszereket, amelyek tiszta változatában a fázisátalakulás első rendű, de rendezetlenség mellett az átalakulás folytonossá válik. Ezen problémáknál vizsgáltuk a fázisátalakulást kísérő geometriai alakzatokat is, amikor az azonos állapotban lévő spinek által képzett klaszterek (fürtök) skálázási tulajdonságait határoztuk meg.

A fentebb vázolt három témakört összeköti az a tény, hogy a kritikus (és nem kritikus) szingularitásokat meghatározó fix-pontok általában hasonló jellegűek: a rendezetlenség fluktuációi általában dominánsak a determinisztikus fluktuációkkal szemben. Ezen, un. végtelenül rendezetlen fix-pontok (infinite disorder fixed point) tanulmányozására szolgáló erős rendezetlenségi RCS módszerről a pályázat támogatásával készítettünk összefoglaló cikket (F. Iglói and C. Monthus, *Physics Reports* **412**, 277-431, (2005)).

A következőkben az egyes témakörökben elért eredményeket ismertetjük.

# 1. Rendezetlen kvantumrendszerek

## 1.1. Fázisdiagramok és szingularitások RCS számolása

Munkánk során több olyan modell-rendszer fázisdiagrammját és kritikus tulajdonságait vizsgáltuk az erős rendezetlenségi RCS módszerrel melyek fontos gyakorlati alkalmazásokhoz is kapcsolódnak. Konkrétan a következő eredményeket értük el.

Rendezetlen Heisenberg és erős kötésű (tight-binding) modellek alacsony energiás tulajdonságait vizsgáltuk különböző fraktál rácsokon (R. Mélin, B. Douçot, and F. Iglói, Phys. Rev. B **72** 024205 (2005)). Az antiferromágneses Heisenberg modell esetén új típusú un. végtelenül rendezetlen és erősen rendezetlen fix-pontokat találtunk. Az erős kötésű modell esetén orbitális mágneses teret és diagonális és off-diagonális rendezetlenséget is tekintetbe vettünk és vizsgáltuk a befagyott rácshelyek arányát, a korrelációs függvényt, a perzisztens áramot valamint a mintán áthajtott áramot.

Numerikus renormálási csoport eljárással különböző antiferromágneses Heisenberg spin modelleket (rétegek és kettősrétegek) vizsgáltunk, amelyekben különböző típusú rendezetlenség (kötés rendezetlenség, csúcs és dimér hígitás) figyelhető meg (Y.-C. Lin, H. Rieger, N. Laflorencie and F. Iglói, Phys. Rev. B **74**, 024427 (2006)). Vizsgáltuk a rendszer fázisdiagrammját, a fázisátalakulások kritikus exponenseit, valamint a Griffiths-féle fázis tulajdonságait is. A renormálási eredményeket kvantum Monte-Carlo szimulációval is összevetettük.

Az egydimenziós rendezetlen Hubbard modell tulajdonságait numerikus renormálási csoport eljárással vizsgáltuk (R. Mélin, and F. Iglói, Phys. Rev. B **74**, 155104 (2006)). Két végtelenül rendezetlen kritikus fázist és az azokat összekötő Griffiths-féle fázist azonosítottuk. A fellépő szingularitásokat numerikusan és analitikusan is vizsgáltuk.

Egydimenziós rendezetlen kvantum ferromágnes esetén ahol a kvantum fázisátalakulást egy végtelenül rendezetlen fix pont írja le a véges méretű mintákon definiálható pszeudó-kritikus pontok eloszlását vizsgáltuk (F. Iglói, Y.-C. Lin, H. Rieger, and C. Monthus, Phys. Rev. B **76**, 064421 (2007)). A pszeudó-kritikus pontokat három különböző módon definiáltuk: i) az átlagos összefonódási entrópia maximum helyével, ii) a felületi mágnesség skálázási tulajdonságával és iii) egy lágy módus energiájával. Mindhárom definíció lognormális eloszlásra vezetett, ahol az eloszlás szélességét jellemző exponens,  $\nu = 2$ , míg az átlagérték eltolódásához a  $\nu_{typ} = 1$  exponens tartozik. Ezen exponensek az átlagos, illetve a tipikus korrelációs hosszakra jellemzőek.

## 1.2. Kvantum állapotok összefonódása kiterjedt rendszerekben

Egy kvantummechanikai rendszer,  $\mathcal{A}$ , általában nem izolált, hanem a  $\mathcal{B}$  környezetével kölcsönhatásban áll. Ilyen esetben az  $\mathcal{A}$  rendszer leírására  $T = 0$  hőmérsékleten a  $\rho_A = Tr_B |0\rangle\langle 0|$  redukált sűrűségmátrix szolgál, ahol  $|0\rangle$  a teljes  $\mathcal{A} + \mathcal{B}$  rendszer alapállapotú hullámfüggvénye. Az  $\mathcal{A}$  és  $\mathcal{B}$  között fellépő kvantummechanikai eredetű korrelációk (összefonódottság) mértékének jellemzésére a Neumann-féle entrópia:  $S_A = -Tr_A(\rho_A \log \rho_A)$  használható. Az  $S_A$  nem extenzív mennyiség, hanem általában a két rendszert elválasztó határ felületével arányos. Kritikus rendszerek esetén a fenti felületi szabályhoz gyakran logaritmikus korrekciók járnak. Például egy egydimenziós rendszer kritikus pontjában aszimptótikusan:  $S_A(L) = \frac{c}{3} \log L + c_1$ , ahol  $L$  az  $\mathcal{A}$  rendszer lineáris mérete,  $c_1$  nem univerzális állandó, míg  $c$  konform invariáns rendszerek esetén

univerzális és a központi töltéssel egyezik meg. Ismert a konform térelméletből, hogy  $c$  jellemzi az adott rendszer univerzális osztályát a kritikus pontban.

Vizsgálataink általában különböző egydimenziós inhomogén rendszerekre vonatkoztak, ahol a konform invariancia feltétele általában nem teljesül, de vannak eredményeink kétdimenziós rendezetlen rendszerekre is. Ugyancsak vizsgáltuk az entrópia időbeli fejlődését is, amikor pl. az  $\mathcal{A}$  és  $\mathcal{B}$  rendszer között csak  $t > 0$  idő esetén van kapcsolat. Elért eredményeink a következők.

A kvantum spin modellek két prototípusának, az  $1/2$ -spinű XY láncnak és a kvantum Ising láncnak az összefonódási entrópiáját vizsgáltuk a rendszerek hosszának tetszőleges véges értéke esetén (F. Iglói and R. Juhász, Europhys. Lett. **81**, 57003 (2008)). Két különböző módszert használva megmutattuk, hogy nem homogén csatolások esetén is a két rendszer entrópiája között egyszerű egzakt összefüggés áll fenn. Ezen összefüggés felhasználásával a két modell esetén ismert egzakt összefüggéseket egymásra átfordítottuk. Így többek között a homogén kvantum Ising lánc esetén megkaptuk az additív konstans értékét, míg a random XY lánc esetén az effektív központi töltést számítottuk ki.

Szabad fermion technikát használva vizsgáltuk a kvantum Ising lánc összefonódási entrópiáját a csatolások különböző alakja esetén, ami a homogén, a periodikusan modulált és a rendezetlen eseteket foglalta magában (F. Iglói and Y.-C. Lin, J. Stat. Mech. P06004 (2008)). A kritikus pontbeli véges méret effektusokat szisztematikusan vizsgáltuk, mind zárt és nyitott láncok esetén. A lánc felét kitevő blokk ( $\mathcal{A}$ ) esetén az entrópia maximum helyét jelző paraméter értéket (merőleges tér erőssége), mint pszeudó-kritikus pontot azonosítottuk. Ezen effektív kritikus pontnak a rendszer mérettel való eltolódását meghatároztuk, mely zárt és nyitott láncok esetén különböző skálázási tulajdonságokat mutatott.

Tanulmányoztuk összefüggő spin-blokkok entrópiáját kritikus nemperiodikus (kváziperiodikus vagy még általánosabban aperiodikus) Heisenberg-, XX- és kvantum-Ising-láncokban, amelyre például a Fibonacci-lánc szolgáltat (F. Iglói, R. Juhász, and Z. Zimborás, Europhys. Lett. **79**, 37001 (2007)). Marginális és releváns perturbációk esetén az entrópia logperiodikus oszcillációkkal modulált logaritmikus blokkméret-függést mutatott. A logaritmus előtt álló faktor, az ún. effektív központi töltés ( $c_{eff}$ ) függhet a csatolások hányadosától és meg is haladhatja a homogén rendszerre jellemző értéket. Az erősen modulált határesetben, ahol az alapállapot egy renormálási-csoport módszer segítségével megszerkeszhető,  $c_{eff}$  határértékét egzaktul kiszámítottuk. A rendszerméret és blokkméret hányadosát rögzítve az entrópia skálatulajdonsággal bír, azonban a megfelelő skálafüggvény nemanalitikus is lehet.

Inhomogén kvantum spinláncokat vizsgáltunk, ahol vagy a külső tér, vagy a kötések erőssége a helykoordináta lineáris függvénye volt (V. Eisler, F. Iglói and I. Peschel, J. Stat. Mech. P02011 (2009)). Ez az inhomogenitás az alapállapotban szendvics-szerű szerkezetet eredményezett. Mértük a Neumann-féle entrópiát, mely a rendszerben kialakuló határfelület szélességének logaritmusával arányosnak adódott. Vizsgáltuk az entrópia időfejlődését is azután, hogy a rendszert egy homogén kritikus rendszerbe vittük át (quantum quench). Az XX-modell esetén az entrópia logaritmikus időfüggést mutatott, míg a kvantum Ising lánc esetén kvadratikus függést találtunk.

A kétdimenziós rendezetlen merőleges terű Ising modell összefonódási entrópiáját az erős rendezetlenségi RCS módszer numerikus alkalmazásával vizsgáltuk (Y.-C. Lin, F. Iglói, and H. Rieger, Phys. Rev. Lett. **99**, 147202 (2007)). A felületegységre eső entrópia aszimptotikus értéke a kvantum fázisátalakulási pontban, melyet egy végtelenül

rendezetlen fix pont ír le, divergens viselkedést mutat. Ezen pontban az entrópiánál a felületi szabályhoz (area law) képest egy kettős logaritmikus korrekciót azonosítottunk. Ez a viselkedés szöges ellentétben áll a hígított merőleges terű Ising modell végtelenül rendezetlen fix-ponti viselkedésével, amely esetén magasabb dimenzióban a felületi szabály érvényesnek adódott.

### 1.3. Kvantum Griffiths-fázis vizsgálata

Rendezetlen kvantumrendszerekben fellépő ún. Griffiths-féle fázis tulajdonságait vizsgáltuk (R. Juhász, Y.-C. Lin, and F. Iglói, Phys. Rev. B **73**, 224206 (2006)). Megállapítottuk, hogy diszkrét szimmetriával rendelkező rendszerekben a releváns időskála eloszlása univerzális és megegyezik a független és azonos eloszlású véletlen változók extrém értékének határeloszlásával. Ezt az eredményt az erős rendezetlenségi RCS eljárással magyaráztuk és numerikusan ellenőriztük.

Különböző rendezetlen kvantum spin láncok (erős-kötésű, XX, Ising) nem-kritikus fázisában fellépő Griffiths-McCoy szingularitásokat vizsgáltuk (F. Iglói and I. A. Kovács, Phys. Rev. B **77**, 144203 (2008)). Ezen szingularitások az alacsony energiás gerjesztések állapotsűrűségéből a Dyson-Schmidt módszer alkalmazásával lettek meghatározva. Nagy véges láncok esetén az alacsonyan fekvő gerjesztések az extrém érték statisztikát követik az eloszlásuk pedig Fréchet alakú. A Dyson-Schmidt módszer és az erős rendezetlenségű RCS módszer közötti kapcsolatot szintén tárgyaltuk.

Az  $S=3/2$ -es antiferromágneses Heisenberg lánc felületi korrelációit vizsgáltuk sűrűségmátrix renormálási módszerrel (G. Fáth, P. Lajkó, Ö. Legeza, and F. Iglói, Phys. Rev. B **73**, 214447 (2006)). A két végspin közötti korrelációi a rendszer  $L$  méretével nagyon lassan, logaritmikusan tűnik el, amit logaritmikusan delokalizált felületi gerjesztések jelenlétével magyaráztunk meg. Vizsgáltuk a nyitott rendszer spektrumát is és a legalacsonyabb gerjesztés energiáját  $\sim 1/(L \ln L)$  alakúnak találtuk.

## 2. Egyensúlytól távoli rendszerek

### 2.1. Nemegyensúlyi kritikus relaxáció

A paramágneses fázisból a kritikus pontra hirtelen lehűtött rendszerben anomális relaxációs folyamatok és spin-spin autokorrelációk figyelhetők meg. Ezen folyamatokat a minta felülete, valamint különböző inhomogenitások (pl. hibavonalak) mentén tanulmányoztuk. (M. Pleimling, and F. Iglói, Phys. Rev. B **71**, 094424 (2005)) Megállapítottuk, hogy a konvencionális domén növekedési kép mellett egyes kísérletileg is releváns problémáknál egy ún. klaszter feloldódási folyamat is megfigyelhető. Ebben az esetben a kezdeti időszakban a mágnesezettség nyújtott exponenciális alakot követve csökken és hasonló törvényszerűséget követ az autokorrelációs függvény is.

A kétdimenziós Ising modell olyan nemegyensúlyi relaxációját tanulmányoztuk, ahol a kezdeti állapotot a véletlen terű (zérus átlagú és  $H$  szórású) Ising modell alapállapota definiálta (L. Környei, M. Pleimling, and F. Iglói, Europhys. Lett. **73**, 197 (2006)). A kezdeti állapotban nincs mágneses rend, de a elegendően kis tér mellett a párhuzamosan álló spinekből képezett domének perkolációs átalakulást mutatnak. A hőtartály dinamika alkalmazása esetén a mágnesezettség reentráns tulajdonságot mutat: a kezdeti időszakban

a klaszterek feloldódása a mágnesezettség csökkenésével jár, melyet a domén növekedésből adódó mágnesezettség növekedés követ és végül egy újabb csökkenés áll be, mely az egyensúlyi relaxáció következménye.

A nemegyensúlyi dinamika témakörében egy olyan kétdimenziós Ising modellt tekintettünk, amelyben horizontálisan két-spin, míg vertikálisan négy-spin kölcsönhatás van (M. Pleimling and F. Iglói, *Europhys. Lett.* **79**, 56002 (2007)). Vizsgáltuk a rendszer nemegyensúlyi dinamikáját, miután azt a paramágneses fázisból az elsőrendű fázisátalakulási pontba hirtelen lehűtöttük. Az autokorrelációs függvény nyújtott exponenciális alakban közelít egy véges határértékhez, melyet a rendezett fázisban az átalakulási pontban mért mágnesezettség,  $m_c$ , ad meg. Ezzel szemben egy nemkorrelált,  $m_k$  kezdeti mágnesezettségű állapotból történő relaxáció során a mágnesezettség vagy  $m_c$ -hez tart, ha  $m_k > 0.5$ , vagy nullához, ha  $m_k < 0.5$ . Kis  $m_k$  esetén, vagy ha  $m_k$  csak alig nagyobb 0.5-nél a mágnesezettség aszimptotikusan hatványfüggvény-szerű relaxációt mutat, ami azt jelenti, hogy nemegyensúlyi szempontból az átalakulás folytonos.

A kétdimenziós Ising spineket tartalmazó modellek univerzalitási osztályai, sőt a fázisátalakulások rendűsége is függ a kölcsönhatás hatótávolságától és szimmetriájától (pl. Onsager modell, Baxter-Wu modell, Turban modell), de a kritikus hőmérséklet általában az öndualitásból következően azonos. Vizsgálataink során a kölcsönhatás alakját hirtelen megváltoztattuk és tanulmányoztuk az elsőszomszéd kölcsönhatású modellben lezajló nemegyensúlyi kritikus relaxációs folyamatokat. (L. Környei, M. Pleimling and F. Iglói, *Phys. Rev. E* **77**, 011127 (2008)) A mágnesezettség relaxációja és az autokorrelációs függvény hatványfüggvény-szerű lecsengést mutatott, ahol a karakterisztikus exponensek a kezdeti állapot univerzalitási osztályától függttek.

## 2.2. Hajtott rácsgázok rendezetlen közegben

A rendezetlenség szerepét a hajtott rácsgázok két fontos modelljénél a zérus hatáskörű folyamatnál (zero range process (ZRP)) és az asszimmetrikus kizárási folyamatnál (asymmetric simple exclusion process (ASEP)) tanulmányoztuk.

A ZRP esetén olyan rendezetlenséget tekintettünk, amikor az ugrási ráták és azok preferenciális iránya is véletlen változó volt. (R. Juhász, L. Santen, and F. Iglói, *Phys. Rev. E* **72**, 046129 (2005)) Ebben az esetben a termodinamikai határesetben a rendszerben kondenzációs jelenséget lehet megfigyelni: a részecskék tipikusan egyetlen rácshelyet foglalnak el és a kondenzátumon kívül tartózkodó részecskék elenyésző hányadúak. Extrém érték statisztika és renormálási csoport módszerrel vizsgáltuk a stacioner állapot tulajdonságait és számos jellemzőt egzaktul meghatároztunk.

Az ASEP esetén is olyan rendezetlenséggel számoltunk, amikor az ugrási ráták és azok preferenciális iránya is a helytől függő véletlen változó. A rendszer kooperatív viselkedését és annak számos jellemzőjét egzaktul meghatároztuk. (R. Juhász, L. Santen, and F. Iglói, *Phys. Rev. E* **74**, 061101 (2006)) Eredményeink szerint a mozgás anomálian lassú lesz, a részecskerendszer árama,  $J$ , és a rendszer mérete,  $L$ , között a  $J \sim L^{2/z}$  összefüggés teljesül. Megállapítottuk, hogy a rendszerben tipikusan fáziszeváparáció történik és vizsgáltuk a rendszerben lezajló különböző nemstacionáris folyamatokat is.

A nemegyensúlyi fázisátalakulások tulajdonságait olyan komplex hálózatokon vizsgáltuk, ahol a nagyobb foksámú pontok fertőzési sebességét visszanyomítottuk. (M. Karsai, R. Juhász, and F. Iglói, *Phys. Rev. E* **73**, 036116 (2006)) A probléma dinamikus átlagtér közelítését megoldottuk és tárgyaltuk a véges-méret effektusok szerepét. Az el-

méleti eredményeket Monte Carlo szimuláció eredményeivel vetettük össze. A lokális skála exponensek egy tipikus pontban és a maximálisan összekapcsolt pontban különbözőnek adódtak.

### 3. Rendezetlenség dominálta klasszikus rendszerek

Ezen témakörben klasszikus spinrendszereket tekintettünk, ahol a determinisztikus fluktuációk általában termikusak voltak. A rendezetlenség szerepe mellett különböző típusú inhomogenitásokat (kváziperiodikus és aperiodikus kölcsönhatás, határfelületi defekt) is tekintettünk.

A kétdimenziós Ising modellt olyan biaxiálisan korrelált rendezetlenség jelenlétében vizsgáltuk, ahol a kritikus hőmérséklet öndualitás által egzaktul ismert. (F. Á. Bagaméry, L. Turban, and F. Iglói, Phys. Rev. B **72**, 094202 (2005)) Monte Carlo szimulációk segítségével meghatároztuk a kritikus exponenseket és vizsgáltuk a modell konform tulajdonságait és a mágneses és energia-sűrűség profilokat.

A háromdimenziós véletlen ferromágneses kötésű Potts modell fázisátalakulását a  $q$ -állapotok nagy értékére egy általunk kifejlesztett optimalizációs módszerrel tanulmányoztuk. (M. T. Mercaldo, J-Ch. Anglès d'Auriac, and F. Iglói, Europhys. Lett. **70**, 733 (2005); Phys. Rev. E **73**, 026126 (2006)). Gyenge rendezetlenség mellett az átalakulás elsőrendű marad, de az egyes fizikai jellemzők lényeges szingularitást mutatnak. A rendezetlenség erősségét növelve az átalakulás folytonossá válik. Az átalakulás rendűségének változását a termodinamikai állapotot kísérő perkolációs folyamattal hoztuk kapcsolatba. A trikritikus és kritikus szingularitást kísérő exponenseket numerikusan meghatároztuk. Az utóbbiak esetén rendezetlenségtől független, univerzális jelleget találtunk és numerikusan igazoltuk a véletlen terű Ising modellel feltételezett skálázási kapcsolatot.

A ferromágneses nagy- $q$  állapotú Potts modellt komplex hálózatokon is vizsgáltuk, mely probléma egy olyan optimális kooperációs feladattal ekvivalens, ahol a résztvevők maximalizálni akarják a pályázati támogatások összegét, mely pár-kooperációs járulékokból és projektenként azonos támogatásokból áll. (M. Karsai, J-Ch. Anglès d'Auriac, and F. Iglói, Phys. Rev. E **76**, 041107 (2007)) Azt találtuk, hogy a résztvevők tipikusan két osztályba sorolhatók: egy  $m$  hányad (ami a Potts modell mágnesezettségét adja) egy nagy összekapcsolt fűrthöz tartozik, míg a többi tipikusan izolált egy résztvevős projekteket reprezentál. Egzaktul megmutattuk, hogy a homogén modell erősen elsőrendű fázisátalakulással bír, mely másodrendűbe fordul, ha a kölcsönhatások (járulékok) véletlenszerűek. Ezen utóbbi problémát a Barabási-Albert hálózaton numerikusan tanulmányoztuk. A véges-méretű rendszerekben mért kritikus pontok olyan eloszlást követnek, ahol az eltolódási exponens,  $1/\nu = .26(1)$ , és a kiszélesedési exponens,  $1/\nu' = .18(1)$ , különböző értékű, míg a kritikus pontbeli mágnesezettség a hálózat  $N$  méretével az  $x = .66(1)$  exponenssel bír.

Vizsgáltuk két különböző univerzalitási osztályba tartozó modellt elválasztó határfelület lokális kritikus tulajdonságait. (F. Á. Bagaméry, L. Turban, and F. Iglói, Phys. Rev. B **73**, 144419 (2006)) Az átlagtér elmélet analitikus eredményeit a fluktuációkat is figyelembe vevő skálázási hipotézisen alapuló elmélettel általánosítottuk, melyet Monte-Carlo szimulációval nyert numerikus eredményekkel vetettünk össze. Ezen probléma további vizsgálata során két olyan Ashkin-Teller modellt kapcsolunk össze, melyek különböző négy-spin kölcsönhatással ( $\epsilon$ ) bírtak. Az  $\epsilon$  értékének változtatásával az alrendszerek kri-

tikus exponenseit folytonosan tudtuk változtatni, ami a határfelületi kritikus viselkedés módosulását is eredményezte. Különösen a marginális esetre koncentráltunk, amikor a határfelületi átalakulás mágneses exponense a kölcsönhatás erősségével folytonosan változott. A skálázási érveléssel jóslt eredményeket sűrűség-mátrix renormálással numerikusan igazoltuk.

A klasszikus Ising modellt a Bethe-rácson tárgyaltuk, ahol a csatolások aperiodikusan változtak. (F. Iglói and L. Turban, Phys. Rev. E **78** 031128 (2008)) A rendszer kritikus viselkedésére vonatkozóan relevancia-irrelevancia kritériumot vezettünk be és a marginális aperiodikus szerkezetek esetén a kritikus viselkedést egzaktul meghatároztuk. A különböző mágneses kritikus exponensekre analitikus formulákat vezettünk le, ahol az exponensek a csatolások arányától függőnek adódtak. Ugyancsak tárgyaltuk a fenti modell és az aperiodikus kvantum Ising modell közötti kapcsolatot is.

A kétdimenziós véletlen terű Ising modellben (RFIM) a geometriai fürtök (azaz a párhuzamos spinekből álló domének) szerkezetét tanulmányoztuk a Gauss-eloszlást követő véletlen tér  $\Delta$  erősségének függvényében. (L. Környei, and F. Iglói, Phys. Rev. E **75**, 011131 (2007)) Megmértük a  $\xi$  geometriai korrelációs hosszat, mely a fürtök átlagos lineáris méretével egyezik meg, és amely a  $\Delta > \Delta_c \approx 1.65$  tartományon végesnek adódott, míg  $\Delta \leq \Delta_c$  esetén divergens lett. A fürtök tömegének eloszlásfüggvényét leíró skála-függvény, valamint a geometriai korrelációs függvény egyaránt a kritikus perkoláció skálázási exponenseit tartalmazta. Ugyanakkor a korrelációs hossz divergens viselkedése, a  $(\Delta - \Delta_c)$  függvényében a  $\nu \approx 2$  exponenssel volt leírható, mely a trikritikus perkolációra jellemző. Ugyancsak vizsgáltuk a geometriai korrelációk szimmetriáját és megmutattuk, hogy azok konform invariáns módon transzformálódnak.

A geometriai fürtök eloszlását csík geometriában két olyan rendszerben is vizsgáltuk, ahol a kritikus viselkedést erős rendezetlenségi hatások dominálják. (M. Karsai, I. A. Kovács, J-Ch. Anglès d'Auriac, and F. Iglói, Phys. Rev. E **78**, 061109 (2008)) A klasszikus véletlen ferromágneses kötésű Potts modell esetén a nagy- $q$  határesetben az optimális Fortuin-Kasteleyn klasztereket vizsgáltuk kombinatorikus optimalizációs algoritmussal. A rendezetlen kvantum Ising lánc esetén a fürtöket az erős rendezetlenségű RCS módszer segítségével lehetett definiálni és kiszámítani. A csík határai mellett az eloszlások a skálázási hipotézissel összhangban állónak adódtak. A Potts modell esetén a konform formulák alkalmazhatóságát is igazoltuk.

## Összefoglalás

Összefoglalva elmondható, hogy a fenti kutatási projektben több szorosan összefüggő jelenségen dolgoztunk, melyeket összekötött az a tény, hogy (mind a kritikus, mind a Griffiths-féle) szingularitások esetén a rendezetlenség szerepe meghatározó volt. Eredményeinket 29 nemzetközi folyóiratcikkben közzeltük, melyek összegzett impakt faktora több mint 90. Ezen munkákra ezidáig több mint 130 hivatkozás érkezett. Eredményeink nemzetközi elismertségét jelzi, hogy a pályázati időszak alatt közel húsz felkérést kaptunk konferencián illetve workshop-on meghívott előadás tartására. A pályázat futamideje alatt egy PhD disszertáció sikeresen meg lett védve (Bagaméry Farkas (2006)) és két elkészült disszertáció védelemre van nyújtva (Környei László és Karsai Márton). További két doktorandusz pedig már elkezdte a kutatásokat (Kovács István, Szatmári Zsolt).