

**T 49427**  
**OTKA TEMATIKUS PÁLYÁZAT**

**Z Á R Ó J E L E N T É S**

**TÉMAVEZETŐ:**

**Dr. Bertóti Edgár**  
egyetemi tanár  
Miskolci Egyetem, Mechanikai Tanszék

A kutatási téma címe: **Feszültségmezőre épülő magasabb rendű végeelem-modellek a szilárd testek mechanikájában (2005 – 2009)**

Témavezető: **Dr. Bertóti Edgár egyetemi tanár, az MTA doktora**

Résztevők: **Kocsán Lajos György egyetemi tanársegéd (2007-től)**  
**Tóth Balázs egyetemi tanársegéd (2007-től)**

## Kutatási előzmények, motiváló tényezők, célkitűzések

A klasszikus, elmozdulásmezőre és a virtuális munka elvre épülő végeelem-modellekkel szembeni egyik legnagyobb kihívást azok a numerikus konvergencia problémák jelentik, amelyek az angol nyelvű – ezen a területen is óriási méretű – szakirodalomban *numerical locking* néven ismertek (magyarul a problémát *numerikus bemerevedésként* is szokás említeni). Ez a jelenség elsősorban az alacsonyrendű approximációt és elemsűrítést alkalmazó ún. *h*-verziós végeelem-módszerre jellemző olyan, többnyire valamilyen kicsiny, de valóságos paramétert tartalmazó problémák megoldásánál, amikor a paraméter értéke zérushoz tart. Megnyilvánulásának lényege, hogy a numerikus megoldás hibája a végeelemes modell szabadságfokának (elemszámának) növelésével nem, vagy alig csökken, súlyosabb esetben növekszik. A problémák jelentős része elkerülhető a rögzített méretű elemeken alkalmazott polinomok fokszámának növelésével, az ún. *p*-verziós végeelem-módszer alkalmazásával. Szilárd testek végeelemes modellezésének területén a legkomolyabb – jelenleg is megoldatlan – nehézségek héjak (ezen belül is elsősorban a vékony héjak), továbbá az ún. összenyomhatatlan (inkompresszibilis) anyagok megbízható számításánál tapasztalhatóak.

A numerikus modell-alkotás szintjén a végeelemes approximáció hibáit, illetve a hiba konvergencia sebességét két lényeges körülmény befolyásolja: (1) A numerikus megoldás alapjául választott variációs formalizmus, amely egyben a függetlenül approximált mezők megválasztását is jelenti; példaként az elmozdulásmezőn alapuló virtuális munka elv, a feszültségmezőn alapuló kiegészítő virtuális munka elv, valamint a több független mező egyidejű approximációján alapuló variációs elvek említhetők meg. (2) A végeelemes modellezés során választott approximáció típusa; itt meg szokás különböztetni a fentebb már említett *h*-típusú, vagy alacsonyrendű approximációt, a *p*-típusú, vagy magasabb rendű approximációt, valamint a kétféle közelítés előnyeit egyesítő *hp*-típusú approximációt.

A numerikus konvergencia problémák elkerülésének egyik hatékony és megbízható módja a feszültségmező, valamint a több független mező egyidejű approximációján alapuló – ún. többmezős (az angol szakirodalomban *multi-field*) variációs elvek alkalmazása, illetve az ezen alapuló (*mixed-hybrid* típusú) végeelem-modellek kidolgozása. Ebben az esetben a bonyolultabb, elméletileg is igényesebb formalizmus, a független változók approximációs tereinek megfelelő megválasztása, az elem-modellek magasabb szabadsági foka, valamint a numerikus algoritmusok, illetve a programozási feladat összetettsége jelentenek nehézséget.

A kutatási feladat célkitűzéseit leginkább az a – szakirodalomban 1998-ban közzétett, matematikailag is bizonyított – felismerés motiválta, mely szerint bizonyos héjfeladatok esetén az elmozdulásmezőre épülő  $p$ -verziós elemek sem mentesek a *numerical locking* (ezen belül is elsősorban a *membrane locking*) nevű jelenségtől, vagyis ilyen esetekben sem a  $h$ -, sem a  $p$ -verziós héjelemek nem tudnak megfelelő konvergenciájú megoldást adni a mérnöki alkalmazások szempontjából elsőrendű fontosságú feszültségmezőre nézve. A tervezett kutatások elsősorban olyan új típusú, a nem *a priori* szimmetrikus feszültségmezőn és forgásmezőn alapuló, magasabb rendű ( $p$ -verziós) végeelem-modellek kidolgozására irányultak, amelyek lehetővé teszik a héjak, mint háromdimenziós kontinuumok feszültségi állapotának az eddigieknél megbízhatóbb, numerikus konvergencia problémák nélküli számítását.

A vizsgálatok első lépésében az egyszerűbb geometriájú héjak (forgáshéj, körhengerhéj) modellezésének tervei szerepeltek. A munka elméleti háttérét részben az a témavezető által korábban kidolgozott általános nemlineáris héjelmélet képezte [Bertóti E.: Héjak nemlineáris elmélete feszültségmezővel és forgásmezővel, *MTA doktori értekezés*, Magyar Tudományos Akadémia – Miskolci Egyetem, Miskolc, 2003, 133 p.], amelynek alapján – a pályázat előzményeként – már sikerült lemezekre (sík középfelületű héjakra) egy numerikus konvergencia problémáktól mentes  $hp$ -verziós, dimenzió szerint redukált lemez-elemet kidolgozni. Ez a lemezmodell, illetve lemez-elem – a várákosoknak megfelelően – megbízható numerikus eredményeket adott olyan vékonyságú lemezek esetében is, amelyeknél a klasszikus, elmozdulásmezőn alapuló modellek, illetve elemek megbízhatatlan, vagy értékelhetetlen eredményekhez vezetnek, különösen a feszültségmezőre nézve.

A pályázat benyújtásakor és elfogadásakor a témavezető volt az egyetlen pályázatban megnevezett résztvevő, de – a lehetőségektől függően – tervezve volt egy-egy fő egyetemi hallgató, vagy doktorandusz bevonása is a kutatómunkába.

## **Az elvégzett kutatómunka és a kutatási eredmények**

A pályázatban megjelölt kutatási területen belül a végrehajtott kutatómunka és az eddig elért eredmények három egymással részben összekapcsolható részterülethez köthetők. Az egyik irány a Fraeijs de Veubeke-féle kétmezős variációs elven alapuló háromdimenziós végeelem-modell kifejlesztésére irányult, amely lemezek és héjak esetén is alkalmazható. A másik irány ugyancsak a Fraeijs de Veubeke-féle variációs elven alapul, de ebben az esetben egy dimenzió szerint redukált héjelem (végeelem-modell) kifejlesztése volt a cél, első lépésben körhengerhéj-feladatok numerikus megoldására. A kutatás harmadik iránya a hárommezős Hellinger-Reissner-féle variációs elv alkalmazása héjfeladatokra, amely magában foglalja a dimenzió szerinti redukcióval előállítandó héjmodell kidolgozását, majd ennek alapján új típusú végeelem-modell kifejlesztését. Az elem-modellek kidolgozása mellett mindhárom kutatási irány esetében célkitűzésként szerepelt konkrét, saját fejlesztésű kutatói kódok (végeelemes algoritmusok és eljárások, valamint program-rutinok) kidolgozása is. A három megjelölt irányban végzett kutatómunka részletesebb leírása és az eredmények rövid, tömör összefoglalása következik az alábbiakban.

**Háromdimenziós elem-modell feszültségmezővel és forgásmezővel.** A Fraeijs de Veubeke-féle kétmezős variációs elven alapuló háromdimenziós elem-modellek az elsőrendű feszültségfüggvény-mező és a forgásmező közvetlen approximációján alapulnak. A modell felépítésének kulcslépései közül itt kettőt érdemes kiemelni: (1) stabil approximációs teretek meghatározása a megfelelően kiválasztott hat független elsőrendű feszültségfüggvényre és a három szögelfordulásmezőre; (2) az elsőrendű feszültségfüggvények azon kombinációjának meghatározása, amelyek zérus kiegészítő alakváltozási energiát adnak. A másodikként említett probléma jelentőségét csak a munka programozási fázisában, a kidolgozott elem-modell implementálása során ismertük fel, a pályázat benyújtásának időpontjában ennek vizsgálatát nem terveztük (nem láttuk). Viszont a numerikus modell működése szempontjából megkerülhetetlen problémáról volt szó, ezért erre vonatkozóan elméleti vizsgálatokat, illetve – a pályázatban tervezett vizsgálatokhoz képest extra – kutatómunkát kellett végezni. Az ezen irányban végzett vizsgálatokat és az elért új eredményeket egy, az *Acta Mechanica* folyóiratban megjelent cikkben ismertettük [9]. A cikkben foglalt eredmények elméletileg és gyakorlatilag (a háromdimenziós elemmodell megfelelő működéséhez) is fontosnak bizonyultak, amelyek alapján egy hatékony, háromdimenziós, *hp*-verziós végeelem-modellt tudtunk kifejleszteni, első lépésben egyenes oldalú hexaéder (téglatest) alakú elemek esetében, amikor a mester-elem és az aktuális elem közötti geometriai leképezés lineáris.

A munka során az elem-modellt egy saját fejlesztésű, C/C++ forrásnyelvű számítógépi programba implementáltuk, amely jelenlegi formájában egy több ezer program-sorból álló kutatói kód. Egyszerűbb geometriájú testek háromdimenziós peremértékfeladatainak végeelemes megoldásán keresztül több összehasonlító számítást végeztünk, majd a vizsgálatokat vékony lemezfeladatok megoldásával folytattuk, ezeket is háromdimenziós feladatként modellezve. A számítási eredményeket összevetettük a szakirodalomban közölt analitikus és végeelemes megoldásokkal, és a korábbi, saját fejlesztésű, de dimenzió szerint redukált (kétváltozós) lemezmodellekkel is. Numerikusan igazoltuk, hogy a kifejlesztett háromdimenziós elem-modell numerikus konvergencia problémáktól mentes eredményekre vezet összenyomhatatlan anyagú vékony lemezek esetében is, vagyis az elem-modell – a korábban kifejlesztett kétdimenziós modellek kiváló approximációs tulajdonságait megtartva – háromdimenziós körülmények között is megbízható feszültségeket eredményez (angol terminológiával *incompressibility locking-free* és *shear locking-free* elemek), az alkalmazott approximáció típusától függetlenül, vagyis mind *h*-, mind *p*-típusú approximációnál. Az eredmények egy részét az [5]-[8] publikációkban ismertettük. A konferenciák közül kiemelendőnek tartjuk a [7]-ben jelzett *workshop*-ot, amelyre csak személyes meghívás alapján, egy szűkebb kutatási területen dolgozó kutatók vehettek részt és mutathatták be eredményeiket. Magyar viszonylatban az elért eredményeket a X. Magyar Mechanikai Konferencián, plenáris előadás keretében mutathattuk be.

A kutatás fenti irányában 2007-ig a témavető – mint a pályázat egyetlen résztvevője – végzett kutatásokat. A munka menetét és az elért eredmények publikálását jelentősen befolyásolta az – a pályázat beadása során még nem tervezett – körülmény, hogy a témavezető 2007-ben tanszékvezetői megbízatást vállalt el a Miskolci Egyetem Mechanikai Tanszékén.

Ez a megbízatás a magyar felsőoktatás BSc-MSc rendszerre való átállítása idejében olyan mértékű adminisztrációs terhelést jelentett, aminek következtében a fenti kutatási irányban végzett kutatómunka jelentősen lelassult. Ugyanakkor a kutatási feladat végrehajtásába – az előzetes terveknek megfelelően és az OTKA Iroda engedélyével – sikerült két olyan, akkor még doktorandusz hallgatót bevonni, akik a megpályázott témában kezdő kutatóként is megfelelő színvonalú munkát tudtak végezni. Jelenleg mindketten egyetemi tanársegédként dolgoznak a Miskolci Egyetem Mechanikai Tanszékén, ami azonos a témavezető kutatóhelyével, illetve munkahelyével. A két fiatal kutató által – a témavezető irányításával, de lényegében önállóan – végzett kutatómunka eredményeit mutatja be a jelentés következő része.

**Héjmodell és héjelem kifejlesztése kétmezős variációs elv alapján.** A kutatás ezen – fentebb másodikként jelzett – irányánál kiindulást jelentett a témavezető által korábban kidolgozott, az egyensúlyi, de nem *a priori* szimmetrikus feszültségmezőre és a forgásmezőre épülő általános, nemlineáris, dimenzió szerinti redukálással származtatott héjelmélet, melynek egyik fontos tulajdonsága, hogy a klasszikus héjelméletek alapjául szolgáló kinematikai és feszültségi hipotéziseket nem tartalmaz, így a háromdimenziós anyagegyenletek módosítások nélkül alkalmazhatók. Ezen általános héjmodell egyenleteiből kiindulva megtörtént a forgáshéjak, majd a körhengerhéjak, mint speciális geometriájú héjak egyensúlyi feszültségmezőjének a származtatása, elsőrendű feszültségfüggvények alkalmazásával. Ezt követően a kiegészítő virtuális munka elv körhengerhéjakra vonatkozó kétdimenziós funkcionáljának levezetésére, majd a héjmodell Euler–Lagrange egyenleteinek és természetes peremfeltételeinek származtatására került sor. Ezek – felsorolásszerűen – az alakváltozási és a szögelfordulás-koordináták vastagság menti integrálásával képzett alakváltozási és forgási eredőkre vonatkozó elsőrendű kompatibilitási egyenletekből és a nyírófeszültségek szimmetriáját integrál-átlagban biztosító egyenletekből állnak. A héjmodell természetes peremfeltételeit az említett eredők és az előírt elmozdulások eredői között fennálló elmozdulási peremfeltételek, továbbá az alakváltozási eredőkre vonatkozó kompatibilitási peremfeltételek alkotják.

A translációs egyensúlyi egyenletek elsőrendű feszültség-függvényekkel való kielégítése során a feszültségfüggvény tenzor kilenc koordinátájából csak hat független, ez összesen 27-féle lehetőséget jelent. Ezek közül a végeleemes modell felépítéséhez egy előnyösnek bizonyuló kombinációt választottunk ki. A ismeretlenek számának csökkentését a palástperemen előírt feszültségi peremfeltételek figyelembevételével értük el, amely a megfelelő feszültségfüggvények palástterhelési értékekkel való kifejezését jelentette. További ismeretlen-szám csökkentést jelentett a sorba fejtett feszültségi koordinátákra vonatkozó szimmetriafeltétel integrál-átlagban történő teljesítése. A feszültség-függvény tenzor kiválasztott és sorba fejtett koordinátáinak approximációja a normál irányú feszültségvektorok  $C^0$  folytonosságát az elemhatárokon biztosította. A végeleemes algoritmus kifejlesztésekor külön figyelmet kellett fordítani a zérus kiegészítő energiát adó feszültségfüggvény-módok kezelésére, illetve az alkalmazott approximációs függvényterek kiválasztására.

Analitikus vizsgálatokat és a programozási feladatot első lépésben forgásszimmetrikus

terhelési esetre végeztük el. Homogén, izotrop és lineárisan rugalmas anyagot feltételezve, valamint a forgásmezőt eliminálva a forgásszimmetrikus terhelési eset visszavezethető egy negyedrendű, állandó együtthatós, lineáris, inhomogén differenciálegyenletre. Az így származtatott analitikus megoldás előnye – többek között – az, hogy egyrészt tartalmazza a nyírásból származó energiát, másrészt bonyolultabb palástterhelési feladatok megoldását is lehetővé teszi. Igazoltuk továbbá, hogy ha a héj vastagsága közelít a nullához, akkor a feszültségekre kapott megoldás visszaadja a Koiter-féle héjmodell által számított megoldást. Az analitikus megoldás jól felhasználható a numerikus megoldások hibaanalízisének is.

A numerikus számításokhoz készített végeselemes program C/C++ forrásnyelven készült, saját fejlesztésű algoritmusok és rutinok alkalmazásával. A programot, illetve annak működését különféle körhengerhéj-feladatok megoldásain keresztül teszteltük. Ezek magukban foglalták azokat a peremzavarási és palástterhelési feladatokat is, amelyeknél a megoldás lefutása exponenciális jellegű és erősen függ a héj vastagságától. A numerikus megoldások eredményeinek más, ismert megoldásokkal történő összehasonlításán keresztül igazoltuk, hogy a kifejlesztett héjmodell és héjelem a héj vastagságának változása (vékonyodása) esetén sem vezet numerikus konvergencia problémákhoz. Ez a megállapítás egyaránt érvényes a  $h$ - és  $p$ -típusú közelítésekre. A kutatási program ezen irányában elért eredményeket a [10]-[19] publikációkban mutattuk be.

**Héjmodell és héjelem kifejlesztése hárommezős variációs elv alapján.** A kutatás ezen – fentebb harmadikként említett – irányánál a hárommezős Hellinger–Reissner-féle variációs elvet alkalmaztuk forgáshéjakra, a lineáris rugalmasságtan keretei között. Az elv funkcionálja a teljes kiegészítő energia maximum elv funkcionáljából, a hozzá kapcsolódó mellékfeltételeknek a funkcionálba történő illesztésével származtatható, alkalmazva a Lagrange-féle multiplikatortechnikát. Az elmozdulásmező variációs elvben történő közvetlen megjelenése lehetővé teszi a héjak dinamikai – pl. rezgéstani – feladatainak a vizsgálatát is.

A kutatómunka első lépéseként és eredményeként egy olyan forgáshéj-modellt dolgoztunk ki, amelynek alapváltozói a forgásmező, az elmozdulásmező és a nem *a priori* szimmetrikus feszültségmező. Ennek során előállítottuk a forgáshéj középfelületének geometriai jellemzőit leíró mennyiségeket – a metrikus tenzorokat és a görbületi tenzort, majd a középfelületi pontokra illesztett felületi koordináta-rendszer és a középfelületen kívüli héjpontokhoz kötött koordináta-rendszer kapcsolatát határoztuk meg. Ezek után felírtuk a két lokális koordináta-rendszerben értelmezett kovariáns deriválások közötti kapcsolatot. Mindezek ismeretében, a héj vékonyságára tett feltételezések figyelembevételével előállítottuk a háromdimenziós Hellinger–Reissner-féle variációs elv funkcionálját vékony forgáshéjakra. Második lépésben az alapváltozók dimenzió szerinti redukálását végeztük el, mely során az elmozdulásvektor és a forgásvektor koordinátáit elsőfokú, míg a feszültségtenzor koordinátáit első- és másodfokú polinomokkal közelítettük a vastagság mentén. Ezek után a sorbafejtett változókat behelyettesítettük a Hellinger–Reissner-féle variációs elv funkcionáljába. Bevezetve az alakváltozási, forgási és elmozdulási eredőket, a Hellinger–Reissner-féle variációs elv funkcionáljának zérus értékű első variációjából megkaptuk a forgáshéj-modell Euler–Lagrange egyenleteit és természetes peremfeltételeit.

A kutatómunka következő lépéseként a forgáshéj-feladat három alapváltozója közül a forgásmezőt elimináltuk a variációs elvből a forgási egyensúlyi egyenlet integrál-értelemben történő kielégítésével. Ezáltal, valamint a palástterhelések variációs elvbe történő beépítésével tovább csökkentettük az ismeretlen feszültségi koordináták számát. Így hat feszültségi és négy elmozdulás-koordináta maradt ismeretlenként a forgáshéj-modell húzás-nyomás és hajlítás-nyírás feladatára vonatkozóan. Az Euler–Lagrange egyenletek figyelembevételével meghatároztuk a tíz ismeretlen koordinátát közelítő approximációs polinomok egymáshoz viszonyított fokszámát, mely mind a  $h$ -, mind a  $p$ -típusú végeelem-modell felállításához szükséges.

A kutatási periódus utolsó évében a hárommezős Hellinger–Reissner-féle variációs elven alapján kidolgozott forgáshéjmodellből származtattuk a körhengerhéjakra vonatkozó modellt, illetve egyenletrendszeret. Ezt követően egy új típusú,  $hp$ -verziós végeelem-modellt dolgoztunk ki körhengerhéjakra. A numerikus megoldásokra alkalmas számítógépi program C/C++ forrásnyelven került kifejlesztése. A programmal, illetve az elem-moddellel kapott numerikus eredmények összevetettük a szakirodalomban található, más (elmozdulásmezőn alapuló) modellekkel és programokkal számított eredményekkel. Numerikusan igazoltuk, hogy kifejlesztett héjmodell és a kapcsolódó végeelem-modell megbízható, az angol szakirodalomban *incompressibility locking* néven ismert numerikus konvergencia problémától mentes eredményeket biztosít a feszültségmezőre és az elmozdulásmezőre nézve is, mind  $h$ -, mind  $p$ -típusú végeelemes approximáció esetén. A kutatások ezen irányában elért eredményeinket a [20]–[29] publikációkban mutattuk be.

## Az eredmények hasznosításának lehetőségei

A kifejlesztett  $hp$ -verziós végeelem-modellek, illetve végeelem-programok a jelenlegi kidolgozottsági szinten egyszerűbb geometriájú háromdimenziós feladatok, valamint lemez- és körhengerhéj-feladatok numerikus konvergencia problémák nélküli végeelemes megoldására alkalmazhatók. A feszültségmező, a forgásmező és – a harmadik bemutatott kutatási irány esetében – az elmozdulásmező egyidejű, közvetlen approximációjára épülő elem-modellek a hagyományos, elmozdulásmezőn alapuló végeelem-modellekkel szembeni előnyei – a kutatási célkitűzésekben is megfogalmazott elvárásokkal összhangban – elsősorban összenyomhatatlan anyagú vékony lemezek és héjak számításánál jelentkeznek. Ezen előnyök közül első helyen a mérnöki alkalmazások szempontjából kiemelkedő fontosságú feszültségmező megbízható és pontos kiszámíthatósága említendő meg. A későbbi, nemlineáris alkalmazások szempontjából kiemelt fontosságot tulajdonítunk annak, hogy a kidolgozott  $hp$ -verziós végeelem-modellek nemcsak  $p$ -, hanem  $h$ -típusú approximáció esetén is mentesek az elmozdulásmezőn alapuló modelleknél tapasztalható numerikus konvergencia (angol nevén *numerical locking*) problémáktól.

## Publikációk jegyzéke (OTKA T49427)

1. Bertóti E. Feszültségmezőre épülő végeselem-modellek a szilárd testek mechanikájában. *MTA Műszaki Tudományok Osztályának ülése*, 2005. április 28, MTA Miskolci Akadémiai Bizottság Székháza, Miskolc.
2. Bertóti, E. Derivation of plate and shell models using the Fraeijs de Veubeke variational principle, *Proceedings of the 5<sup>th</sup> International Conference on Computation of Shell and Spatial Structures*, June 1-4, 2005, Salzburg, Austria. Editors: E. Ramm, W.A. Wall, K.U. Bletzinger and M. Bischoff, pp. 1–4, [www.iassiacm2005.de](http://www.iassiacm2005.de)
3. Bertóti, E. An error indicator for  $p$ -finite elements, *Finite Element Method in Mathematics and Engineering – A scientific meeting on the occasion of the seventieth birthday of Prof. Barna Szabó*, Miskolc Center of the Hungarian Academy of Sciences, July 5, 2005, Miskolc, Hungary.
4. Bertóti E. Nemlineáris héjmodell elsőrendű feszültségfüggvényekkel, *Egyes kontinuummechanikai feladatok – Tudományos ülés Kozák Imre professzor 75. születésnapja tiszteletére*, 2005. szeptember 1, MTA Miskolci Akadémiai Bizottság Székháza, Miskolc.
5. Bertóti, E. Dual-mixed  $hp$  finite element models in elasticity, *International Workshop on „Direct and Inverse Field Computations in Mechanics”*, November 7-11, 2005, Linz, Austria, [www.ricam.oeaw.ac.at](http://www.ricam.oeaw.ac.at)
6. Bertóti, E. A stress function approach in three-dimensional elasticity, *6th European Solid Mechanics Conference (ESMC 2006)*, August 28 - September 1, 2006, Budapest, Hungary.
7. Bertóti, E. Higher-order dual-mixed finite element models in elasticity, *International Workshop on High-Order Finite Element Methods*, May 17-19, 2007, Herrrsching am Ammersee, Germany.
8. Bertóti E. Többmezős variációs elvek és végeselem-modellek a szilárd testek mechanikájában, *X. Magyar Mechanikai Konferencia (Plenáris előadás)*, 2007. augusztus 27 - 29, Miskolc.
9. Bertóti, E. On the stress function approach in three-dimensional elasticity. *Acta Mechanica*, Vol. 190, No. 1-4, pp. 197–204, 2007. (IF: 0,775).
10. Kocsán, L. Gy. Linear Shell Model using the Stress and Rotation Field, *microCAD'2007 International Scientific Conference*, March 22-23, 2007, Miskolc, Section F. Applied Mechanics, pp. 31–36.
11. Kocsán L. Gy. Kétmezős lineáris körhengerhéj-modell elsőrendű feszültségfüggvényekkel, *X. Magyar Mechanikai Konferencia*, Miskolci Egyetem, 2007. augusztus 27-29.
12. Kocsán, L. Gy. On the first-order stress function approach for cylindrical shells, *Doktoranduszok Fóruma*, 2007. november 13., pp. 57–63.



13. Kocsán L. Gy. Linear shell model using the stress and rotation field, December 17, 2007, Institut für Mechanik, Otto von Guericke Universität, Magdeburg, Németország.
14. Kocsán, L. Gy. Zero Energy Modes in a Two-Field Dual-Mixed Shell Model Using Stress Functions, *microCAD'2008 International Scientific Conference*, March 20-21, 2008, Miskolc, Section F. Applied Mechanics, pp. 31–37.
15. Kocsán L. Gy. Fraeijs de Veubeke-féle variációs elv alkalmazása körhengerhéjakra, *Alkalmazott Mechanikai Kutatások Mini-Szimpózium*, Győr, 2008. november 12., pp. 1–6.
16. Kocsán, L. Gy. Finite element model for cylindrical shells using first-order stress functions, December 18, 2008, Institut für Mechanik, Otto von Guericke Universität, Magdeburg, Németország.
17. Kocsán, L. Gy. Finite element model for cylindrical shells using first-order stress functions, *microCAD'2009 International Scientific Conference*, March 19-20, 2009, Miskolc, Section F. Applied Mechanics, pp. 13–18.
18. Kocsán L. Gy. Forgásszimmetrikusan terhelt körhengerhég analitikus megoldása elsőrendű feszültségfüggvényekkel, *GÉP*, Vol. LX, No. 6, pp. 21–31, 2009.
19. Kocsán, L. Gy. Derivation of a dual-mixed *hp* finite element model for axisymmetrically loaded cylindrical shells, *Paper under preparation (in final stage)*, 2010, pp. 1–21.
20. Tóth, B. Application of the Hellinger-Reissner variational principle to shells of revolution, *microCAD'2007, International Scientific Conference*, 22–23 March 2007, Miskolc, Section F. Applied Mechanics, pp. 47–51.
21. Tóth B. A hárommezős Hellinger-Reissner-féle variációs elv alkalmazása forgáshéjakra, *X. Magyar Mechanikai Konferencia*, Miskolci Egyetem, 2007. augusztus 27–29.
22. Tóth, B. The Hellinger-Reissner variational principle for axisymmetric shells, *Doktoranduszok Fóruma*, 2007. november 13., pp. 158–166.
23. Tóth, B. and Bertóti, E. *Application of a three-field dual-mixed variational principle to axisymmetric shells*, December 17, 2007, Institut für Mechanik, Otto von Guericke Universität, Magdeburg, Németország.
24. Tóth B. A Hellinger-Reissner-féle variációs elv funkcionáljának alakja forgáshéjakra, *GÉP*, Vol. LVIII, No. 5-6, pp. 48–53, 2007.
25. Tóth, B. Axisymmetric shell model using the three-field Hellinger-Reissner's variational principle, *microCAD'2008, International Scientific Conference*, 20–21 March 2008, Miskolc, Section F. Applied Mechanics, pp. 47–51.
26. Tóth, B. Axisymmetric shell model using a three-field dual-mixed variational principle, *Journal of Computational and Applied Mechanics*, Közlésre elfogadva: 2008. november 12. (megjelenés alatt).

27. Tóth, B. *Three-field dual-mixed finite element model for cylindrical shells*, December 18, 2008, Institut für Mechanik, Otto von Guericke Universität Magdeburg, Németország.
28. Tóth, B. Dual-mixed finite element model for elastic cylindrical shells, *microCAD'2009, International Scientific Conference*, 19–20 March 2009, Miskolc, Section F. Applied Mechanics, pp. 51–60.
29. Tóth, B. Three-field dual-mixed *hp* finite element model for elastic cylindrical shells, *Submitted for publication to International Journal of Solids and Structures*, February, 2010, pp. 1–16.

Miskolc, 2010. február 24.