

# SZAKMAI ZÁRÓBESZÁMOLÓ

a „Bethe Ansatz és dinamikai r-mátrixok” c.

OTKA pályázatról  
(2005-2009)

Témavezető: dr. Balog János

Az eredeti munkatervben a kutatásokat az alábbi három nagyobb kérdéskörben terveztük:

1. Nemlineáris szimmetria algebrák integrálható rendszerekben
2. Integrálható részecskekölcsönhatások vizsgálata
3. Integrálható modellek véges térfogati spektruma TBA módszerrel

Mindhárom témakörben nagyjából az eredeti munkaterv szerint haladtunk és megoldottuk a legtöbb célul kitűzött feladatot. A pályázat elkészítésekor (2004-ben) még nem számítottunk arra, hogy a 3. témakör az időközben nagyon népszerűvé vált AdS/CFT korrespondencia mindkét oldalán felfedezett integrálhatóság következtében különösen fontos területévé válik az elméleti kutatásoknak. A pályázat utolsó két évében a TBA módszerrel kapcsolatos kutatásainkat erre az új területre is kiterjesztettük. Összesen 25 publikációnk jelent meg, szinte kizárólag referált folyóiratokban. (A publikációs jegyzékben még preprintként szereplő [19] és [20] közleményeket is időközben már közlésre elfogadták.) Az alábbiakban a legfontosabb publikációk eredményeit foglaltam össze.

## **Nemlineáris szimmetria algebrák integrálható rendszerekben [8,9,22,23]**

Dinamikai r-mátrixokkal kapcsolatos vizsgálatok:

A [8] cikkben leegyszerűsítettük a spin Calogero típusú klasszikus integrálható sokrészecske rendszerek korábbról ismert, ábeli Lie algebrai változókon definiált dinamikai r-mátrixokat használó konstrukcióját. Az alapul vett nem-degenerált dinamikai r-mátrixok egy unicitási tulajdonságát is bebizonyítottuk. Továbbá megmutattuk, hogy minden nem-degenerált dinamikai r-mátrixhoz rendelt modell Lie algebrán vagy Lie csoporton mozgó szabad részecske (geodetikus rendszer) hamiltoni szimmetria redukciójaként is tekinthető. Ez lehetővé teszi a mozgásegyenlet integrálását. A konstrukcióból adódó új példaként leírtuk az egyszerű Lie algebrák külső automorfizmusaihoz rendelhető modellek osztályát. A [9] közleményben bebizonyítottuk, hogy a nem-ábeli Lie algebrákon értelmezett dinamikai r-mátrixok nem

vezetnek az ábeli esethez képest új spin Calogero modellekre, tehát ebből a szempontból elegendő ábeli  $r$ -mátrixokra korlátozni a vizsgálatokat.

#### Ruijsenaars-Schneider modellek nem-lináris rejtett szimmetriáinak vizsgálata:

Kiderítettük [22], hogy a trigonometrikus Ruijsenaars-Schneider modell Poisson-Lie típusú nem-linéaris rejtett szimmetriával rendelkezik. Konkrétan, a modellt az  $U(n)$  csoporton mozgó Poisson-Lie szimmetrikus szabad részecske szimplektikus redukciójaként állítottuk elő.

A Lax mátrix és a kommutáló folyamatok egyszerűen adódtak az  $U(n)$  Heisenberg dupláján mint fázistéren definiált kanonikus szabad rendszerből.

A racionális Ruijsenaars-Schneider és a hiperbolikus Sutherland modellek egy rejtett dualitás szimmetria révén összekapcsolhatók, amelynek lényege a két modell részecske koordinátáinak és hatásváltozóinak felcserélése. A dualitás szimmetriát S. Ruijsenaars 1988-ban direkt módszerrel találta. A [23] cikkben ezen rejtett szimmetria csoportelméleti értelmezését adtuk.

Nevezetesen, a dualításban lévő modellek fázistereit egy bizonyos szimplektikus redukcióban mint két mértékrögzítést interpretáltuk, melynek révén a dualitás transzformáció mértéktranszformációként jelenik meg.

## **Integrálható részecskekölcsönhatások vizsgálata [6,8,10,14,16,17,18]**

#### Integrálható részecskekölcsönhatások klasszikus mechanikai vizsgálata:

A [10] publikációban Riemann szimmetrikus téren mozgó szabad részecske hamiltoni szimmetria redukcióit vizsgáltuk. A negatív görbületű esetben megmutattuk, hogy az izometria csoport maximális kompakt alcsoportját generáló Noether töltések tetszőleges rögzítésekor egy integrálható 1-dimenziós sokrészecske rendszer adódik, amely általában spin Calogero típusú. Ezután osztályoztuk azon eseteket, amikor a redukált rendszer spintelen Calogero modellt ad, és ezzel tisztáztuk a szimmetrikus terek és Calogero modellek közötti megfeleltetés Olshanetsky és Perelomov 1976-van megjelent klasszikus munkái óta nyitott kérdését. Ezután a nem-kompakt egyszerű Lie csoporton mozgó szabad részecske redukcióit vizsgáltuk [14], a maximális kompakt részecsoport bal és jobbszorzással adott hatásait alapul véve. A redukált rendszer az itteni legáltalánosabb esetben is spin Calogero típusú, általában a bal és a jobbszorzáshoz is tartoznak spin változók. Azonban kiderült, hogy a csoporton tekintett szabad mozgásból adódó spintelen Calogero modellek halmaza bővebb, mint amit szimmetrikus terekből kaphatunk. Redukált rendszerként realizáltuk a három független csatolási állandóval rendelkező  $BC(n)$  Sutherland modellt. Korábban az irodalomban ez csak két független csatolás esetén volt ismert,

a három csatolási állandó esetén a rendszert eddig csak tisztán algebrai módszerekkel tudták tárgyalni.

### Integrálható részecskekölcsönhatások kvantummechanikai vizsgálata:

Megvizsgáltuk a 3-részecskés Calogero modell inekvivalens kvantálásait [6]. A relativ mozgás Schödinger egyenlete szeparálható radiális és anguláris koordináták szerint, és megmutattuk, hogy az adódó 1-dimenziós Hamilton operátorok csatolási állandóik bizonyos értékeire nem-ekvivalens önadjungált kiterjesztésekkel rendelkeznek. Részletesen leírtuk az anguláris Hamilton operátor azon kvantásait, melyek lokális határfeltételekkel jellemezhetők és megőrzik az anguláris potenciál diszkrét szimmetriáját, valamint jellemeztük a radiális Hamilton operátor összes kvantálását. Minden esetben kidolgoztuk a spektrum kvalitatív jellemzését, és 3 új expliciten megoldható esetet is találtunk.

A [16] publikációban Riemann sokaságon mozgó szabad tömegpont klasszikus és kvantum hamiltoni szimmetria redukciót vizsgáltuk bizonyos általános feltételek mellett. Legfontosabb feltevésünk abban áll, hogy a Riemann tér rendelkezik egy olyan kompakt izometria csoporttal, amelynek hatása lehetővé teszi általánosított polár koordináták bevezetését. A szög koordináták a csoport pályáit, a pályákra merőlegesen változó radiális koordináták pedig a pályák egy alkalmas metszetét parametrizálják (technikailag ekkor azt mondják, hogy a csoporthatás poláris). A szimmetriához asszociálható legáltalánosabb kényszerek esetén leírtuk az adódó klasszikus és kvantummechanikai rendszereket. Ezek a rendszerek számos esetben spin változókkal kiterjesztett integrálható sokrészecske rendszerekként interpretálhatók. Azt találtuk, hogy a klasszikus Hamilton függvényhez képest a redukcióval adódó Hamilton operátor általában tartalmaz egy korrekciós tagot, az úgynevezett mértékfaktort. A [17] cikkben az említett redukált Hamilton operátorok önadjungáltságát bizonyítottuk be.

A fenti általános eredményeket hasznosítva a [18] cikkben megvizsgáltuk a korábban [8] klasszikus szinten leírt spin Sutherland modellek Hamilton operátorának spektrumát. Ezen modellek sajátfüggvényei az  $U(n)$  unitér csoport Laplace operátorának a csoportelméletben jól ismert sajátfüggvényeiből a csoporton ható ún. csavart konjugálásokra egy adott ábrázolás szerint transzformálódó hullámfüggvényeket megtartva adódtak. Vektorértékű hullámfüggvények kaptunk, ami a kölcsönható részecskék belső szabadsági szabadsági fokait mutatja. A belső szabadsági fokok leírásához felhasználtuk az impulzusmomentum Schwinger-féle oszcillátor modelljének  $U(n)$  általánosítását. Ekkor a sokrészecske Hamilton operátor spektrumát egy megoldható  $U(n)$  Clebsch-Gordan problémára tudtuk visszavezetni.

## **Integrálható modellek véges térfogati spektruma TBA módszerrel [1,2,11,12,15,19,20,24,25]**

Korábban már levezettünk TBA integrálegyenleteket és Destri-deVega típusú nemlineáris (NLIE) integrálegyenleteket az  $O(3)$  és  $O(4)$  nemlineáris szigma modellekben az alapállapotra és az első gerjesztett állapotra (nyugvó egyrészeecske állapotra). A [2] publikációban a mások által az alapállapotra felírt TBA egyenleteket általánosítottuk egyrészeecske állapotokra a magasabb  $O(n)$  modellek családjára (páros  $n$  esetére). Az alapelv az volt, amit már korábban az  $n=3,4$  esetekben is alkalmaztunk: feltételeztük, hogy ugyanaz az  $Y$ -rendszer írja le az egyrészeecske állapotokat is, mint ami az alapállapotban érvényes. A különbség mindössze abban nyilvánul meg, hogy az  $Y$ -rendszer megoldásainak más lesz az analitikus szerkezete. Ez utóbbit pedig a nagy térfogati megoldásból, az aszimptotikus Lüscher-formulák segítségével kaphatjuk meg. Az így kapott TBA integrálegyenleteket numerikusan megoldottuk és (kis térfogatok esetén) összevetettük a 3-hurok perturbációs számításból kapott értékekkel. Nagyon jó egyezést tapasztaltunk.

Hasonló gondolatmenetet alkalmazva a [20] publikációban az  $O(3)$  modell összes gerjesztett állapotára sikerült levezetnünk TBA integrálegyenleteket, illetve a sokkal egyszerűbb NLIE egyenleteket is. Az itteni eredményeket is összevetettük kis térfogaton a perturbációs számítással, valamint megmutattuk, hogy kis térfogaton a  $J$  spinű gerjesztett állapotokat valóban a kvantum rotátor  $J(J+1)$  spektruma jellemzi. Nagy térfogatokon ellenőrizni tudtuk a nemrég (AdS/CFT motiváció alapján) javasolt általánosított Lüscher-formulákat.

Az [1] publikációban az alternáló inhomogenitású kritikus RSOS( $k,q$ ) rács modellek véges méret effektusait leíró kétkomponensű nemlineáris integrál egyenletet vezettünk le. Egyenleteink az RSOS modell paramétereinek alkalmas hangolásával kapható különböző határesetekben további fontos és érdekes modellek véges méret effektusait írják le. Így belőlük megkaphatjuk a  $k/2$ -spinű XXX Heisenberg spin lánc egyenleteit, továbbá egyenletink kontinuum limeszeként a  $\Phi_{id,id,adj}$  operátorral perturbált  $SU(2)_k \times SU(2)_{k'}$  /  $SU(2)_{k+k'}$  kosztet modellek véges méret effektusait leíró egyenletekhez jutunk. Mivel ezen modellek a  $k \rightarrow \infty$ ,  $k' \rightarrow \infty$  határesetben az  $O(4)$  szigma-modellt adják egyenleteink az  $O(4)$  szigma-modell véges méret effektusait is leírják.

A [12] publikációban az  $N=1$  szuperszimmetrikus sine-Gordon modell teljes véges méret spektrumát a modell taszító tartományában leíró csatolt nemlineáris integrálegyenlet rendszert vezettünk le. Az egyenletek infravörös limeszéből reprodukáltuk az elmélet bootstrap  $S$ -mátrixát illetve megmutattuk, hogy egyenleteink az ultraibolya limeszben a várakozásoknak megfelelően egy  $c=3/2$  centrális töltésű szuperkonform térelméletet írnak le.

A [11] publikációban az egyes spinű XXZ Heisenberg lánc teljes véges méret spektrumát leíró kétkomponensű nemlineáris integrálegyenlet rendszert kiterjesztettük úgy, hogy az érvényes legyen az elmélet vonzó és taszító tartományában egyaránt.

Egyenleteink segítségével osztályoztuk az antiferromágneses vákuum fölötti gerjesztéseket leíró Bethe gyökök konfigurációit, illetve az antiferromágneses vákuum Dirac tengerét alkotó ún. 2-sztringek a hipotetikus értéktől való eltéréseit kiszámítottuk gerjesztett állapotok esetére is. Egyenletinkből a spin lánc termodinamikai limeszét leíró konform térelmélet spektrumát is meghatároztuk.

A [15] publikációban a szuper sine-Gordon modell taszító tartományára vonatkozó [12]-beli egyenleteinket kiterjesztettük az elmélet vonzó tartományára, ami a breather állapotok analizisét tette lehetővé. Egyenleteink bizonyos csavart határfeltétek mellett a  $\Phi_{13}$  operátorral perturbált  $N=1$  szuperminimál modellek véges méret spektrumát írják le.

#### Az AdS/CFT korrespondenciával kapcsolatos vizsgálatok:

A [19] publikációban az AdS/CFT termodinamikai Bethe Ansatz egyenleteiből levezetett Y-rendszerhez tartozó T-rendszer egyenleteket oldottuk meg. A T-függvények diszkrét integrálható szoliton egyenleteket az ún. diszkrét Hirota egyenleteket elégítenek ki. Ezeket a rendszer egymást követő auto-Bäcklund transzformációi segítségével oldottuk meg. A megoldás eredményeképpen az AdS/CFT megfeleltetés planáris limeszének megoldása szempontjából fontos TT-, TQ- és QQ- relációkat kaptunk.

A [24] publikációban kihasználva az AdS/CFT dualitást a planáris  $N=4$  szuper Yang-Mills elméletben a Konishi operátor 5-hurok rendű anomális dimenzióját számítottuk ki, úgy hogy a duális húr szigma modell Lüscher formulák segítségével meghatározott véges méret effektusaiban a gyenge csatolási határesetbe mentünk.

A kapott végeredmény helyességét alátámasztja, hogy az a perturbációs számításból várt helyes transzcendentalitási szerkezettel rendelkezik továbbá, hogy a nem kívánatos  $\mu$ -tagokból származó pólusok kiesnek a végeredményből.

Mivel a végeredmény érzékeny az AdS/CFT S-mátrix skalár faktorárnak alakjára, illetve az aszimptotikus Bethe egyenletek (a méretben) exponenciális korrekciójának az alakjára is, ezért a végeredmény helyessége alátámasztja a ezek helyességét is.

A cikkben kiszámított 5-hurok rendű anomális dimenzió fontos ellenőrzési lehetőséget biztosít a közelmúltban javasolt gerjesztett állapoti termodinamikai Bethe Ansatz egyenletek számára.

Alday és Maldacena megmutatták, hogy (aszimptotikusan nagy spin és twist kvantumszámok esetén) az  $N = 4$  SYM elmélet Wilson operátorainak az anomális dimenziója egy skálafüggvény segítségével jellemezhető és ez a függvény azonos az  $O(6)$  nemlineáris szigma model energiasűrűségével (véges töltéssűrűségű állapotokban, ez utóbbi függvényében). Ezt a függvényt számoltuk ki a [25] publikációban, alkalmazva az  $O(6)$  modellre a korábban már kidolgozott integrálegyenlet módszert, illetve nagy sűrűség esetén egyszerűen perturbatíven is számolhatunk. Az eredmények tökéletesen megegyeznek azzal, amit a húr S-mátrixból kapott aszimptotikus Bethe Ansatz egyenletek termodinamikai limeszéből kapunk.