

Szakmai zárójelentés

1. A pályázat munkatervének megfelelően az egyik kutatási terület parabolikus differenciálegyenletek és funkcionál egyenletek, valamint rendszerek vizsgálata volt. Ennek keretében először olyan nemlineáris parabolikus parciális differenciálegyenleteket és rendszereket vizsgáltunk, amelyek az ismeretlen függvénytől "nem lokálisan" függő tagokat is tartalmaznak (pl. azok integrálját tartalmazzák). Fontos alkalmazási terület az olyan diffúzió, ahol a diffúziós együttható a keresett sűrűség integráljától függ. Az ilyen egyenletekre és rendszerekre vonatkozó kezdeti-peremérték feladatok gyenge megoldását tanulmányoztuk a monoton típusú operátorok elméletének felhasználásával. Az általunk kidolgozott módszer lényege megtalálható a Handbook on Evolutionary Differential Equations, Vol. 4, L. Simon: Application of monotone type operators to parabolic and functional parabolic PDE's című fejezetében (Elsevier, 2008, 267-321).

Különböző feltételek teljesülése esetén bebizonyítottuk a gyenge megoldások létezését, továbbá a megoldások korlátosságát, illetve aszimptotikus viselkedését $t \rightarrow \infty$ esetén. Ennek során olyan egyenleteket is tekintettünk, amelyek az ismeretlen függvénytől nem folytonosan függő tagokat is tartalmaznak, illetve nem teljesül az egyenletes parabolikusság feltétele.

Ezt követően egy porózus közegben lejátszódó folyadék áramlásának modelljeiből és polimereket leíró modellekből kiindulva, kétféle differenciálegyenlet rendszert vizsgáltunk. Egyrészt egy nemlineáris parabolikus funkcionál egyenletből és egy egyváltozós funkcionál differenciálegyenletből álló rendszert tanulmányoztunk, másrészt egy parabolikus, egy elliptikus és egy közös differenciálegyenletből álló rendszert, majd ugyanilyen funkcionál differenciálegyenletekből álló rendszert (azaz nem lokális tagokat is tartalmazó rendszert) vizsgáltunk. Ezekben az esetekben is a monoton típusú operátorok elméletének felhasználásával igazoltuk a gyenge megoldások létezését és kvalitatív tulajdonságait.

2. A szemilineáris elliptikus és parabolikus parciális differenciálegyenletekkel, illetve ezek alkalmazásaival kapcsolatban az alábbi eredményeket értük el. A kutatási időszak első felében foglalkoztunk a lángterjedést leíró reakció-diffúzió egyenletekkel (melyek szemilineáris parabolikus típusúak). Elsősorban a lángterjedést leíró reakció-diffúzió egyenletek utazó hullám megoldásait vizsgáltuk. A matematikai probléma egy végtelen intervallumon (egész számegeyenesen) adott peremérték probléma megoldása, melyben a koncentráció és hőmérséklet profilokon (ismeretlen függvények) kívül, a hullám sebessége is ismeretlen. A numerikus megoldáshoz a feladatot egy korlátos intervallumra

vezettük vissza, majd véges differencia módszerrel diszkretizáltuk. A kapott nemlineáris algebrai egyenletrendszer Newton módszerrel oldottuk meg. Numerikusan meghatároztuk az utazó hullám megoldások számát a rendszerben szereplő két legfontosabb paraméter függvényében. Érdekes új eredmény, hogy egy bizonyos paramétertartományban négy megoldás is lehet, azaz egyszerre létezik több stabil megoldás is, amit az eddig vizsgált modellekben nem tapasztaltak. A rendszerben tehát két nyereg-csomó bifurkáció is van, és magasabb kodimenziós bifurkációt is lehet találni. Ezen kutatásaink nyomán a "Focus on Combustion Research" című, égési folyamatok leírásával és modellezésével foglalkozó könyv szerkesztőjétől egy matematikai cikk megírására kaptunk felkérést. Ebben a dolgozatban az egyik sokat vizsgált modell feladattal kapcsolatos matematikai eredményekről adtunk áttekintést. A modellben az égést egy elsőrendű, exoterm reakció adja meg, a hőveszteséget egy lineáris függvény írja le. Az ebben szereplő paraméter (γ), illetve az éghető anyag diffúziós együtthatója L függvényében célszerű vizsgálni a megfelelő reakció-diffúzió rendszer hullám megoldásait és azok sebességét. Erre számos analitikus és numerikus megközelítés ismeretes. Ezeket foglaltuk össze, illetve hasonlítottuk össze a dolgozatban, melyben az áttekintésen kívül új típusú bifurkációs eredmények is szerepelnek. Kétdimenziós tartományban terjedő utazó hullámok stabilitását is vizsgáltuk. Ebben az esetben a síkhullám terjedési irányára merőleges perturbációi is megmaradhatnak. Ez olyan típusú instabilitás, ami a szokásos egy dimenzióban terjedő utazó hullámoknál nem léphet fel. Tehát a szokásos értelemben stabilis hullám egy kétdimenziós tartományban tekintve instabilis lehet. Meg lehet határozni az ilyen típusú instabilitás feltételét. Egyik dolgozatunkban egy lángterjedést leíró modellben numerikusan meghatároztuk, hogy milyen paraméter értékeknél lép fel ez a bifurkáció.

Az elliptikus egyenletekkel kapcsolatban a pozitív megoldások számát tanulmányoztuk. Először olyan peremérték probléma pozitív megoldásainak számát vizsgáltuk, melyben a nemlinearitás $f(u) = u^{-q} + u^p$ alakú, azaz egy negatív és egy pozitív kitevős hatványfüggvény összege, a megoldás pedig egy gömb peremén nulla. Itt a fő probléma a nemlinearitás szingularitása a peremen. A nem-szinguláris egyenletre vonatkozó eredmények természetesen erre az esetre nem alkalmazhatók, de sikerült az ott alkalmazott módszereket a szinguláris esetre is kiterjeszteni. Igazoltuk, hogy a gömb sugarát változtatva az egyenletben nyereg-csomó bifurkáció jelenik meg. Azaz egy kritikus sugár alatti sugarakra két pozitív megoldása van a peremérték problémának, a kritikus sugár felett viszont nincs pozitív megoldása. Ezután az $f(u) = 1 - u^{-q}$ nemlinearitás esetében vizsgáltuk a pozitív megoldások számát. Sikerült megmutatni, hogy a feladatban szereplő paraméterek, illetve az intervallum hosszának függvényében ez 0, 1, vagy 2. Ezzel megoldottunk egy Choi, Lazer és McKenna által 1998-ban felvetett problémát. Ezt az eredményt sikerült kiterjeszteni az $f(u) = u^p - u^{-q}$

nemlinearitás esetére is, mely esetben egy új bizonyítási módszert dolgoztunk ki a hipergeometrikus sor bizonyos tulajdonságainak felhasználásával. Egy dolgozatban foglalkoztunk a nemcsak pozitív, hanem előjelváltó megoldások pontos számával. Azonban ezúttal a feladat (térben) egydimenziós megfelelőjével foglalkoztunk, amikor a peremértékeket változtatva kell a (nemcsak pozitív) megoldások számát meghatározni. A konvex jobboldalakat a Peixoto által bevezetett fokális ekvivalencia szerint sikerült osztályozni.

3. A parciális differenciálegyenletek numerikus megoldási módszereivel kapcsolatban a pályázat alapfeladatának megfelelően a kutatási időszakban azt vizsgáltuk meg, hogy a parabolikus típusú parciális differenciálegyenletek véges differenciás és lineáris véges elemes diszkretizációja során a kvalitatív tulajdonságok hogyan és milyen feltételek mellett őrződnek meg. A legfontosabb ilyen tulajdonságok (a megoldás nemnegativitása, diszkrét maximum elv, maximum normabeli kontraktivitás) esetén szükséges és elégséges feltételeket nyertünk.

Első peremfeltétel mellett a folytonos esetre megvizsgáltuk a különböző kvalitatív tulajdonságok kapcsolatát. A legfontosabb eredmény annak kimutatása volt, hogy a nemnegativitási feltétel és a perem-maximum elvek egymással ekvivalensek és bármelyikükből következik a maximum normabeli kontraktivitás. Megvizsgáltuk a kérdést a numerikus megoldásokra vonatkozóan is. Megmutattuk, hogy bizonyos feltételek teljesülése mellett a kvalitatív tulajdonság kapcsolatrendszere megegyezik a folytonos esetre bizonyítottakkal. Megadtuk a véges elemes, illetve véges differenciás térbeli, illetve egy lépéses teta-módszeres időbeli diszkretizációkra azokat a szükséges és elégséges, illetve elégséges feltételeket, amelyek biztosítják a fenti tulajdonságokat. A rácsoперátorok bevezetésével tetszőleges eset vizsgálható, és megadtuk az egyes kvalitatív tulajdonságok teljesülésének szükséges és elégséges feltételét a rácsoперátorok vonatkozásában.

Újabb eredményeket értünk el az operátor szeletelés módszerében. Egyrészt egy új szeletelési módszert, az iterált szeletelést bevezetve, megvizsgáltuk annak konzisztenciáját és komplex feladatokra való alkalmazhatóságát. Másrészt a hagyományos szeletelési eljárások (szekvenciális, súlyozott, Strang-Marchuk) esetében a szeletelési hiba eltűnésére elégséges feltételeket adtunk, megmutatva, hogy azok nem szükségesek. Megvizsgáltuk az egyes al-feladatokhoz választott numerikus eljárás hatását a globális módszerre. Ebben a témában a Richardson-féle extrapolációt és annak alkalmazhatóságát is megvizsgáltuk. Az irodalomban szereplő (általunk "passzív Richardson-extrapoláció"-nak nevezett) módszer mellett kidolgoztunk egy új, "aktív Richardson-extrapoláció"-nak nevezett módszert, és elemeztük ezek alkalmazhatóságát, modell feladatokon és valós légszennyezési feladatokon egyaránt.

4. A numerikus dinamika területén elért eredményeink a diszkretizációk kvalitatív-geometriai elméletét gazdagítják: az alapkérdés az eredeti és a diszkretizált dinamika jellegzetes tulajdonságainak, kiemelt orbit-konfigurációinak (bifurkálódó egyensúlyi helyzetek és periodikus megoldások, nyeregpont struktúra, utóbbi a kerekítési hibák figyelembevételével etc.) párba állíthatósága.

Igen fontos kutatási terület volt a számítógéppel segített káosz bizonyítások. Ez viszonylag új kutatási terület (az első dolgozat ebben a témában 1995-ben jelent meg), amely a matematikusok és számítógépes szakemberek együttműködését igényli. A pályázatban részt vevő Garay Barna feladata a topológiai vonatkozások kidolgozása volt. Az e témában írt cikkek két újdonságot is tartalmaznak: a globális optimum számítás módszereinek alkalmazása révén maga a számítógép keresi meg a kaotikus tartományt, továbbá a bizonyítás a középérték tétel többdimenziós, Bohl-Miranda-Poincaré-féle változatán alapul, nincs szükség tehát a korábbi bizonyítások lényegi részét képező fokszám-, illetve indexelméleti megfontolásokra. A J. Hubbard 1998-as sejtésének bizonyítását adó cikkel kapcsolatban kiemelendő, hogy a káosz kombinatorikus gazdagságát a konkrét inga konkrét mozgásait leíró köznyelv egyszerű szavaival is sikerült megfogalmazni, a matematikai precizitás száz százalékos megőrzésével.

Végül 3 dolgozat konkrét villamosmérnöki feladatból nőtt ki. Ezek egyike bifurkációs esettanulmány, a másik kompakt invariáns halmazok vonzási és tasztási tulajdonságaival, a harmadik pedig síkbeli kapcsolt/hibrid rendszerek ergodikus tulajdonságaival foglalkozik.