

NEM RUGALMAS SZILÁRD TESTEK INSTABILITÁSI VIZSGÁLATÁNAK LEHETSÉGES MODELLEZÉSE

Kutatási Jelentés (OTKA 60422)

1. Célkitűzés:

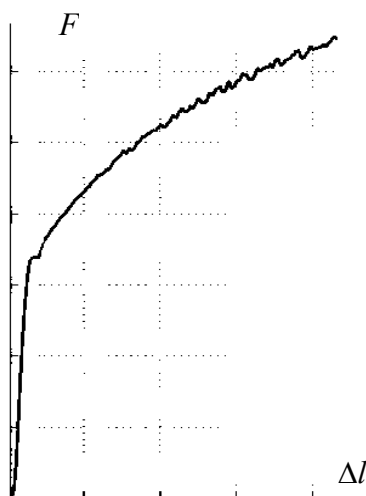
A kutatás az instabilitás lefolyásának nemlineáris vizsgálatát alapul véve a modellezés kérdésére koncentrált. Ugyan a vizsgálatot általában a véges elem módszerrel numerikusan végzik, ennek során azonban gyakran felmerül az a probléma, hogy a számított eredmények függenek a felvett elemek méreteitől. A probléma okát abban találtuk meg, hogy a kontinuumot leíró egyenletrendszerek szinguláris tulajdonságokat mutatnak. Abban az esetben viszont, hogyha a kontinuumot nemlineáris dinamikai rendszernek tekintve a lokalizáció jelensége statikus bifurkációnak értelmezzük, lehetőség van a bifurkációelmélet módszereit felhasználó vizsgálatára. Ez a megközelítés előnyös, mert az analitikus módszer lehetővé teszi a szinguláris viselkedés okának megtalálását, illetve a jelenségről alkotott modell pontosítását.

A kutatás fontosabb eredményei két témában jelentkeztek:

- Portevin-Le Chatelier hatás értelmezése
- gradiens(-függő) anyagmodellek vizsgálata

2. A Portevin-Le Chatelier hatás új értelmezése

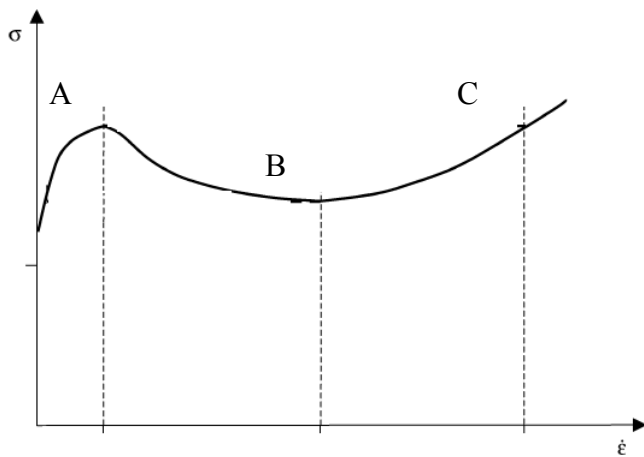
A Portevin-Le Chatelier (PLC) hatás új, a dinamikai rendszerek elméletének felhasználásával történő értelmezését adtuk meg. Ezt az eredményt nemzetközi konferencián (AEPA, Nagoya) előadtuk. Nemzetközi folyóiratban publikáltuk, illetve publikációja folyamatban van. Az alábbiakban összefoglaljuk a területen végzett vizsgálataink lényegét.



1. ábra: Tipikus szakítógörbe PLC hatás esetén

Az 1920-as években publikált dolgozataikban [PORTEVIN & LE CHATELIER, 1923] a szerzők leírták, hogy bizonyos alumíniumötvözetek szakítóvizsgálatánál egyes esetekben öngerjesztett rezgés lépett fel, egyenletes húzás mellett a szakítódiagramként az 1. ábrához hasonló nem sima függvény adódott.

Azt is megfigyelték, hogy az említett oszcillációs jelenség akkor lépett fel, amikor a $v = \dot{\epsilon}$ alakváltozási sebesség növekedése a feszültség csökkenését eredményezte (az A és B pontok között a 2. ábrán).



2. ábra. A $\sigma = \sigma(\dot{\epsilon})$ görbe a PLC hatás esetén

A jelenség magyarázatával, illetve kísérleti vizsgálatával a szakirodalom kiterjedten foglalkozik [KUBIN & ESTRIN, 1985], [RIZZI & HÄHNER, 2004]. Egykristály esetén a mikrostruktúrákra alapozott magyarázatot ad a diszlokációk mozgására épülő "dynamic strain ageing" elmélet [MCCORMICK, 1988], [FRESENGEAS ET AL., 2005].

PORTEVIN-LE CHATELIER hatást (PLC) dinamikus anyagi instabilitásként fogjuk értelmezni. Az anyagi instabilitás definíciójában az anyag valamely S^0 állapotának *Ljapunov* értelemben vett stabilitását fogjuk tekinteni. Azt mondjuk tehát, hogy S^0 állapotban az anyag stabil, ha annak tetszőlegesen kis környezetében marad elegendően kicsiny perturbáció mellett. Nyilvánvaló tehát, hogy a kis perturbációk megengedik a vizsgálat leszűkítését a kis alakváltozás esetére.

2.1 Az alapegyenletek

Miként a legtöbb kontinuum mechanikai munkában, az első lépés az alapegyenletek felírása. Ezeket a kis alakváltozások elméletének megfelelően írjuk fel:

$$\dot{\epsilon}_{lm} = v_{lm} \quad (1)$$

kinematikai egyenlet, a

$$\begin{aligned}\rho \dot{v}_j &= \sigma_{jk,k} \\ \sigma_{jk} &= \sigma_{kj}\end{aligned}\quad (2)$$

Cauchy-féle mozgásegyenletek, valamint a

$$\sigma_{jk,k} = K_{jklm}^1 \varepsilon_{lm} + K_{jklm}^2 \dot{\varepsilon}_{lm} \quad (3)$$

konstitutív egyenlet. Az (1), (2), (3) egyenletekben a szokásos jelöléseket alkalmaztuk:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ij} &- \text{alakváltozási tenzor,} & v_{ij} &- \text{alakváltozási sebesség,} \\ \sigma_{ij} &- \text{feszültségtenzor,} & K_{jklm}^1, K_{jklm}^2 &- \text{az anyagtól függő állandó,} \\ v_i &- \text{sebességmező,} & i, j, k, l, m, \dots &- \text{indexek, értékük 1,2,3.}\end{aligned}$$

A konstitutív egyenlet állandói a

$$K_{jklm}^1 = \frac{1}{2}(K_{jklm} + K_{jkml}) \quad \text{és} \quad K_{jklm}^2 = \frac{1}{2}(L_{jklm} + L_{jkml}). \quad (4)$$

alakban is felírhatók. Így a (4) képletekben szereplő K_{jklm} , L_{jklm} konstansok felhasználásával a sebességmezőn két differenciáloperátor definiálható, ezek a

$$\begin{aligned}\hat{K}_{jk} v_k &:= K_{jklm} \frac{\partial^2}{\partial x_m \partial x_l} v_k, \\ \hat{L}_{jk} v_k &:= L_{jklm} \frac{\partial^2}{\partial x_m \partial x_l} \dot{v}_k.\end{aligned}\quad (5)$$

Legyen a vizsgált S^0 állapot a

$$\sigma_k^0, \quad \varepsilon_k^0, \quad v_k^0 \quad (6)$$

értékekkel adott. Tetszőleges kis perturbációk alkalmazásával

$$\begin{aligned}\sigma_k &= \sigma_k^0 + \Delta \sigma_k, \\ \varepsilon_k &= \varepsilon_k^0 + \Delta \varepsilon_k, \\ v_k &= v_k^0 + \Delta v_k.\end{aligned}\quad (7)$$

Az (1), (2), (3) és (5) képletekből a

$$\rho \ddot{v}_j = \hat{K}_{jk} v_k + \hat{L}_{jk} \dot{v}_k \quad (8)$$

operátoregyenlet következik. Ha a (7)-nek megfelelően beírjuk a perturbációkat a

$$\rho(\ddot{v}_j^0 + \Delta \ddot{v}_j) = \hat{K}_{jk}(v_k^0 + \Delta v_k) + \hat{L}_{jk}(\dot{v}_k^0 + \Delta \dot{v}_k)$$

adódik. Mivel (6) kielégíti az (1), (2), (3) egyenleteket,

$$\rho \ddot{v}_j^0 = \hat{K}_{jk} v_k^0 + \hat{L}_{jk} \dot{v}_k^0$$

triviálisan fennáll. Így a perturbációkra a

$$\rho \Delta \ddot{v}_j = \hat{K}_{jk} \Delta v_k + \hat{L}_{jk} \Delta \dot{v}_k . \quad (9)$$

egyenlet adódik. Vezessük be az

$$[y_1 \ y_2 \ y_3 \ y_4 \ y_5 \ y_6] = [\Delta v_1 \ \Delta v_2 \ \Delta v_3 \ \Delta \dot{v}_1 \ \Delta \dot{v}_2 \ \Delta \dot{v}_3]$$

új változókból alkotott vektort. Ezzel e (9) egyenlet alakja

$$\begin{aligned} \dot{y}_k &= y_{k+3}, \\ \dot{y}_{j+3} &= \frac{1}{\rho} (\hat{K}_{jk} y_k + \hat{L}_{jk} y_{k+3}) \end{aligned} \quad (10)$$

egy dinamikai rendszert definiál a homogén peremfeltételnek megfelelő perturbáló sebességmezőn. A (10) karakterisztikus egyenlete

$$\begin{aligned} \lambda y_k &= y_{k+3}, \\ \lambda y_{j+3} &= \frac{1}{\rho} (\hat{K}_{jk} y_k + \hat{L}_{jk} y_{k+3}) \end{aligned} \quad (11)$$

Mivel (11) egy parciális differenciálegyenlet-rendszer, amelyet homogén peremfeltételek mellett kell megoldani, az analitikus vizsgálat általános esetben nem folytatható le. Két alapvető egyszerűsítési lehetőség adódik. Megtehető speciális perturbációk alkalmazásával (11) algebrai egyenletekké alakítása, illetve korlátozható a vizsgálat egytengelyű esetre.

2.2 A stabilitási feltételek

Az egytengelyű esetben egy l_0 méretű kontinuumot vizsgálunk. Ekkor a (11) egyenlet így alakul

$$\begin{aligned} \lambda y_1 &= y_4, \\ \lambda y_4 &= \frac{K_{1111}}{\rho} \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1^2} + \frac{L_{1111}}{\rho} \frac{\partial^2 y_4}{\partial x_1^2}, \end{aligned}$$

illetve y_4 -et az elsőből a második egyenletbe helyettesítve

$$\lambda^2 y_1 - \frac{K_{1111}}{\rho} \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1^2} - \lambda \frac{L_{1111}}{\rho} \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1^2} = 0. \quad (12)$$

A (10) differenciálegyenlethez tartozó homogén peremfeltétel

$$y_1(0) = y_4(0) = y_1(l^0) = y_4(l^0) = 0.$$

Ennek megfelelően a sajátfüggvények az

$$y_1(x_1) = C \exp(i\alpha x) \quad (13)$$

alakban kereshetők. Ha (13)-at a (12)-be behelyettesítjük, akkor a

$$\lambda^2 + \lambda \frac{L_{1111}}{\rho} \alpha^2 + \frac{K_{1111}}{\rho} \alpha^2 = 0 \quad (14)$$

egyenletet kapjuk a λ sajátértékekre. A peremfeltételekből

$$\begin{aligned} 0 &= A(t)\cos(0) + B(t)\sin(0), \\ 0 &= A(t)\cos(\alpha l^0) + B(t)\sin(\alpha l^0) \end{aligned}$$

adódik, ebből pedig az

$$\alpha_k = \frac{k\pi}{l^0} \quad (15)$$

következik. *Ljapunov* indirekt módszere szerint az S^0 állapot stabilitása a (14) egyenlet λ megoldásainak valós részétől függ. A (14) és a (15) képletekből λ kifejezhető

$$\lambda_{k1,2} = \frac{-b\alpha_k^2 \pm \sqrt{b^2\alpha_k^4 - 4a\alpha_k^2}}{2}, \quad (16)$$

ahol az

$$a = \frac{K_{1111}}{\rho} \quad \text{és} \quad b = \frac{L_{1111}}{\rho} \quad (17)$$

egyszerűsítő jelöléseket alkalmaztuk.

A dinamikai rendszerek elméletéből adódó stabilitási esetek a következők: az S^0 állapot

- *stabil*, ha minden sajátértékre $Re\lambda_j < 0$,
- *instabil*, ha létezik legalább egy olyan λ_u sajátérték, amelyre $Re\lambda_u > 0$,
- *a stabilitás határán van*, ha létezik legalább egy λ_c kritikus sajátérték, amelyre $Re\lambda_c = 0$,
továbbá minden más ($j \neq c$) sajátértékre $Re\lambda_j < 0$.

2.3 A stabilitásvesztés típusai

A stabilitási határ, és ennek megfelelően a stabilitásvesztés, két típusa különíthető el. Az egyik esetben (SB – statikus bifurkáció) a stabilitási határon mind a valós, mind a képzetes rész nulla:

$$(SB): \quad Re\lambda_c = 0, \quad Im\lambda_c = 0.$$

A másik lehetőség (DB – dinamikus bifurkáció) az, amikor a kritikus sajátérték képzetes része nem nulla:

$$(DB): \quad Re\lambda_c = 0, \quad Im\lambda_c \neq 0.$$

Vizsgáljuk meg, hogy a tárgyalt egytengelyű esetben melyek az egyes stabilitásvesztési típusok feltételei. A (16) egyenletből az SB szükséges feltétele

$$-b\alpha_k^2 \pm \sqrt{b^2\alpha_k^4 - 4a\alpha_k^2} = 0 \quad (18)$$

vagyis (17) felhasználásával

$$K_{1111} = 0,$$

ami a klasszikus lokalizációs feltétellel azonos.

A DB szükséges feltétele pedig az

$$L_{1111} = 0.$$

Vizsgáljuk most meg a (18) baloldalán álló gyök alatti

$$b^2\alpha_k^4 - 4a\alpha_k^2 \quad (19)$$

kifejezést. Hogyha a (15) és a (17) képleteket behelyettesítjük (19)-be a $k = 1$ első kritikus sajátértékhez tartozó esetben

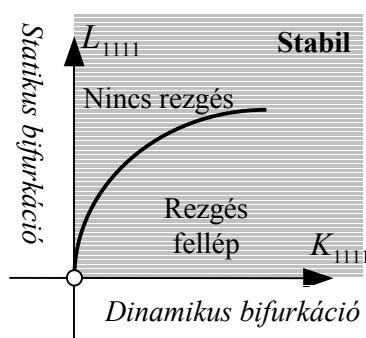
$$L_{1111}^2 \left(\frac{\pi}{l^0}\right)^4 - 4K_{1111} \left(\frac{\pi}{l^0}\right)^2 = 0,$$

azaz

$$K_{1111} = \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{l^0}\right)^2 L_{1111}^2 \quad (20)$$

adódik.

A (20) görbét, a stabil tartományt, illetve a stabilitási határokat a 3. ábrán rajzoltuk meg.



3. ábra. Stabilitási térkép

Itt jól látszik, hogy öngerjesztett rezgés mellett fellépő instabil viselkedés az $L_{1111} < 0$ esetben várható. Amikor $L_{1111} > 0$, lehetséges rezgés, de ez csillapodó tranziens jellegű. A két eset közötti átmenet pedig éppen az $L_{1111} = 0$ dinamikus bifurkációs feltétel. Ez megegyezik azokkal a feltételekkel, amelyeknél a PLC jelenség fellép, azaz a két jelenség azonosnak tekinthető.

2.4 Összefoglalás, a további kutatás iránya

A Portevin-Le Chatlier hatás vizsgálatában megismertük a szakirodalom két eltérő megközelítési módját. Az első (makroszkopikus) tárgyalásmód nagyban hasonlít az általunk a fentiekben leírt, a dinamikai rendszerek elméletére alapozott vizsgálathoz. Emellett azonban ismert a „dynamic strain ageing” névvel jelzett, a diszlokációk mozgására épített magyarázat. Eddigi kutatásaink arra vezettek, hogy hasznos volna valamiféle egyesítés, illetve a két elmélet összevetése. Kutatásainkat kiegészítettük termodinamikai megfontolások figyelembevételével, felvetődött a második főtételezés és a negatív rate-dependence jelenség viszonya, illetve az az igény, hogy a kapcsolatot részletesen ki kell vizsgálni.

3. Gradiens anyagmodellek vizsgálata

A kutatás másik része a gradiens(-függő) anyagmodellek vizsgálata. Az ilyen anyagokat alkalmaztunk az erek egyszerű biomechanikai modellezéseiben egyfajta mechanikai megokolását adva a belgyógyászati, illetve szemészeti szakorvosi gyakorlatban alapvető szemfenéki érvizsgálatának.

Kutatásaink fontos eredménye a dinamikai rendszerek stabilitási kritériumainak a variációs elvekhez kapcsolható alkalmazási lehetőségeinek vizsgálata. Ezen a területen a szilárd kontinuumok feltételes variációs elv felhasználásával történő modellezésére adtunk példát az anyag stabilitásának feltételezése mellett (pl. Drucker posztulátum). Az anyagmodellezésben egyszerre szerepeltetjük a feltételes Lagrange deriváltat és (a dinamikai rendszerek körében használt) Ljapunov stabilitás feltételét. Az alkalmazott módszer lépései hasonlóak a 2.1-2.3 részekben leírtakhoz, természetesen a kontinuum alapegyenleteit meg kellett változtatni, továbbá felhasználjuk a feltételes Lagrange egyenletnek a [BÉDA & BÉDA, 2007], illetve [BÉDA & BÉDA, 2008] szerinti értelmezését.

Az elért eredmények a képlékeny keményedés (plastic hardening) és a (Ljapunov) stabilitás összefüggésére vonatkoztak, megmutatják, hogy miként kell a konstitutív egyenletet egy stabil és a Drucker posztulátumot teljesítő anyag esetén felírni, azaz milyen alakban kereshetők a gradiens anyagot modellező egyenletek. Megjegyezzük, hogy az ebben a témában elért eredmények publikálása még folyik, több külföldön publikációra benyújtott cikk áll bíráló alatt.

4. Irodalom

A. PORTEVIN, F. LE CHATELIER, C. R. (1923) *Acad. Sci. Paris* 176 (1923) 507.

LP. KUBIN, Y. ESTRIN, (1985) The PORTEVIN–LE CHATELIER effect in deformation with constant stress rate. *Acta Metall.* 33, 397–407.

- RIZZI, E., HÄHNER, P., (2004) On the PORTEVIN–LE CHATELIER effect: theoretical modeling and numerical results. *Int. J. Plasticity* 20, 121–165.
- MCCORMICK, P.G., (1988) Theory of flow localisation due to dynamic strain ageing. *Acta Metall.* 36, 3061–3067.
- C. FRESSENGEAS, A.J. BEAUDOIN, M. LEBYODKIN, L.P. KUBIN, Y. ESTRIN, (2005) Dynamic strain aging: A coupled dislocation—Solute dynamic model, *Materials Science and Engineering A* 400–401, 226–230
- BÉDA P.B., BÉDA GY., (2008) Conditional Lagrange derivative in the constitutive equation of plastic bodies, *Mechanics and Mechanisms of Finite Plastic Deformation, CD Proceedings of PLASTICITY '08*. (Eds.: Akhtar S. Khan & Babak Farrokh) NEAT PRESS, Fulton, 2008
- BÉDA P.B., BÉDA GY., (2007) Conditional Lagrange derivative and its application, *PAMM*, Vol 7, (2007) No: 1 pp 2090007-2090008