WIRTH LAJOS

Dinamók a Nirvánából

A nulla története

„...most zérus vagy szám nélkül.
Én különb ember vagyok náladnál:
én legalább bolond vagyok,
te semmi vagy."
Shakespeare: Lear király
(Vörösmarty M. ford.)

Honnan ered a nulla?

„A legfontosabb számjegy a nulla. Zseniális dolog volt hasznosítani a semmit, nevet adva és jelölést találva neki." – írja Van Der Waerden az Egy tudomány ébredése című könyvében, és idézi Halsted múlt századi matematikatörténészt, aki szerint: „ It is like coining the Nirvana into dynamos." (Olyan ez, mintha dinamókat gyártanának a Nirvánából.) Egy bizonyos: a nulla nem semmi, inkább valami hasonló mint a fizikai vákuum, még akkor is, ha a neve számos nyelvben azt jelenti, hogy lyuk, üres hely, semmi. A „honnan ered" kérdésre kétféle értelemben is fölvethető: egyrészt, hogy földrajzilag hol „fedezték fel", másrészt hogy miért volt rá szükség?

A nulla története elválaszthatatlan a helyi értékes számrendszerek történetétől, mai tudomásunk szerint pályafutása az Óvilágban az óbabiloni birodalomban kezdődött. A babiloniak hatvanas helyi értékes számrendszert használtak, és ahhoz, hogy a számokat ékírásos jeleikkel egyértelműen tudják leírni, szükség volt annak valamilyen egyezményes jelzésére, ha az alapszám valamelyik hatványa hiányzott. A hatvanas számrendszert az ékírással együtt a babiloniak a suméroktól vették át, bár eredetileg a suméroknak még nem volt következetes helyiértékrendszerük 60 valamennyi hatványára. Ez utóbbi már babiloni „találmány". Az ékírásos számjegyek közül az 1-nek és a 10-nek van egyetlen önálló jele, a többi számjegyet ezek kombinációjaként állították elő. A korszak kutatóit sokat foglalkoztatta (foglalkoztatja) az a három kérdés, hogy:

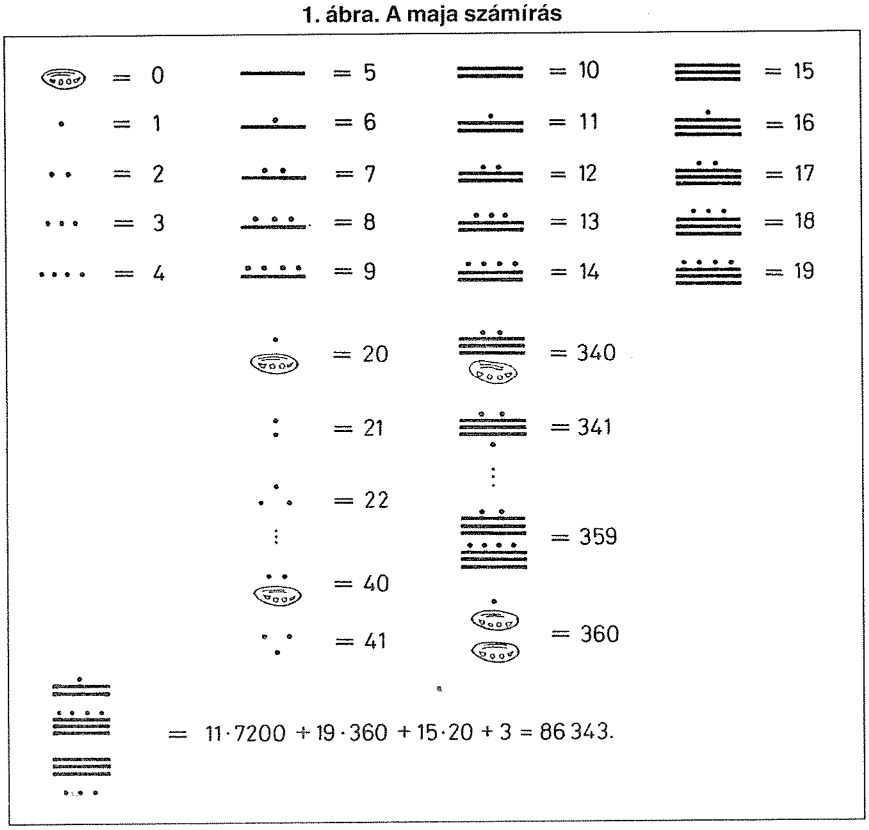
1. Miért éppen a 60-at választották az 1 és 10 után következő lépcsőfoknak?
2. Hogyan jutott eszükbe a hatvanat „nagy egységnek" tekinteni, és az 1 jelével ábrázolni?
3. Hogyan jutott eszükbe a törteket is 60-as számrendszerben írni, és az 1/60-ot „kis egység"-ként felfogni?

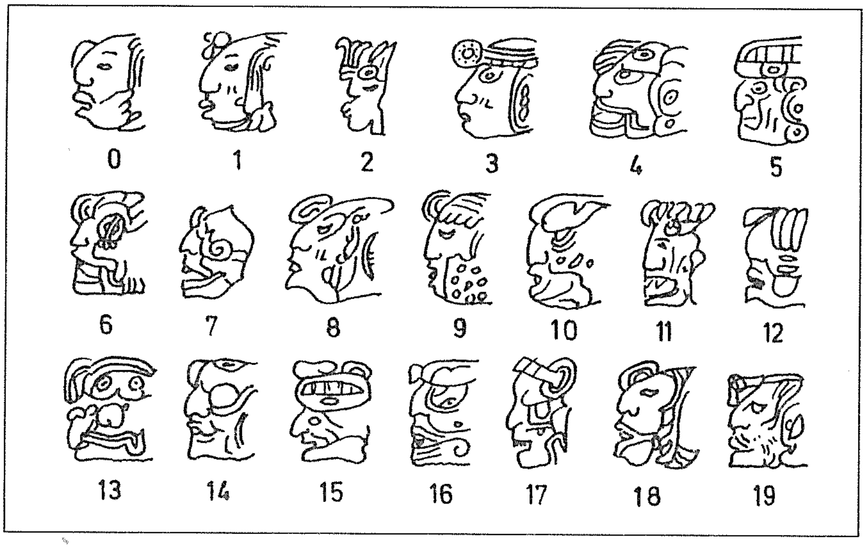
Bár több, egymásnak ellentmondó hipotézis létezik, valószínűsíthető, hogy az ügy hátterében a különböző mértékegységek átválthatósága húzódik meg. A 60-nak elég nagyszámú osztója van, ezért egy nagyobb egység fele, harmada, negyede, ötöde, hatoda, tizede, tizenkettede, tizenötöde, huszada, harmincada a kisebb egységben kifejezve egyaránt egész számmal adható meg, ami igen előnyös.

Az ie. 1800–1500 közötti évszázadokból nagy mennyiségű agyagtábla őrzött meg matematikai szövegeket és csillagászati táblázatokat, de ezek között eddig egyetlen egy olyan nem akadt, amelyen külön jelet alkalmaztak volna a hiányzó helyi értékek jelölésére. Ahova mi mai írásmódunkkal nullát írnánk, a táblák készítői egyszerűen üres helyközt hagytak. Egyes kutatók eltérően vélekednek arról, hogy ez az írásmód mennyire egyértelmű, az minden esetre tény, hogy az ábrázolt számok valódi értékének megállapításában komoly szerep jut a szövegkörnyezetnek. Annál is inkább, mert az óbabiloni matematikusok nem alkalmaztak „hatvanados veszszőt", ami megmutatta volna, hogy hol kezdődik a szám tört része, és az üres helyekkel a számok végén álló esetleges nullákat sem lehetett ábrázolni.

A babiloni matematikai szövegek másik nagy csoportja a Szeleükidák korából, az időszámításunk kezdetét megelőző három évszázadból maradt ránk. Ezekben már található nullát ábrázoló jel, de csak a szám belsejében, a számok végén álló nullákat továbbra sem jelölték. Nullaként azt a jelet alkalmazták, amely korábban a

1. ábra. A maja számírás





2. ábra. A maja fejszámok

mondatok egymástól való elválasztására szolgált. Gyakran szerepelnek olyasfajta számok, amelyeket a maihoz közelálló jelöléssel 1; •; 20, vagy 1; •; •; 20, alakban írhatnánk és előfordulnak •; 20 alakú számok is, de ezidáig egyetlen példa sem akadt a 20; • vagy hasonló írásmódra. Jelenleg nem válaszolható meg az a kérdés, hogy mikor jelent meg a „babiloni nulla", de a kor kutatói megegyeznek abban, hogy ie. 1500 előtt egyáltalán nem létezett, a Szeleukida-korban pedig már általános volt a használata. Egy ie. 500 körül készített négyzettáblázatban négy esetben fordul elő a $\underset{<}{<}$ jel (két egymás fölé írt 10-es) nulla gyanánt, egy helyen pedig hiányzik. A legrégebbi előfordulását ennek a jelnek ie. 700 körülre datálják. Annak okát, hogy a helyközt (ami végül is a nulla szerepét töltötte be) csak ilyen nagy késéssel töltötték be külön jellel, valószínűleg abban kell keresni, hogy a hatvanas számrendszerben a nullára viszonylag ritkán van szükség.

A görög nulla

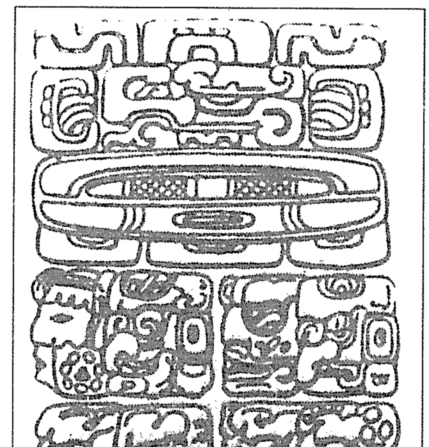
A görögök sok mindent átvettek a babiloniak csillagászati tudományából, egyebek mellett a táblázatokat és ezekkel együtt a hatvanas számrendszer használatát a csillagászati-asztrológiai számításokban. Az ékírásos babiloni számjegyeket betűkkel helyettesítették, nulla gyanánt pedig egy speciális jelet vezettek be, ez utóbbi pontos megfelelője a babiloni nullának, nem betű vagy szótag, hanem speciális elválasztó jel. Egy ie. II. századi papíruszon (Lund-papirusz) a $\bar{o}$ más csillagászati kéziratokban pedig $\bar{o}$ $\bar{o}$ $\bar{o}$ jelölés szerepel. A bizánci korból maradtak fenn olyan görög nyelvű kéziratok, közöttük Ptolemaiosz Almagest-jének másolata, amelyekben kis kör jelöli a nullát. Vannak olyan nézetek, hogy ez az οὐδεγ (oüdén = semmi) szó kezdőbetűje lenne, de ez mások szerint nem valószínű, mert az o betű (a görög omikron), rendelkezett számértékkel, még-hozzá 70-et ért a régi alfabetikus számrendszerben.

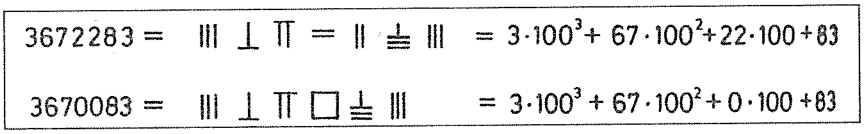
India a teljes tizes alapú helyiértékes számrendszer hazája (?)

Általánosan elfogadott nézet, hogy a mai hindu-arab számjegyeink ősei, a teljes tizes alapú helyiértékes számrendszerrel együtt Indiában alakultak ki. Az indiai matematika első írásos emlékei az ie. VII.–V. századból származnak. Kezdetben többféle, nem helyiértékes számrendszer létezett, és az i.sz. II. századtól kezdve egyes számjegy-rendszerekben az 1-től 9-ig terjedő számoknak külön jele volt. Ez az indiai aritmetika egyik jellemző és fontos tulajdonsága, ez volt az előfeltétele a tizes alapú helyiértékes számrendszer kialakulásának. A jeleket e számok leírására használták, a gyakorlati számításokat egy táblán kauri-kagylók segítségével végezték. Az egyes számjegyeket a tábla megfelelő oszlopaiban adott számú hosszúkás kagylóval (anka rási) ábrázolták, a nullát pedig egy-egy kerek kagylóval (szúnja-rási). Egyelőre nyitott kérdés, hogy a kerek kagylók használata időben megelőzte-e a nullának körrel való jelölését, vagy éppen fordítva történt. A számokat jegyenként olvasták ki, a kisebbtől a nagyobb helyiértékek felé haladva, a be nem töltött helyiértéket a „lyuk" névvel illették. Varáhamihira szerint a nullát jelentő szúnja szót szóbeli számolásoknál már az V. században használták. A számok helyiértékes írásmódjára – naptári adatokkal kapcsolatban – a VI. századból maradtak fenn adatok, de ezek a nulla jelét nem tartalmazzák. Viszont Kambodzsában és Indonéziában vannak olyan 683-ból, illetve 686-ból származó feliratok, amelyeken már szerepel a nulla: mind körrel, mind ponttal ábrázolva. Gautama Sziddhárta, aki 718 és 729 között Kínában az Asztronómiai Hivatalban dolgozott, egy 725-ben készült csillagászati és asztrológiai kéziratban azt javasolta, hogy az abakusz oszlopaiban levő üres helyeket ponttal kell ábrázolni. India területén a Gvalijarban látható, és 876-ból származó felirat őrizte meg az első olyan számot amelyben a nulla jele (itt kis körrel ábrázolva) szerepel.

Arra vonatkozóan ismét csak megoszlik a tudománytörténészek véleménye, hogy a nulla külföldről került-e Indiába, vagy pedig az indiaiak újra felfedezték.

3. ábra.
Dátum Quiriguából, az 501. év május 18-ának felel meg





4. ábra. A kínai számírás (az alsó sorban látható a kínai nulla jele). Az 1–4. ábrák Sain Márton: Nincs királyi út (Gondolat) c. munkájából valók.

Vannak akik úgy vélik, hogy a görög csillagászati munkák tanulmányozása eredményeként vették át az azokban szereplő „hézagjelet", és görög hatást vélnek felfedezni abban is, hogy az 537 körül élt Dzsinabhadra Gani megfordította a helyiértékek sorrendjét a számírásban. (A „görög kapcsolatot" egyébként sok forrás igazolja.) Ám az ugyancsak ismert kölcsönhatás az indiai és a kínai kultúra között, másrészt azok a közlések, amelyek a helyiérték-rendszer szóbeli használatáról, és a nulla jelének Kambodzsában és Indonéziában történt korai alkalmazásáról adnak hírt, legalább ilyen erővel sugallják, hogy a nulla jele India és Kína kultúrájának találkozásából született. Erre vall a számpálcikákkal való kínai számábrázolás tizes alapú, helyiértékes jellege is.

Import vagy hazai áru a kínai nulla?

Kínában az első, számolásra utaló jelek az ie. XIV–XI. századból származó – jósláshoz használt – csontokon, valamint az ie. X–III. századból való cserépedényeken, bronztárgyakon és pénzeken maradtak fenn. Már az ie. III. században kialakultak azok az írásjegyek amelyeket a számok lejegyzésére használtak, és használnak ma is, szöveg közben szereplő számok esetében. Legalább egy évszázaddal korábbi, de lehet, hogy még régebbi eredetű a számoló pálcikák alkalmazása. A számpálcikás számrendszer a tizes alapú helyiértékes rendszerek közül a legrégibb, mint ahogy a babiloni a legrégibb hatvanas helyiértékes rendszer. A kínai matematikusok és számoló mesterek hasonlóan használták a pálcikákat az abakuszon, mint az indiaiak a kauri-kagylókat, de a számjegyek ábrázolásánál a pálcikák helyzetének is szerepe volt, a nullát pedig nem jelölték. Az írásbeli helyiértékes rendszer tökéletesítését föltehetően az hátráltatta a kínaiaknál, hogy a számításokat még a papír feltalálása után is számolótáblán végezték. (Bár kétségtelenül elképesztő virtuozitással.) A tökéletesítésen a nulla jelének bevezetését és következetes használatát értjük, mivel kapcsolatban ismét csak azt mondhatjuk – remélve, hogy az Olvasó megértéssel viseltetik iránta –, hogy egyenértékűnek ítélhető, egymással szöges ellentétben álló hipotézisek vannak arról, hogy hogyan került a nulla jele a kínai matematikába. A külső eredetet látszik alátámasztani a már korábban említett Gautama Sziddhárta munkája (akit Kínában Csü-tan Hszi-ta néven ismertek), ezt a nézetet vallja A. P. Juskevics és B. L. Van der Waerden is, hogy csak két nagy nevet említsünk. (Ők H. Freudenthal hipotézisét fogadják el.)

Másrészt, mint arra E. J. Berezkina, J. K. Needham és több kínai tudós felhívta a figyelmet, a kínai aritmetikában a helyiértékek sorrendje, mindig a ma használatosnak megfelelő volt, és a számolótáblán a törteket is a mai módon jelölték (felül a számláló, alul a nevező). A Tang-dinasztia története és A Szung-dinasztia története című munkáknak a naptárakkal kapcsolatos fejezetei arról tanúskodnak, hogy a nulla kezdetben □ alakú jel volt (ami megfelel a számolótábla üres helyének, ha ábrázolni akarjuk), és ebből alakult ki a 0 jel, amit már a Da min című kalendáriumban láthatunk.

Ilyen módon a Freudenthal-féle hipotézis minden pontjával azonos értékű „ellenpont" állítható szembe. Nyomtatásban a nulla először 1247-ben jelent meg – körrel ábrázolva –, mégpedig Csin Csiu-sao Kilenc könyv a matematikáról című munkájában.

Olyan esetben, amikor számításokat írtak le, a kínaiak többnyire a számolópálcikáknak megfelelő számjegyeket használtak. Jóval később olyan feljegyzések, számítások is megjelentek, ahol írásjegyek jelölték a számjegyeket és egy kis kör a nullát.

Egy kis kitérő Amerikába

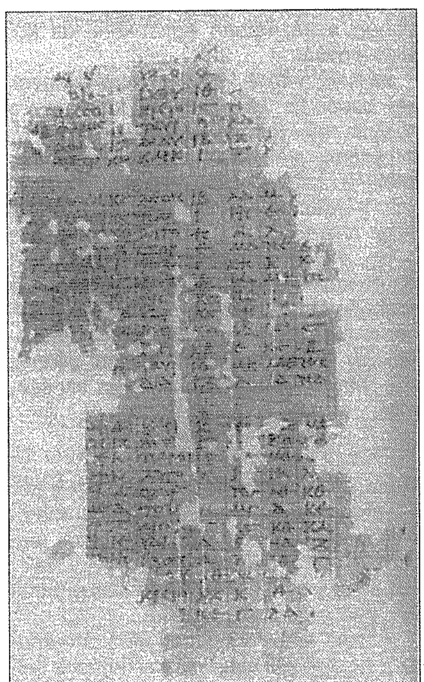
Ha a rendelkezésünkre álló adatok alapján ma nem is tudunk határozott választ adni arra a kérdésre, hogy a babiloni, indiai, kínai helyiértékes számrendszerekben a nulla fogalma és jelölése egymástól függetlenül alakult-e ki, vagy átvétel történt, úgy tűnik, hogy a prioritás kérdését nem érdemes firtatni. Egy érdekes párhuzam arra utal, hogy a nulla megjelenése a helyiértékes számrendszerekben szükségszerű, mint ahogy egy olyan kultúrában, ahol társadalmi szükséglet a matematika művelése, meg kell jelenjen a helyiérték elve. Az említett három ókori kultúrában fejlett volt a csillagászat és a naptárkészítés, ami részben a földművelés, részben a vallás igényeivel függött össze. Ugyanez mondható el az amerikai földrész legfejlettebb indián kultúrájáról, a majákéról is. A maják jelentős csillagászati ismeretekkel rendelkeztek, és érdekes felépítésű naptáruk a ma használatos Gergely-naptárnál is pontosabb volt. A dátumok és számok lejegyzésére a huszas alapú teljes helyiértékes számrendszert alkalmazták, és kétféle számírási rendszerük volt. Az egyikben pontokból és 5 egységet érő vonalakból álló jelek alkották a számjegyeket 1-től 19-ig, míg a nullát egy speciális, kagyló alakú jellel ábrázolták. Volt egy másik, stilizált emberfejeket ábrázoló, hieroglifikus számjegy-rendszerük is, az ilyen fejszámjegyekkel is a helyiérték elvét alkalmazva ábrázolták a számokat. A kis számú maja kéziratban, ami a gondos pusztítás után megmaradt, főként ezekkel találkozunk.

A maja naptárnak volt egy érdekes tulajdonsága, ami azt eredményezte, hogy a nulla a majáknál sorszám funkcióját is betölthette. A húsznapos hónap napjait sorszámmal látták el, de nem az 1–20, hanem a 0–19 számjegyeket rendelték az egyes napokhoz. Lehet, hogy ennek (főként a fej-számjegyeknél) írástechnikai oka volt, de erre vonatkozó hipotézisekbe nem kívánok bocsátkozni.

Honnan tudjuk, hogy a régi görögök tudták?

Visszatérve az Óvilágba kövessük tovább a nulla útját – az arab-iszlám világban. Az arab tudósoknak köszönhető, hogy az ókori tudomány számos eredménye fennmaradt az utókor számára, és nekik köszönhető

5. ábra. A Lund-papírusz



végső soron az is, hogy az indiai tizes helyiértékes számrendszer, valamint az indiai számjegyek viszonylag gyorsan eljutottak nyugat felé. A szír származású Szeverusz Szeboht azt írta az indiaikról: „Számításmódjuk, amelyhez kilenc jelet használnak, minden dicséretet megérdemel." Azt, hogy miért említ kilenc jelet, nem tudjuk. Lehetséges, hogy olyan írásmóddal ismerkedett meg, ahol a nullát üres hely jelölte, de az is elképzelhető, hogy a nullát egyszerűen nem tekintette számnak. Ez utóbbi föltevést valószínűsíti, hogy jóval később al-Hvarizmi is kilenc jelről beszélt, holott ő már használta a nullát. Mielőtt az indiai számok elterjedtek volna az arab-iszlám tudósok között, a görögökéhez hasonló alfabetikus számírást alkalmaztak, és az ebből az időszakból származó kéziratokban $\overline{o}$ is hasonló alakú jelek szolgáltak nulla gyanánt.

Valószínű, hogy az első arab nyelvű könyv, amelyben a tizes helyiértékes elven és a nulla jelének használatán alapuló számrendszert alkalmazták, Abu Musza Dzsabir ibn Hajján Mérgek könyve (Kitab el-szumún) című munkája volt, amelynek szerzője 776 körül élt. Úgy tudjuk, hogy az indiai számolási módot és a teljes tizes helyiértékes számrendszert részletesen a bagdadi tudományos iskola első jelentős képviselője, a 780 és 850 között élt Muhammad ibn Musza al-Hvárizmi ismertette elsőként az iszlám–arab világban. Aritmetikai művéről – bár annak eredeti szövege nem maradt fenn – tudjuk, hogy nagyon jelentős hatása volt az arabok uralta területeken, később pedig latin nyelvű fordításainak és átdolgozásainak Európában. Sajnos, latin nyelvű változat is csak egy ismeretes és az sem igazi fordítás, inkább ismertetés, bő kivonat, amit ráadásul nem is fejeztek be. Ebben a kéziratban egyébként kis kör jelöli a nullát.

Az iszlám–arab világban a számjegyek két csoportja alakult ki, a keleti és a nyugati arab (gobar) számjegyeké. A keleti számjegyek között eleinte egy kis kör jelölte a nullát, az ötöst pedig egy fordított latin b betűhöz hasonló jegy. Később az ötöst kezdték körrel jelölni, a nulla jele pedig a pont lett. A gobar-számjegyek között kezdetben nem volt helypótló jel, e számjegyek helyiértékét pontokkal jelölték, amiket a számjegy fölé írtak. A tizeseket egy, a százasokat kettő pont jelezte, stb. (Mai számjegyeinkkel, ilyen elv szerint a

$$405 = \ddot{4}5, \text{ a } 450 = \ddot{4}\dot{5}$$

lenne.) Később nulla gyanánt a kis kör használata nyert polgárjogot. Az új számjegyeket tartalmazó dokumentumok legkorábbi előfordulása 873–874-ből való, ebben szerepel a muzulmán időszámítás 260 éve, pont alakú nullával.

A tizes alapú helyiértékes számrendszer mellett csillagászati számítások céljaira az arab matematikusok a babiloni eredetű, hatvanas alapú számrendszert is továbbfejlesztették az egészek és törtek hatvanas rendszerévé (Ptolemaiosznál az egészek decimális alakban szerepeltek). Ebben 1-től 59-ig egy vagy két betűből álló jelek ábrázolták a számjegyeket (dzsumal-számok), a nullát pedig egy – feltehetően az alexandriai görög papiruszokról származó – $\overline{\sigma}$ alakú jel jelölte, amely ez idők során átalakult és a cirill-betűs írás keményjeléhez vált hasonlatossá.

Ezek meg hogy kerültek ide?

Bizáncban a XI. században kezdtek megjelenni a hindu–arab számjegyek, és a keleti és nyugati számjegyek egyaránt előfordultak. Egy 1253-as kéziratban nyugati arab számjegyek találhatók, Maximosz Planudész (1260–1310) szerzetes pedig, amikor egyik aritmetika könyvében ismertette az indiai számjegyeket, a keleti arab jeleket alkalmazta. Ezek között szerepelt egy, amelyet Planudész cifra-nak (τ ζ ι φ ρ α) nevezett, és azt írta róla, hogy „a semmit jelöli".

Európa felzárkózik – a Kelethez

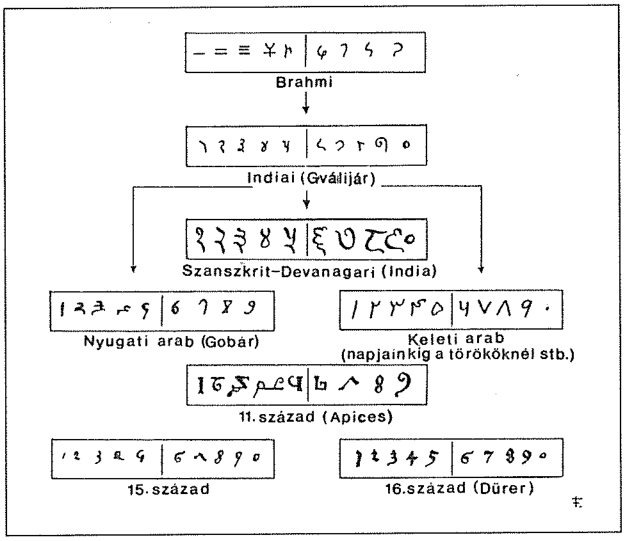
Amikor az első és második évezred fordulóján II. Szilveszter elfoglalta a pápai trónt, becslések szerint a keresztény Európában tízezer lehetett a könyvek száma. Emellett szinte sokkolóan ható adat, hogy ugyanakkor egyedül a cordóbai emír könyvtára kilencszázezer kötetet számlált! A mennyiségi különbség természetesen minőségi, színvonalbeli eltérést is jelez a két világ tudományosságában, nem véletlen hát, hogy amikor Európa kezdett magára találni, számos tudásvágyó ifjú vállalta a nem éppen veszélytelen kalandot, hogy megismerkedjék az arabok által megőrzött, és továbbfejlesztett tudással. Többekről feljegyezték, hogy álruhában látogatták a mór egyetemeket. (Ehhez tudni kell, hogy az élet számos területén igen toleráns muszlimok még Goldziher Ignác korában sem tűrtek idegent az iskolák és a szent helyek környékén.)

Mint a tudomány sok egyéb eredménye, a hindu–arab számjegyek is Hispánián keresztül jutottak el Európába, legkésőbb a X. században. (A kontinens-határ nem földrajzilag, hanem mint kultúrkörök határa értendő.) Az új számjegyeket alkalmazó legrégibb európai kézirat – ami fennmaradt – egy észak-spanyolországi kolostorban készült, Logroño mellett, 976-ban, de ebben a nulla jele nem szerepel. A nullát is tartalmazó legrégibb európai emlékek a XII. századból valók, és ezekben kis kör ábrázolja a nullát.

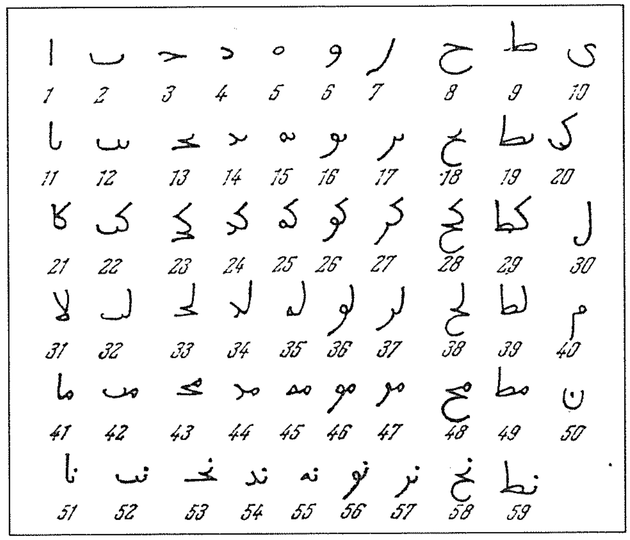
II. Szilveszter, azaz Gerbert D' Aurillac neve nem öncélúan merült fel, sőt még csak nem is a „magyar kapcsolat" miatt, azaz, hogy ő küldött koronát István fejedelemnek. Említésének oka az, hogy az európai tudományosság felocsúdásának kezdetét az ő működésétől szokás számítani. Alacsony sorból jutott a legmagasabb egyházi méltóságig, nem csoda hát, hogy míg halálának dátumát napra pontosan ismerjük (1003. 05. 12.), születését illetően a 937/950 adat szokott előfordulni. (Néhány helyen okkal, ok nélkül a 940?, 950? olvasható.) Gerbert 967-ben kijutott Spanyolországba, ott ismerkedett meg az arab matematikával és a hindu

6. ábra. A Plimpton 322 papírusz

A hetedik ábra a hátsó borítón



8. ábra. A számjegyek családja



9. ábra. Az arab dzsumal számok

számírással. Hazatérve gyorsan emelkedett az egyházi ranglétrán, de püspöki, érseki méltósága ellenére nem szűnt meg iskolaszervező, tankönyvíró, oktató tevékenysége sem. Különösen reims-i működése (972–982) kiemelkedő.

Több könyv szerzőségét tulajdonítják neki, és az általa módosított („tökéletesített") abakusz a hozzá használatos zsetonokkal jelentősen hozzájárult a hindu–arab számjegyek elterjesztéséhez. Az abakusz oszlopaiban – eltérően pl. a római, görög mintától – nem adott számú számoló-kövecske jelezte a megfelelő helyiérték egységeinek a számát, hanem egy-egy zseton (apex), amelyre ráírta a megfelelő hindu számjegyet. Az oszlopok tetején a helyiértéket római számmal jelölte és a számok lejegyzésére is római számokat használt. Emiatt több jelentős tudománytörténész vakvágánynak tekinti az apexek használatát, de jelen sorok írója talán megengedhet magának néhány megjegyzést. Egyrészt úgy tűnik, hogy a számolás és a számírás a legtöbb kultúrában elkülönült, elszakadt egymástól. (Elég csak Kínát említeni.) Másrészt, ha a korabeli papír-ellátásra tekintettel vagyunk, ugyancsak meg kellett gondolni, hogy számolhat-e írásban az ember. Harmadsorban az abacista-algebrista vitát illetően a mai távlatból nézve elgondolkodtató, hogy honnét táplálkozik az a mai „hasraesés" a japán szoroban (az egyébként kínai eredetű golyós abakusz) előtt? Mert ha Gerbert abakuszát mint oktatási segédeszközt (is) tekintjük, egyből kedvezőbb a bizonyítvány!

A nulla nevének története

Indiában a nulla neve szúnja volt, ami lyukat, üres helyet jelent. Ezt az arabok az asz-szifr (semmi) kifejezéssel fordították le, és később ennek az arab szónak a származékai számos európai nyelvben felbukkantak, előbb nulla, majd néhány évszázad múltán számjegy értelemben. (Pl. a német Ziffer.) Egy 1143-ban készült kéziratban, amelynek a címe Algorizmus bevezető könyve a csillagászat művészetébe A. magiszter által összeállítva, a ciffre jelenti a nullát. Körülbelül ez idő tájt jelent meg a cifra is. Leonardo Pisano (Fibonacci) a cephirum alakot használta, ebből származik az olasz zero. Ezek a szóalakok egészen a XVII. századig jobbára nullát jelentettek, bár egyesek már a XIV–XV. században is használták őket számjegy jelentéssel. Az angol cipher ma is egyaránt jelent nullát, rejtjelet és számjegyet. Amikor a francia nyelvben a chiffre felvette a számjegy jelentést, olasz mintára a zero-t kezdték használni nullaként.

Van néhány XII–XIII. századi kézirat, amelyben a nulla neveként a circulus (köröcske), a nihil (semmi) vagy a figura nihili (a semmi jele) fordul elő.

A nullus név használatára a XV. századból vannak adatok, de lehet, hogy már korábban is használták. Nőnemű alakja, a nulla pedig először egy 1478-as keltezésű aritmetika könyvben bukkan fel, azt követően pedig Piero Borghi aritmetika tankönyvében 1484-ben.

A nulla szerepe az aritmetikában

A nulla hosszú fejlődési folyamat során vált a „számtársadalom" egyenrangú tagjává a matematikai absztrakció különböző szintjein. Nagyon érdekes dolog, de történelmi tény, hogy annak ellenére, hogy a nulla jele Kínában csak meglehetősen későn és külső hatásra jelent meg, a nullával végezhető legegyszerűbb műveletek első leírása Kínából származik. Ez azzal függ össze, hogy az elsőfokú egyenletrendszerek megoldására a kínaiak régóta ismertek egy általános módszert, amely az ismeretlenek fokozatos kiküszöbölésén alapult (fang-cseng módszer). Ahhoz, hogy az algoritmust tetszőleges egyenletrendszerre alkalmazni tudják, időnként szükség volt nagyobb számoknak kisebbekből vagy a „semmiből" való kivonására. A Matematika kilenc könyvben című ókori enciklopédikus műben, annak nyolcadik könyvében szerepel az alábbi szabály: „Ha azonos jelű, akkor kivonódik, ha különböző jelű, akkor hozzáadódik, ha pozitív és pár nélküli akkor negatívvá (válik), ha negatív és pár nélküli, akkor pozitívvá (válik)." Vagyis mai jelölésmóddal:

$$(\pm a)-(\pm b) = \pm (a-b),$$
$$(\pm a)-(\mp b) = \pm (a+b),$$
$$0-(\pm b) = \mp b.$$

A szabály folytatása pedig így hangzik: „Ha különböző jelű, akkor kivonjuk, ha azonos jelű, akkor hozzáadjuk, ha pozitív és pár nélküli, akkor pozitívvá (válik), ha negatív és pár nélküli, akkor negatívvá (válik)" vagyis:

$$(\pm a)+(\mp b) = \pm (a-b),$$
$$(\pm a)+(\pm b) = \pm (a+b),$$
$$0+(\pm b) = \pm b.$$

Az utolsó sorok mindkét esetben a nullával végezhető műveleteket jelentik, a „pár nélküli" kifejezés arra utal, hogy a megfelelő helyen nem áll semmi az abakuszon. A Matematika kilenc könyvben pontos keletkezési körülményei nem ismeretesek. Mai formája Liu Huj szerkesztésében i. sz. 263-ból maradt fenn. Liu Huj szerint a könyvet Csang Can (megh. ie. 152) munkáiból állították össze. A szorzást és az osztást, a VIII. könyv nem tárgyalja, ott nincs is szükség ezekre a műveletekre.

A nullával végezhető négy alapművelet teljes leírása az indiai matematikusok műveiben bukkan fel először. Srídhara és Árjabhata II. az alábbi szabályokat adták meg a X. században.

$$a \mp 0 = a,$$
$$0 + a = a,$$
$$a - a = 0,$$
$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0,$$
$$0 : a = 0.$$

A szabályokat természetesen a kor szokásainak megfelelően szöveggel, szimbólumok nélkül írták le. Érdekes megfigyelni, hogy a

$$0 - a = -a$$

szabály nem szerepel a felsoroltak között. Indiában a negatív szám fogalma csak jóval később vált ismertté, mint Kínában, az első ismert utalás rájuk Brahmagupta műveiben található. Az indiai matematikusok a nullától különböző számnak nullával való osztásával eleinte nem tudtak mit kezdeni. Később arra a gondolatra jutottak, hogy az ilyen osztás eredménye végtelen nagy szám. Bhászkara II. azt írta, hogy a

$$\frac{a}{0}$$

mennyisége változatlan marad, akármennyit adunk hozzá, vagy akármennyit vonunk le belőle. Krisna, Bhászkara műveinek kommentálója kifejtette, hogy minél kisebb a szorzandó, annál kisebb a szorzat.

Ha a szorzandót a végletekig csökkentjük, a szorzattal is ugyanez történik. Mivel pedig a legnagyobb mértékű csökkentés a nullára való csökkentést jelenti, $0 \cdot a = 0$. Hasonlóan indokolja az $a \cdot 0 = 0$ azonosságot, és a hányados végtelenné válását nullával való osztáskor. De ami a 0/0 hányadost illeti, ezt az indiai tudósok nem tudták tisztázni.

Az indiai matematikusok eredményei (és részben az ő közvetítésükkel a kínai felfedezések) eljutottak a Közel- és Közép-Kelet országaiba, az arab nyelvtudományos irodalomból pedig Európába. Ez természetesen nem jelenti minden eredmény azonnali átvételét és gyors elterjedését ezeken a területeken. A negatív számokat például az arabok nem vették át az indiaiaktól, vagy legalábbis nagyon kevesen használták. Csupán Abul–Vafa egyik művében találkozunk a negatív számok és a nulla indiai szabályok szerinti alkalmazásával. Lehetséges, hogy ezt a művet is ismerte Leonardo Pisano, aki Európában elsőként jutott el a negatív számok fogalmához és a nulla „teljes értékű" számként való használatához. Amikor a szorzás ellenőrzésére a „kilences próbát" alkalmazta, a vizsgált szám jegyeinek összegéből kilenccel való osztással kapott maradék nulla is lehetett, azáltal a nulla valódi számként lépett fel.

Az emancipáció lépcsőfokai

Igen jelentős lépés volt mind a matematika fejlődése, mind a nulla „teljes értékű" számmá válása szempontjából a nulla hatványkitevő fogalmának a bevezetése. Az iszlám világban ez Dzsamsid ibn Maszúd al-Kási érdeme, aki 1427-ben befejezett Az aritmetika kulcsa című könyvében a hatvanas alapú helyiértékes számrendszer ismertetése kapcsán jutott el a nulla és a negatív kitevőjű hatványokhoz. A szorzás és az osztás a hatvanas számrendszerben két táblázat használatán alapult, az egyik egy $59 \cdot 59$-ig terjedő szorzótábla volt, a másik pedig két hatvanas helyiérték szorzatának és hányadosának a megállapítására szolgált. Al-Kási a megfelelő szabályokat általános alakban fogalmazta meg tetszőleges egész kitevőre, amelyeket a „helyiértékek számainak" nevezett. A fokokhoz, vagyis a hatvanas számrendszer egyeseihez a nullát rendelte hozzá, vagyis lényegében feltételezte, hogy $a^0 = 1$.

Ez idő tájt – főként a török terjeszkedés miatt – a Kelet és Nyugat közötti tudományos kapcsolatok nagyon meggyengültek, így al-Kási eredményei sem jutottak el Európába. Ezért amikor Nicolas Chuquet francia matematikus 1484-ben befejezte A számok tudománya három részben című munkáját és abban kifejtette gondolatait a nulla és a negatív hatványkitevőkről, joggal tekintette azokat a saját felfedezésének. Chuquet az ismeretlen magasabb hatványait tartalmazó egyenleteket úgy írta fel, hogy az ismeretlen adott hatványának kitevőjét a megfelelő együttható kitevőjébe írta. Nála a $7x^4$, $2x^3$, $6x$ rendre ilyen alakú volt: 7^4, 2^3, 6^1, az egyenletek konstans tagjait pedig nulla kitevővel ábrázolta, és azt mondta, hogy az ilyen számoknak „nulla a neve". Az ő jelölésmódjával a 12^0 12-t jelentett vagyis lényegében a $12x^0 = 12$ azonosság alapján feltételezte, hogy $x^0 = 1$.

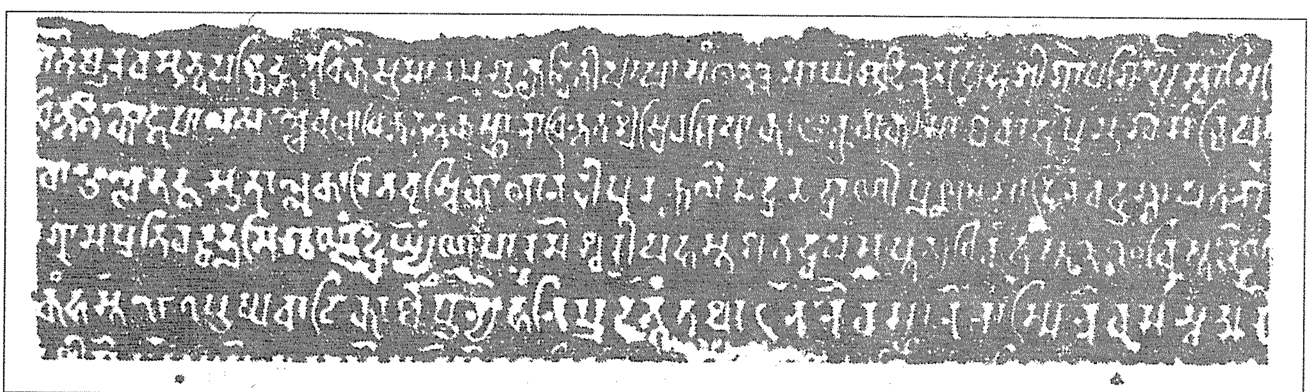
A nulla bevonul az algebrába

Külön fejezet a nulla történetében az algebrában játszott szerepének alakulása. Az egyenletek nullára rendukált alakban való felírása, vagy a nullának gyökként való elfogadása hosszú folyamat során alakult ki és terjedt el.

Az ókínai Matematika kilenc könyvben című enciklopédia VIII. könyvében szerepel ez a feladat: ha 2 bivalyt és 5 bárányt eladunk, és 13 disznót vásárolunk, megmarad 1000 rézpénzünk (csien), 3 bivaly és 3 disznó ára 9 bárány vásárlására elég. Ha 6 bárányt és 8 disznót adunk el, 5 bivaly megvételéhez 600 rézpénz hiányzik. Ez az első olyan feladat a matematika történetében, amelyik olyan egyenletre vezet, amelynek jobb oldala 0.
$(3x - 9y + 3z = 0)$

A másodfokú egyenleteknek a ma szokásos nullára redukált alakjával, és az általános alak megoldását megadó sza-

10. ábra. Falfelirat Gváiijárban. Az első sorban a pont alatt a 933-as szám látható (évszám, amely időszámításunk 876. esztendejének felel meg). A negyedik sorban a nyilak metszéspontjában a 270-es szám és az ötödik sorban két ponttal jelölve a 187-es szám áll.



bállyal először Indiában találkozunk, Brahmaguptánál, a VII. században. A magasabb fokú egyenletek nullára redukált alakban való felírása pedig Kínából származik. A kínai matematikusok a XIII. században számos jelentős algebrai eredményt értek el, így például a ma Ruffini–Horner-módszernek nevezett eljárást sikerült olyan eszközzé fejleszteniük, amelyik alkalmas volt tetszőleges számegyütthatós egyenletek gyökeinek próbálgatással való meghatározására. A módszer általános alkalmazásához szükség volt az egyenletek nullára redukált normál alakra hozására.

Az iszlám országok tudósai, akik kerülték a negatív számok alkalmazását, az egyenletek tagjait mindig úgy rendezték, hogy az együtthatók pozitívak legyenek, így különféle normálalak típusokkal dolgoztak. Ezek között szerepelt az is, amelyet ma $ax^2 = bx$ alakban írnánk, és ezt mindig $ax = b$ alakra vezették vissza. Bármilyen hihetetlen is ma már, senkinek sem ötlött eszébe a nulla, mint megoldás.

A határozatlan egyenletekre és egyenlet-rendszerekre vezető feladatok közül is több szinte tálcán kínálta a felismerést, hogy valamelyik ismeretlen a nulla értéket is felvehetné. Így például szinte minden kultúrkörben ismertek és népszerűek voltak a baromfivásárlással kapcsolatos feladatok. A kínai Csang Csiün-csien a VI. században Matematikai értekezésében részletesen megvizsgálta ezek közül azt, hogy: 100 rézpénzért 100 baromfit vettünk. Hány kakast, tyúkot és csirkét vásároltunk, ha egy kakas ára 5, egy tyúké 3 és három csirkéé 1 rézpénz?" A feladat mai jelöléssel az

$$x + y + z = 100$$
$$5x + 3y + 1/3z = 100$$

egyenletrendszer egész számokban való megoldását követeli meg. Csang megmutatta, hogy a feltételeknek a (4, 18, 78), (8, 11, 81), (12, 4, 84) számhármasok egyaránt megfelelnek, de elment a nagy lehetőség mellett, hogy felismerje hogy a (0, 25, 75) számhármas is megoldás. A nullának egyenlet gyökeként való elfogadása csak a XVI–XVII. századtól vált általánossá, bár az első matematikus, aki az absztrakciónak erre a fokára eljutott, Leonardo Pisano volt, a XIII. század elején. Szerepel nála egy feladat, amely az

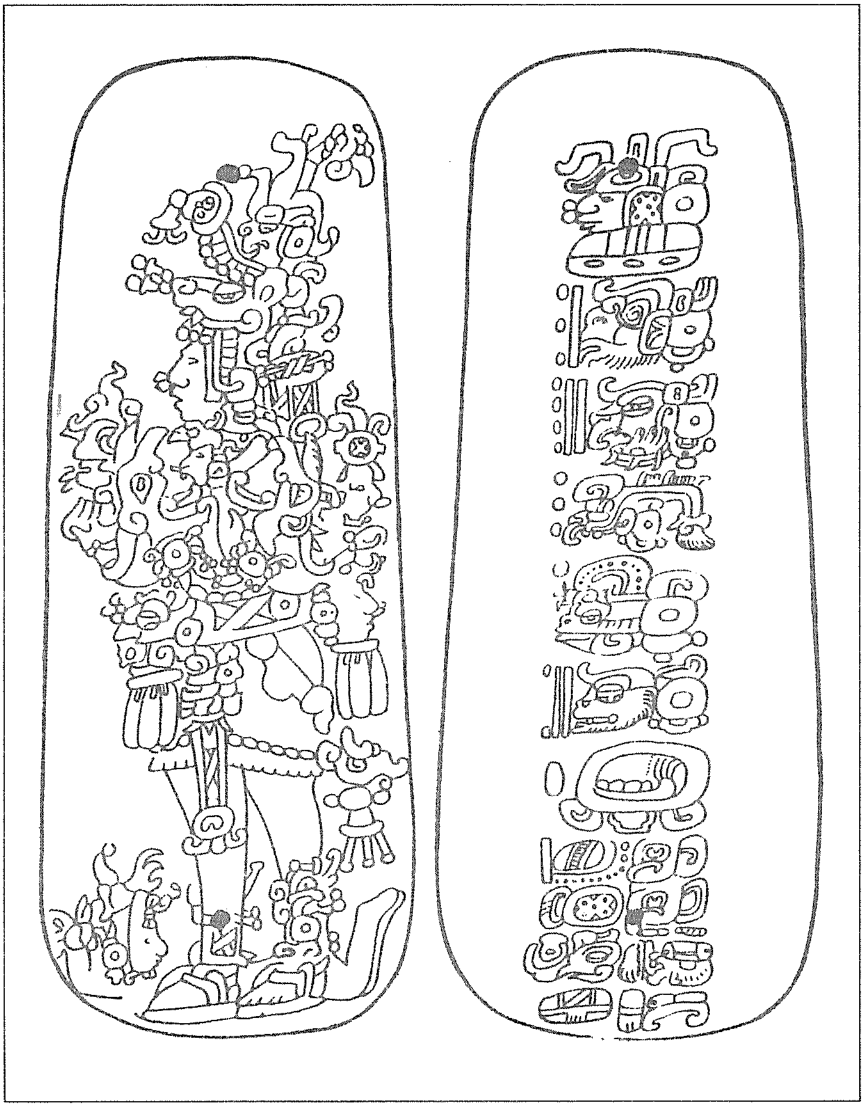
$$x + y = 10$$
$$\frac{10}{x} + \frac{10}{y} = 6\frac{1}{4}$$

egyenletrendszerre vezet. Ezt úgy oldotta meg, hogy az $x = 2–z$, $y = 8 + z$ helyettesítéssel a

$$(2–z)\cdot(8 + z) = 16$$

egyenletet vezette le, amelyről azt írta: „Járj el az algebrának megfelelő módon (secundum algebra) és azt találod, hogy e dolog nulla lesz (invenies rem esse nihil), így az egyik részre 2, a másikra 8 adódik." Ez volt tehát az első eset a matematika történetében, hogy valaki egy egyenlet gyökét (amit dolognak neveztek, a megfelelő arab kifejezés szó szerinti fordítása nyomán) nullának vette. Elgondolását azonban sem a kortársak, sem a következő generációk nem tudták átvenni. Ez csak azután vált általánossá, hogy Nicolas Chuquet eljutott a negatív gyökök fogalmához is, a XVI. században.

Miután a XVII. században Thomas Harriot és René Descartes Európában is bevezette az egyenleteknek a Kínában szokásos kanonikus írásmódját, a nullával további lényeges események sokáig nem történtek. A következő lényeges fogalmi változás akkor következett be, már ebben a században, amikor a számfogalom halmazelméleti megalapozása és axiomatikus felépítése során axiómaként kimondták, hogy a nulla, az üres halmaz számossága, természetes szám. A legismertebb ilyen axioma-rendszer Peano nevéhez fűződik.



11. ábra. Az ún. leideni lemez a maják egyik legfontosabb dátumát őrizte meg.