



## XII. MAGYAR MECHANIKAI KONFERENCIA

MaMeK, 2015

Miskolc, 2015. augusztus 25-27.

### CSIGASORRAL FÜGGESZTETT GERENDA SZABADREZGÉSE MODÁLANALÍZISSEL

Németh Róbert Károly<sup>1</sup> és Kocsis Attila<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup> BME, Tartószerkezetek Mechanikája Tanszék

1111 Budapest, Műegyetem rkp. 3.

[methro@eik.bme.hu](mailto:methro@eik.bme.hu), [kocsis@ep-mech.me.bme.hu](mailto:kocsis@ep-mech.me.bme.hu)

**Absztrakt:** Egy csigasorral függesztett gerenda szabadrezgését vizsgáljuk. A gerendát Bernoulli-Euler rúdként modellezzük, és bemutatjuk a szerkezet sajátrezgésalakjait és sajátkörfrekvenciáit feszített és feszítetlen függesztőkábel esetén a folytonos rúd differenciálegyenletének megoldásával. A kábel feszített, vagy feszítetlen voltától függően beszélünk aktív és passzív függesztésről. Az aktív és passzív függesztés rezgésalakjai egymásnak megfeleltethetők, az állapotváltozások során a modális koordináták transzformációja időfüggetlen módon végezhető. Numerikus módszert mutatunk a rezgés számítására, az aktív és passzív állapotok közötti váltás kezelésére. Különböző kezdőállapotokat használva szimuláljuk a tartó szabadrezgését. Megmutatjuk, hogy még az aktív és passzív függesztések közötti váltás okozta erős nemlinearitás mellett is képes a szerkezet periodikus szabadrezgést végezni.

**Kulcsszavak:** csigasoros függesztés, Bernoulli-Euler gerenda, nemlineáris dinamika, modálanalízis

#### 1. BEVEZETÉS

A függesztett szerkezetek régóta kiemelt szerepet játszanak a nagy feszítávolságok lefedésénél, áthidalásánál. A szerkezeti kialakítás újabb típusaiban a függesztő kábel csigasoron keresztül kapcsolódik a tartóhoz, ezáltal a csigákon a felszerkezetre átadódó erők (közel) konstans eloszlásúak és egyetlen paraméterrel szabályozhatók [1, 2]. Új szerkezettypusról lévén szó, az eddigi vizsgálatok jellemzően statikai kérdésekre keresték a válaszokat [3]. A szerkezet mozgása miatt előfordulhat, hogy a kábel tehermentesül, ami a szerkezet merevségének megváltozását eredményezi. A szakaszonként lineáris rendszer mozgása viszont már nemlineáris dinamikai vizsgálatot igényel.

Szakaszonként lineáris szerkezetek dinamikájával többen foglalkoztak [4, 5, 6, 7, 8], jellemzően kevés szabadsági fokú diszkrét, vagy diszkrétizált modellek gerjesztett rezgéseit vizsgálva, ahol a nemlinearitást valamelyik rugalmas kapcsolatban egy kezdeti rész okozta.

Az általunk vizsgált szerkezet bilineáris, a terheletlen tartó egyensúlyi helyzetében éppen a két különböző merevségű állapot határán van. A folytonos gerenda rezgésének vizsgálatát modálanalízissel hajtjuk végre mindkét merevségi esetre és a megoldásokat megfelelően illesztjük, hasonlóan a [9]-ben taglalt eljáráshoz. Olyan globális normálmódokat keresünk, amik periodikus rezgéshez tartoznak és egy periódus alatt egyetlen oda-vissza váltás történik a kötél húzott és tehermentes állapota között.

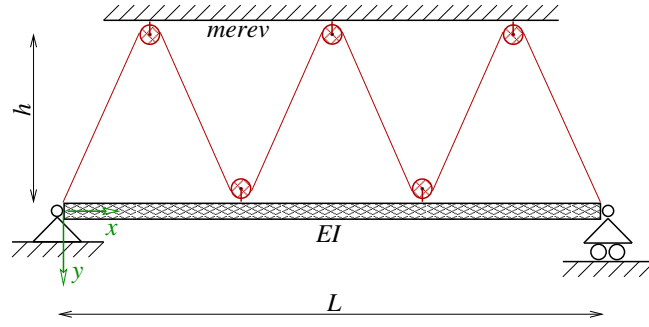
A dolgozat felépítése a következő. A második fejezetben bemutatjuk a vizsgált szerkezetet, a szabadrezgés differenciálegyenletét és a peremfeltételeket. A harmadik fejezetben a szabadrezgés differenciálegyenletének megoldásait, a sajátértékeket és a sajátalakokat mutatjuk meg a terhelt és a tehermentes kötél esetén [9] alapján. A negyedik fejezetben a fentiek segítségével bemutatjuk a differenciálegyenlet modálanalízisen alapuló numerikus megoldásának lépéseit. Az ötödik fejezetben az analitikus megfontolások és a numerikus számítások alapján kapott normálmódokat és a periódusidőket tárgyaljuk. A tapasztalatokat a hatodik fejezetben foglaljuk össze.

#### 2. A VIZSGÁLT MODELL ÉS A SZABADREZGÉS DIFFERENCIÁLEGYENLETE

A vizsgált szerkezetet az 1. ábra mutatja. A kéttámaszú, lineárisan rugalmas Bernoulli-Euler gerendát a harmadolópontjaiban függesztjük fel egy csigasoron átvezetett kötéllal az ábrán látható módon. A gerendához és a merev felszerkezethez kapcsolódó csigák súrlódásmentesek. A kötél tömegét és a normálerő miatti alakváltozását elhanyagoljuk, a csillapítás értékét nullának tekintjük. A gerenda teljes hossza  $L$ , egy támaszköz hossza  $L/3$ .

Egy gerenda szabadrezgésének differenciálegyenlete:

$$\frac{EI}{L^3} u^{IV}(\xi, \tau) + \frac{\mu L}{T^2} \ddot{u}(\xi, \tau) = 0, \quad (1)$$



1. ábra. A vizsgált modell

ahol  $u$  a dimenziótlantított elmozdulás (a valós elmozdulás  $uL$ ),  $\xi$  és  $\tau$  a dimenziótlantított hely és idő, a  $(\cdot)'$  és  $(\cdot)\dot{\phantom{x}}$  szimbólumok rendre a dimenziótlantított hely és idő szerinti deriváltakat jelentik,  $\mu$  a gerenda fajlagos tömege, és  $EI$  a hajlítás síkjára merőleges hajlítómerevség. A valós hely és idő rendre  $x = \xi L$  és  $t = \tau T$ , ahol  $T = \sqrt{\frac{\mu L^4}{EI}}$ .

A kábel hatása a peremfeltételekben jelenik meg. A felfüggesztést passzívnek nevezzük, illetve azt mondjuk, hogy a szerkezet passzív állapotban van, ha a kötélerő nulla, és a gerenda harmadolópontjai elmozdulásainak összege negatív, vagy nulla. A felfüggesztést aktívnek nevezzük, illetve azt mondjuk, hogy a szerkezet aktív állapotban van, ha a kötélerő pozitív, vagy zérus és a gerenda harmadolópontjai elmozdulásainak összege nulla. (A fenti definíciók alapján vannak olyan állapotok, amikről nem dönthető el egyértelműen, hogy a passzív vagy az aktív állapothoz tartoznak-e, a numerikus megoldás során ezeket a helyzeteket az aktív és passzív állapot közötti átmenet számítására fogjuk használni.)

Passzív felfüggesztés esetén a gerenda egy sima kéttámaszú tartó, így csak a gerenda végeire írunk elő feltételt:

$$u(0, \tau) = u(1, \tau) = 0, \quad u''(0, \tau) = u''(1, \tau) = 0. \quad (2)$$

Az első két egyenlet az eltolódás zérus értékét fejezi ki, a második kettő pedig a végponti hajlítónyomatékkal arányos görbület kis elmozdulásokkal közelített zérus értékét [10].

Aktív felfüggesztés esetén az (1) differenciálegyenlet szakaszonként érvényes. A gerenda végeire (2)-vel azonos peremfeltételt, a gerenda harmadolópontjaiban csatlakozási feltételeket írunk elő. A lehajlás, az elfordulás és a hajlítónyomatékkal arányos görbület folytonossága alapján:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( u\left(\frac{1}{3} - \varepsilon, \tau\right) - u\left(\frac{1}{3} + \varepsilon, \tau\right) \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( u\left(\frac{2}{3} - \varepsilon, \tau\right) - u\left(\frac{2}{3} + \varepsilon, \tau\right) \right) = 0, \quad (3)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( u'\left(\frac{1}{3} - \varepsilon, \tau\right) - u'\left(\frac{1}{3} + \varepsilon, \tau\right) \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( u'\left(\frac{2}{3} - \varepsilon, \tau\right) - u'\left(\frac{2}{3} + \varepsilon, \tau\right) \right) = 0, \quad (4)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( u''\left(\frac{1}{3} - \varepsilon, \tau\right) - u''\left(\frac{1}{3} + \varepsilon, \tau\right) \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( u''\left(\frac{2}{3} - \varepsilon, \tau\right) - u''\left(\frac{2}{3} + \varepsilon, \tau\right) \right) = 0. \quad (5)$$

A kötélerő konstans volta miatt a nyíróerő ugrása azonos a két csiga alatt, ami az elmozdulás harmadik deriváltjával arányos:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( u'''\left(\frac{1}{3} - \varepsilon, \tau\right) - u'''\left(\frac{1}{3} + \varepsilon, \tau\right) \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( u'''\left(\frac{2}{3} - \varepsilon, \tau\right) - u'''\left(\frac{2}{3} + \varepsilon, \tau\right) \right). \quad (6)$$

Végül a nyújthatatlan kötél hosszváltozása zérus, amit az alábbi feltétel fejez ki:

$$u\left(\frac{1}{3}, \tau\right) + u\left(\frac{2}{3}, \tau\right) = 0. \quad (7)$$

### 3. AZ AKTÍV ÉS A PASSZÍV RENDSZER SAJÁTREZGÉSE

A lineáris alrendszerek rezgésegyenleteinek megoldásait aktív és passzív esetben egyaránt a változók szétválasztásával, az

$$u(\xi, \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} u_i(\xi) \cdot a_i \cos(\omega_i T \tau - \phi_i) \quad (8)$$

alakban keressük, ahol  $u_i(\xi)$  az  $i$ -edik rezgésalak,  $\omega_i$  az  $i$ -edik sajátkörfrekvencia,  $a_i$  az  $i$ -edik alak amplitúdója,  $\phi_i$  az  $i$ -edik alak fázisa,  $T$  az idő dimenziótlanításához használt paraméter. Vezessük be a dimenziótlanított periódusidőt az alábbi a képlettel:

$$T_i = \frac{2\pi}{\omega_i T}. \quad (9)$$

Ennek felhasználásával a (8) deriváltjait behelyettesítve a rezgés differenciálegyenletébe a sajátrezgésalakok függvényeire az

$$u_i^{IV}(\xi) - \lambda_i^4 u_i(\xi) = 0 \quad (10)$$

közönséges differenciálegyenlet adódik, ahol  $\lambda_i$  az  $i$ -edik sajátrezgés paramétere:

$$\lambda_i^2 = \frac{2\pi}{T_i} \cdot \frac{L^2}{T} \sqrt{\frac{\mu}{EI}}. \quad (11)$$

A (10) differenciálegyenlet általános megoldása:

$$u_i(\xi) = A_i \sin(\lambda_i \xi) + B_i \cos(\lambda_i \xi) + C_i \sinh(\lambda_i \xi) + D_i \cosh(\lambda_i \xi) \quad (12)$$

alakban írható, ahol  $A_i, B_i, C_i, D_i$  szakaszonként érvényes paraméterek, melyekkel az  $i$ -edik  $u_i(\xi)$  alakfüggvény kielégíti a (2) peremfeltételeket, továbbá aktív felfüggesztés esetén a (3)-(7) kapcsolódási feltételeket is.

Passzív állapotban a (1) differenciálegyenlet (2)-t kielégítő, normált megoldásai:

$$u_i(\xi) = \sqrt{2} \sin(i\pi\xi), \quad (13)$$

az alakokhoz tartozó sajátrezgés-paraméterek pedig:

$$\lambda_i = i\pi. \quad (14)$$

Aktív állapotban kétféle megoldást különböztetünk meg [9] alapján.

Ha  $\text{mod}(j, 6) = 1, 2, 3, 5$ , akkor a  $j$ -edik sajátrezgés-paraméter:

$$\lambda_j = (j+1)\pi, \quad (15)$$

a hozzá tartozó sajátalak pedig:

$$u_j(\xi) = \sqrt{2} \sin((j+1)\pi\xi). \quad (16)$$

Mivel ezek az alakok  $j = i - 1$  helyettesítéssel megfelelnek (13)-nak, ezeket *triviális* aktív alakoknak nevezzük.

Az aktív állapot megoldásainak másik csoportja kielégíti a  $\text{mod}(j, 6) = 0, 4$  feltételt. Az ide tartozó sajátalakokat *nemtriviális* alakoknak nevezzük, amelyeknél a  $\lambda_j$  sajátrezgés-paraméter a  $(2 \cosh(\frac{\lambda}{3}) - 1) \sin(\frac{\lambda}{3}) - (2 \cos(\frac{\lambda}{3}) - 1) \sinh(\frac{\lambda}{3}) = 0$  nemlineáris egyenlet megoldása, a kapcsolódó sajátalakok pedig a kapcsolódási feltételek alapján numerikusan számíthatók.

Fenti eredményeket az 1. táblázatban foglaljuk össze. A sajátalakokat 1-re normáltuk, azaz olyan skalár szorzót választottunk, hogy  $\int_0^1 u_i^2(\xi) d\xi = 1$  legyen. Bizonyítható, hogy a rezgésalakok ortogonálisak, azaz ha mindkét sajátalakot vagy az aktív, vagy a passzív rendszerből választjuk, akkor  $\int_0^1 u_k(\xi) u_l(\xi) d\xi = 0, \forall k \neq l$ . Az aktív rendszer nemtriviális rezgésalakjait a 2. ábrán mutatjuk be.

Modálanálízis során a gerenda pillanatnyi deformált alakját a sajátalakok lineáris kombinációjaként állítjuk elő a modális koordináták segítségével. A két (aktív és passzív) állapot közötti határon teljesül a (7) egyenlet, továbbá a (6) feltételi egyenlet mindkét oldala zérus. A passzív és aktív állapot  $i$ -edik modális koordinátáit rendre  $y_i^p$ -vel és  $y_i^a$ -val jelölve, az elmozdulás ilyenkor kétféleképpen is felírható:

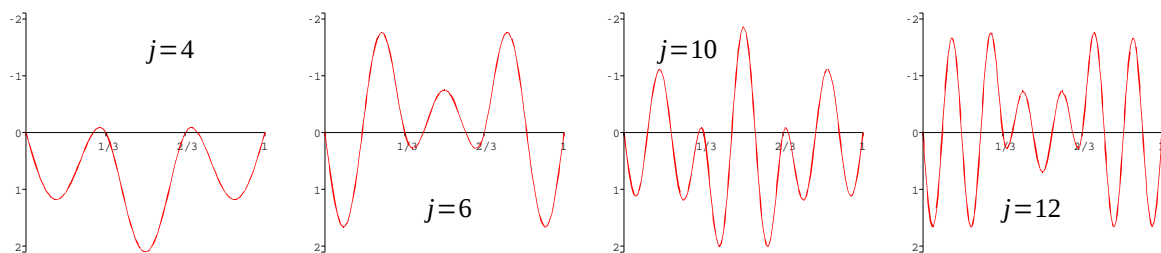
$$u(\xi, \tau) = \sum_i u_i^p(\xi) y_i^p(\tau) = \sum_i u_i^a(\xi) y_i^a(\tau). \quad (17)$$

Ezt felhasználva, a két összegzést  $u_i^p$ -vel szorozva, majd 0 és 1 között integrálva megkapjuk a kétféle állapot modális koordinátái közötti átváltás módját:

$$\mathbf{y}^p = \mathbf{T} \mathbf{y}^a, \quad (18)$$

ahol  $T_{i,j} = \int_0^1 u_i^p(\xi) u_j^a(\xi) d\xi$ . A sajátalakok ortogonalitási tulajdonsága és 1-re normáltsága miatt a 4, 6, 10, 12... oszlopokon kívül a főátló alatti elem 1, a többi elem 0, a 1, 5, 7, 11, 13... sorokon kívül pedig csak a főátlótól balra lévő elem 1, a többi elem 0. Fentiek miatt a transzformációs mátrixnak csak az említett oszlopokra és sorokra kondenzált változatát mutatjuk be:

$$\mathbf{T}_k = \begin{bmatrix} 0,7661 & -0,3326 & 0,3141 & -0,1717 & \dots \\ 0,6343 & 0,5286 & -0,3342 & 0,1764 & \dots \\ -0,1023 & 0,7795 & 0,4085 & -0,1911 & \dots \\ 0,01508 & -0,04317 & 0,7666 & 0,4499 & \dots \\ -0,007657 & 0,02081 & -0,1795 & 0,8330 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (19)$$



2. ábra. A gerenda nemtriviális rezgésalakjai aktív felfüggesztéssel

A kondenzálás után a mátrix végeiről a 16, 18, 22, ... oszlopokat és a 17, 19, 23, ... sorokat hagytuk le. Mind a végtelen méretű  $\mathbf{T}$ , mind a végtelen méretű kondenzált  $\mathbf{T}_k$  mátrix ortogonális. Ezért ha a (17) egyenlet két összegére alkalmazott szorzatintegrált  $u_j^a$ -val végezzük el, akkor az átváltás megfordítására az  $\mathbf{y}^a = \mathbf{T}^T \mathbf{y}^p$  kifejezést kapjuk.

#### 4. A REZGÉSEGYENLET NUMERIKUS MEGOLDÁSA

A modálanalízissel történő megoldáshoz az  $u(\xi, \tau_0)$  kezdeti alakból és az  $\dot{u}(\xi, \tau_0)$  kezdeti sebességmezőből meg kell határozni a modális koordináták és sebességek kezdeti értékeit (ha nem eleve azokkal van megadva a kezdőpont):

$$y_{i,0} = \int_0^1 u_i(\xi) u(\xi, \tau_0) d\xi, \quad \eta_{i,0} = \int_0^1 u_i(\xi) \dot{u}(\xi, \tau_0) d\xi. \quad (20)$$

Itt aktív rendszer esetén az  $u_i^a$  aktív, passzív rendszer esetén pedig az  $u_i^p$  passzív sajátalak-függvényeket használjuk  $u_i$  helyén. A modális kezdeti értékekkel az egyes módok kitérése és sebessége:

$$y_i(\tau) = y_{i,0} \cos\left(\frac{2\pi}{T_i}(\tau - \tau_0)\right) + \eta_{i,0} \frac{T_i}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi}{T_i}(\tau - \tau_0)\right), \quad (21)$$

$$\eta_i(\tau) = -y_{i,0} \frac{2\pi}{T_i} \sin\left(\frac{2\pi}{T_i}(\tau - \tau_0)\right) + \eta_{i,0} \cos\left(\frac{2\pi}{T_i}(\tau - \tau_0)\right). \quad (22)$$

Ezután az elmozdulásokat az:

$$u(\xi, \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} u_i(\xi) \cdot \left( y_{i,0} \cos\left(\frac{2\pi}{T_i}(\tau - \tau_0)\right) + \eta_{i,0} \frac{T_i}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi}{T_i}(\tau - \tau_0)\right) \right) \quad (23)$$

passzív felfüggesztés		aktív felfüggesztés		
$i$	$u_i^p(\xi)$	$\lambda$	$u_i^a(\xi)$	$j$
1	$\sqrt{2} \sin(\pi\xi)$	$\pi$	-	-
2	$\sqrt{2} \sin(2\pi\xi)$	$2\pi$	$\sqrt{2} \sin(2\pi\xi)$	1
3	$\sqrt{2} \sin(3\pi\xi)$	$3\pi$	$\sqrt{2} \sin(3\pi\xi)$	2
4	$\sqrt{2} \sin(4\pi\xi)$	$4\pi$	$\sqrt{2} \sin(4\pi\xi)$	3
5	$\sqrt{2} \sin(5\pi\xi)$	$5\pi$	4, 104 $\pi$	*
6	$\sqrt{2} \sin(6\pi\xi)$	$6\pi$	$\sqrt{2} \sin(6\pi\xi)$	5
7	$\sqrt{2} \sin(7\pi\xi)$	$7\pi$	6, 405 $\pi$	*
8	$\sqrt{2} \sin(8\pi\xi)$	$8\pi$	$\sqrt{2} \sin(8\pi\xi)$	7
9	$\sqrt{2} \sin(9\pi\xi)$	$9\pi$	$\sqrt{2} \sin(9\pi\xi)$	8
10	$\sqrt{2} \sin(10\pi\xi)$	$10\pi$	$\sqrt{2} \sin(10\pi\xi)$	9
11	$\sqrt{2} \sin(11\pi\xi)$	$11\pi$	10, 095 $\pi$	*
12	$\sqrt{2} \sin(12\pi\xi)$	$12\pi$	$\sqrt{2} \sin(12\pi\xi)$	11
13	$\sqrt{2} \sin(13\pi\xi)$	$13\pi$	12, 405 $\pi$	*

1. táblázat. A passzív és aktív rendszer sajátrezgés-paraméterei és rezgésalakjai. (A \*-gal jelölt alakokat lásd a 2. ábrán. Az  $i > 13$  és  $j > 12$  módokat nem mutatjuk.)

kifejezésből számítjuk addig a  $\tau_v$  időpontig, amíg a passzívból aktívba, vagy aktívból passzívba váltás feltétele nem teljesül. A passzív felfüggesztés aktiválódik, ha az

$$u(1/3, \tau) + u(2/3, \tau) = 0 \quad (24)$$

feltétel teljesül úgy, hogy a baloldali negatívba pozitívba vált. Aktív felfüggesztés esetén a kötélrő a nyírórő ugrásával arányos (az ugrás a kötélrő függőleges vetületének kétszeresével egyenlő), amely pedig arányos az elmozdulás harmadik deriváltjával. Az aktív felfüggesztés passzív módba vált, ha a felfüggesztési ponttól balra és jobbra levő szakaszokból számított

$$u'''_{bal}(1/3, \tau) - u'''_{jobb}(1/3, \tau) = 0 \quad (25)$$

feltétel teljesül úgy, hogy a baloldali kifejezés pozitívba negatívba vált. A váltás pillanatában a (21)-(22) szerint számított modális koordinátákat és sebességeket külön-külön át kell váltanunk (18) szerint az új állapotba, ezek lesznek az új állapotban a mozgás kezdeti értékei. Az átváltást az aktív-passzív átmenetre a

$$\begin{bmatrix} y_{1,0}^p \\ y_{2,0}^p \\ y_{3,0}^p \\ \vdots \end{bmatrix} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} y_1^a(\tau_v) \\ y_2^a(\tau_v) \\ y_3^a(\tau_v) \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \eta_{1,0}^p \\ \eta_{2,0}^p \\ \eta_{3,0}^p \\ \vdots \end{bmatrix} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} \eta_1^a(\tau_v) \\ \eta_2^a(\tau_v) \\ \eta_3^a(\tau_v) \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (26)$$

műveletekkel végezhető el, míg passzív-aktív átmenetre a

$$\begin{bmatrix} y_{1,0}^a \\ y_{2,0}^a \\ y_{3,0}^a \\ \vdots \end{bmatrix} = \mathbf{T}^T \begin{bmatrix} y_1^p(\tau_v) \\ y_2^p(\tau_v) \\ y_3^p(\tau_v) \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \eta_{1,0}^a \\ \eta_{2,0}^a \\ \eta_{3,0}^a \\ \vdots \end{bmatrix} = \mathbf{T}^T \begin{bmatrix} \eta_1^p(\tau_v) \\ \eta_2^p(\tau_v) \\ \eta_3^p(\tau_v) \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad (27)$$

műveletekkel. Ezután a kapott kitérésekkel és sebességekkel folytatjuk a számítást a fenti kezdeti feltételekkel (21)-(22) szerint,  $\tau_0$  helyére a váltáskori  $\tau_v$ -t behelyettesítve. (A kezdeti feltételek most már a modális koordinátákkal vannak kifejezve, így a (20) szerinti számítás már nem szükséges.)

## 5. A BILINEÁRIS RENDSZER SAJÁTREZGÉSE

A jelen vizsgálatunk során olyan periodikus rezgéseket keresünk, amelyekre az alábbi tulajdonságok érvényesek. A rezgés során legyen egy olyan pillanat, amikor a gerenda minden pontjának sebessége zérus. Ez a kiindulási helyzet a gerenda kezdeti állapotának függvényében megadható az aktív, vagy a passzív sajátrezgésalakok lineáris kombinációjaként. Ebből a kiindulási helyzetből elindítva a rezgést legfeljebb egy állapotváltás után a gerenda minden pontja ismételtén újra pillanatnyi nyugalomba kerül, és ismét legfeljebb egy, de ellentétes állapotváltozás után visszatér a kiindulási helyzetbe.

**5.1. Triviális kiindulási alakok.** Amennyiben a kezdeti alaknak az aktív rendszer valamelyik triviális, vagy a passzív rendszer azzal azonos (bár eggyel magasabb sorszámú) sajátalakjából indítjuk a rezgést, a mozgás minden pillanatában teljesül a kötélmegnyúlására és a kötélrő zérus voltára vonatkozó két feltétel, (24) és (25). Ennek két, egymást nem kizáró oka lehet. A passzív rendszer  $i = 2k$ -adik rezgésalakja (lásd (13)) a rúd középpontjára ferdén szimmetrikus, így a kötélmegnyúlására vonatkozó feltétel a két felfüggesztési pont ellentétes elmozdulásából következik. A passzív rendszer  $i = 3k$ -adik rezgésalakjánál a felfüggesztési pontokban zérus az elmozdulás, így a kötélmegnyúlására vonatkozó feltétel mindenképpen teljesül.

Ezek az alakok a hozzájuk tartozó periódusidőkkel teljesítik a sajátrezgéstől megkövetelt periodicitási tulajdonságokat, tehát a bilineáris rendszer globális sajátrezgései. A 2. táblázatban soroljuk fel az ide tartozó sajátrezgés-paramétereket és a globális sajátrezgésidőket.

$i$	2	3	4	6	8	9	10	12
$\lambda_i$	$2\pi$	$3\pi$	$4\pi$	$6\pi$	$8\pi$	$9\pi$	$10\pi$	$12\pi$
$T_i^p$	0,1592	0,07074	0,03979	0,01768	0,00995	0,00786	0,00637	0,00442

2. táblázat. A bilineáris rendszer globális sajátrezgéseinek megfelelő triviális alakok sajátrezgés-paraméterei és periódusidői. (Az  $i > 12$  eseteket nem mutatjuk.)

**5.2. Aktív, nemtriviális kiindulási alakok.** Nemtriviális aktív alakból kiindulva az  $y_{4,0}^a = 1$ ,  $y_{6,0}^a = -1$ ,  $y_{10,0}^a = 1$  és  $y_{12,0}^a = -1$  kezdeti feltételekkel végeztünk numerikus szimulációt úgy, hogy egyszerre csak az egyik értéket vettük fel, az összes többi modális kitérést és sebességet nullának választottuk. (A modális kitérés előjelét úgy határoztuk meg, hogy a kezdeti kötélérő pozitív legyen.) A középső pont és az egyik felfüggesztési pont lehajlásainak idő szerinti változását a 3. ábrán mutatjuk be. Mind a négy esetben az elmozdulásfüggvény periodikusnak látszik, ezért vizsgáljuk meg, mi történik.

Mivel az aktív sajátalakból  $\tau_0 = 0$ -ban zérus kezdősebességgel indítjuk a rezgést, az első aktív-passzív váltásra  $\tau_v = T_j^a/4$  idő elteltével kerül sor (itt  $j = 4, 6, 10, \text{ vagy } 12$ ). Ekkor a gerenda vízszintes, így az összes modális koordináta zérus, az aktív modális sebességek közül pedig  $\eta_{j,e}^a = -y_{j,0}^a \frac{2\pi}{T_j^a}$  kivételével az összes zérus (lásd (22)). A váltás során a passzív alakokhoz tartozó modális sebességek vektora a  $\mathbf{T}$  mátrix  $j$ -edik oszlopának  $\eta_{j,e}^a$ -szorosára lesz (lásd (26)). Ezekkel a kezdeti  $\eta_{i,0}^p$  kezdősebességekkel és zérus kezdeti kitérésekkel kezdenek az egyes passzív módok rezegni. Belátható, hogy az összes érintett passzív mód páratlan sorszámú, tükörszimmetrikus alak, így a periódusidejük  $T_1^p$  páratlanad-része. Emiatt  $T_1^p/2$  idő alatt valamennyi érintett passzív modális kitérés páratlan egész számú szinusz félhullámot ír le az időben. Ekkor a modális kitérések egyszerre zérussá válnak, a modális sebességek pedig az aktív-passzív váltáskori sebességek ellentettjei lesznek. Amennyiben ezalatt az időszak alatt egyszer sem következik be passzív-aktív váltás, akkor ebben a pillanatban be fog. A  $\mathbf{T}$  mátrix ortogonalitásából következően a passzív-aktív váltás utáni és az aktív-passzív váltás előtti sebességekre az alábbi összefüggés áll fenn:

$$\begin{bmatrix} \eta_1^a \\ \eta_2^a \\ \eta_3^a \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}_u = \mathbf{T}^T \cdot \begin{bmatrix} \eta_1^a \\ \eta_2^a \\ \eta_2^a \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}_e = - \begin{bmatrix} \eta_1^a \\ \eta_2^a \\ \eta_3^a \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}_e. \quad (28)$$

A két állapotváltás után tehát az egyetlen kezdetben kiválasztott aktív mód kezd szabadrezgésbe azonos amplitúdóval, de ellentétes sebességgel, mint az első váltás előtt. Ezért  $T_j^a/4$  idő elteltével a gerenda ismét eléri a kezdeti kiindulási alakot és pillanatnyi nyugalomba kerül. Tehát a végtelen szabadsági fokkal és emiatt végtelen méretű  $\mathbf{T}$  mátrixszal rendelkező folytonos modell esetén a fent leírt rezgés kielégíti a periodicitás követelményeit, így a bilineáris rendszer globális sajátrezgésének tekinthető. Ezen sajátrezgés periódusidejét az első passzív és a kiválasztott aktív periódusidők felének összegeként számíthatjuk:

$$T_j^{gl} = \frac{T_1^p + T_j^a}{2}. \quad (29)$$

Az eredményeket a 3. táblázatban foglaljuk össze. Lényeges különbség a lineáris rendszerekhez képest, hogy a magasabb alakoknál a periódusidő nem nullához, hanem  $T_1^p/2 = 1/\pi$ -hez tart.

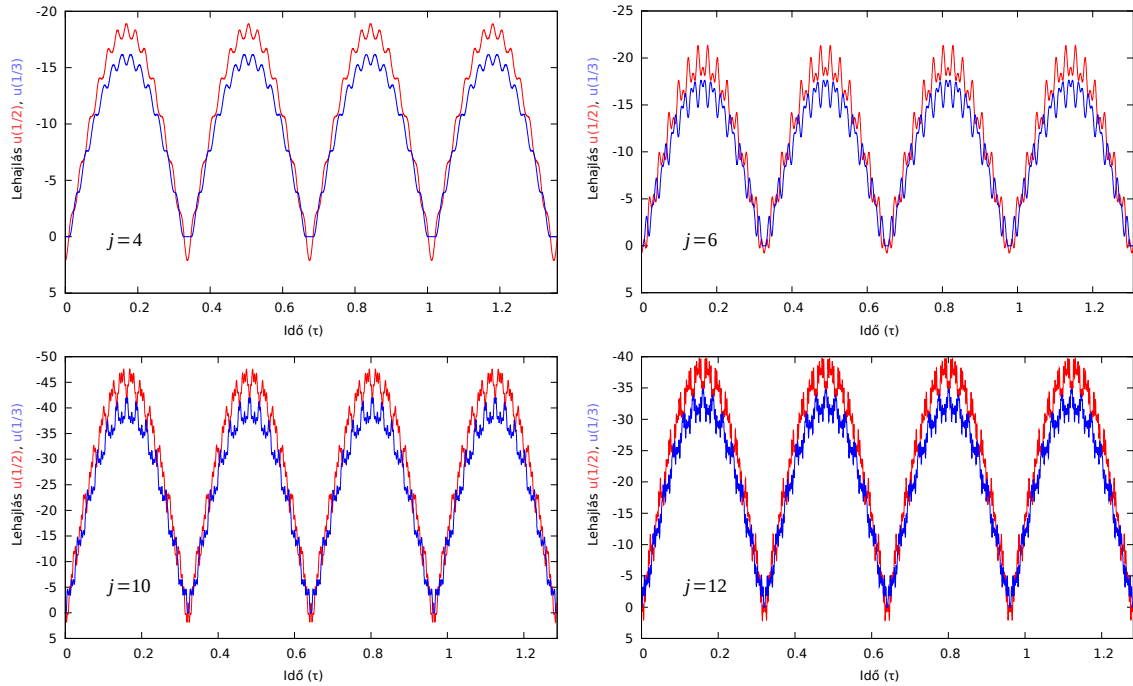
$j$	4	6	10	12
$\lambda_j$	4, 104 $\pi$	6, 405 $\pi$	10, 095 $\pi$	12, 405 $\pi$
$T_j^a$	0,02547	0,01299	0,00526	0,00377
$T_j^{gl}$	0,33104	0,32480	0,32094	0,32019

3. táblázat. A  $j$ -edik nemtriviális aktív mód sajátrezgés-paramétere, rezgésideje és az ennek a módnak megfelelő kitéréssel indított szabadrezgés globális periódusideje

A fenti gondolatmenetet végtelen szabadsági fokra vezettük végig. Ki kell térnünk azonban arra, hogy a 3. ábra diagramjait véges szabadsági fokkal számoltuk. Ez a diszkrétizálás azzal jár, hogy minden egyes állapotváltás során a kihagyott alakokba transzformálódó energia elvész, azaz a numerikus eljárás egyfajta csillapítást ad a rendszerhez. Ennek mértékét úgy tudjuk szemléltetni, hogy az aktív-passzív, majd egy azt követő passzív-aktív váltást leíró (28)-as transzformációnál a végtelen méretű  $\mathbf{T}$  mátrix helyett annak finitizált változatát használjuk. Ennek egységmátrixtól eltérő blokkjait a véges méretű  $\mathbf{T}$  mátrix kondenzált változatával kaphatjuk meg, azaz elég a  $\mathbf{T}_k^T \cdot \mathbf{T}_k$  szorzatot vizsgálnunk, ami 13 passzív és 12 aktív mód esetén az alábbi:

$$\mathbf{T}_k^T \cdot \mathbf{T}_k = \begin{bmatrix} 0.999997 & -0.000067076 & -0.00020584 & 0.00030689 \\ -0.000067076 & 0.99996 & 0.00046845 & -0.00069744 \\ -0.00020584 & 0.00046845 & 0.99712 & 0.0044216 \\ 0.00030689 & -0.00069744 & 0.0044216 & 0.99342 \end{bmatrix}. \quad (30)$$

Ennek a mátrixnak egy-egy oszlopa azt mutatja meg, hogy az oda-vissza váltás után mekkora zavar keletkezik az aktív rendszer modális amplitúdóiban. Látható, hogy a váltások után már nem csak a kiindulási aktív mód fog rezegni, mivel a fenti mátrixszorzat nem egységmátrixot ad, ezért a következő váltás nem egészen  $T_j^a/2$  idő múlva



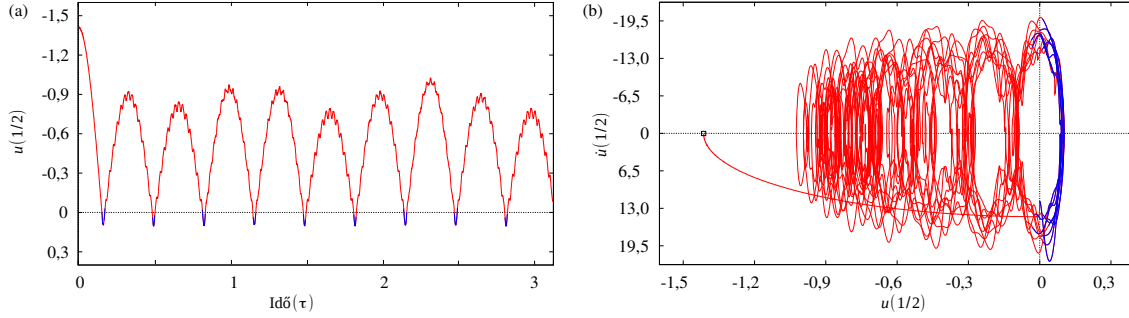
3. ábra. A  $j$ -edik nemtriviális aktív sajátalakból elindított rendszer középpontjának (piros) és a baloldali felfüggesztési pontnak (kék) elmozdulás-idő diagramjai ( $j = 4, 6, 10, \text{és } 12$ .) Az ábra előállításakor 13 passzív és 12 aktív rezgésalakat vettünk figyelembe.

fog bekövetkezni, hanem (a főátlón kívüli elemek kicsiny volta miatt kismértékben) előbb, vagy utóbb. Tehát a váltáskor már nem csak sebesség, hanem modális kitérés is lesz, bár utóbbi hatása a sebességhez képest kicsi lesz, ezért az újabb passzív állapotban töltött idő továbbra is  $T_1^p/2$  közelében lesz. Két oda-vissza váltás után a fenti mátrix második hatványa, további váltás-párok után pedig további hatványok használhatók a modális amplitúdók számítására. Mivel a (30) mátrix eltérése az egységmátrixtól kicsiny, ezért az aktív állapotban sokáig a kezdeti alakot meghatározó mód lesz a domináns, azaz a numerikusan közelített rezgés az analitikusan levezetethez hasonló lesz. Ez a magyarázata annak, hogy a 3. ábrán periodikus rezgést vélünk látni, noha azt véges számú rezgésalakokkal állítottuk elő. A  $\mathbf{T}_k^T \cdot \mathbf{T}_k$  mátrix 25. hatványában még nem jelenik meg a főátlón kívül 0,1-nél nagyobb érték, azaz ennyi oda-vissza váltás még nem okoz nagy eltérést az analitikusan kapott periódusidőhöz képest.

Megjegyezzük, hogy mindvégig azzal a feltételezéssel élünk, hogy a rendszer által a passzív állapotban töltött időtartam  $T_1^p/2$ , azaz ezalatt az időszak alatt egyszer sem következik be passzív-aktív váltás. Magasabb aktív kezdeti módokra nem vizsgáltuk ennek a feltételnek a teljesülését, ezért nem kizárható, hogy a fenti tulajdonság még végtelen szabadságfok esetén sem igaz minden aktív nemtriviális alakra.

**5.3. Passzív, nemtriviális kiindulási alakok.** Passzív, nemtriviális sajátalakból kiindulva az  $y_{1,0}^p = -1, y_{5,0}^p = 1, y_{7,0}^p = -1, y_{11,0}^p = 1$  és  $y_{13,0}^p = -1$  kezdeti feltételekkel végeztünk numerikus kísérletet úgy, hogy egyszerre csak az egyik értéket vettük fel, az összes többi modális kitérést és sebességet nullának választottuk. Bármelyik pont mozgását vizsgáltuk, azt tapasztaltuk, hogy  $T_i^p/4$  ideig az  $i$ -edik kezdeti módnak megfelelő harmonikus rezgésnek indul a gerenda (itt  $i = 1, 5, 7, 11$  és  $13$ ), azonban a felfüggesztés aktiválódása után nem figyelhető meg periodikus rezgés. Ennek jellemzésére az 1. sajátalaknak megfelelő kezdeti kitéréssel végzett vizsgálat eredményét mutatjuk be a 4. ábrán 13 passzív és 12 aktív mód használatával. Az (a) ábra a gerenda középső pontjának idő-elmozdulás diagramja. Megfigyelhető, hogy a passzív állapotban töltött időszakok során a maximális kitérés változó. A (b) ábra vízszintes tengelyén a középső pont lehajlása, függőleges tengelyén a középső pont sebessége látható. A kezdeti állapotot egy fekete négyzet jelöli. A rendszer egy negyed ellipszis leírása után látszólag szabálytalan struktúrát rajzol a diagramon.

Azt, hogy most nem figyelhetjük meg a bilineáris rendszer periodikus rezgését, az előző alfejezet gondolatmenetét követve könnyen beláthatjuk. Az első passzív-aktív váltás után a  $\mathbf{T}^T$  mátrix  $i$ -edik oszlopának megfelelően mindegyik nemtriviális módnak jelentős amplitúdója lesz. Ezen módok periódusidőinek hányadosa irracionális szám, így biztos, hogy az aktív-passzív váltást eltérő fázisban fogják elérni, ráadásul a diszkretizálás miatt a



4. ábra. Az első nemtriviális passzív sajátalakból elindított rendszer középpontjának digramjai: (a) elmozdulás az idő függvényében (b) a sebesség-elmozdulás diagramja. (Mindkét ábrán a piros passzív, a kék aktív kötelet jelent.)

passzív módok amplitúdója is jelentős lesz. Utóbbit a  $\mathbf{T}_k \cdot \mathbf{T}_k^T$  mátrixszorzat segítségével láthatjuk be:

$$\mathbf{T}_k \cdot \mathbf{T}_k^T = \begin{bmatrix} 0.82567 & 0.17486 & -0.17651 & 0.18945 & -0.21219 \\ 0.17486 & 0.82456 & 0.17692 & -0.19009 & 0.21307 \\ -0.17651 & 0.17692 & 0.82148 & 0.19199 & -0.21551 \\ 0.18945 & -0.19009 & 0.19199 & 0.79218 & 0.23615 \\ -0.21219 & 0.21307 & -0.21551 & 0.23615 & 0.72660 \end{bmatrix}, \quad (31)$$

mely most semmiképpen sem mondható egységmátrixhoz közelinek. A nagy amplitúdók és eltérő fázisok miatt biztos nem lesz igaz az, hogy a passzív-aktív váltás azonos kitérés és ellentétes sebesség mellett következik be az összes mód esetén, ezért minden váltás után egy új alak szerinti rezgés következik. Egyetlen passzív nemtriviális alakból kiindulva tehát nem található a feltételünknek megfelelő egyszerű periodikus rezgés. A rendszer által végzett rezgés lehet kváziperiodikus, vagy kaotikus is [6]. Ennek alaposabb vizsgálata túlmutat jelen cikk keretein, jövőbeni kutatásaink tárgyát képezi.

## 6. ÖSSZEFOGLALÁS

Jelen cikkben egy csigasorra függesztett gerenda síkbeli szabadrezgését vizsgáltuk. Egy Bernoulli-Euler gerendához a harmadolópontjaiban csigák kapcsolódtak, ezen csigákon egy nyújthatatlan kábel futott keresztül, amely ugyancsak csigákon keresztül egy merev felszerkezetre adta át a függesztőerőt. Attól függően, hogy a kábel feszített, vagy feszítetlen állapotban volt, a szerkezet különböző merevségi tulajdonságokkal bírt, így a feladat egy bilineárisan rugalmas kontinuum rezgésvizsgálata volt.

Mind feszített, mind feszítetlen kötélen esetén bemutattuk a szerkezet sajátrezgésalakjait és sajátrezgésidőit dimenziótlan formában. Ezen alakok segítségével szimuláltuk a szerkezet szabadrezgését. A szimuláció során figyelemmel kellett lenni azokra a feltételi egyenletekre, amelyek megadták, hogy a kábel feszített (aktív), vagy feszítetlen (passzív) állapotban volt-e. Ha a függesztőmű állapota változott, a mozgásjellemzőket át kellett transzformálni az új állapot (aktív vagy passzív) modális terébe és a szimulációt ennek az állapotnak a sajátrezgés-alakjaival és sajátrezgésidőivel kellett folytatni. A numerikus számításhoz véges sok sajátrezgésalakot használtunk fel. A szimuláció során azt tapasztaltuk, hogy ha olyan kezdeti kitéréssel indul a rezgés, amely az aktív és a passzív állapotnak is sajátalakja (a rendszer úgynevezett triviális sajátalakja), akkor a gerenda ennek a rezgésmódnak megfelelő harmonikus rezgést végez. Ez az eredmény könnyen igazolható, ugyanis ekkor egy lineárisan rugalmas, kéttámaszú gerenda bizonyos sajátrezgéseit kapjuk. Ez a megoldás tehát lineáris rendszerhez tartozik: a rezgés során a kábel végig a feszítetlen és feszített állapot határán van. Más a helyzet, ha a gerenda kezdeti kitérése valamelyik nemtriviális aktív rezgésalakkal azonos. Ekkor a kapott elmozdulás-idő diagramok periodikusnak tűntek. Analitikusan igazoltuk, hogy ezekben az esetekben valóban végezhet periodikus rezgést a szerkezet, noha a rezgés során a kábel többször vált a feszített és feszítetlen állapotok között, vagyis a dinamikát globálisan nemlineáris rezgés egyenletek írják le. Zárt formában megadtuk a nemtriviális passzív alakból indított nemlineáris rendszer szabadrezgésének globális periódusidejét. Ezen periódusidők száma a nemtriviális aktív rezgésalakok számával azonos (tehát végtelen sok), és magasabb rezgésalakoknál az első passzív rezgésidő feléhez tart. Végezetül, szimuláltuk a gerenda szabadrezgését passzív, nemtriviális kiindulási alakot használva is. Ebben az esetben a gerenda szabadrezgése nem mutatott időben periodikus viselkedést.



Összességében elmondhatjuk, hogy a vizsgált bilineáris, végtelen szabadsági fokú szerkezet szabadrezgésére a kezdeti feltételektől nagyban függő megoldásokat kaptunk. Megmutattuk, hogy a kiindulási alak megfelelő megválasztásával a nemlineáris dinamikai feladatnak vannak időben periodikus megoldásai.

**Köszönetnyilvánítás.** Kocsis Attila munkáját az MTA Bolyai János Kutatási Ösztöndíj támogatta. A szerzők köszönik az OTKA PD100786 és az OTKA K100894 kutatási projektek támogatását.

#### HIVATKOZÁSOK

- [1] A. KOLOZSVÁRY. Roof arches without bending moments, *patent*, WO/2006/136867, 2006.
- [2] K. HINCZ. Arch-supported tensile structures with very long clear spans. *International Association of Shell and Spatial Structures*, 48: 89–98, 2007.
- [3] K. HINCZ, O. BAVEREL. Investigation of an arched footbridge funicular against any loads. *IABSE-IASS 2011 Symposium*, pp. 1–7, 2011.
- [4] F.C. MOON, S.W. SHAW. Chaotic vibrations of a beam with non-linear boundary conditions. *International Journal of Non-linear Mechanics*, 18(6): 465–477, 1983.
- [5] S.W. SHAW, P.J. HOLMES. A periodically forced piecewise linear oscillator. *Journal of Sound and Vibration*, 90(1): 129–155, 1983.
- [6] J.M.T. THOMPSON, A.R. BOKAIAN, R. GHAFARI. Subharmonic resonances and chaotic motions of a bilinear oscillator. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 31(3): 207–234, 1983.
- [7] S.W. SHAW. Forced vibrations of a beam with one-sided amplitude constraint: theory and experiment. *Journal of Sound and Vibration*, 99(2): 199–212, 1985.
- [8] D. JIANG, C. PIERRE, S.W. SHAW. Large-amplitude non-linear normal modes of piecewise linear systems. *Journal of Sound and Vibration*, 272: 869–891, 2004.
- [9] A. KOCSIS, R.K. NÉMETH, B. TURMUNKH. Dynamic analysis of a beam on a block-and-tackle suspension system: a continuum approach. *Engineering Structures*, közlésre beküldve.
- [10] S. TIMOSHENKO, D. H. YOUNG, W. WEAVER. *Vibration Problems in Engineering*. John Wiley & Sons, New York, 1974.