



XII. MAGYAR MECHANIKAI KONFERENCIA

MaMeK, 2015

Miskolc, 2015. augusztus 25-27.

MARÁSI FOLYAMAT STABILITÁSA A SZERSZÁMÉLEN MEGOSZLÓ ÁLLANDÓ INTENZITÁSÚ FORGÁCSOLÓ ERŐRENDSZER ESETÉN

Molnár Tamás G.¹, Insperger Tamás²

^{1,2} BME, Műszaki Mechanikai Tanszék

1111, Budapest, Műegyetem rkp. 5.

molnar@mm.bme.hu, insperger@mm.bme.hu

Absztrakt: A regeneratív szerszámgeprezések elméletét alkalmazzuk csavart élű marószerszámmal történő megmunkálás stabilitás vizsgálata során két szabadságfokú modellt feltételezve. A forgácsolóerőt szerszámél mentén állandó intenzitással megoszló erőrendszer eredőjeként modellezzük. Ezáltal egy rövid, periodikusan változó, megoszló időkézés jelenik meg a rendszer egyenletében a regeneratív időkézés mellett. E megoszló időkézés jelentősen befolyásolja a rendszer stabilitását alacsony fordulatszámok esetén, ezt rövid regeneratív hatásnak nevezzük. A rövid regeneratív hatás folytán a marási folyamat stabilitási határait bekövetkező változásokat a szemi-diszkrétizáció módszere segítségével vizsgáljuk. Megmutatjuk, hogy a rövid regeneratív hatás miatt a stabilitási határok magasabb fogásmélység értékek felé tolódnak el alacsony fordulatszámok esetén. Ezt a jelenséget a szakirodalomban általában az ún. folyamat csillapítás (process damping) hatásnak tulajdonítják. Megmutatjuk továbbá, hogy a szerszámél mentén állandó intenzitással megoszló erőrendszert feltételezve alacsony fordulatszámokon csúcsok jelennek meg a stabilitási határok alsó burkolóján.

Kulcsszavak: marás, késleltetett differenciálegyenlet, megoszló időkézés, stabilitás

1. BEVEZETÉS

A megmunkálási folyamatok dinamikai modellezése több évtizede megjelent és azóta is tárgyalt probléma. A modellezés célja a megmunkálás közben fellépő rezgések fizikai okainak megismerése. Ezáltal lehetségessé válik a szerszámgeprezések csillapítása vagy elkerülése, mely igen fontos a gyártás során, hiszen e rezgések rontják a megmunkált felület minőségét, csökkentik a gép termelőképességét, zajt okoznak, sőt kárt is tehetnek a szerszámban és a munkadarabban.

A szerszámgeprezések hatékony modellezése tehát fontos kutatási terület. Az egyik legelterjedtebb elmélet, mely magyarul szolgál a rezgések kialakulására, az ún. regeneratív szerszámgeprezések elmélete [1, 2]. Ez alapján a szerszám mozgását az előző vágás során érvényes pozíciója is meghatározza, így a szerszámgeprezések késleltetett differenciálegyenletek segítségével írhatók le. Az elméletet számos különböző típusú megmunkálási folyamat leírására alkalmazták. Jelen cikk során marási folyamatokat fogunk vizsgálni, és a [3] és [4] munkákban bevezetett modelleket terjesztjük ki. Azaz a [4] könyvben leírt két szabadságfokú marási modellt vizsgáljuk csavart élű szerszámot feltételezve. A marószerszám egyes élein ható forgácsolóerő komponenseket pedig a [3] cikkben bevezetett módszer alapján egy megoszló erőrendszer eredőjeként modellezzük. A forgácsolóerőt meghatározva levezetjük a rendszer mozgásegyenletét, majd ezen egyenlet numerikus módszerrel (szemi-diszkrétizációval) történő stabilitásvizsgálata által ábrázoljuk a rendszer stabilitási térképét a marószerszám fordulatszámának és az axiális fogásmélységnek a síkján. E stabilitási térképek alapján a szerszámgeprezésektől mentes megmunkálás technológiai paraméterei megválaszthatók.

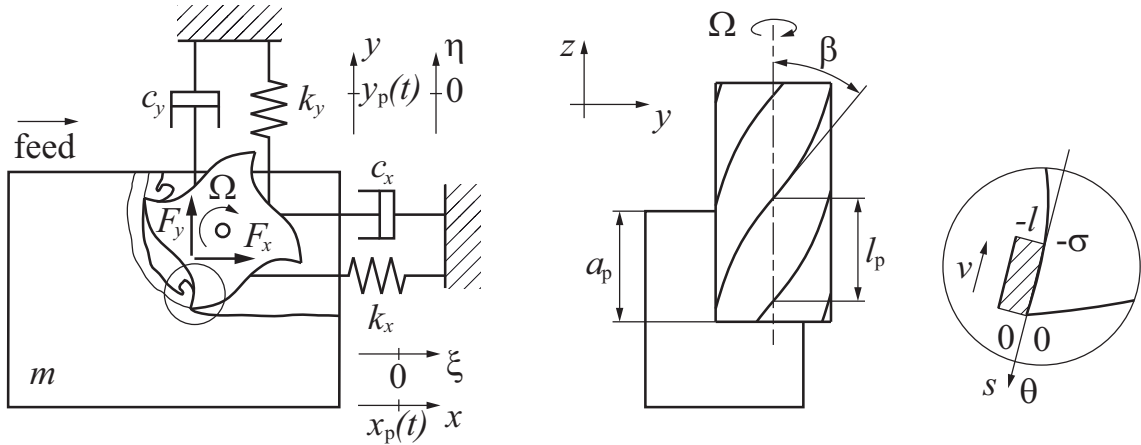
2. MECHANIKAI MODELL

Mivel a megmunkáló berendezés legrugalmasabb része általában maga a szerszám, a marási folyamatok során fellépő rezgések modellezésekor tekintsük a munkadarabot merevnek és a szerszámot rugalmasnak. A marószerszámot befogott rúdként modellezve legegyszerűbb közelítésként egy két szabadságfokú mechanikai modellhez jutunk. A modell az 1. ábrán látható. Így a marószerszám mozgásegyenlete az alábbi alakban írható fel:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{F}(t), \quad (1)$$

ahol

$$\mathbf{q}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}(t) = \begin{bmatrix} F_x(t) \\ F_y(t) \end{bmatrix} \quad (2)$$



1. ábra. Két szabadságfokú marási modell.

az általános koordináták és a forgácsolóerő vektora, a \mathbf{M} , \mathbf{C} and \mathbf{K} mennyiségek pedig a modális tömeg, csillapítási és merevségi mátrixokat jelölik.

Az 1. ábrán bemutatott csavart élű szerszámot feltételezve a $F_x(t)$ és $F_y(t)$ forgácsolóerő komponenseket úgy számíthatjuk, hogy axiális irányban dz magasságú elemi részekre osztjuk a szerszámot és az ezeken ható $dF_x(t, z)$ és $dF_y(t, z)$ elemi forgácsolóerőket integráljuk a teljes a_p az axiális fogásmélység mentén:

$$\begin{aligned} F_x(t) &= \int_{F_x(t,0)}^{F_x(t,a_p)} dF_x(t, z) , \\ F_y(t) &= \int_{F_y(t,0)}^{F_y(t,a_p)} dF_y(t, z) . \end{aligned} \quad (3)$$

Az elemi forgácsolóerő komponenseket pedig egy N élű szerszám esetén a $j = 1, 2, \dots, N$ indexekkel ellátott szerszáméleken ható erők összegként kapjuk,

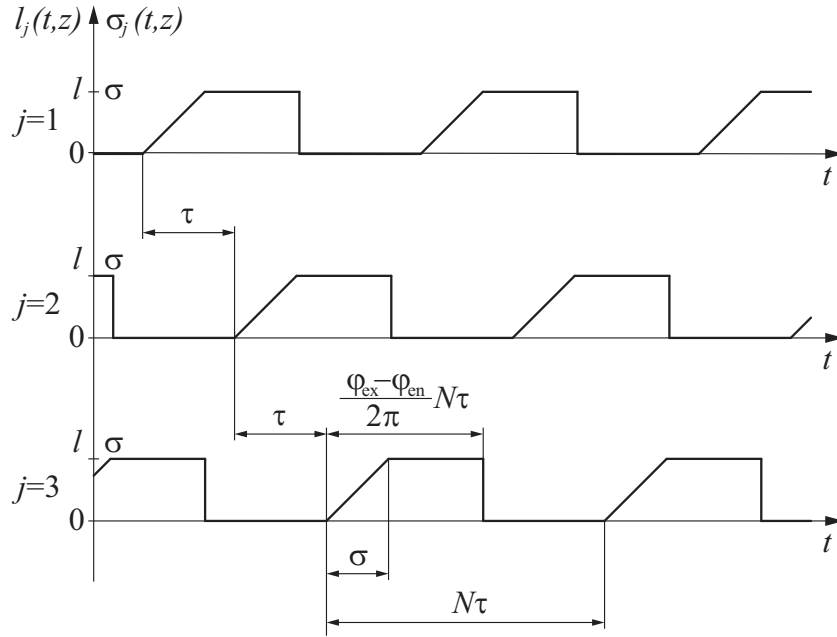
$$\begin{aligned} dF_x(t) &= \sum_{j=1}^N dF_{j,x}(t, z) , \\ dF_y(t) &= \sum_{j=1}^N dF_{j,y}(t, z) . \end{aligned} \quad (4)$$

A forgácsolóerőt a szerszámél mentén állandó intenzitással megoszló erőrendszer eredőjeként modellezzük. A megoszló erő a forgács és a szerszámél találkozásánál levő érintkezési felületen hat. Az érintkezési felület j -edik szerszámélen és z axiális fogásmélységnél érvényes $l_j(t, z)$ hossza időben periodikusan változik. Ennek oka az, hogy marási folyamatok esetén a megmunkálás megszakított jellegű: a szerszám minden fordulatánál az egyes szerszámélek belépnek a munkadarabra és később el is hagyják azt. Anyagba lépéskor a forgács fokozatosan felcsúszik a szerszámél mentén, kialakul a érintkezési felület, majd ahogy a szerszámél elhagyja az anyagot az érintkezési felület megszűnik. Tehát modellünk szerint az érintkezési hossz zérus, amíg a szerszámél a munkadarabon kívül van, lineárisan növekszik az anyagba való belépés pillanatát követően, majd egy maximális l érték elérése után állandó marad az anyagból való kilépésig, ld. 2. ábra. A szerszám D átmérője, a j -edik szerszámél z axiális fogásmélységnél érvényes $\varphi_j(t, z)$ szögelfordulása, valamint a φ_{en} és φ_{ex} be- és kilépési szögek segítségével tehát az alábbi függvény írható fel az érintkezési hossz meghatározására:

$$l_j(t, z) = \begin{cases} 0 & \text{ha } (\varphi_j(t, z) \bmod 2\pi) < \varphi_{en} \text{ or } \varphi_{ex} < (\varphi_j(t, z) \bmod 2\pi) , \\ \frac{D}{2} [(\varphi_j(t, z) \bmod 2\pi) - \varphi_{en}] & \text{ha } \varphi_{en} \leq (\varphi_j(t, z) \bmod 2\pi) < \varphi_{en} + l \frac{2}{D} , \\ l & \text{ha } \varphi_{en} + l \frac{2}{D} \leq (\varphi_j(t, z) \bmod 2\pi) \leq \varphi_{ex} , \end{cases} \quad (5)$$

ahol mod a modulo függvény. A $\varphi_j(t, z)$ szögelfordulás pedig a fordulat/percben mért Ω fordulatszám segítségével írható fel,

$$\varphi_j(t, z) = \frac{2\pi\Omega}{60}t + (j-1)\frac{2\pi}{N} - \Psi(z) , \quad (6)$$



2. ábra. A szerszámél és forgács közötti érintkezési hossz, illetve az ennek megfelelő rövid időkesés időbeli változása a különböző szerszámélek esetén.

ahol $\Psi(z)$ a szerszámél elcsavarodási szöge, mely az 1. ábrán jelölt β szög, illetve az l_p menetemelkedés segítségével kifejezhető:

$$\Psi(z) = \frac{2z \tan \beta}{D} = z \frac{2\pi}{Nl_p} . \quad (7)$$

Ellenirányú marást feltételezve a be és kilépési szögek pedig

$$\varphi_{en} = 0 , \quad \varphi_{ex} = \arccos \left(1 - \frac{2a_e}{D} \right) , \quad (8)$$

ahol a_e a radiális fogásmélység.

A forgácsolóerő komponenseket tehát az $l_j(t, z)$ méretű érintkezési felületen megoszló $P_{j,x}(t, z, s)$ és $P_{j,y}(t, z, s)$ erőrendszer eredőjeként modellezhetjük. A 1. ábrán látható módon felvett $s \in [-l_j(t, z), 0]$ érintkezési felület mentén végigfutó lokális koordináta segítségével a forgácsolóerő számítása az alábbi integrállal történik:

$$\begin{aligned} dF_{j,x}(t, z) &= \int_{-l_j(t, z)}^0 P_{j,x}(t, z, s) ds , \\ dF_{j,y}(t, z) &= \int_{-l_j(t, z)}^0 P_{j,y}(t, z, s) ds . \end{aligned} \quad (9)$$

Jelen tanulmányban azt feltételezzük, hogy a forgácsolóerő állandó intenzitással oszlik meg a szerszámél mentén ideális, azaz szerszámgéprezgésektől mentes forgácsolás esetén. Ekkor a $h_j(t, z)$ forgácsvastagság az érintkezési felület mentén nem változik (s -től független), így a megoszló erő intenzitása pedig a forgácsolóerő és az érintkezési hossz hányadosaként számítható:

$$\begin{aligned} P_{j,x}(t, z, s) &\equiv \frac{dF_{j,x}(t, z)}{l_j(t, z)} , \\ P_{j,y}(t, z, s) &\equiv \frac{dF_{j,y}(t, z)}{l_j(t, z)} . \end{aligned} \quad (10)$$

Szerszámgéprezgések kialakulása során azonban a szerszám hullámos felületet hagy maga után, így a $h_j(t, z, s)$ forgácsvastagság nem lesz állandó az érintkezési felület mentén (függ s -től). Így valójában a megoszló erő sem tekinthető állandó intenzitásúnak, nagyságát az érintkezési felület egy adott pontján az ott érvényes $h_j(t, z, s)$

forgácsvastagság szerint számíthatjuk, azaz

$$\begin{aligned} P_{j,x}(t, z, s) &= \frac{dF_{j,x}^T(t, z, s)}{l_j(t, z)}, \\ P_{j,y}(t, z, s) &= \frac{dF_{j,y}^T(t, z, s)}{l_j(t, z)}, \end{aligned} \quad (11)$$

ahol $dF_{j,x}^T(t, z, s)$ és $dF_{j,y}^T(t, z, s)$ az egyes forgácsolóerő komponensek nagysága az érintkezési felület megfelelő pontján érvényes $h_j(t, z, s)$ forgácsvastagsággal számítva.

A $dF_{j,x}^T(t, z, s)$ és $dF_{j,y}^T(t, z, s)$ erőkomponensek a forgácsvastagság ismeretében például a Taylor által bevezetett ún. háromnegyedes szabály segítségével számíthatók [5]. Először alakítsuk át később jobban kezelhető formára a forgácsolóerő kifejezését, és a szerszámél menti térbeli leírás helyett határozzuk meg, hogy változik a forgácsolóerő időben, ahogy a forgács végighalad az érintkezési felület mentén. Ha a forgácsolás állandó Ω fordulatszám mellett történik, feltételezhetjük, hogy a forgács az állandó $v = D\pi\Omega/60$ vágási sebességgel a csúszik végig az érintkezési felület mentén. Így bevezethetjük az s lokális térbeli koordináta helyett a $\theta = s/v$ lokális időkoordinátát, mely megadja, hogy mennyi idő alatt jut el a forgács adott pontja a szerszámcsúcstól az s koordinátájú pontig. Azaz a lokális időkoordináta a $\theta \in [-\sigma_j(t, z), 0]$ tartományban változik, $\sigma_j(t, z) = l_j(t, z)/v$. Az (5) egyenlet alapján kifejezhető a $\sigma_j(t, z)$ idő, mely alatt a forgács egy pontja végigcsúszik az $l_j(t, z)$ hosszúságú érintkezési felületen:

$$\sigma_j(t, z) = \begin{cases} 0 & \text{ha } (\varphi_j(t, z) \bmod 2\pi) < \varphi_{\text{en}} \text{ or } \varphi_{\text{ex}} < (\varphi_j(t, z) \bmod 2\pi), \\ \frac{(\varphi_j(t, z) \bmod 2\pi) - \varphi_{\text{en}}}{2\pi\Omega/60} & \text{ha } \varphi_{\text{en}} \leq (\varphi_j(t, z) \bmod 2\pi) < \varphi_{\text{en}} + \sigma_2\pi\Omega/60, \\ \sigma & \text{ha } \varphi_{\text{en}} + \sigma_2\pi\Omega/60 \leq (\varphi_j(t, z) \bmod 2\pi) \leq \varphi_{\text{ex}}, \end{cases} \quad (12)$$

ahol $\sigma = l/v$. A $\sigma_j(t, z)$ időfüggvényt a 2. ábra szemlélteti. Így a forgácsolóerő térbeli leírása átranzformálható időbe, azaz a (9) és (11) egyenletek az alábbi formában írhatók fel:

$$\begin{aligned} dF_{j,x}(t, z) &= \int_{-\sigma_j(t, z)}^0 \frac{dF_{j,x}^T(t, z, \theta)}{\sigma_j(t, z)} d\theta, \\ dF_{j,y}(t, z) &= \int_{-\sigma_j(t, z)}^0 \frac{dF_{j,y}^T(t, z, \theta)}{\sigma_j(t, z)} d\theta. \end{aligned} \quad (13)$$

A $dF_{j,x}^T(t, z, \theta)$ és $dF_{j,y}^T(t, z, \theta)$ forgácsolóerő komponensek nagyságát mérések által előállított empirikus formulák segítségével határozhatjuk meg. E formulák megmutatják a forgácsolóerő főbb technológiai paramétereiktől (előtolástól, vágási sebességtől, axiális fogásmélységtől) való függését. A mérések során azonban általában tangenciális és radiális irányú forgácsolóerő komponensek határozhatók meg. Ezért felbontjuk a $dF_{j,x}^T(t, z, \theta)$ és $dF_{j,y}^T(t, z, \theta)$ mennyiségeket tangenciális és radiális összetevőkre, azaz

$$\begin{aligned} dF_{j,x}^T(t, z, \theta) &= dF_{j,t}^T(t, z, \theta) \cos \varphi_j(t, z) + dF_{j,r}^T(t, z, \theta) \sin \varphi_j(t, z), \\ dF_{j,y}^T(t, z, \theta) &= -dF_{j,t}^T(t, z, \theta) \sin \varphi_j(t, z) + dF_{j,r}^T(t, z, \theta) \cos \varphi_j(t, z), \end{aligned} \quad (14)$$

ahol a t és r indexek a tangenciális és radiális irányt jelölik. A Taylor [5] által bevezetett háromnegyedes szabály értelmében a forgácsolóerő az alábbi alakban fejezhető ki a technológiai paraméterek függvényében:

$$\begin{aligned} dF_{j,t}^T(t, z, \theta) &= g_j(t, z) K_t h_j^q(t, z, \theta) dz, \\ dF_{j,r}^T(t, z, \theta) &= g_j(t, z) K_r h_j^q(t, z, \theta) dz, \end{aligned} \quad (15)$$

ahol K_t és K_r jelölik a forgácsolóerő mérésekor meghatározott tangenciális és radiális vágási tényezőket, q pedig szintén mérési konstans, értéke jellemzően $q = 3/4$. A $g_j(t, z)$ függvény megadja, hogy a vizsgált elemi szerszámél szegmens éppen végez-e forgácsolást vagy anyagon kívül mozog,

$$g_j(t, z) = \begin{cases} 1 & \text{ha } \varphi_{\text{en}} < (\varphi_j(t, z) \bmod 2\pi) < \varphi_{\text{ex}}, \\ 0 & \text{egyébként}. \end{cases} \quad (16)$$

Így a (3)-(4) és (13)-(15) egyenleteket felhasználva megkapjuk a forgácsolóerő kifejezését,

$$\begin{aligned} F_x(t) &= \int_0^{a_p} \left[\sum_{j=1}^N \int_{-\sigma_j(t, z)}^0 \frac{g_j(t, z)}{\sigma_j(t, z)} h_j^q(t, z, \theta) [K_t \cos \varphi_j(t, z) + K_r \sin \varphi_j(t, z)] d\theta \right] dz, \\ F_y(t) &= \int_0^{a_p} \left[\sum_{j=1}^N \int_{-\sigma_j(t, z)}^0 \frac{g_j(t, z)}{\sigma_j(t, z)} h_j^q(t, z, \theta) [-K_t \sin \varphi_j(t, z) + K_r \cos \varphi_j(t, z)] d\theta \right] dz. \end{aligned} \quad (17)$$

Emellett $\sigma_j(t, z) = 0$ esetén (amikor egyúttal $g_j(t, z) = 0$) a forgácsolóerőt zérusnak tekintjük, ekkor $F_x(t) = 0$, $F_y(t) = 0$.

A (17) egyenletben kapott forgácsolóerő a szerszám mozgására gerjesztőerőként hat. Amennyiben a szerszám elkezd rezegni, akkor az hullámos felületet hagy maga után. A következő vágás során e hullámos felület befolyásolja a forgácsvastagságot és így a forgácsolóerőt is. Emiatt a szerszámgéprezgések öngerjesztés útján erősödhetnek, a szerszám mozgását leíró egyenletekben pedig időkésés jelenik meg [1, 2]. Ez jól látszik, ha felírjuk a forgácsvastagság kifejezését, mely a szerszám aktuális és az előző vágás során érvényes pozíciójától függ. A szerszám pályát körívvel közelítve és a fogankénti eltolást f_z -vel jelölve a forgácsvastagság kifejezése a következő:

$$h_j(t, z, \theta) = [f_z + x(t - \tau + \theta) - x(t + \theta)] \sin \varphi_j(t, z) + [y(t - \tau + \theta) - y(t + \theta)] \cos \varphi_j(t, z), \quad (18)$$

ahol $\tau = 60/(N\Omega)$ a fogkövetési periódus.

Az (17) és (18) egyenleteket az (1) mozgásegyenletbe visszaírva egy nemlineáris, periodikus együtthatójú, késleltetett differenciálegyenletet kapunk. Az egyenletben szerepel egy τ pont időkésés, melyet regeneratív időkésésnek nevezünk. Ezenkívül megjelenik egy maximum σ hosszúságú megoszló időkésés. A két időkésés aránya $\varepsilon = \sigma/\tau = Nl/(D\pi)$ a maximális érintkezési hossz és az egymást követő fogak közötti ívhossz arányával egyezik meg. Mivel ez az arány jellemzően kicsi, ezért a σ paramétert rövid regeneratív időkésésnek nevezzük.

A kapott mozgásegyenletnek létezik egy $\mathbf{q}_p(t) = [x_p(t) \ y_p(t)]^T$ periodikus megoldása, $\mathbf{q}_p(t) = \mathbf{q}_p(t + \tau)$, mely az ideális, szerszámgéprezgésektől mentes megmunkálási állapotot reprezentálja [4]. Szerszámgéprezgés esetén a mozgásegyenlet megoldását a periodikus megoldás és egy szerszámgéprezgést leíró $\epsilon(t) = [\xi(t) \ \eta(t)]^T$ perturbáció összegeként adhatjuk meg: $\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_p(t) + \epsilon(t)$. Ezt a mozgásegyenletbe helyettesítve és az egyenletet $\mathbf{q}_p(t)$ körül linearizálva az alábbi egyenlethez jutunk:

$$\mathbf{M}\ddot{\epsilon}(t) + \mathbf{C}\dot{\epsilon}(t) + \mathbf{K}\epsilon(t) = \int_0^{a_p} \left[\sum_{j=1}^N \mathbf{G}_j(t, z) \int_{-\sigma_j(t, z)}^0 [\epsilon(t - \tau + \theta) - \epsilon(t + \theta)] d\theta \right] dz, \quad (19)$$

ahol

$$\mathbf{G}_j(t, z) = \begin{bmatrix} G_{j,xx}(t, z) & G_{j,xy}(t, z) \\ G_{j,yx}(t, z) & G_{j,yy}(t, z) \end{bmatrix} \quad (20)$$

egy τ -periodikus együttható mátrix, melynek elemei:

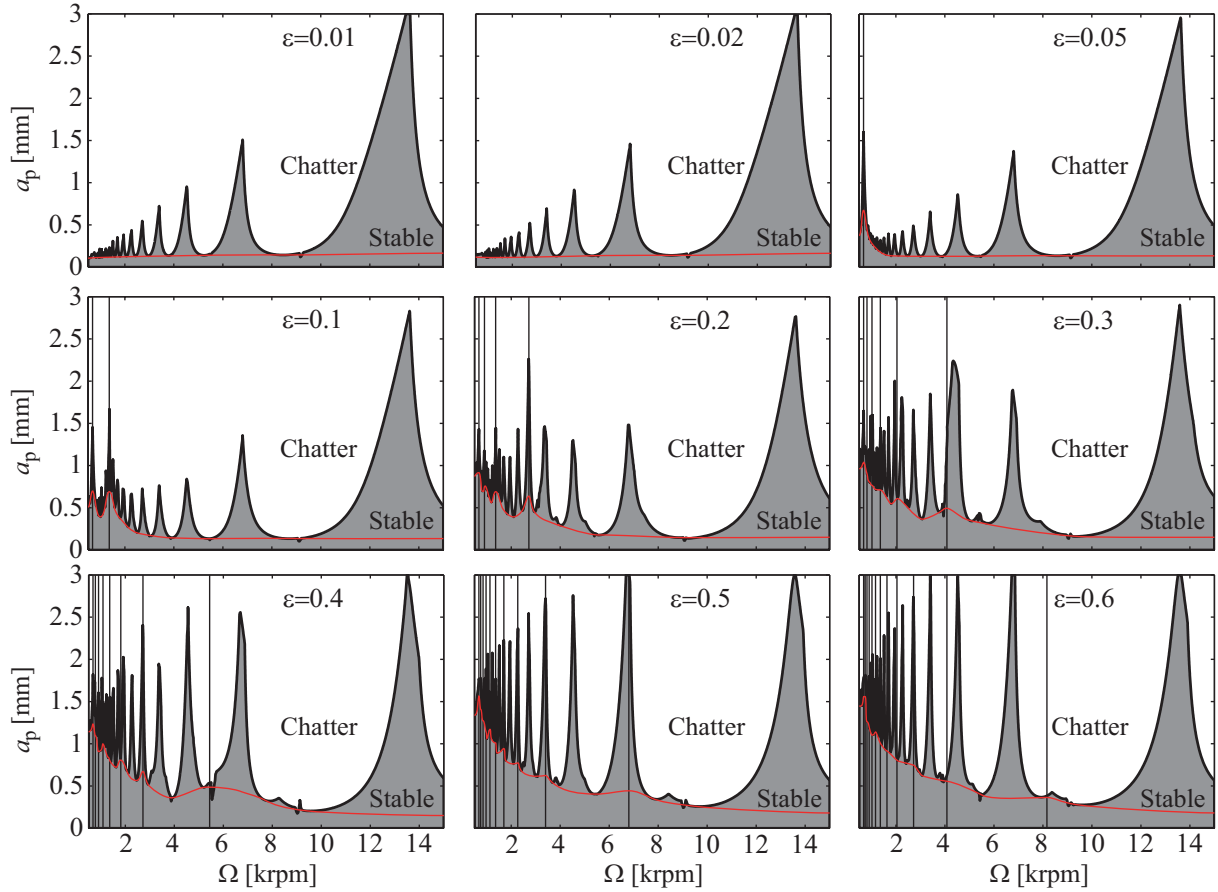
$$\begin{aligned} G_{j,xx}(t, z) &= [K_t \cos \varphi_j(t, z) + K_r \sin \varphi_j(t, z)] \frac{g_j(t, z)}{\sigma_j(t, z)} f_z^{q-1} q \sin^{q-1} \varphi_j(t, z) \sin \varphi_j(t, z), \\ G_{j,xy}(t, z) &= [K_t \cos \varphi_j(t, z) + K_r \sin \varphi_j(t, z)] \frac{g_j(t, z)}{\sigma_j(t, z)} f_z^{q-1} q \sin^{q-1} \varphi_j(t, z) \cos \varphi_j(t, z), \\ G_{j,yx}(t, z) &= [-K_t \sin \varphi_j(t, z) + K_r \cos \varphi_j(t, z)] \frac{g_j(t, z)}{\sigma_j(t, z)} f_z^{q-1} q \sin^{q-1} \varphi_j(t, z) \sin \varphi_j(t, z), \\ G_{j,yy}(t, z) &= [-K_t \sin \varphi_j(t, z) + K_r \cos \varphi_j(t, z)] \frac{g_j(t, z)}{\sigma_j(t, z)} f_z^{q-1} q \sin^{q-1} \varphi_j(t, z) \cos \varphi_j(t, z). \end{aligned} \quad (21)$$

3. STABILITÁSI TÉRKÉPEK

Mivel a szerszámgéprezgéseket leíró (19) egyenlet egy lineáris, periodikus együtthatójú és időkésésű késleltetett differenciál egyenlet, a stabilitásvizsgálat elvégzésére jól alkalmazható a [6] által bevezetett szemi-diszkretizáció. A módszer lényege, hogy az időkéséses tagot, a periodikus együtthatókat és a periodikusan változó időkésést szakaszokként konstans függvénnyel helyettesítve időlépésről időlépésre megoldjuk a differenciálegyenletet. E megoldás által az egyes időlépésekben érvényes rendszerállapotok között felírható egy diszkrét leképezés. A rendszer τ periódusa alatt érvényes leképezések sorozata által létrehozható a rendszer főmátrixa, melynek a sajátértékei meghatározzák a rendszer stabilitását. A módszer részleteit, a hatékony numerikus implementálás főbb szempontjait [4] tartalmazza, itt nem részletezzük azokat.

A stabilitásvizsgálat eredményét stabilitási térképek formájában ábrázolhatjuk, amely az Ω fordulatszám és az a_p axiális fogásmélység síkján mutatja a rendszer stabilitási határait. Ezáltal a szerszámgéprezgéstől mentes megmunkáláshoz tartozó paramétertartományok meghatározhatók, a fordulatszám és axiális fogásmélység paraméterek pedig a kívánt anyagleválasztási sebesség függvényében megválaszthatók.

A kapott stabilitási térképek a 3. ábrán láthatók, ahol 400×200 pontban határoztuk meg a rendszer stabilitását a szemi-diszkretizáció segítségével. E példában egy négyélű ($N = 4$) és $l_p = 15$ mm menetemelkedésű marószerszámmal végzett megmunkálást vizsgáltunk $a_e/D = 0.2$ radiális fogásmélység esetén. A modális tömeg-,



3. ábra. A vizsgált két szabadságfokú marási modell stabilitási térképei különböző maximális érintkezési hossz értékek feltételezésével.

csillapítási és merevségi mátrixok feltételezett értéke

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0.04 & 0 \\ 0 & 0.04 \end{bmatrix} \text{ kg}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \frac{\text{Ns}}{\text{m}}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1300 & 0 \\ 0 & 1300 \end{bmatrix} \frac{\text{kN}}{\text{m}}.$$

E szimmetrikus mátrixokhoz tartozó csillapítatlan sajátfrekvencia $f_n = 907$ Hz, a csillapítási tényező pedig $\zeta = 0.018$. Továbbá feltételeztük, hogy a forgácsolóerő karakterisztika a háromnegyedes szabályt ($q = 3/4$) követi, a tangenciális és radiális vágási tényezők értéke pedig $K_t = 107 \times 10^6 \text{ N/m}^{1+q}$ és $K_r = 40 \times 10^6 \text{ N/m}^{1+q}$. A fogankénti előtolást $f_z = 0.1$ mm értékűnek feltételezve a linearizált vágási tényezők $K_t q f_z^{q-1} = 800 \times 10^6 \text{ N/m}^2$ és $K_r q f_z^{q-1} = 300 \times 10^6 \text{ N/m}^2$.

A 3. ábrán látható stabilitási térkép sorozat különböző térképein a forgács és szerszámél közötti érintkezési felület maximális l hosszát változtattuk. Az l érintkezési hossz és a $D\pi/N$ ívhossz aránya (amely egyben a σ és τ időkések aránya is) rendre $\varepsilon = 0.01, 0.02, 0.05, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$ és 0.6 . A gyakorlatban $\varepsilon > 0.2$ általában nem fordul elő, ekkora nagyságú érintkezési hossz nem alakul ki. Azonban nagy ε értékekre kapott stabilitási térképeket is ábrázolva a rövid regeneratív hatás által okozott változások jól megfigyelhetők. A 3. ábra első két stabilitási térképe a koncentrált forgácsolóerő esetén érvényes stabilitási határgörbékét közelíti. A koncentrált forgácsolóerő az állandó intenzitással megoszló erőrendszer speciális esetének is tekinthető, amikor az érintkezési felület hossza nullához tart, azaz ennek megfelelően $\varepsilon \rightarrow 0$.

A nagyobb érintkezési felületekhez ($\varepsilon \geq 0.05$) tartozó stabilitási térképek esetén látható, hogy a forgácsolóerőt koncentrált erő helyett megoszló erőrendszer segítségével modellezve az alacsony fordulatszámhoz tartozó stabilitási határok kedvező módon magasabb axiális fogásmélység értékek felé tolnak el ahogy az érintkezési felület növekszik. A stabilitási határok alacsony fordulatszámon történő eltolódását kísérletekben is megfigyelték. A jelenség magyarázatára különböző elméletek születtek, ezek közül legismertebb az ún. folyamat csillapítás (process damping) hatás, mely figyelembe veszi a szerszám hátlapjának és a munkadarab hullámos felületének érintkezése során a hátlapon ébredő erőt is [7, 8, 9]. Ezáltal egy fordulatszámmal fordítottan arányos csillapítóerő jelenik meg a rendszer mozgásegyenletében, mely a stabil terület növekedéséhez vezet alacsony fordulatszámok esetén. Hasonló

csillapítóerő komponens jelenik meg a mozgásegyenletben, ha a forgácsolóerő kiszámításánál a (18) forgácsvastagság helyett annak a szerszámcsúcs sebességére vett merőleges vetületét használjuk fel [10]. E modell is egy fordulatszámval fordítottan arányos csillapítóerőhöz vezet. A 3. ábra alapján azonban látható, hogy a stabilitási határok alacsony fordulatszámokon történő eltolódása azáltal is magyarázható, hogy a forgácsolóerőt szerszámcsúcsnál ható koncentrált erő helyett egy szerszámél mentén megoszló erőrendszer eredőjeként modellezzük, azaz az ún. rövid regeneratív hatást figyelembe vesszük.

A folyamat csillapítással ellentétben a rövid regeneratív hatás azonban a magasabb fordulatszámokon érvényes stabilitási határokat is befolyásolja. Látható, hogy a legnagyobb ábrázolt fordulatszámokhoz tartozó stabilitási határgörbék a rövid regeneratív hatás miatt kis mértékben, de módosulnak. Emellett szerszámél mentén állandó intenzitással megoszló erőrendszert feltételezve alacsony fordulatszámokon csúcsok jelennek meg a stabilitási határok piros vonallal jelölt alsó burkolóján. E csúcsok a koncentrált forgácsolóerő modellt feltételezve, illetve pusztán a folyamat csillapítás figyelembe vételével nem mutatkoznak. A csúcsok kis érintkezési felület, azaz $\varepsilon \leq 0.2$ esetén $N\Omega/(60f_n) = \varepsilon, \varepsilon/2, \varepsilon/3, \dots$ dimenziótlan fordulatszámoknál helyezkednek el. Az ehhez tartozó Ω fordulatszámokat a 3. ábrán függőleges vonalakkal jelöltük. Az $N\Omega/(60f_n) = \varepsilon, \varepsilon/2, \varepsilon/3, \dots$ összefüggés a burkoló csúcsainak helyzetére egy szabadságfokú esztergálási modell esetén analitikusan is kiszámítható [11].

4. ÖSSZEFOGLALÁS

Jelen tanulmányban egy két szabadságfokú marási modell stabilitását vizsgáltuk a szemi-diszkrétizáció módszerének segítségével. A forgácsolóerőt szerszámél mentén állandó intenzitással megoszló erőrendszer eredőjeként modelleztük. Így szerszám mozgását egy késleltetett differenciálegyenlet írja le, melyben a regeneratív pont időkézéshez egy periodikusan változó hosszúságú megoszló időkézés adódik. Ugyan a megoszló időkézés a regeneratív időkézéshez képest kicsi, a rendszer stabilitását jelentősen befolyásolhatja, melyet rövid regeneratív hatásnak nevezünk. Megmutattuk, hogy az ún. folyamat csillapításhoz hasonlóan a rövid regeneratív hatás figyelembe vételével magyarázható az a jelenség, hogy a stabilitási határok magasabb fogásmélység értékek felé tolódnak el alacsony fordulatszámok esetén. Ugyanakkor a rövid regeneratív hatás miatt magasabb fordulatszámokon változhat a rendszer stabilitása, illetve további csúcsok jelennek meg a stabilitási határok alsó burkológörbéjén.

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Az ezekhez az eredményekhez vezető kutatás az Európai Kutatási Tanács (ERC) részéről, az Európai Közösség hetedik keretprogramjából (2007-2013), az EKT 340889 sz. haladó kutatási támogatási megállapodása (Advanced Grant Agreement) valamint a K105433 sz. OTKA projekt alapján finanszírozásban részesült.

HIVATKOZÁSOK

- [1] S. A. TOBIAS, W. FISHWICK. Theory of regenerative machine tool chatter. *The Engineer*, 199-203, 238-239, 1958.
- [2] J. TLUSTY, M. POLACEK. The stability of the machine tool against self-excited vibration in machining. ASME Production Engineering Research Conference, Pittsburgh, 454-465, 1963.
- [3] G. STÉPÁN. Delay-differential equation models for machine tool chatter. In F. C. Moon (Ed.), *Nonlinear Dynamics of Material Processing and Manufacturing*, 165-192. John Wiley and Sons, New York, 1998.
- [4] T. INSPERGER, G. STÉPÁN. *Semi-discretization for time-delay systems - stability and engineering applications*. Springer, New York, 2011.
- [5] F. W. TAYLOR. *On the art of cutting metals*. American Society of Mechanical Engineers, New York, 1907.
- [6] T. INSPERGER, G. STÉPÁN. Semi-discretization method for delayed systems. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, **55**(5):503-518, 2002.
- [7] B. E. CLANCY, Y. C. SHIN. A comprehensive chatter prediction model for face turning operation including tool wear effect. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, **42**(9):1035-1044, 2002.
- [8] K. AHMADI, F. ISMAIL. Experimental investigation of process damping nonlinearity in machining chatter. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, **50**(11):1006-1014, 2010.
- [9] Y. SHI, F. MAHR, U. VON WAGNER, E. UHLMANN. Chatter frequencies of micromilling processes: Influencing factors and online detection via piezoactuators. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, **56**:10-16, 2012.
- [10] Y. ALTINTAS. *Manufacturing Automation - Metal Cutting Mechanics, Machine Tool Vibrations and CNC Design, Second Edition*. Cambridge University Press, Cambridge, 2012.
- [11] T. G. MOLNÁR. Analysis of the short regenerative effect for milling processes. Master's thesis, University of Bristol (UK) and Budapest University of Technology and Economics (Hungary), 2015.