

SPECIJALNE MATEMATIČKE RELACIJE IZMEĐU UGIBA LANČANICE U KOSOM I RAVNOM RASPONU

SPECIAL MATHEMATICAL RELATIONSHIPS BETWEEN THE SAGS OF THE CATENARY IN INCLINED AND LEVEL SPANS

Alen Hatibović
Electrical Engineering
Mađarska
hatibovic.alen@gmail.com

Sažetak: Rad prikazuje unikatne matematičke relacije između ugiba lančanice u kosom i ravnom rasponu koje se odnose na specijalan slučaj kada su oba raspona iste dužine a obje krive voda imaju isti parametar lančanice. Tada su dvije krive voda zapravo različiti dijelovi jedne te iste lančanice ali u različitim intervalima jednake dužine. Pri zadovoljenim navedenim uslovima pruža se mogućnost za određivanje ugiba u kosom rasponu na osnovu zadanog ugiba u ravnom rasponu. Nove relacije su izvedene analitičkim putem a njihova primjena je prikazana u prikladnim numeričkim primjerima. Izvršena je analiza lančanice s aspekta projektovanja nadzemnih vodova pri promjeni ugla kosine raspona.

Ključne riječi: nadzemni vodovi, ugao kosine raspona, ugib provodnika, lančanica, ravni raspon, kosi raspon

Abstract: This paper presents unique mathematical relationships between the sags of the catenary in inclined and level spans in a special case when the span length is a common datum for the two spans and both conductor curves have the same catenary parameter. Then the two conductor curves are in fact parts of one and the same catenary curve but in different intervals of the same length. If the mentioned conditions are fulfilled, it is possible to determine the sag in an inclined span by the given sag in a level span. New relationships have been derived analytically whereas their application has been shown by suitable numerical examples. The catenary curve has been analysed from the aspect of overhead line design when the angle of the span inclination changes.

Keywords: overhead lines, angle of the span inclination, conductor sag, catenary, level span, inclined span

UVOD

S obzirom na specifičnost teme ovog rada uvedene su u indeksu posebne oznake za ravni raspon (*lev*) i oznake za kosi raspon (*inc*) kao što je to navedeno na sljedećoj listi:

$y_{lev}(x)$ – jednačina krive voda u ravnom rasponu

$y_{inc}(x)$ – jednačina krive voda u kosom rasponu

$y_{s lev}(x)$ – jednačina spojnice u ravnom rasponu

$y_{s inc}(x)$ – jednačina spojnice u kosom rasponu

$f_{lev}(x)$ – jednačina ugiba u ravnom rasponu

$f_{inc}(x)$ – jednačina ugiba u kosom rasponu

$f_{lev}(a/2)$ – ugib na sredini ravnog raspona

$f_{inc}(a/2)$ – ugib na sredini kosog raspona

f_{lev} – najveći ugib u ravnom rasponu

f_{inc} – najveći ugib u kosom rasponu

$\Delta f(x)$ – jednačina razlike između ugiba u kosom i ravnom rasponu

$\Delta f(a/2)$ – razlika između ugiba u kosom i ravnom rasponu koja se odnosi na sredinu raspona

Δf – razlika između najvećih ugiba u kosom i ravnom rasponu

Ulazni podaci za proračun su:

a – dužina raspona

h_1 – visina tačke vješanja voda na lijevom stubu

h_2 – visina tačke vješanja voda na desnom stubu

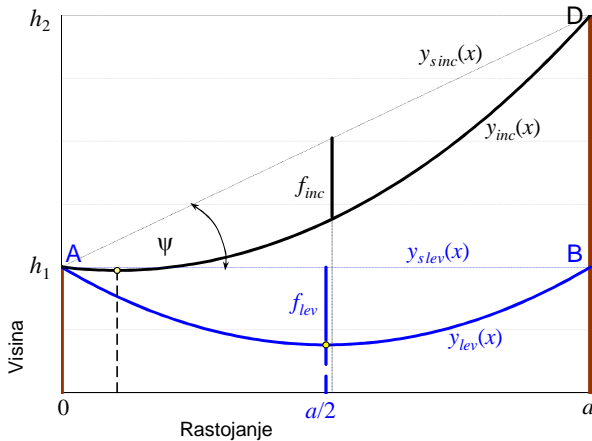
c – parametar lančanice

Kao što je navedeno u sažetku početni uslovi za sve dedukcije prikazane u ovom radu su sljedeći:

$$a_{lev} = a_{inc} = a \quad (1)$$

$$c_{lev} = c_{inc} = c \quad (2)$$

U ravnom rasponu je $h_1=h_2$, a u kosom rasponu $h_1 \neq h_2$. Nezavisno od vrste raspona pod njegovom dužinom se smatra vodoravno rastojanje između tačaka vješanja voda. Slika 1 prikazuje zajedno obje vrste raspona a takođe i osnovne oznake koje se koriste u ovom radu. Ugao kosine raspona [1] obilježen je sa ψ . Tačke A i B predstavljaju tačke vješanja voda u ravnom rasponu a tačke A i D u kosom rasponu.



Slika 1: Ravni i kosi raspon na zajedničkom crtežu

Slike 2 i 3 prikazuju u praksi dva osnovna tipa raspona.



Slika 2: Ravni rasponi



Slika 3: Kosi raspon

1. RELACIJA IZMEĐU UGIBA LANČANICE U KOSOM I RAVNOM RASPONU

1.1 Određivanje i analiza izraza za $\Delta f(x)$

S obzirom da je ugib lančanice u kosom rasponu pretežno veći od ugiba u ravnom rasponu, osnovna jednačina koja predstavlja razliku između ovih ugiba u bilo kojoj tački x raspona a je ovde data izrazom (3).

$$\Delta f(x) = f_{inc}(x) - f_{lev}(x), \quad x \in [0, a] \quad (3)$$

Prema Slici 1, izraz za $f_{inc}(x)$ određuje se na osnovu (4) a krajnji oblik je (5) [2].

$$f_{inc}(x) = y_{sinc}(x) - y_{inc}(x), \quad x \in [0, a] \quad (4)$$

$$f_{inc}(x) = \frac{h_2 - h_1}{a} x - 2c \cdot \left[\text{sh}^2 \left(\frac{a}{4c} - \frac{x}{2c} - \frac{1}{2} \text{arsh} \frac{h_2 - h_1}{2c \cdot \text{sh} \frac{a}{2c}} \right) - \text{sh}^2 \left(\frac{a}{4c} - \frac{1}{2} \text{arsh} \frac{h_2 - h_1}{2c \cdot \text{sh} \frac{a}{2c}} \right) \right] \quad (5)$$

U cilju određivanja $\Delta f(x)$, uz upotrebu identiteta (6), (7) [3] i (8) [4], potrebno je prethodni izraz transformisati u njemu ekvivalentan izraz (9) [5].

$$2c \cdot \text{sh}^2 \frac{x}{2c} = c \cdot \text{ch} \frac{x}{c} - c \quad (6)$$

$$\text{ch}(x) - \text{ch}(y) = 2 \cdot \text{sh} \frac{x+y}{2} \cdot \text{sh} \frac{x-y}{2} \quad (7)$$

$$\text{sh}(-x) = -\text{sh}(x) \quad (8)$$

$$f_{inc}(x) = \frac{h_2 - h_1}{a} x - 2c \cdot \text{sh} \frac{x}{2c} \cdot \text{sh} \left(\frac{x-a}{2c} + \text{arsh} \frac{h_2 - h_1}{2c \cdot \text{sh} \frac{a}{2c}} \right), \quad x \in [0, a] \quad (9)$$

Jednačina ugiba u ravnom rasponu proizlazi iz izraza (10) na osnovu Slike 1, ali se može i jednostavnije odrediti uvrštavajući h_1 umjesto h_2 u jednačini (9). Koristeći (8) krajnji izraz je dat sa (11).

$$f_{lev}(x) = y_{slev}(x) - y_{lev}(x), \quad x \in [0, a] \quad (10)$$

$$f_{lev}(x) = 2c \cdot \text{sh} \frac{x}{2c} \cdot \text{sh} \frac{a-x}{2c}, \quad x \in [0, a] \quad (11)$$

Razlika (9) i (11) predstavlja $\Delta f(x)$:

$$\Delta f(x) = \frac{h_2 - h_1}{a} x - 2c \cdot \text{sh} \frac{x}{2c} \cdot \left[\text{sh} \left(\frac{x-a}{2c} + \text{arsh} \frac{h_2 - h_1}{2c \cdot \text{sh} \frac{a}{2c}} \right) + \text{sh} \frac{a-x}{2c} \right] \quad (12)$$

Primjenjujući identitete (13) [6] i (14) [4] prethodni izraz postaje (15).

$$\operatorname{sh}(x) + \operatorname{sh}(y) = 2 \cdot \operatorname{sh} \frac{x+y}{2} \cdot \operatorname{ch} \frac{x-y}{2} \quad (13)$$

$$\operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch}(x) \quad (14)$$

$$\Delta f(x) = \frac{h_2 - h_1}{a} x - 4c \cdot \operatorname{sh} \frac{x}{2c} \cdot \operatorname{sh} \left(\frac{1}{2} \operatorname{arsh} \frac{h_2 - h_1}{2c \cdot \operatorname{sh} \frac{a}{2c}} \right) \cdot \operatorname{ch} \left(\frac{a-x}{2c} - \frac{1}{2} \operatorname{arsh} \frac{h_2 - h_1}{2c \cdot \operatorname{sh} \frac{a}{2c}} \right) \quad (15)$$

$\Delta f(x)$ je funkcija od x tako da se može koristiti za izračunavanje razlike između ugiba lančanice u kosom i ravnom rasponu u bilo kojoj tački raspona, tj. intervala $[0, a]$. Primjena izraza (15) opisana je u potpoglavlju 1.2.

1.1.1 Analiza funkcije $\Delta f(x)$

Osobine $\Delta f(x)$ kao funkcije je moguće odrediti njenom analizom pri promjeni ugla kosine raspona ψ , tj. pri promjeni vertikalog rastojanja između tačaka vješanja voda $\Delta h = h_2 - h_1$. U tu svrhu izrađeni su prikladni numerički primjeri. Primjer A sadrži jednu krivu voda ($y_1(x)$) u ravnom rasponu i četiri druge ($y_2(x)$, $y_3(x)$, $y_4(x)$, $y_5(x)$) u kosim rasponima (Slika 4). Visina tačke vješanja na lijevom stubu je jednaka kod svih pet raspona dok je na desnom stubu u svakom narednom rasponu viša nego u prethodnom, simulirajući na taj način rast ugla kosine raspona i Δh . Dužina raspona a kao i parametar lančanice c su zajednički podaci za sve raspone. U Primjeru A na Slici 5 prikazane su sljedeće četiri krive $\Delta f(x)$:

$$\Delta f_1(x) = f_2(x) - f_1(x), \dots, \Delta f_4(x) = f_5(x) - f_1(x) \quad (16)$$

Na osnovu Slike 4 i Slike 5, kada je razlika visina ovješena Δh razmjerno mala (u ovom primjeru to vrijedi za slučaj funkcija $\Delta f_1(x)$ i $\Delta f_2(x)$), onda $\Delta f(x)$ ima tri nule (rješenja) unutar raspona, $x=0$, $x=r$ (tačka infleksije funkcije $\Delta f(x)$) i $x=a$, te mijenja predznak. Sa povećanjem Δh središnja nula r se pomjera prema sljedećoj bližoj nuli, a zatim prestaje da egzistira unutar raspona. Tada $\Delta f(x)$ više ne mijenja predznak i $f_{inc}(x) > f_{lev}(x)$ u intervalu $(0, a)$. Razmatrajući sve četiri krive na Slici 5 može se zaključiti da je apsolutna vrijednost minimuma $\Delta f(x)$, tj. $|\Delta f_{min}|$, kada postoji u intervalu $(0, a)$, sasvim neznatna. S druge strane vrijednost maksimuma $\Delta f(x)$, tj. Δf_{max} , postaje znatna sa porastom Δh .

Primjer B je izrađen kao simetrična slika Primjera A u cilju demonstracije univerzalnosti izvedene jednačine za $\Delta f(x)$. Naime, u ovom primjeru je visina tačke vješanja na desnom stubu jednaka za sve raspone dok na lijevom stubu raste u svakom narednom rasponu (Slika 6). Četiri krive $\Delta f(x)$ prikazane u Primjeru B na Slici 7 su sljedeće:

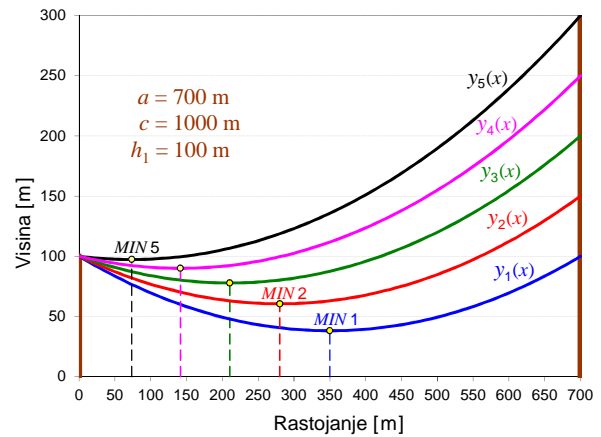
$$\Delta f_I(x) = f_{II}(x) - f_I(x), \dots, \Delta f_{IV}(x) = f_V(x) - f_I(x) \quad (17)$$

Ulazni podaci za ravni raspon su isti u oba primjera, te je $f_I(x) \equiv f_I(x)$. Na krivim voda su oznakom *MIN* obilježene najniže tačke voda (lančanice).

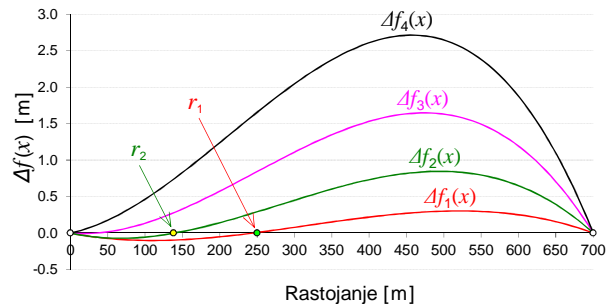
Primjer A:

Tabela I: Ulazni podaci za Primjer A

Podaci	1	2	3	4	5
a [m]	700	700	700	700	700
h_1 [m]	100	100	100	100	100
h_2 [m]	100	150	200	250	300
c [m]	1000	1000	1000	1000	1000



Slika 4: Krive voda u Primjeru A



Slika 5: Krive $\Delta f(x)$ u Primjeru A

Ako je kosi raspon tipa $h_1 < h_2$, onda za funkciju $\Delta f(x)$ važe sljedeće relacije:

Slučaj 1 ($\Delta f(x)$ ima tri rješenja):

$$\Delta f(x) < 0 \wedge f_{inc}(x) < f_{lev}(x) \quad \forall x \in (0, r) \quad (18)$$

$$\Delta f(x) > 0 \wedge f_{inc}(x) > f_{lev}(x) \quad \forall x \in (r, a) \quad (19)$$

$$(\Delta f)_{max} > |(\Delta f)_{min}| \quad (20)$$

Slučaj 2 ($\Delta f(x)$ ima dva rješenja):

$$\Delta f(x) > 0 \wedge f_{inc}(x) > f_{lev}(x) \quad \forall x \in (0, a) \quad (21)$$

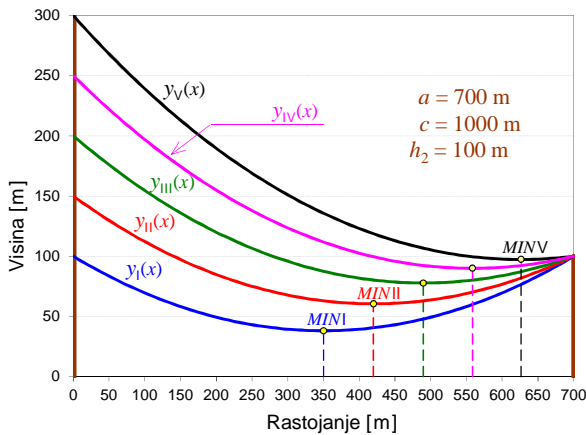
U ovom slučaju funkcija $\Delta f(x)$ ima maksimum, a nema minimum u intervalu $(0, a)$.

Na osnovu Slike 5 evidentno je da pozitivne vrijednosti razlike ugiba $\Delta f(x)$ dominiraju u svim slučajevima, pa čak i kod razmjerno malih razlika u visini ovjesišta kao kod funkcija $\Delta f_1(x)$ i $\Delta f_2(x)$.

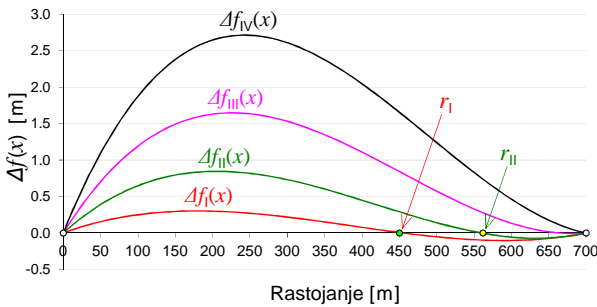
Primjer B:

Tabela II: Ulazni podaci za Primjer B

Podaci	I	II	III	IV	V
a [m]	700	700	700	700	700
h_1 [m]	100	150	200	250	300
h_2 [m]	100	100	100	100	100
c [m]	1000	1000	1000	1000	1000



Slika 6: Krive voda u Primjeru B



Slika 7: Krive $\Delta f(x)$ u Primjeru B

Ako je kosi raspon tipa $h_1 > h_2$, onda za funkciju $\Delta f(x)$ važe sljedeće relacije:

Slučaj I ($\Delta f(x)$ ima tri rješenja):

$$\Delta f(x) > 0 \wedge f_{inc}(x) > f_{lev}(x) \quad \forall x \in (0, r) \quad (22)$$

$$\Delta f(x) < 0 \wedge f_{inc}(x) < f_{lev}(x) \quad \forall x \in (r, a) \quad (23)$$

$$(\Delta f)_{max} > |(\Delta f)_{min}| \quad (24)$$

Slučaj II ($\Delta f(x)$ ima dva rješenja):

$$\Delta f(x) > 0 \wedge f_{inc}(x) > f_{lev}(x) \quad \forall x \in (0, a) \quad (25)$$

U ovom slučaju funkcija $\Delta f(x)$ u intervalu $(0, a)$ ima maksimum, a nema minimum.

Na osnovu Slike 7 evidentno je da pozitivne vrijednosti razlike ugiba $\Delta f(x)$ dominiraju u svim slučajevima, pa čak i kod razmjerno malih razlika u visini ovjesišta kao kod funkcija $\Delta f_I(x)$ i $\Delta f_{II}(x)$.

1.2 Nova relacija između $f_{inc}(x)$ i $f_{lev}(x)$

Izraz (15) se može praktično iskoristiti za određivanje matematičke relacije između ugiba lančanice u kosom i ravnom rasponu na sljedeći način. Naime, transformacijom (3) u (26) moguće je izračunati ugib u kosom rasponu na osnovu zadanog ugiba u ravnom rasponu. Za to su potrebni ulazni podaci a , h_1 i c , dok se h_2 podatak za formiranje kosog raspona može proizvoljno odabrati.

$$f_{inc}(x) = f_{lev}(x) + \Delta f(x), \quad x \in [0, a] \quad (26)$$

Nakon uvrštavanja (15) prethodni izraz dobija krajnji oblik:

$$f_{inc}(x) = f_{lev}(x) + \frac{h_2 - h_1}{a} x - 4c \cdot \text{sh} \frac{x}{2c} \cdot \text{sh} \left(\frac{1}{2} \text{arsh} \frac{h_2 - h_1}{2c \cdot \text{sh} \frac{a}{2c}} \right) \cdot \text{ch} \left(\frac{a - x}{2c} - \frac{1}{2} \text{arsh} \frac{h_2 - h_1}{2c \cdot \text{sh} \frac{a}{2c}} \right) \quad (27)$$

Primjena (27) demonstrirana je pomoću (15) i (26) u narednom praktičnom primjeru. U Tabeli III dati su podaci za ravni, a u Tabeli IV za kosi raspon. Pokazano je izračunavanje promjene ugiba voda u proizvoljno odabranoj tački $x=550$ m, tj. $\Delta f(550)$, kada se tačka vješanja voda na desnom stubu podigne za 200 m, a da pri tome podaci a i c ostanu nepromijenjeni. Potom je određen ugib voda u kosom rasponu u istoj tački ($x=550$ m), te su na zajedničkom ctrežu (Slika 8) prikazane obje krive voda i oba ugiba. Krive voda su $y_1(x)$ i $y_5(x)$ iz Primjera A, na koje se odnosi funkcija $\Delta f_4(x)$ na Slici 5.

Primjer C:

Tabela III: Ulazni podaci za ravni raspon u Primjeru C

a [m]	h_1 [m]	h_2 [m]	c [m]	$f_{lev}(550)$
700	100	100	1000	41,811

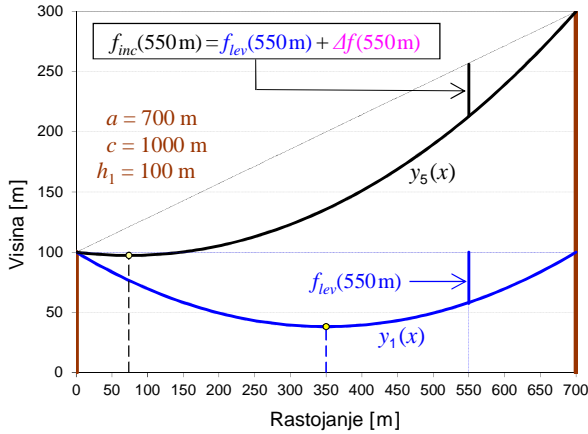
Tabela IV: Ulazni podaci za kosi raspon u Primjeru C

a [m]	h_1 [m]	h_2 [m]	c [m]	$f_{inc}(550)$
700	100	300	1000	?

$$\Delta f(550\text{m}) = \frac{300-100}{700} \cdot 550 - 4 \cdot 10^3 \cdot \text{sh} \frac{550}{2 \cdot 10^3} \cdot \text{sh} \left(\frac{1}{2} \text{arsh} \frac{300-100}{2 \cdot 10^3 \cdot \text{sh} \frac{700}{2 \cdot 10^3}} \right) \cdot \text{ch} \left(\frac{700-550}{2 \cdot 10^3} - \frac{1}{2} \text{arsh} \frac{300-100}{2 \cdot 10^3 \cdot \text{sh} \frac{700}{2 \cdot 10^3}} \right) = 2,384 \text{ m}$$

Stoga je

$$f_{inc}(550 \text{ m}) = f_{lev}(550 \text{ m}) + \Delta f(550 \text{ m}) = 41,811 \text{ m} + 2,384 \text{ m} = 44,195 \text{ m}$$



Slika 8: Krive voda i ugiba u ravnom i kosom rasponu

Dakle, u ovom primjeru je u odabranoj tački raspona određen ugib u kosom rasponu na osnovu poznatog ugiba u ravnom rasponu. Razlika između dvaju ugiba ovde iznosi 2,384 m.

Mjesto x_u maksimuma funkcije $\Delta f(x)$ kada je $h_1 < h_2$ određuje se – prema izrazu (28) – njezinim deriviranjem i izjednačavanjem s nulom: $d(\Delta f(x))/dx = 0$ (vidi PRILOG).

$$x_u = \frac{1}{2} \cdot \left[a - c \cdot \operatorname{arsh} \frac{h_2 - h_1}{2c \cdot \operatorname{sh}(a/2c)} \right] + c \cdot \operatorname{arch} \frac{h_2 - h_1}{2a \cdot \operatorname{sh} \left[\frac{1}{2} \cdot \operatorname{arsh} \frac{h_2 - h_1}{2c \cdot \operatorname{sh}(a/2c)} \right]} \quad \forall \quad h_1 < h_2 \quad (28)$$

Na osnovu podataka u Primjeru C je $x_u = 457,361$ m. Dakle, u toj tački raspona funkcija $\Delta f_4(x)$ ima maximum.

1.2.1 Relacija između $f_{inc}(a/2)$ i $f_{lev}(a/2)$

Ako je $x=a/2$ onda proizlazi specijalan slučaj relacije (26) koji je dat sa (29) a nakon uvrštavanja ulaznih podataka postaje (30), uzimajući u obzir da je $f_{lev}(a/2) = f_{lev}$.

$$f_{inc}(a/2) = f_{lev}(a/2) + \Delta f(a/2) \quad (29)$$

$$f_{inc}(a/2) = f_{lev} + \frac{h_2 - h_1}{2} - 4c \cdot \operatorname{sh} \frac{a}{4c} \cdot \operatorname{sh} \left(\frac{1}{2} \operatorname{arsh} \frac{h_2 - h_1}{2c \cdot \operatorname{sh} \frac{a}{2c}} \right) \cdot \operatorname{ch} \left(\frac{a}{4c} - \frac{1}{2} \operatorname{arsh} \frac{h_2 - h_1}{2c \cdot \operatorname{sh} \frac{a}{2c}} \right) \quad (30)$$

Prethodni izraz predstavlja relaciju između ugiba lančanice u kosom i ravnom rasponu koja se odnosi na sredinu raspona.

1.3 Postojeća relacija između $f_{inc}(x)$ i $f_{lev}(x)$

U ranijoj stručnoj literaturi vrlo je čest navod da se ugib u kosom rasponu može odrediti na osnovu ugiba u ravnom rasponu tako što se posljednji pomnoži sa koeficijentom

$1/\cos\psi$. Prema objašnjenju opisanom u [7] pomenuti navod se odnosi ne samo na ugib u sredini raspona nego uopšteno važi za ugib u bilo kojoj tački raspona. To se može izraziti matematički pomoću sljedeće relacije:

$$f_{inc}(x) = \frac{1}{\cos\psi} \cdot f_{lev}(x), \quad x \in [0, a] \quad (31)$$

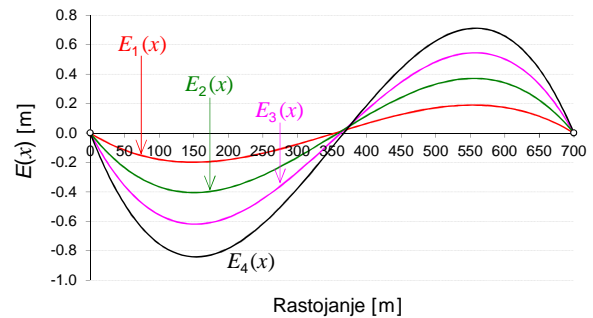
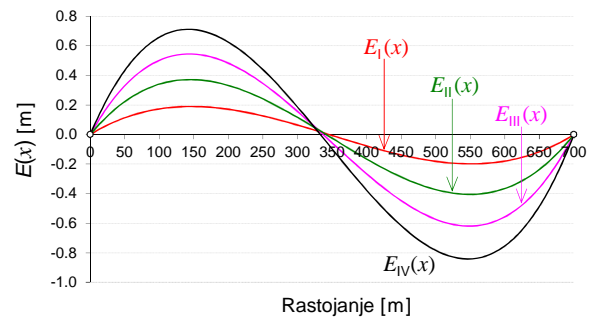
Inače koeficijent $1/\cos\psi$ se određuje pomoću (32) [5] što znači da je za to dovoljno poznavanje ulaznih podataka navedenih u uvodu ovog rada.

$$\frac{1}{\cos\psi} = \frac{\sqrt{a^2 + (h_2 - h_1)^2}}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{h_2 - h_1}{a} \right)^2} \quad (32)$$

Relacija (31) je približna jer se razlikuje od matematički tačne relacije date sa (27). Stoga je korisno prikazati funkciju greške $E(x)$ koju uzrokuje upotreba približne relacije. Pomoću jednačine (33) moguće je odrediti veličinu greške u bilo kojoj tački raspona.

$$E(x) = f_{inc}(x) - \sqrt{1 + \left(\frac{h_2 - h_1}{a} \right)^2} \cdot f_{lev}(x), \quad x \in [0, a] \quad (33)$$

Koristeći ulazne podatke iz Primjera A i Primjera B na Slici 9 i Slici 10 predstavljene su po četiri krive $E(x)$ pri različitim uglovima kosine raspona ψ , tj. pri različitim Δh .


 Slika 9: Krive $E(x)$ na osnovu Primjera A

 Slika 10: Krive $E(x)$ na osnovu Primjera B

Na osnovu dvije prethodne slike uočljivo je da razlika između $|E_{min}|$ i E_{max} nije znatna. Lokacije E_{min} i E_{max} u rasponu su u blizini tačaka $x=a/4$ i $x=3a/4$ retrospektivno, ako je $h_1 < h_2$, odnosno tačaka $x=3a/4$ i $x=a/4$, ako je $h_1 > h_2$. Takođe, vidi se da $E(x)$ ima dvije fiksne nule, $x_1=0$ i $x_2=a$, a između njih takođe i treću (središnju). Sa porastom Δh središnja nula se blago pomjera prema sljedećoj bližjoj nuli, ali je njena lokacija uvijek vrlo blizu sredine raspona $x=a/2$. Ako se mjesto središnje nule duž raspona označi sa z onda slijedi jednakost:

$$E(0) = E(z) = E(a) = 0 \quad (34)$$

S obzirom da $E(x)$ mijenja predznak unutar raspona, važe sljedeće matematičke relacije:

Slučaj A: $h_1 < h_2$ (Slika 9 na osnovu Primjera A)

$$E(x) < 0 \wedge f_{inc}(x) < \frac{f_{lev}(x)}{\cos\psi} \quad \forall x \in (0, z) \quad (35)$$

$$E(x) > 0 \wedge f_{inc}(x) > \frac{f_{lev}(x)}{\cos\psi} \quad \forall x \in (z, a) \quad (36)$$

Slučaj B: $h_1 > h_2$ (Slika 10 na osnovu Primjera B):

$$E(x) > 0 \wedge f_{inc}(x) > \frac{f_{lev}(x)}{\cos\psi} \quad \forall x \in (0, z) \quad (37)$$

$$E(x) < 0 \wedge f_{inc}(x) < \frac{f_{lev}(x)}{\cos\psi} \quad \forall x \in (z, a) \quad (38)$$

Na osnovu gore navedenog proističe zaključak da primjena približne relacije date sa (31) uzrokuje grešku koja je u jednom dijelu raspona negativna a u drugom pozitivna, ili obratno, u zavisnosti od vrste kosog raspona, $h_1 < h_2$ ili $h_1 > h_2$.

2. RELACIJA IZMEĐU NAJVEĆIH UGIBA LANČANICE U KOSOM I RAVNOM RASPONU

2.1 Nova relacija između f_{inc} i f_{lev}

Zadatak ovog poglavlja je određivanje matematičke relacije čiji je osnovni oblik sljedeći:

$$f_{inc} = f_{lev} + \Delta f \quad (39)$$

Na osnovu strukture (39), to je zapravo pojednostavljenje izraza (26). Međutim, unatoč tome (39) nije moguće direktno odrediti iz (26) jer se lokacije najvećih ugiba lančanice u kosom i ravnom rasponu razlikuju. Ali za određivanje (39) izraženog kao $f_{inc} = f_{inc}(f_{lev}, a, h_1, h_2, c)$ može poslužiti (40) čije je izvođenje prikazano u [2].

$$f_{inc} = c \cdot \frac{h_2 - h_1}{a} \left(\frac{a}{2c} - \operatorname{arsh} \frac{h_2 - h_1}{2c \cdot \operatorname{sh} \frac{a}{2c}} + \operatorname{arsh} \frac{h_2 - h_1}{a} \right) - 2c \cdot \operatorname{sh}^2 \left(\frac{1}{2} \operatorname{arsh} \frac{h_2 - h_1}{a} \right) + 2c \cdot \operatorname{sh}^2 \left(\frac{a}{4c} - \frac{1}{2} \operatorname{arsh} \frac{h_2 - h_1}{2c \cdot \operatorname{sh} \frac{a}{2c}} \right) \quad (40)$$

Ovo je izraz za najveći ugib lančanice u kosom rasponu a određen je na osnovu ulaznih podataka a , h_1 , h_2 , c . Uvrštavanjem h_1 umjesto h_2 , (40) postaje (41), tj. izraz za najveći ugib lančanice u ravnom rasponu, određen na osnovu a i c , tj. $f_{lev} = f_{lev}(a, c)$.

$$f_{lev} = 2c \cdot \operatorname{sh}^2 \frac{a}{4c} \quad (41)$$

Ako se desna strana jednačine (40) proširi izrazom (42), dobijenim preuređenjem relacije (41), jednakost neće biti

narušena a predstavljaće traženu novu relaciju između f_{inc} i f_{lev} datu sa (43), a čiji je osnovni oblik (39).

$$f_{lev} - 2c \cdot \operatorname{sh}^2 \frac{a}{4c} = 0 \quad (42)$$

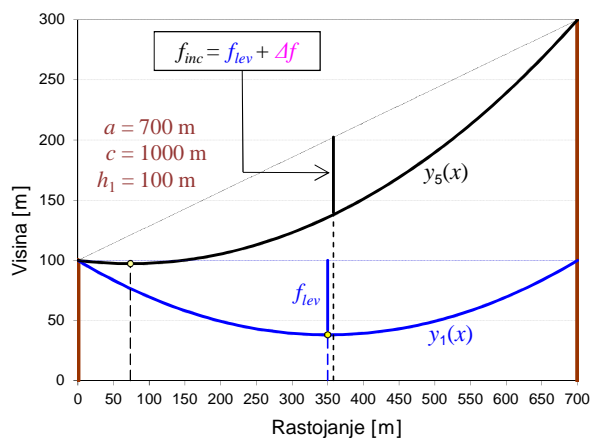
$$f_{inc} = f_{lev} + c \cdot \frac{h_2 - h_1}{a} \left(\frac{a}{2c} - \operatorname{arsh} \frac{h_2 - h_1}{2c \cdot \operatorname{sh} \frac{a}{2c}} + \operatorname{arsh} \frac{h_2 - h_1}{a} \right) - 2c \cdot \operatorname{sh}^2 \left(\frac{1}{2} \operatorname{arsh} \frac{h_2 - h_1}{a} \right) + 2c \cdot \operatorname{sh}^2 \left(\frac{a}{4c} - \frac{1}{2} \operatorname{arsh} \frac{h_2 - h_1}{2c \cdot \operatorname{sh} \frac{a}{2c}} \right) - 2c \cdot \operatorname{sh}^2 \frac{a}{4c} \quad (43)$$

Dakle, izraz (43) je ekvivalentan izrazu (40), ali (43) sadrži f_{lev} , te se kao takav može smatrati matematičkom relacijom između najvećih ugiba lančanice u kosom i ravnom rasponu. Razlika između dvaju ugiba je $\Delta f = \Delta f(a, h_1, h_2, c)$. U Tabeli V predstavljeni su najveći ugibi svih lančanica u Primjeru A i Primjeru B, a takođe i razlika između najvećih ugiba u kosom i ravnom rasponu.

Tabela V: Najveći ugibi krivih voda

Kriva voda	f_{lev} [m]	f_{inc} [m]	Δf [m]
$y_1(x)$, $y_I(x)$	61,878	–	–
$y_2(x)$, $y_{II}(x)$	–	62,030	0,152
$y_3(x)$, $y_{III}(x)$	–	62,485	0,607
$y_4(x)$, $y_{IV}(x)$	–	63,236	1,358
$y_5(x)$, $y_V(x)$	–	64,273	2,395

Evidentno je da najveći ugib lančanice raste sa porastom ugla kosine raspona, odnosno Δh , te u skladu s tim i Δf raste. Treba napomenuti da je Δf uvijek pozitivan, za razliku od $\Delta f(x)$ (vidi potpoglavlje 1.1.1) koji može biti pozitivan, negativan ili pak jednak nuli, zavisno od ugla kosine raspona i tačke x u kojoj se razmatra ugib lančanice. Slika 11 prikazuje na istom crtežu krive voda $y_1(x)$ i $y_5(x)$ iz Primjera A kao i njihove najveće ugibe.



Slika 11: Krive $y_1(x)$ i $y_5(x)$ iz Primjera A i najveći ugibi

2.2 Postojeća relacija između f_{inc} i f_{lev}

U ranijoj literaturi [7] za projektovanje nadzemnih vodova može se naći sljedeća formula za izračunavanje najvećeg ugiba lančanice u kosom rasponu.

$$b = \frac{c}{a} \cdot \frac{2\sigma}{\gamma} \cdot \text{sh}^2 \frac{a\gamma}{4\sigma} \quad (44)$$

Oznake u ovoj formuli su:

b – najveći ugib lančanice u kosom rasponu

c – dužina spojnice između tačaka vješanja voda

a – dužina raspona

σ/γ – parametar lančanice

Upotrebom oznaka iz ovog rada (44) se može napisati kao (45). Ovde je uvedena oznaka f_{inc}^* da se izbjegne poistovjećivanje sa izrazom (40).

$$f_{inc}^* = \frac{\sqrt{a^2 + (h_2 - h_1)^2}}{a} \cdot 2c \cdot \text{sh}^2 \frac{a}{4c} \quad (45)$$

Prvi razlomak na desnoj strani jednačine (45) je u stvari koeficijent $1/\cos\psi$, dok preostali dio predstavlja najveći ugib lančanice u ravnom rasponu, na osnovu (41). Stoga je pojednostavljeni oblik izraza (45) dat sa (46).

$$f_{inc}^* = \frac{1}{\cos\psi} \cdot f_{lev} \quad (46)$$

Ovaj izraz se može smatrati samo približnom a nikako ne tačnom relacijom iz više raloga. Kao prvo razlikuje se od matematički tačne relacije (40), a osim toga (46) je zapravo specijalan slučaj jednačine (31) koja je takođe približna relacija. Postavlja se pitanje koliku grešku uzrokuje primjena (46). Naredna tabela sadrži rezultate dobijene korištenjem približne i tačne relacije, tj. (46) i (40), za najveći ugib lančanice u kosom rasponu. Dobijeni rezultati se odnose na kose raspone Primjera A i Primjera B. Takođe izračunata je i veličina greške pomoću (47) za svaki kosi raspon.

$$J = f_{inc}^* - f_{inc} = \frac{f_{lev}}{\cos\psi} - f_{inc} \quad (47)$$

Tabela VI: Najveći ugibi krivih voda u kosim rasponima Primjera A i Primjera B (približni i tačni rezultati)

Kriva voda	f_{inc}^* [m]	f_{inc} [m]	$f_{inc}^* - f_{inc}$ [m]
$y_1(x), y_I(x)$	–	–	–
$y_2(x), y_{II}(x)$	62,035	62,030	0,005
$y_3(x), y_{III}(x)$	62,506	62,485	0,021
$y_4(x), y_{IV}(x)$	63,283	63,236	0,047
$y_5(x), y_V(x)$	64,354	64,273	0,081

Na osnovu prethodne tabele može se zaključiti da upotreba pojednostavljene relacije (46) koja sadrži koeficijent $1/\cos\psi$, pri manjim uglovima kosine raspona (ili Δh) uzrokuje vrlo male, zanemarljive greške, a sa rastom Δh raste i veličina greške. Za približnu i tačnu relaciju vrijedi (48):

$$f_{inc}^* > f_{inc} \quad \forall \quad h_1 \neq h_2 \quad (48)$$

Svakako treba napomenuti da se lokacije najvećih ugiba (x_c) svih krivih voda u Primjeru A i Primjeru B razlikuju. Izračunavaju se pomoću izraza (49) [2], a rezultati su upisani u Tabelu VII.

$$x_c = \frac{a}{2} + c \cdot \left(\text{arsh} \frac{h_2 - h_1}{a} - \text{arsh} \frac{h_2 - h_1}{2c \cdot \text{sh} \frac{a}{2c}} \right) \quad (49)$$

Tabela VII: Lokacije najvećih ugiba krivih voda u Primjeru A i Primjeru B

Kriva voda	x_c [m]	Kriva voda	x_c [m]
$y_1(x)$	350	$y_I(x)$	350
$y_2(x)$	351,434	$y_{II}(x)$	348,566
$y_3(x)$	352,847	$y_{III}(x)$	347,153
$y_4(x)$	354,219	$y_{IV}(x)$	345,781
$y_5(x)$	355,534	$y_V(x)$	344,466

3. ZAKLJUČAK

U radu su izvedene nove matematički tačne relacije između ugiba lančanice u kosom i ravnom rasponu za slučaj zadovoljenih početnih uslova datih sa (1) i (2). Takođe analizirane su odgovarajuće postojeće (približne) relacije te je uz primjenu praktičnih primjera određena i veličina greške koju uzrokuje primjena postojećih relacija. Na taj način je razjašnjena i uloga koeficijenta $1/\cos\psi$ koji inače potiče iz proračuna prema modelu parabole gdje se koristi za postizanje bolje aproksimacije lančanice parabolom u kosom rasponu [8]. U slučaju lančanice primjena pomenutog koeficijenta daje približne rezultate za ugib, ali može se konstatovati da odstupanje u odnosu na tačne rezultate uglavnom nije veliko.

Analizirajući lančanicu pri promjeni ugla kosine raspona ovaj rad doprinosi lakšem razumijevanju matematičkih osobina lančanice kao krive voda te bitnih razlika u odnosu na parabolu. Na osnovu iznesenog u 1. poglavlju proizlazi zaključak da količnik funkcija ugiba lančanice u kosom i ravnom rasponu u intervalu $(0, a)$ nije konstantan:

$$\frac{f_{inc}^{(lan)}(x)}{f_{lev}^{(lan)}(x)} = \left(\frac{f_{inc}^{(lan)}}{f_{lev}^{(lan)}} \right) (x) \neq \text{const.}, \quad x \in (0, a) \quad (50)$$

Ovo je veoma bitna razlika u odnosu na proračun prema modelu parabole. Naime, neovisno od primjene koeficijenta $1/\cos\psi$, količnik funkcija ugiba parabole u kosom i ravnom rasponu u intervalu $(0, a)$ je uvijek konstantan jer važe jednakosti (51) i (52) [8].

$$\frac{f_{inc}^{(par)}(x)}{f_{lev}^{(par)}(x)} = \left(\frac{f_{inc}^{(par)}}{f_{lev}^{(par)}} \right) (x) = 1, \quad x \in (0, a) \quad (51)$$

$$\frac{f_{inc}^{(par\psi)}(x)}{f_{lev}^{(par)}(x)} = \left(\frac{f_{inc}^{(par\psi)}}{f_{lev}^{(par)}} \right) (x) = \frac{1}{\cos\psi}, \quad x \in (0, a) \quad (52)$$

PRILOG

$$Af(x) = \frac{h_2 - h_1}{a} x - 4c \cdot \operatorname{sh} \left(\frac{1}{2} \operatorname{arsh} \frac{h_2 - h_1}{2c \cdot \operatorname{sh} \frac{a}{2c}} \right) \cdot \operatorname{sh} \frac{x}{2c} \cdot \operatorname{ch} \left(\frac{a-x}{2c} - \frac{1}{2} \operatorname{arsh} \frac{h_2 - h_1}{2c \cdot \operatorname{sh} \frac{a}{2c}} \right)$$

$$\frac{d}{dx}(Af(x)) = 0 \Rightarrow x_u \quad \frac{d}{dx}(u \cdot v) = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx} \quad \operatorname{ch}(x) \cdot \operatorname{ch}(y) - \operatorname{sh}(x) \cdot \operatorname{sh}(y) = \operatorname{ch}(x-y)$$

$$\begin{aligned} \frac{h_2 - h_1}{a} - 4c \cdot \operatorname{sh} \left(\frac{1}{2} \operatorname{arsh} \frac{h_2 - h_1}{2c \cdot \operatorname{sh} \frac{a}{2c}} \right) \cdot \left[\operatorname{sh} \frac{x_u}{2c} \cdot \operatorname{sh} \left(\frac{a-x_u}{2c} - \frac{1}{2} \operatorname{arsh} \frac{h_2 - h_1}{2c \cdot \operatorname{sh} \frac{a}{2c}} \right) \cdot \frac{-1}{2c} + \right. \\ \left. + \operatorname{ch} \left(\frac{a-x_u}{2c} - \frac{1}{2} \operatorname{arsh} \frac{h_2 - h_1}{2c \cdot \operatorname{sh} \frac{a}{2c}} \right) \cdot \operatorname{ch} \frac{x_u}{2c} \cdot \frac{1}{2c} \right] = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{h_2 - h_1}{a} = 2 \cdot \operatorname{sh} \left(\frac{1}{2} \operatorname{arsh} \frac{h_2 - h_1}{2c \cdot \operatorname{sh} \frac{a}{2c}} \right) \cdot \left[\operatorname{ch} \frac{x_u}{2c} \cdot \operatorname{ch} \left(\frac{a-x_u}{2c} - \frac{1}{2} \operatorname{arsh} \frac{h_2 - h_1}{2c \cdot \operatorname{sh} \frac{a}{2c}} \right) - \operatorname{sh} \frac{x_u}{2c} \cdot \operatorname{sh} \left(\frac{a-x_u}{2c} - \frac{1}{2} \operatorname{arsh} \frac{h_2 - h_1}{2c \cdot \operatorname{sh} \frac{a}{2c}} \right) \right]$$

$$\frac{h_2 - h_1}{a} = 2 \cdot \operatorname{sh} \left(\frac{1}{2} \operatorname{arsh} \frac{h_2 - h_1}{2c \cdot \operatorname{sh} \frac{a}{2c}} \right) \cdot \operatorname{ch} \left[\frac{x_u}{2c} - \left(\frac{a-x_u}{2c} - \frac{1}{2} \operatorname{arsh} \frac{h_2 - h_1}{2c \cdot \operatorname{sh} \frac{a}{2c}} \right) \right]$$

$$\frac{h_2 - h_1}{2a \cdot \operatorname{sh} \left[\frac{1}{2} \operatorname{arsh} \frac{h_2 - h_1}{2c \cdot \operatorname{sh}(a/2c)} \right]} = \operatorname{ch} \left[\frac{x_u}{c} - \frac{a}{2c} + \frac{1}{2} \operatorname{arsh} \frac{h_2 - h_1}{2c \cdot \operatorname{sh}(a/2c)} \right]$$

$$\operatorname{arch} \frac{h_2 - h_1}{2a \cdot \operatorname{sh} \left[\frac{1}{2} \operatorname{arsh} \frac{h_2 - h_1}{2c \cdot \operatorname{sh}(a/2c)} \right]} = \frac{x_u}{c} - \frac{a}{2c} + \frac{1}{2} \operatorname{arsh} \frac{h_2 - h_1}{2c \cdot \operatorname{sh}(a/2c)}$$

Odavde proizlazi izraz (28) za izračunavanje x_u .

LITERATURA

- [1] L. Jozsa: Nadzemni vodovi, ETF Osijek, 2011
- [2] A. Hatibović: Određivanje jednačina voda i ugiba na osnovu zadanog parametra lančanice, Bosansko-hercegovačka elektrotehnika broj 8, BH K CIGRÉ, pp 23–28, 2014
- [3] A. D. Polyanin, A. V. Manzhirov: Handbook of Mathematics for Engineers and Scientists, Taylor & Francis Group, 2007
- [4] G. Mannall, M. Kenwood: Further Pure Mathematics 2, Heinemann Educational Publishers, UK, 2005
- [5] A. Hatibović: Inclined Span Modelling by a Given Levelled Span for OHL Design, Periodica Polytechnica Electrical Engineering, BME, Vol. 58, No. 2, pp 69–79, DOI: 10.3311/PPEe.7373, 2014
- [6] M. D. Weir, J. Hass: Thomas' Calculus, PEARSON, 2010
- [7] G. Perneczky: Szabadvezetékek feszítése, Műszaki Könyvkiadó Budapest, 1968

- [8] A. Hatibović: Derivation and Analysis of the Relation between Conductor Sags in Inclined and Levelled Spans Based on Known Data of the Latter, CIGRÉ 2014 Paris, Paper B2–202, pp 1–8

BIOGRAFIJA

Alen Hatibović rođen je 1966. godine u Tuzli (Bosna i Hercegovina). Diplomirao je na Elektrotehničkom fakultetu Univerziteta u Tuzli 1992. godine i zaposlio se kao projektant u Elektrodistribuciji Mađarske. Od 1998. do 2014. godine je radio za *Électricité de France* (EDF) u Sektoru za planiranje i razvoj elektroenergetskog sistema. Učestvovao je u realizaciji većeg broja projekata i elaborata. Objavio je preko 20 naučnih i stručnih radova na engleskom, bosanskom i mađarskom jeziku. Trenutno pohađa doktorske studije na Univerzitetu Tehničkih Nauka u Budimpešti, na Odsjeku za Elektroenergetiku.