



XII. MAGYAR MECHANIKAI KONFERENCIA

MaMeK, 2015

Miskolc, 2015. augusztus 25-27.

GUMIKERÉK DINAMIKÁJÁNAK HATÁSA UTÁNFUTÓS JÁRMŰSZERELVÉNY STABILITÁSÁRA

Beregi Sándor¹ és Takács Dénes²

¹ Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Műszaki Mechanikai Tanszék

² MTA-BME Gépek és Járűvek Dinamikája Kutatócsoport

1111 Budapest, Műegyetem rakpart 3.

sandor.beregi@mm.bme.hu, takacs@mm.bme.hu

Absztrakt: A cikkben egy személygépjárűből és egy hozzá kapcsolt utánfutóból álló járműszerelvény stabilitását vizsgáljuk az ún. bicikli-modell segítségével, ezzel elhanyagolva a jármű laterális kiterjedését, amely egy általánosan elfogadott közelítés a járműdinamikai vizsgálatok során. A kerekek deformációjából származó erők és koncentrált erőpárok leírására a gumikerék ún. kefe modelljéből származtatható nemlineáris karakterisztikákat használunk, amelyeknek jellegzetessége, hogy bár egyszerűen folytonosan differenciálhatók, a magasabb rendű deriváltak csak intervallumonként folytonosak. A cikkben a lineáris stabilitás mellett hangsúlyt fektetünk a nemsima-rendszer bifurkáció-analízisére is, amelynek köszönhetően pontosabb képet kaphatunk a járműszerelvény viselkedéséről, és amelynek segítségével kimutatható egy olyan paramétertartomány létezése, amelyben kellően nagy perturbáció hatására a rendszer nem tér vissza a lineárisan stabil egyenesvonalú mozgáshoz.

Kulcsszavak: járműszerelvény, gumikerék, stabilitásvizsgálat, nemlineáris analízis

1. BEVEZETÉS

Napjainkban a járműdinamika egyik fontos kérdése a különböző vontatmányok (pl. utánfutók, lakókocsik, kamionok) haladás közbeni stabilitása, illetve az instabil viselkedés megelőzése. Mindemellert a járműszerelvények vizsgálata mechanikai szempontból is érdekes kihívást jelent, miután a haladást leíró kinematikai kényszerek miatt ezek tipikusan anholonom rendszerként modellezhetők. Ennek köszönhetően a járműszerelvények dinamikájának elméleti valamint kísérleti vizsgálatával is számos kutatás foglalkozik (ld. [1, 2, 3]).

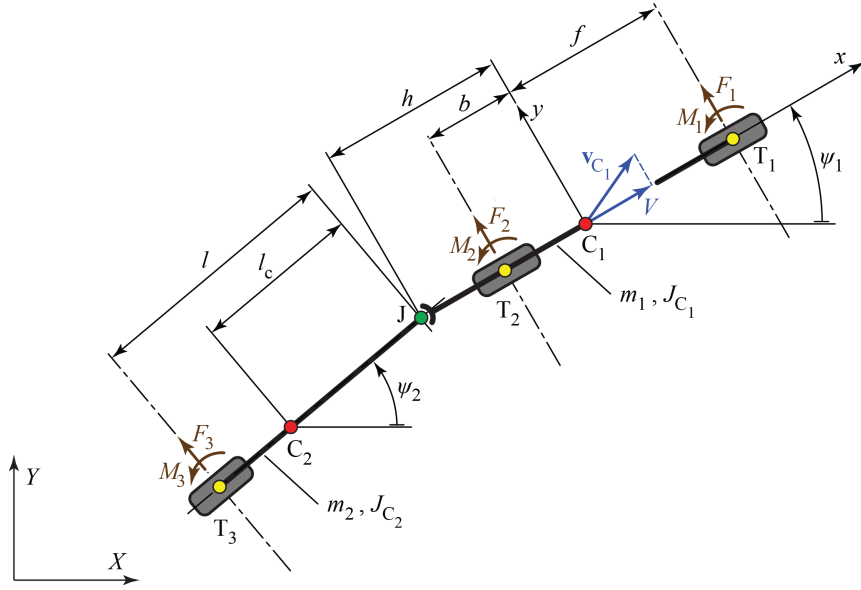
A járművek modellezése során elterjedt megoldás a síkbeli ún. egynyomú (single-track) vagy más néven „bicikli” modellek használata, amely értelmében a jármű egyéb méreteit elhanyagolva csak a laterális stabilitás szempontjából lényeges méreteket modellezzük [4]. E modell stabilitásvizsgálatokra való jó alkalmazhatóságát a szakirodalomban megtalálható eredmények is igazolják [5].

A modellezés egy másik lényeges kérdése a kerékmodell megválasztása, miután jól ismert tény, hogy a kerekek deformációjából származó erők alapjaiban befolyásolják a járművek mozgását. A szakirodalomban számos, különböző bonyolultságú modell ismert, amelyek közül igen elterjedt az ún. kvázi-stacionárius kerékmodellek alkalmazása. Az ilyen kerékmodellek feltételezik, hogy a deformáció csak a jármű pillanatnyi sebességállapotából meghatározható ún. kúszási szögtől függ, ami széles körben alkalmazott, és kielégítően pontos közelítés nagy sebességű manőverek vizsgálata esetén [4].

A cikkben a gumideformációból származó erők és nyomatékok számítására a gumikerék ún. kefe-modelljéből (ld. [4]) származtatható nemlineáris erő- illetve nyomaték-karakterisztikákat használjuk. A nemlinearitást ez esetben az okozza, hogy a kerekek és a talaj közötti erőátadás szárazsúrlódás útján valósul meg, emiatt a kerekek lehetséges deformációja korlátozott, így a kontakttartomány végének valamekkora része megcsúszik. Mindemellert a súrlódás hatása abban is megnyilvánul, hogy bár a kefe-modellből levezethető karakterisztikák elsőrendben folytonosan differenciálhatóak, a magasabb rendű deriváltak csak intervallumonként folytonosak. Ezáltal annak ellenére, hogy a linearizált rendszer vizsgálata viszonylag egyszerű, a nem-sima nemlineáris rendszer analízise összetettebb megoldásokat igényel (ld. [6], [7]), ugyanakkor számos érdekes eredményt szolgáltat.

2. A JÁRMŰSZERELVÉNY MECHANIKAI MODELLJE

A járműszerelvény mechanikai modelljét az 1. ábra szemlélteti. A vontató személygépjárű és az utánfutó az (X, Y) síkban mozoghat, míg a függőleges irányú mozgást elhanyagoljuk. A járműveket az ún. bicikli modellel helyettesítjük, ezzel elhanyagolva a járművek laterális kiterjedését, ami az egyenes vonalú mozgás körüli kis rezgések vizsgálata esetén elfogadható közelítés [4]. Ezzel a rendszer modellje két egymáshoz a J pontban csuklóval



1. ábra. A járműszerelvény mechanikai modellje

kapcsolódó, m_1 illetve m_2 tömegű, valamint saját súlypontjukra nézve J_{C_1} illetve J_{C_2} tehetetlenségi nyomatékkal rendelkező rúdból áll, amelyhez a T_1, T_2, T_3 pontban kapcsolódnak a kerekek. A vontató jármű C_1 súlypontjának az első keréktől mért távolsága f , a hátsó keréktől való távolsága b . A C_1 súlypont és a J csuklópont távolsága h , míg az utánfutó C_2 súlypontjának illetve a hátsó kerekének a távolsága l illetve l_c a csuklóponttól. A modell négy szabadságfokú, azaz a rendszer helyzetének egyértelmű leírásához négy általános koordinátát kell választanunk: a vontató jármű súlypontjának $X_1(t)$ és $Y_1(t)$ koordinátáit, illetve a személyautó és az utánfutó középvonalának az X -tengelyhez képesti $\psi_1(t)$ valamint $\psi_2(t)$ szögét. Ezeket az alábbiak szerint a $\mathbf{q}(t)$ általános-koordináta vektorba rendezzük:

$$\mathbf{q}(t) = (X_1(t) \quad Y_1(t) \quad \psi_1(t) \quad \psi_2(t))^T. \quad (1)$$

Ezen túlmenően a személygépjárműre egy kinematikai kényszert is figyelembe veszünk, nevezetesen, hogy a C_1 súlypont sebességének V longitudinális (azaz a jármű hossz tengelyével párhuzamos) komponense állandó:

$$\dot{X}_1(t) \cos \psi_1(t) + \dot{Y}_1(t) \sin \psi_1(t) = V. \quad (2)$$

Ezzel egy ún. anholonóm rendszert vizsgálhatunk, amelynek mozgásegyenleteit az Appell-Gibbs egyletetekből származtathatjuk [8]. Ehhez be kell vezetnünk a $\beta_1(t), \beta_2(t), \beta_3(t)$ pseudo-sebességeket az alábbiak szerint:

$$\begin{aligned} \beta_1(t) &= -\dot{X}_1(t) \sin \psi_1(t) + \dot{Y}_1(t) \cos \psi_1(t), \\ \beta_2(t) &= \dot{\psi}_1(t), \\ \beta_3(t) &= \dot{\psi}_1(t). \end{aligned} \quad (3)$$

Érdeemes megjegyezni, hogy a pseudo-sebességeket az általános koordinátákhoz hasonlóan intuitíve adhatjuk meg, azzal a feltétellel, hogy ezekkel az általános-koordináta sebességeknek egyértelműen meghatározhatónak kell lenniük. A fenti választás mellett $\beta_1(t)$ a személyautó súlypontjának laterális sebessége, míg $\beta_2(t)$ és $\beta_3(t)$ a járművek szögsebessége lesz. Ezek segítségével levezethető a járműszerelvény nemlineáris mozgásegyenlet-rendszere, amelyet a következő alakban írhatunk fel:

$$\begin{aligned}
& m_1(\dot{\beta}_1(t) + V\beta_2(t)) + m_2(\dot{\beta}_1(t) + V\beta_2(t) - h\dot{\beta}_2(t)) \\
& - l_C\dot{\beta}_3(t) \cos(\psi_2(t) - \psi_1(t)) + l_C\beta_3^2(t) \sin(\psi_2(t) - \psi_1(t)) \\
& = F_1 + F_2 + F_3 \cos(\psi_2(t) - \psi_1(t)), \\
& J_{C_1}\dot{\beta}_2(t) + m_2(h^2\dot{\beta}_2(t) - hV\beta_2(t) - h\dot{\beta}_1(t)) \\
& + hl_C\dot{\beta}_3(t) \cos(\psi_2(t) - \psi_1(t)) - hl_C\beta_3^2(t) \sin(\psi_2(t) - \psi_1(t)) \\
& = F_1f - F_2b - F_3h \cos(\psi_2(t) - \psi_1(t)) + M_1 + M_2, \\
& J_{C_1}\dot{\beta}_2(t) + m_2(l_C^2\dot{\beta}_3(t) - l_CV\beta_2(t) \cos(\psi_2(t) - \psi_1(t)) - l_C\dot{\beta}_1(t) \cos(\psi_2(t) - \psi_1(t)) \\
& + l_C\beta_1(t)\beta_2(t) \sin(\psi_2(t) - \psi_1(t)) + hl_C\dot{\beta}_2(t) \cos(\psi_2(t) - \psi_1(t)) \\
& + hl_C\beta_2^2(t) \sin(\psi_2(t) - \psi_1(t))) = M_3 - F_3l.
\end{aligned} \tag{4}$$

3. AZ ALKALMAZOTT KERÉKMODELL

A mozgásegyenlet jobboldalán szereplő, a kerékdeformációból származó F_1, F_2, F_3 erőket, illetve az M_1, M_2, M_3 koncentrált erőpárokat, melyeknek irányát illetve értelmét az 1. ábra szemlélteti, az ún. kefe-modellből [4] származtatható nemlineáris karakterisztikák segítségével számíthatjuk.

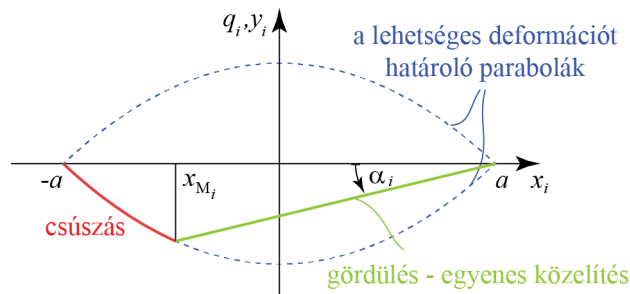
Az alkalmazott kerékmodellt a 2. ábra szemlélteti. Az egyes kerekek deformációját a járművel együtt mozgó (x_i, y_i) koordináta-rendszerben vizsgáljuk, amelyben az x_i -irány a jármű hossztengegyével párhuzamos, míg y_i a rá merőleges irányt jelöli. A kefe modell értelmében a gumiköpenyt tömeg nélküli, de k lineárisan megoszló laterális elmozdulással szembeni merevséggel rendelkező részecskék sokaságaként modellezzük. Ezzel a kontakttartományban a kerék pontjainak letapadását feltételezve egy elsőrendű nemlineáris parciális differenciálegyenlet vezethető le [9, 10], ami a fenti feltételek mellett leírja a pontos deformációt. Ugyanakkor lényegesen egyszerűbb alakú összefüggésekre jutunk, ha a modellezés során azzal az egyszerűsítéssel élünk, hogy a kerékdeformáció csak a kerék α kúszási-szögétől függ, ami a rendszer pillanatnyi sebességállapotából meghatározható [4].

A kúszási szög segítségével a deformációt a kontakttartomány azon szakaszán, ahol a kerék letapad az úthoz egy az x_i -tengegyhez képest α_i meredekségű egyenessel közelítjük, amelyről megmutatható, hogy nagy sebességek esetén jól közelíti a pontos deformált alakot. Figyelembe vesszük azt is, hogy a kerekek és a talaj közötti erőátadás szárazsúrlódás útján valósul meg, emiatt a kerekek lehetséges deformációja korlátozott, így a kontakttartomány végének valamekkora része mindig megcsúszik. A kontakttartományban a talajra merőlegesen parabolikus erőeloszlást feltételezünk (ld. [4]), aminek megfelelően a deformáció lehetséges maximuma is jól közelíthető parabolával.

Ezen feltételezések mellett az egyes kerekek pontjainak $q_i(x_i)$ laterális (y_i -irányú) deformációját a következő formulával adhatjuk meg:

$$q_i(\alpha_i, x_i) = \begin{cases} \tan \alpha_i x_i - a \tan \alpha_i, & x_{M_i} \leq x_i \leq a \\ -\frac{4}{3} \frac{\mu F_{zi}}{ka} \left(1 - \frac{x_i^2}{a^2}\right), & -a \leq x_i < x_{M_i} \text{ és } \alpha_i > 0 \\ \frac{4}{3} \frac{\mu F_{zi}}{ka} \left(1 - \frac{x_i^2}{a^2}\right), & -a \leq x_i < x_{M_i} \text{ és } \alpha_i \leq 0 \end{cases}, \tag{5}$$

ahol $i = 1, 2, 3$, a a kontakttartomány félhossza, k pedig a gumikerékre jellemző lineárisan megoszló merevség, amelyeket jelen esetben minden kerékre azonosnak feltételezünk. Továbbá μ a súrlódási tényező, x_{M_i} a közelítő egyenes és a parabola metszéspontjának x_i -koordinátája, F_{zi} az egyes kerekek talajra merőleges irányú terhelése, míg az α_i kúszási szöget a kerék T_i középpontjának $v_{T_{ip}}$ járművel párhuzamos és $v_{T_{in}}$ járműre merőleges



2. ábra. A gumikerék kefe-modellje kvázi-stacionárius deformációt feltételezve

sebességkomponenséből számíthatjuk:

$$\alpha_i = \arctan\left(\frac{v_{Tin}}{v_{Tip}}\right). \quad (6)$$

Ennek felhasználásával a deformációból származó $F_i(\alpha_i)$ erőt és $M_i(\alpha_i)$ koncentrált erópárt az alábbi integrálok segítségével határozzuk meg:

$$F_i(\alpha_i) = \int_{-a}^a q_i(x_i) dx_i, \quad M_i(\alpha_i) = \int_{-a}^a x_i q_i(x) dx_i. \quad (7)$$

Ezzel a deformációból származó erő, illetve nyomaték karakterisztikák az i -dik kerék α_i kúszási szögére nézve a következőképp alakulnak:

$$F_i(\alpha_i) = \begin{cases} \frac{\mu F_{zi}}{3 \tan^2 \alpha_i a^4 k^2} - 2 \tan \alpha_i k a^2, & \alpha < -\alpha_{krit}, \\ -\frac{8 \tan^3 \alpha_i a^6 k^3}{27 F_{zi}^2 \mu^2} - \frac{\mu F_{zi}}{3 \tan^2 \alpha_i a^4 k^2} - 2 \tan \alpha_i k a^2, & -\alpha_{krit} \leq \alpha < 0, \\ -\frac{8 \tan^3 \alpha_i a^6 k^3}{27 F_{zi}^2 \mu^2} + \frac{\mu F_{zi}}{3 \tan^2 \alpha_i a^4 k^2} - 2 \tan \alpha_i k a^2, & 0 \leq \alpha < \alpha_{krit}, \\ -\mu F_{zi}, & -\alpha_{krit} < \alpha, \end{cases} \quad (8)$$

valamint

$$M_i(\alpha_i) = \begin{cases} 0, & \alpha < -\alpha_{krit}, \\ \frac{16 \tan^4 \alpha_i a^9 k^4}{81 F_{zi}^3 \mu^3} + \frac{8 \tan^3 \alpha_i a^7 k^3}{9 F_{zi}^2 \mu^2} + \frac{4 \tan^2 \alpha_i a^5 k^2}{3 F_{zi} \mu} + \frac{2}{3} \tan \alpha_i k a^3, & -\alpha_{krit} \leq \alpha < 0, \\ -\frac{16 \tan^4 \alpha_i a^9 k^4}{81 F_{zi}^3 \mu^3} + \frac{8 \tan^3 \alpha_i a^7 k^3}{9 F_{zi}^2 \mu^2} - \frac{4 \tan^2 \alpha_i a^5 k^2}{3 F_{zi} \mu} + \frac{2}{3} \tan \alpha_i k a^3, & 0 \leq \alpha < \alpha_{krit}, \\ 0, & -\alpha_{krit} < \alpha, \end{cases} \quad (9)$$

$i = 1, 2, 3$.

Az α_{krit} kritikus kúszási szöget a kerék teljes megcsúszásnak határhelyzetéhez tartozó kúszási szöggént definiáljuk, amit geometriailag úgy határozhatunk meg, hogy ebben a helyzetben a tapadó rész deformációját közelítő egyenes és a maximális deformációt meghatározó parabola $x = a$ pontbeli érintője megegyezik. Ezzel a kritikus kúszási szög:

$$\alpha_{krit} = \arctan\left(\frac{2 \mu F_{zi}}{3 k a^2}\right). \quad (10)$$

A fenti karakterisztikák fontos tulajdonsága, hogy ugyan egyszer folytonosan differenciálhatóak, ám a második, illetve a magasabbrendű deriváltak már csak intervallumonként folytonosak. Ennek köszönhetően a rendszer lineáris stabilitásvizsgálata végrehajtható a folytonos rendszerekre érvényes módszerek segítségével, a nemlineáris hatások figyelembe vételével azonban már egy ún. „nem sima” rendszert kell vizsgálnunk. Ennek numerikus vizsgálatok esetén egy lehetséges, jelen dolgozatban is alkalmazott kiküszöbölési módja a karakterisztikák „simítása” közelítő Heaviside-függvények segítségével (ld. [7]).

4. AZ EGYENES VONALÚ MOZGÁS LINEÁRIS STABILITÁSA

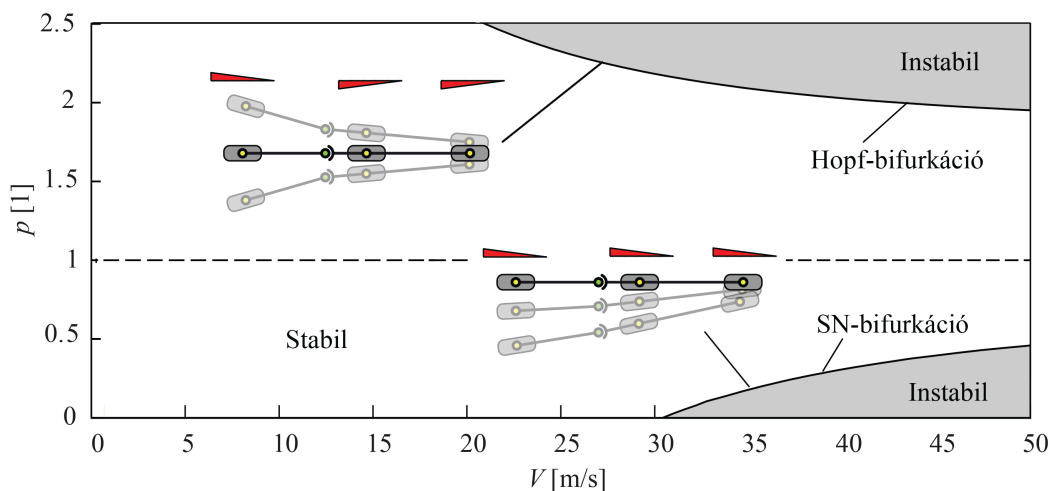
A lineáris stabilitásvizsgálat során feltételezzük, hogy a rendszer kialakuló állandósult mozgása egyenes vonalú, állandó V sebességgel haladó mozgás, amelyből következik, hogy az állandósult mozgás során a járművek az x tengellyel bezárt $\psi_1(t)$ és $\psi_2(t)$ szöge állandó, valamint minden pseudo sebesség, illetve $\psi_1(t)$ és $\psi_2(t)$ szögek különbsége zérus lesz. Bevezetve a két jármű relatív szögét leíró $\phi(t) := \psi_2(t) - \psi_1(t)$ változót az állandósult mozgás:

$$\beta_1(t) \equiv 0, \beta_3(t) \equiv 0, \beta_3(t) \equiv 0, \phi(t) \equiv 0. \quad (11)$$

A rendszer mozgásegyenleteit az állandósult mozgás körül linearizálva, valamint az egyenleteket kiegészítve a $\beta_1(t)$ és $\beta_2(t)$ pseudo-sebességek általános koordináta-sebességekkel való kapcsolatát leíró differenciálegyenletekkel egy négy állapotváltozós $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{J}\mathbf{x}(t)$ alakú lineális, elsőrendű közönséges differenciálegyenletre jutunk, ahol az $\mathbf{x}(t)$ állapotvektor:

$$\mathbf{x}(t) = (\beta_1(t) \quad \beta_2(t) \quad \beta_3(t) \quad \phi(t))^T. \quad (12)$$

A rendszer lineáris stabilitását a Routh-Hurwitz kritérium alapján különböző V sebességek, valamint az utánfutó súlypontjának helyzetét leíró dimenzió nélküli p paraméter függvényében vizsgáltuk, a járművek összes többi



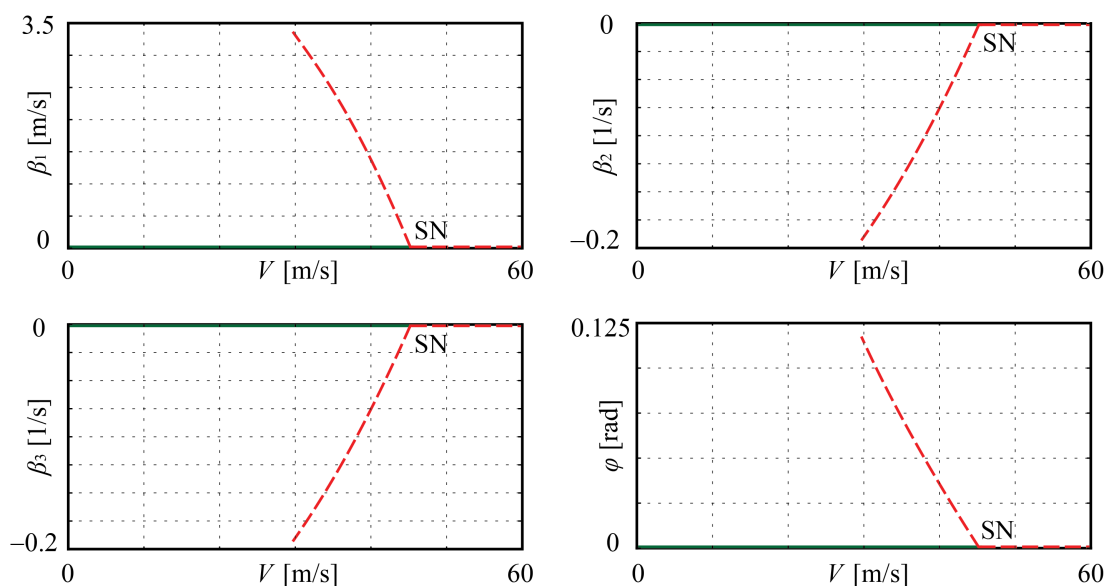
3. ábra. A járműszerelvény egyenes vonalú mozgásának stabilitástérképe a hosszirányú sebesség és a vontatmány súlypontjának pozíciója függvényében. A stabilitási határokon szemléltetjük a hozzájuk tartozó jellemző stabilitásvesztési módot (rezgéses vagy „statikus”) és a jellemző kerékdeformációkat is.

paraméterének állandó értéke mellett. A p paramétert az utánfutó jellemző adataiból, a következőképpen számíthatjuk ki:

$$p = \frac{l_c}{l}. \quad (13)$$

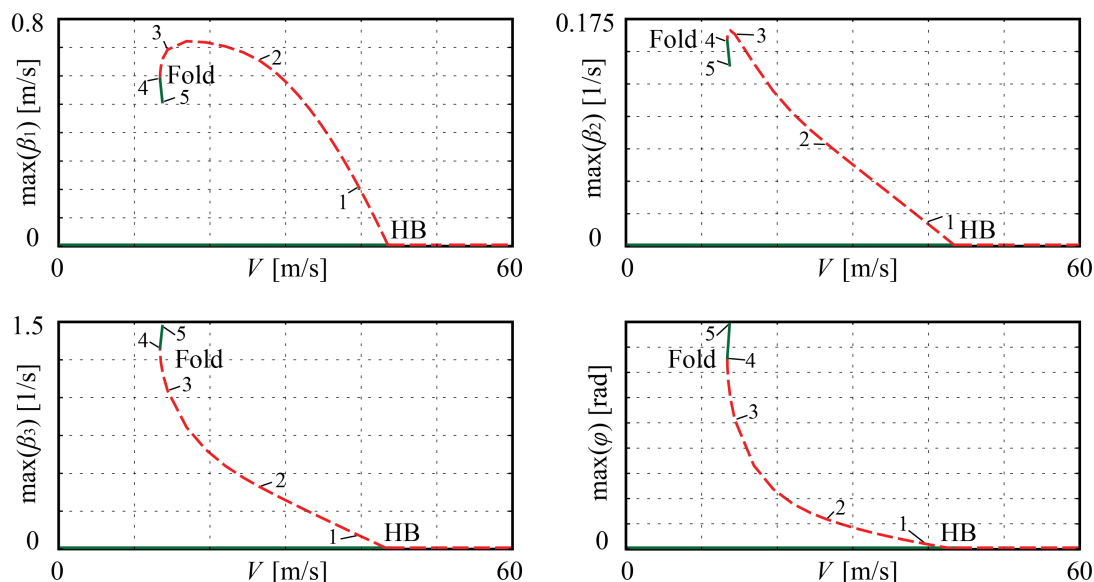
Ebből következik, hogy $p = 1$ értéke mellett az utánfutó súlypontja éppen a kerekek tengelyének vonalában, míg $p < 1$ mellett az utánfutó tengelye előtt, $p > 1$ esetén pedig az utánfutó tengelye mögött helyezkedik el. Ahogy a 3. ábrán is látható, pozitív V sebesség mellett két instabil tartomány jelenik meg. Az adott paraméterek mellett ($m_1 = 1600$ [kg], $m_2 = 400$ [kg], $J_{C_1} = 24576$ [kgm²], $J_{C_2} = 800$ [kgm²], $f = 1.4$ [m], $b = 1.6$ [m], $h = 1.8$ [m], $l = 2$ [m], $a = 0.05$ [m], $k = 2 \cdot 10^7$ [N/m²], $\mu = 0.6$ [1]) az egyik abban az esetben, ha $p < 1$, azaz az utánfutó súlypontja lényegesen előrébb helyezkedik el a tengelyéhez képest, a másik abban az esetben, ha $p > 1$, azaz az utánfutó súlypontja lényegesen hátrébb helyezkedik el a tengelyéhez képest. Megjegyzendő, hogy más paraméterek esetén ezek a stabilitási határok eltolódhatnak, így a $p \approx 1$ paraméter választás sem feltétlenül garantálja a stabilitást. Hátrafelé való haladáskor, azaz $V < 0$ esetén viszont a rendszer mindenképpen instabil.

5. A NEMLINEARITÁSOK HATÁSA



4. ábra. A rendszer bifurkációs diagramjai a vontatmány súlypontját meghatározó paraméter $p = 0.4$ értéke esetén.

További vizsgálatok segítségével (pl. a Jacobi-mátrix sajátértékeit meghatározva) megállapítható, hogy a $p > 1$ -hez tartozó stabilitási határ Hopf-bifurkációhoz, míg a $p < 1$ -hez tartozó határ nyereg-csomó (SN) bifurkációhoz tartozik. Szemléletesen ez azt jelenti, hogy $p > 1$ esetén a stabilitási határt átlépve a rendszer növekvő amplitúdójú rezgések során veszti el a stabilitását, míg $p < 1$ esetén a rendszer exponenciálisan „elszáll” az egyenes vonalú mozgáshoz képest (vagyis a jármű letér az egyenes pályáról).



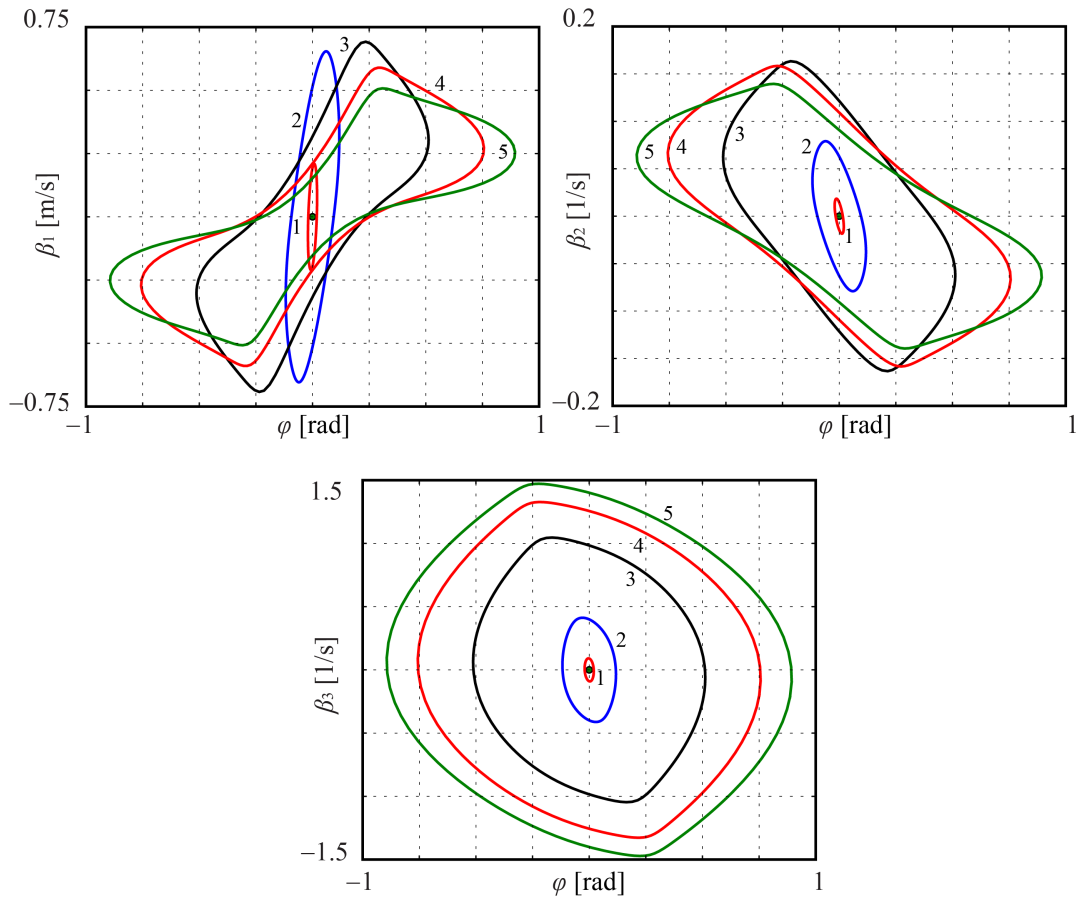
5. ábra. A rendszer bifurkációs diagramjai a vontatmány súlypontját meghatározó paraméter $p = 1.5$ értéke esetén.

A járműszerelvény viselkedéséről pontosabb képet kaphatunk, ha a lineáris stabilitásvizsgálatot követően immár a rendszerben fellépő nemlinearitásokat is figyelembe vesszük. A rendszer nemlineáris vizsgálatához az AUTO07p programot használtuk [11], amely egyebek mellett lehetővé teszi egy közösleges differenciálegyenlet-rendszer állandósult és periodikus megoldásainak követését egy adott (bifurkációs) paraméter mentén.

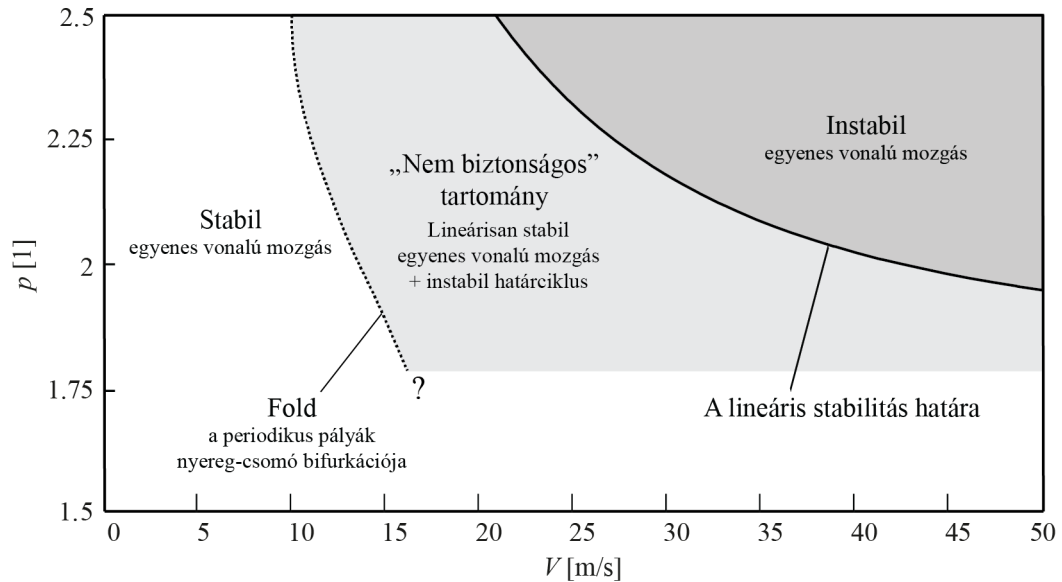
A numerikus számítások eredményeit bifurkációs diagramokon szemléltetjük, a vízszintes tengelyen a V longitudinális sebességet, a függőleges tengelyen pedig a $\beta_1(t)$, $\beta_2(t)$, $\beta_3(t)$ pszeudo-sebességeket, illetve a $\phi(t)$ relatív szöget ábráztuk. A diagramokon zölddel tüntettük fel a stabil, pirossal az instabil megoldásokat. Látható, hogy a SN-bifurkáció ($p = 0.4$, ld. 4. ábra) esetén a lineáris stabilitás határán a stabil tartomány felett egy új (szubkritikus) instabil egyensúlyi helyzet jelenik meg, míg a Hopf-bifurkáció ($p = 2$, ld. 5. ábra) esetén egy instabil határciklus lép ki. A periodikus megoldások esetében ábráztuk a bifurkációs diagram egyes pontjaihoz tartozó trajektóriákat is (ld. 6. ábra), amelyeken jól nyomon követhető a nemlinearitások hatásának növekedése az amplitúdó növelésével, hiszen míg kis amplitúdó esetén a trajektóriák közel elliptikusak, nagyobb amplitúdó esetén a kerekék jelentősebb megcsúszásával egyre nő a magasabb harmonikusok szerepe.

Az ehhez hasonló szubkritikus bifurkációk jelenléte a mechanikai rendszerekben általában kedvezőtlen, ugyanis ebben az esetben a központi sokaságon az instabil határciklus adja meg a stabil egyenes vonalú mozgás attraktivitási tartományát [12], azaz megfelelően nagy perturbáció esetén a lineárisan stabil paramétertartományban is kialakulhat nagy amplitúdójú rezgés a Hopf-bifurkáció környezetében. Hasonlóképpen a SN-bifurkáció környezetében a lineárisan stabil tartományban is bekövetkezhet kellően nagy zavarás esetén katasztrófeszerű stabilitásvesztés, amely során a jármű kifordul az egyenes vonalú pályáról.

Az 5. ábrán ugyancsak megfigyelhető, hogy az instabil határciklus egy ponton ismét „visszafordul” és egy adott V sebesség esetén az instabil határciklus mellett egy újabb stabil határciklus is kialakul. Ez az eset tekinthető a periodikus megoldás SN-bifurkációjának is (ti. a hozzá tartozó variációs rendszer egyensúlyi helyzete e pont környezetében nyeregpontról stabil csomóba megy át). Látható, hogy ezáltal a „visszafordulási pont” (fold) környezetében lokálisan kialakul egy ún. bistabil tartomány, ahol egy adott V sebességhez egy stabil egyenes vonalú mozgás és egy stabil határciklus is tartozik. Következésképpen a fold-pontnak azért is van különös jelentősége, mert ezáltal megadható a fenti tulajdonságot mutató, „nem biztonságos” zóna határa (ld. 7. ábra). Megjegyzendő, hogy a periodikus megoldáshoz tartozó foldot ebben az esetben mindig a stabilitási határról indított bifurkáció követéssel határoztuk meg, következésképp csak olyan p paraméter értékek mellett tudtuk megvalósítani, ahol megállapítható volt a lineáris stabilitás határa, így a 7. ábrán jelölnél kisebb p értékekre megbízható eredményt a fold-pont követése adhatna. A rendszer globális viselkedéséről további információt szolgáltatna a kialakuló



6. ábra. Fázisportrék az egyes esetekben kialakuló határciklusokról.



7. ábra. A dinamikus stabilitásvesztés és a lineárisan stabil, de „nem biztonságos” tartomány határa.

stabil határciklus követése, ez azonban a kerek megcsúsúzása által okozott nem-símaság következtében fellépő numerikus bizonytalanságok miatt további vizsgálatokat igényel.

Ugyancsak érdemes megfigyelni, hogy a 4. és 5. ábrákon a stabilitási határon kilépő új egyensúlyi helyzet-hez, illetve határciklushoz tartozó görbék nem függőleges érintővel lépnek ki. Ez a viselkedés szintén a rendszer nemsima jellegéből eredeztethető, és más intervallumként folytonos rendszerek esetén is megfigyelhető [6].

6. KONKLÚZIÓK

A cikkben egy személygépjárműből és egy hozzá kapcsolódó vontatmányból álló járműszerelvényt vizsgáltunk. A rendszer lineáris stabilitását a V haladási sebesség, és a p a súlypont helyét leíró paraméter függvényében vizsgáltuk, amelyek alapján két jellegzetes instabil tartomány különíthető el. Ezek közül az egyik esetben a stabilitási határon a leíró differenciálegyenlet triviális megoldásához tartozó Jacobi-mátrix egy valós sajátértéke, míg a másik esetben egy komplex-konjugált sajátértékpár vált előjelet. Továbbá a rendszerben levő nemlinearitásokat is figyelembe véve mindkét instabil tartomány határán szubkritikus bifurkáció (SN, illetve Hopf-bifurkációk) jelenlétét mutattuk ki. A rezgésesen instabil paramétertartomány környezetében emellett meghatároztuk a kialakuló szubkritikus Hopf-bifurkáció stabilitásváltásához (visszafordulásához) tartozó paramétereket is és megmutattuk, hogy ez miként vezet egy nem biztonságos tartomány megjelenéséhez. Látható, hogy ennek a zónának a határa bizonyos paraméterek mellett lényegesen alacsonyabb sebességnél jelentkezhet, mint a lineáris stabilitási határ, azaz a nemlineáris hatások bizonyos esetben jelentősen csökkenthetik a még biztonságosnak mondható sebességet. Mindemellett a rendszerben fellépő nemlinearitásoknak a megoldásokra gyakorolt hatását a kiszámolt határciklusokhoz tartozó trajektóriákkal is szemléltettük. Ugyanakkor meg kell említenünk, hogy nagyobb amplitúdók esetén a kerekek teljes megcsúszása melletti intervallumok közötti kapcsolásnál jelentősen megnőtt a numerikus hibák szerepe a megoldás során, így a határciklusok további követése kifinomultabb követőeljárások alkalmazását teszi szükségessé.

Köszönetnyilvánítás: A szerzők köszönetüket fejezik ki az OTKA PD105442 projekt keretében kapott támogatásért. A kutatás részben a Bolyai János Kutatási Ösztöndíj támogatásával készült.

HIVATKOZÁSOK

- [1] H. TROGER, K. ZEMAN *A nonlinear-analysis of the generic types of loss of stability of the steady-state motion of a tractor-semitrailer*, Vehicle System Dynamics 13 (4) (1984) pp. 161-172.
- [2] J. DARLING, D. TILLEY, B. GAO *An experimental investigation of car-trailer high-speed stability*, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part D: Journal of Automobile Engineering 223 (4) (2009) pp. 471-484. doi:10.1243/09544070jauto981.
- [3] R.S. SHARP, M.A.A. FERNANDEZ *Car-caravan snaking - part 1: the influence of pintle pin friction*, in: Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part C - Journal of Mechanical Engineering Science, 2002, pp. 707-722.
- [4] H.B. PACEJKA *Tyre and Vehicle Dynamics*, Elsevier Butterworth-Heinemann, Oxford, 2002.
- [5] F. DELLA ROSSA, G. MASTINU, C. PICCARDI *Bifurcation analysis of an automobile model negotiating a curve*, Vehicle System Dynamics: International Journal of Vehicle Mechanics and Mobility, 2012, pp. 1539-1562., doi:10.1080/00423114.2012.679621
- [6] R.I. LEINE *Nonlinear Phenomena, Bifurcations of equilibria in non-smooth continuous systems*, Physica D 223 (2006) pp. 121-137.
- [7] Z. DOMBÓVÁRI, *Local and Global Dynamics of Cutting Processes*, PhD Thesis, Budapest University of Technology and Economics, 2012.
- [8] F. GANTMACHER *Lectures in analytical mechanics*, MIR Publishers, Moscow, 1975.
- [9] D. TAKÁCS *Dynamics of towed wheels - Nonlinear theory and experiments*, Ph.D. thesis, Budapest University of Technology and Economics, 2010.
- [10] D. TAKÁCS, G. STÉPÁN *Contact patch memory of tyres leading to lateral vibrations of four-wheeled vehicles*, Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences 371 (1993), p. 20120427. doi:10.1098/rsta.2012.0427.
- [11] E.J. DOEDEL, B.E. OLDEMAN *AUTO-07p: Continuation and Bifurcation Software for Ordinary Differential Equations*, Concordia University Montreal, 2009.
- [12] J.K. HALE, S.J.V. LUNEL *Introduction to Functional Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1993.