International Society for Rock Mechanics
Mérnökgeológia-Kőzetmechanika 2010 Konferencia, Budapest

A HARMADFOKÚ, VÉGES DEFORMÁCIÓS RUGALMASSÁGTAN TERMODINAMIKAI KONZISZTENCIÁJÁRÓL

Ván Péter
KFKI, RMKI, ELMÉLETI FIZIKA FŐOSZTÁLY, BUDAPEST,
BME, ENERGETIKAI GÉPEK ÉS RENDSZEREK TANSZÉK, BUDAPEST,
MONTAVID TERMODINAMIKAI KUTATÓCSOPORT, BUDAPEST

Ebben az írásban a viszkoelasztikus anyagok mozgásgradiensben másodrendűen nemlokális anyagtörvényeire vonatkozó termodinamikai követelményeket vizsgáljuk. A LIU*-eljárás alkalmazásával megmutatjuk, hogy a termodinamikai feltételekkel kompatibilis egy olyan anyagtörvény, amely tartalmazza a mozgásgradiens harmadik és a feszültség második térderiváltját. Végül izotrop szilárd testekre kiszámítjuk a longitudinális síkhullámok diszperziós relációját.*

1. BEVEZETÉS

A termodinamikai követelmények a kontinuummechanika minden elméletében alapvetőek. A CLAUSIUS–DUHEM-egyenlőtlenség, a nemnegatív entrópiaprodukció klasszikus formája [1, 2] például kizárja a feszültség mozgásgradiens térderiváltjatól való függését, azaz, a TRUESDELL és NOLL által bevezetett terminológiával, az egynél magasabb fokú rugalmasságtant és képlékenységtant. Ez GURTIN híres eredménye 1965-ből [3]. Ha csupán mechanikai oldalról nézzük, akkor ez a megszorítás nem igazán érthető, főleg ha a termodinamikai feltételeknek érvényességét kezdjük feszegetni. Éppen ezért több kísérlet is történt ennek az eredménynek a meghaladására [4, 5]. Végső soron ennek következtében, a termodinamikai tiltás megkerülésére, a magasabb fokú rugalmasságtani és képlékenységi elméletek fellazulnak és új fogalmakat kénytelenek bevezetni, azért, hogy megértsék bizonyos tapasztalati úton javasolt anyagtörvények sikeres használhatóságának okait [6, 7].

Ebben az írásban megmutatjuk, hogy a GURTIN által használt és széles körben elfogadott feltételek megfelelő általánosításával a véges deformációs magasabbfokú rugalmasságtan és viszkoelaszticitás nem mond ellent a második főtételnek. Matematikai módszerekkel megadunk egy olyan feszültség-alakváltozás anyagtörvényt, amely kompatibilis a szigorú termodinamikai követelményekkel. Módszerünk három lényeges ponton általánosítja a GURTIN által elfogadott klasszikus keretfeltevéseket:

– az entrópia áramsűrűségét konstitutív, meghatározandó anyagfüggvénynek tekintjük,

– az alapváltozók egynél magasabb rendű térderiváltjait tartalmazó konstitutív állapotterekben a mérlegek és egyéb kinematikai kényszerek gradiense további kényszereket jelent az entrópiaprodukció egyenlőtlenségéhez,

– az anyagi objektivitás NOLL-féle megfogalmazásának általánosítása lehetővé teszi a konstitutív állapottér változóinak rugalmasabb megválasztását.

Az *entrópia áramsűrűség*et a GIBBS–DUHEM-egyenlőtlenség, azaz az entrópiamérleg klasszikus formája meghatározott formában posztulálja:

$$J^i := q^i/T. \tag{1}$$

Azaz az entrópia J^i konduktív áramsűrűségét megkapjuk, ha a belső energia q^i konduktív áramsűrűségét, a hőáramot elosztjuk a T hőmérséklettel [1]. Ez a feltevés azonban általában nem igaz, például keverékeknél az entrópia áramsűrűsége tartalmazza a diffúziós áramsűrűségeket is, ezért az entrópia áramsűrűséget célszerűbb nem előre definiálni, hanem meghatározandó anyagfüggvénynek tekinteni. Ez a GIBBS–DUHEM-egyenlőtlenség INGO MÜLLERtől származó fontos általánosítása [8]. Bebizonyítható, hogy elsőrendűen gyengén nemlokális termodinamikai elméleteknél (vagyis amikor a konstitutív állapottér csak elsőrendű térderiváltjait tartalmazza az alapváltozóknak), és ha minden fejlődési egyenletünk mérleg formájú, akkor a termodinamika második főtétele miatt az entrópia árama a következő formájú lesz

$$J^i = \sum_{A=1}^{n} \frac{\partial s}{\partial a_A} j_A^i.$$

Itt a_A az A-adik fajlagos extenzív termodinamikai mennyiség, j_A^i ennek konduktív áramsűrűsége, s a fajlagos entrópia, n pedig az extenzív termodinamikai mennyiségek, illetve a rájuk vonatkozó mérlegeknek a száma. Tehát a fenti feltételekkel meghatározott irreverzibilis termodinamikában az entrópiaáramot az extenzívek konduktív áramainak és a megfelelő intezív mennyiségeknek a szorzatösszegeként kapjuk [9]. A fenti formából tiszta hővezetés, vagy keverékek esetén az entrópiaáram szokásos formái adódnak. Például elsőrendűen gyengén nemlokális termorugalmasságtan speciális esetére visszakapjuk (1)-et [10]. Ez érthetővé teszi, hogy a mechanikán belül miért tartja magát az eredeti definíció, habár a konstitutív entrópiaáram széleskörűen elfogadott és használt ettől sokkal általánosabban is [11, 12, 2].

A második főtétel követelményeit a Liu-eljárás segítségével fogjuk érvényesíteni. Ez a módszer Farkas Gyula egyenlőtlenségi tételein alapul és az entrópiamérleg egyenlőtlenségéhez a további kinematikai követelmények és mérlegek differenciálegyenleteit szorzó faktorok, úgynevezett Lagrange–Farkas-multiplikátorok segítségével csatolja [13]. Alkalmazása gyengén nemlokális állapotterek esetén további körültekintést igényel, mert ekkor a kényszerek deriváltjai is további kényszereket jelenthetnek [14]. Ez a leglényegesebb pont, ami elkerülte Gurtin figyelmét [3]. A módszer általános, a nemegyensúlyi termodinamika alkalmazhatóságát jelentősen kiterjeszti és a második főtétel szerepének feltárásával a fizika különféle területein már eddig is számos meglepő eredményre vezetett. Ilyenek például a nemlokális hővezetés Guyer-Krumhansl-egyenletének származtatása és általánosítása [15, 16], sűrűségben másodfokú folyadékok esetén a Schrödinger-Madelung-egyenlet levezetése [17], a kétfázisú fázisszeparált (pl. szemcsés) anyagokban a nyíró instabilitások megjelenésének felderítése [18, 19] és a belső változókra vonatkozó dinamikai egyenletek általános szerkezetének levezetése [20, 21, 22].

A további kényszerek — további Lagrange–Farkas-szorzókkal — viszont az eredeti kényszer nélküli esethez képest általánosabb konstitutív egyenletekre vezetnek [23]. Végső soron ennek a következménye itt következő fő eredményünk, azaz hogy a feszültség függhet a mozgásgradiens térderiváltjaitól. Ehhez nem szükséges előre bevezetnünk sem magasabbrendű (hiper)feszültségeket, sem más további fizikai fogalmakat, sőt a végén látni fogjuk, eredményeink egy része visszaadja a magasabbrendű feszültségek segítségével kapott összefüggéseket.

A gyengén nemlokális rugalmasságtanban a nemlokalitás fokát Truesdell és Noll eredeti definíciója szerint ([1], 63.o.) a feszültségre vonatkozó anyagfüggvényben megjelenő legmagasabb rendű mozgásfüggvény térderiváltnak a rendje határozza meg. Ebben az írásban egyik alapváltozónak a mozgásgradienst fogjuk tekinteni, és a mozgásgradiensben maximum második térderiváltakat tartalmazhatnak az anyagfüggvények. Tehát az elmélet harmadfokú, de mozgásgradiensben másodrendűen gyengén nemlokális.

Megmutatjuk, hogy a termodinamikailag megengedett kapcsolatot nem anyagfüggvények jelentik, hanem általánosabban, differenciálegyenletekkel meghatározott anyagtörvények, amiknek két tulajdonságát emeljük ki:

– tartalmazzák a mozgásgradiens második deriváltjait, anélkül azonban, hogy ehhez szükség lenne a hiperfeszültségre független fizikai fogalomként,

– már a nemdisszipatív feszültség-mozgásgradiens anyagtörvényben is megjelenik a *feszültség* második térderiváltja, Aifantis ad hoc javaslatához hasonlóan (lásd [24] és a hivatkozásokat benne).

Az anyagfüggvényt általánosító differenciálegyenlet fizikai szerepének szemléltetéséhez levezetjük a longitudinális síkhullámokra vonatkozó diszperziós relációt.

2. KONTINUUMOK A PIOLA-KIRCHHOFF-RENDSZERBEN

A továbbiakban minden fizikai mennyiségünk anyagi mennyiség amit a referencia-konfiguráción értelmezünk, illetve a számításokat anyagi mérlegekre alpozzuk. Ezt kontinuumok leírásának PIOLA–KIRCHHOFF-rendszere, korábban részletesen tárgyaltuk ([25], 20-30 oldal). Azonban az előző tárgyaláshoz képest indexes jelölésmódot vezetünk be a magasabb mint másodrendű tenzorok miatt. A szubsztanciális deriváltat továbbra is ponttal jelöljük, de az anyagi térderiváltat ∂_i-vel, ahol $i \in \{1,2,3\}$ (ennek jele $\nabla_{\mathbf{R}}$ volt [25]-ben), a magasabb deriváltakat ismételt indexekkel $\partial_i\partial_j = \partial_{ij}$. Ha egy kezdeti t_0 időpontban R^j helyen található pont t időpontbeli helyét $\chi^i(R^j, t)$ mozgásfüggvénnyel adjuk meg, akkor ennek anyagi térderiváltjaként kapjuk az $F^i_j = \partial_j\chi^i$ mozgásgradienst (ennek jele $\mathbf{H}$ volt [25]-ben). A kontravariáns komponenseket felső, a kovariáns komponenseket alsó indexekkel, a kontrakciót pedig azonos alsó és felső indexek jelöljük az EINSTEIN-féle összegzési szabály szerint. Az indexekre bátran gondolhatunk úgy, mint amik DESCARTES-koordinátarendszerbeli vektor komponenseket jelölnek, de megjegyzendő, hogy ettől általánosabban a tenzori mennyiségek típusára és a velük történő műveletekre utalnak kényelmes jelölésként, azaz a koordinátázástól független, 'absztrakt indexként' is értelmezhetőek [26].

A kinematikai megfontolásokban, azaz, a mechanikai elmélet *alapváltozó*inak kijelölésekor egy kontinuumelméletben figyelembe kell venni a fizikai törvények és anyagtörvények függetlenségét a vonatkoztatási rendszertől, azaz az *objektivitás* követelményét. A hagyományos elképzelés szerint a mezők visszahúzása a térbeli helyzetről a referencia-konfigurációra biztosítja a tárgyalás objektivitását, amennyiben a konstitutív állapotteret is objektív függvények feszítik ki, azaz az anyagfüggvények objektív mennyiségektől függenek. Az objektivitás NOLL által megadott matematikai megfogalmazásának, azaz az objektív mennyiségek szokásos meghatározásának helyessége azonban kérdéses [27, 28, 29]. Ezért egy pontos téridő fogalmakon alapuló általánosítását javasoltunk, amelynek alapja egy négydimenziós fogalmakra épített nemrelativisztikus téridő tárgyalás [30, 31, 32]. Ebben a munkában nem használjuk ki ennek a javaslatnak a teljes általánosságát, inkább egy egyszerűbb megoldást választunk és a négydimenziós tárgyalás helyett csak a következményeit alkalmazzuk. Mindenekelőtt kényelmes a referencia-konfiguráción, az ún. PIOLA–KIRCHHOFF-rendszerben dolgoznunk, az összes mennyiséget és a mérlegeket is ott értelmezve ([6, 33] hasonlóan járnak el). Az első PIOLA–KIRCHHOFF-feszültséget kontravariáns tenzornak fogjuk jelölni. Ahogy az előbb már említettük, ha a konstitutív függvények változóinak NOLL-objekív fizikai mennyiségeket tekintenénk (pl. a jobb CAUCHY–GREEN-deformációt), akkor ezzel az anyagi objektivitás szokott követelményeit ki tudnánk elégíteni. A fent említett általánosabb objektivitás azonban megengedi, hogy a sebességet és a mozgásgradienst is a konstitutív állapottér elemeinek tekintsük. Ugyanis a sebesség és a mozgásgradiens együttesen egyetlen fizikai mennyiséget, egy objektív vegyes négyestenzor részeit alkotják [32]. Ezen kívül a teljes energiát fogjuk még a változóként bevezetni.

A harmadfokú rugalmasságtanra vonatkozó termodinamikai feltételek tárgyalásához a *konstitutív állapotteret* tehát a következő referencia függvények feszítik ki $(v^i, \partial_j v^i,$ $\partial_{jk}v^i, F^i_{\ j}, \partial_k F^i_{\ j},\ \partial_{kl}F^i_{\ j}, e, \partial_i e)$. Itt v^i a sebesség, az $F^i_{\ j}$ mozgásgradiens és az e fajlagos teljes energia is anyagi függvények. A konstitutív állapottér alapján az elmélet másodrendűen gyengén nemlokális a sebességben és a mozgásgradiensben, és elsőrendűen gyengén nemlokális az energia tekintetében. A teljes energia szerepeltetése alapváltozóként egyrészt kényelmes számítási szempontból, másrészt fontosnak érezzük megmutatni, hogy a belső energia bevezethető a tárgyalás végén. Látni fogjuk, hogy az energia- és impulzusmérlegeket átfuttatva a LIU-eljáráson, és a belső energiát csak a számításaink végén felhasználva és a kapott anyagtörvényt a lokális változókra specializálva, a végeredmény visszaadja az ismert feszültség-deformáció anyagfüggvényeket. Vagyis mostani tárgyalásunk a lokális esetben ekvivalens a belső energiára alapozottal. Előnye, hogy kiemeli a szokásos tárgyalásmód feltevéseit, ráadásul általánosabb a megszokottnál: sikerrel alkalmaztuk relativisztikus folyadékokra, ahol a belső energia fogalmát tudtuk megsejteni vele [34].

Ezek után az entrópiamérleg egyenlőtlenségéhez öt egyenlőséget vezetünk be kényszerfeltételként. Egyrészt a jól ismert kinematikai kompatibilitási feltételt a sebesség és a mozgásgradiens között:

$$\dot{F}^i_{\ j} - \partial_j v^i = 0^i_{\ j}. \tag{2}$$

Másrészt az impulzusmérleget, azaz

$$\rho_0 \dot{v}^i - \partial_j T^{ij} = 0^i, \tag{3}$$

ahol ρ_0 az anyagi sűrűség, és T^{ij} az első PIOLA–KIRCHHOFF-feszültség, amit tenzorként vezetünk be. A teljes energia megmaradását kifejező mérleg

$$\rho_0 \dot{e} + \partial_i q^i = 0, \tag{4}$$

ahol q^i a teljes energia áramsűrűsége. Ezenkívül, mivel a konstitutív állapotterünk másodrendűen gyengén nemlokális, ezért az (2) kinematikai reláció és a (3) impulzusmérleg gradiense is kényszerek, mert ezek az egyenletek is a konstitutív állapottér elemei közötti kapcsolatot írnak le [14, 35]:

$$\begin{aligned} \partial_k F^i_{\ j} - \partial_{kj} v^i &= 0^i_{\ jk}, & (5)\\ \rho_0 \partial_j \dot{v}^i + \partial_{jk} T^{ik} &= 0^i_{\ j}. & (6) \end{aligned}$$

Az energiamérleg gradiense nem ad további kényszerfeltételt, mert a konstitutív állapottér az energiában elsőrendűen gyengén nemlokális. Az entrópia egyenlőtlenség pedig azt követeli meg, hogy

$$\rho_0 \dot{s} + \partial_i J^i \geq 0, \tag{7}$$

ahol s a fajlagos entrópia és J^i a konduktív áramsűrűsége. A továbbiakban azt keressük, hogy az egyenlőtlenség milyen feltételeket követel meg a T^{ij}, q^i, J^i konstitutív, anyagi mennyiségeinktől, ha a fajlagos entrópiát tekintjük az alapvető konstitutív mennyiségnek. Fontos észrevennünk, hogy az impulzusmérleg deriváltja kiterjeszti a folyamatirányok terét, amit eredetileg a konstitutív állapottér változóinak térderiváltjai adtak meg.

Bevezetve a $\Lambda_i^j, \lambda_i, \kappa, \Lambda_i^{jk}, \lambda_i^j$ LAGRANGE–FARKAS-szorzókat az (2)-(6) kényszerekhez a LIU-eljárásnak a következő egyenlőtlenség szolgál kiindulópontul:

$$\begin{gathered}
0 \leq \rho_0 \dot{s} + \partial_i J^i - \Lambda_i^j (\dot{F}^i_j - \partial_j v^i) - \lambda_i (\rho_0 \dot{v}^i - \partial_j T^{ij}) - \kappa(\rho_0 \dot{e} + \partial_i w^i) - \\
\Lambda_i^{jk} (\partial_k F^i_j - \partial_{kj} v^i) - \lambda_i^j (\rho_0 \partial_j \dot{v}^i + \partial_{kj} T^{ik}) = \\
\rho_0 \frac{\partial s}{\partial v^i} \dot{v}^i + \rho_0 \frac{\partial s}{\partial \partial_j v^i} \partial_j \dot{v}^i + \rho_0 \frac{\partial s}{\partial \partial_{jk} v^i} \partial_{jk} \dot{v}^i + \rho_0 \frac{\partial s}{\partial F^i_j} \dot{F}^i_j + \rho_0 \frac{\partial s}{\partial \partial_k F^i_j} \partial_k \dot{F}^i_j + \\
\rho_0 \frac{\partial s}{\partial \partial_{kl} F^i_j} \partial_{kl} \dot{F}^i_j + \rho_0 \frac{\partial s}{\partial e} \dot{e} + \rho_0 \frac{\partial s}{\partial \partial_i e} \partial_i \dot{e} + \\
\frac{\partial J^j}{\partial v^i} \partial_j v^i + \frac{\partial J^k}{\partial \partial_j v^i} \partial_{kj} v^i + \frac{\partial J^l}{\partial \partial_{kj} v^i} \partial_{lkj} v^i + \frac{\partial J^k}{\partial F^i_j} \partial_k F^i_j + \frac{\partial J^l}{\partial \partial_k F^i_j} \partial_{lk} F^i_j + \\
\frac{\partial J^m}{\partial \partial_{lk} F^i_j} \partial_{mlk} F^i_j + \frac{\partial J^i}{\partial e} \partial_i e + \frac{\partial J^j}{\partial \partial_i e} \partial_{ji} e - \\
\lambda \left(\rho_0 \dot{e} + \frac{\partial q^j}{\partial v^i} \partial_j v^i + \frac{\partial q^k}{\partial \partial_j v^i} \partial_{kj} v^i + \frac{\partial q^l}{\partial \partial_{kj} v^i} \partial_{lkj} v^i + \frac{\partial q^k}{\partial F^i_j} \partial_k F^i_j + \frac{\partial q^l}{\partial \partial_k F^i_j} \partial_{lk} F^i_j + \right. \\
\left. \frac{\partial q^m}{\partial \partial_{lk} F^i_j} \partial_{mlk} F^i_j + \frac{\partial q^i}{\partial e} \partial_i e + \frac{\partial q^j}{\partial \partial_i e} \partial_{ji} e \right) - \\
\lambda_r \left(\rho_0 \dot{v}^i - \frac{\partial T^{rj}}{\partial v^i} \partial_j v^i - \frac{\partial T^{rk}}{\partial \partial_j v^i} \partial_{kj} v^i - \frac{\partial T^{rl}}{\partial \partial_{kj} v^i} \partial_{lkj} v^i - \frac{\partial T^{rk}}{\partial F^i_j} \partial_k F^i_j - \frac{\partial T^{rl}}{\partial \partial_k F^i_j} \partial_{lk} F^i_j - \right. \\
\left. \frac{\partial T^{rm}}{\partial \partial_{lk} F^i_j} \partial_{mlk} F^i_j - \frac{\partial T^{ri}}{\partial e} \partial_i e - \frac{\partial T^{rj}}{\partial \partial_i e} \partial_{ji} e \right) - \Lambda_i^j (\dot{F}^i_j - \partial_j v^i) - \\
\lambda_r^s \left(\rho_0 \partial_s \dot{v}^r - \frac{\partial T^{rj}}{\partial v^i} \partial_{sj} v^i - \partial_j v^i \partial_s \left[\frac{\partial T^{rj}}{\partial v^i} \right] - \frac{\partial T^{rk}}{\partial \partial_j v^i} \partial_{skj} v^i - \partial_{kj} v^i \partial_s \left[\frac{\partial T^{rk}}{\partial \partial_j v^i} \right] - \right. \\
\frac{\partial T^{rl}}{\partial \partial_{kj} v^i} \partial_{slkj} v^i - \partial_{lkj} v^i \partial_s \left[\frac{\partial T^{rl}}{\partial \partial_{kj} v^i} \right] - \frac{\partial T^{rk}}{\partial F^i_j} \partial_{sk} F^i_j - \partial_k F^i_j \partial_s \left[\frac{\partial T^{rk}}{\partial F^i_j} \right] - \\
\frac{\partial T^{rl}}{\partial \partial_k F^i_j} \partial_{slk} F^i_j - \partial_{lk} F^i_j \partial_s \left[\frac{\partial T^{rl}}{\partial \partial_k F^i_j} \right] - \frac{\partial T^{rm}}{\partial \partial_{lk} F^i_j} \partial_{smlk} F^i_j - \partial_{mlk} F^i_j \partial_s \left[\frac{\partial T^{rm}}{\partial \partial_{lk} F^i_j} \right] - \\
\left. \frac{\partial T^{ri}}{\partial e} \partial_{si} e - \partial_i e \, \partial_s \left[\frac{\partial T^{ri}}{\partial e} \right] - \frac{\partial T^{rj}}{\partial \partial_i e} \partial_{sji} e - \partial_{ji} e \, \partial_s \left[\frac{\partial T^{rj}}{\partial \partial_i e} \right] \right) - \Lambda_i^{jk} (\partial_k \dot{F}^i_j - \partial_{kj} v^i).
\end{gathered} \tag{8}$$

A LIU-egyenleteket a konstitutív állapottérbe nem tartozó magasabbrendű deriváltak együtthatóiként kapjuk. Az időderiváltat is tartalmazó együtthatók a következő egyenlőtlenségeket eredményezik

$$\dot{v}^i \ : \ \rho_0 \left(\frac{\partial s}{\partial v^i} - \lambda_i \right) = 0, \tag{9}$$

$$\partial_j \dot{v}^i \ : \ \rho_0 \left(\frac{\partial s}{\partial \partial_j v^i} - \lambda_i^j \right) = 0, \tag{10}$$

$$\partial_{kj} \dot{v}^i \ : \ \frac{\partial s}{\partial \partial_{kj} v^i} = 0, \tag{11}$$

$$\dot{F}^i_j \ : \ \rho_0 \left(\frac{\partial s}{\partial F^i_j} - \Lambda_i^j \right) = 0, \tag{12}$$

$$\partial_k \dot{F}^i_j \ : \ \rho_0 \left(\frac{\partial s}{\partial \partial_k F^i_j} - \Lambda_i^{jk} \right) = 0, \tag{13}$$

$$\partial_{kl} \dot{F}^i_j \ : \ \frac{\partial s}{\partial \partial_{kl} F^i_j} = 0, \tag{14}$$

$$\dot{e} \ : \ \rho_0 \left(\frac{\partial s}{\partial e} - \lambda \right) = 0, \tag{15}$$

$$\partial_i \dot{e} \ : \ \rho_0 \frac{\partial s}{\partial \partial_i e} = 0. \tag{16}$$

Ezért a LAGRANGE–FARKAS-szorzókat az entrópia deriváltjai meghatározzák, és ezen kívül a fajlagos entrópia nem függ a konstitutív állapottér legmagasabb rendű deriváltjaitól: $s = s(v^i, \partial_j v^i, F^i_{\ j}, \partial_k F^i_{\ j}, e)$.

A legmagasabb rendű térderiváltak együtthatóiként adódó Liu-egyenletek a következőek:

$$\partial_{rlkj} v^i \ : \ \frac{\partial s}{\partial \partial_r v^s} \frac{\partial T^{sl}}{\partial \partial_{kj} v^i} = 0, \tag{17}$$

$$\partial_{rmlk} F^i_j \ : \ \frac{\partial s}{\partial \partial_r v^s} \frac{\partial T^{sm}}{\partial \partial_{lk} F^i_j} = 0, \tag{18}$$

$$\partial_{kji} e \ : \ \frac{\partial s}{\partial \partial_k v^s} \frac{\partial T^{sj}}{\partial \partial_i e} = 0. \tag{19}$$

Ezeknek az egyenleteknek az a megoldása, hogy a feszültség sem függ a konstitutív állapottér legmagasabb rendű deriváltjaitól, azaz $T^{mn} = T^{mn}(v^i, \partial_j v^i, F^i_{\ j}, \partial_k F^i_{\ j}, e)$. Itt fontos leszögeznünk, hogy nem törekszünk a (17)–(19) egyenletek legáltalánosabb megoldására (ilyet például LIU csinált egy egyszerűbb esetben [10]), csak meg szeretnénk határozni egy megoldást, amely nem mond ellent a termodinamikai követelményeknek. Valójában a fenti egyenlőségek akkor is teljesülnek, ha a szorzótényező tenzorok ortogonálisak. (17)-(19)-at a megmaradt Liu-egyenletekre alkalmazva kapjuk, hogy

$$\partial_{lkj}v^i \quad : \quad \frac{\partial J^l}{\partial\partial_{jk}v^i} + \frac{\partial s}{\partial\partial_l v^r}\frac{\partial T^{kr}}{\partial\partial_j v^i} - \frac{\partial s}{\partial e}\frac{\partial q^l}{\partial\partial_{jk}v^i} = 0, \tag{20}$$

$$\partial_{mlk}F^i_{\ j} \quad : \quad \frac{\partial J^m}{\partial\partial_{lk}F^i_{\ j}} + \frac{\partial s}{\partial\partial_m v^r}\frac{\partial T^{rl}}{\partial\partial_k F^i_{\ j}} - \frac{\partial s}{\partial e}\frac{\partial q^m}{\partial\partial_{lk}F^i_{\ j}} = 0, \tag{21}$$

$$\partial_{ij}e \quad : \quad \frac{\partial J^j}{\partial\partial_i e} + \frac{\partial s}{\partial\partial_j v^r}\frac{\partial T^{ri}}{\partial e} - \frac{\partial s}{\partial e}\frac{\partial q^j}{\partial\partial_i e} = 0. \tag{22}$$

Ezeknek megoldása az entrópia áramsűrűségét a következő formára redukálja:

$$J^i = \frac{\partial s}{\partial e}q^i - \frac{\partial s}{\partial\partial_i v^r}\left(\frac{\partial T^{jr}}{\partial e}\partial_j e + \frac{\partial T^{kr}}{\partial\partial_l v^m}\partial_{lk}v^m + \frac{\partial T^{kr}}{\partial\partial_l F^n_{\ m}}\partial_{lk}F^n_{\ m}\right) + K^i. \tag{23}$$

Itt a $K^m = K^m(v^i, \partial_j v^i, F^i_{\ j}, \partial_k F^i_{\ j}, e)$ extra entrópiaáramra a jelölt változórendszer vonatkozik, nem a teljes konstitutív állapottéren értelmezett függvény. Végül a disszipációs egyenlőtlenséget megkapjuk, ha a Liu-egyenleteket alkalmazzuk (8)-re:

$$\begin{aligned} q^i\partial_i\frac{\partial s}{\partial e} + \frac{\partial s}{\partial v^j}\partial_i T^{ij} + \frac{\partial s}{\partial\partial_k v^j}\partial_{ki}T^{ij} + \frac{\partial s}{\partial F^j_{\ i}}\partial_j v^i + \frac{\partial s}{\partial\partial_k F^i_{\ j}}\partial_{kj}v^i - \\ \partial_i\left[\frac{\partial s}{\partial\partial_i v^r}\left(\frac{\partial T^{jr}}{\partial e}\partial_j e + \frac{\partial T^{kr}}{\partial\partial_l v^m}\partial_{lk}v^m + \frac{\partial T^{kr}}{\partial\partial_l F^n_{\ m}}\partial_{lk}F^n_{\ m}\right)\right] \geq 0. \end{aligned} \tag{24}$$

Ahhoz, hogy fenti egyenlőtlenséget megoldjuk, át kell alakítanunk az irreverzibilis termodinamikában megszokott erő-áram formába. Ehhez először is bevezetjük a belső energiát egy olyan általánosított alakban, ahol a mozgásgradiens megváltozásának szintén tehetetlenséget tulajdonítunk:

$$u = e - \frac{1}{2}v^i v_i - \frac{\alpha_1}{2}(\dot{F}^i_{\ i})^2 - \frac{\alpha_2}{2}\dot{F}^i_{\ j}\dot{F}^j_{\ i}, \tag{25}$$

és feltételezzük, hogy az entrópia a belső energián keresztül függ a sebességtől és a sebességgradienstől:

$$\begin{aligned} s(v^i, \partial_j v^i, F^i_{\ j}, \partial_k F^i_{\ j}, e) = \hat{s}\left(u, F^i_{\ j}, \partial_k F^i_{\ j}, e\right) = \\ \hat{s}\left(e - \frac{\mathbf{v}^2}{2} - \frac{\alpha_1}{2}(\mathrm{tr}\dot{\mathbf{F}})^2 - \frac{\alpha_2}{2}\mathrm{tr}(\dot{\mathbf{F}}\cdot\dot{\mathbf{F}}),\ \mathbf{F}, \nabla\mathbf{F}, e\right). \end{aligned} \tag{26}$$

Ekkor a disszipációs egyenlőtlenség egyes tagjai átrendezhetőek:

$$\frac{\partial s}{\partial v^j}\partial_i T^{ij} \quad = \quad -\partial_k\left(\frac{\partial s}{\partial e}v_j T^{kj}\right) + \frac{\partial s}{\partial e}T^{ij}\partial_j v_i, \tag{27}$$

$$\frac{\partial s}{\partial\partial_j v^i}\partial_{jk}T^{ki} \quad = \quad -\frac{\partial s}{\partial e}\left(\alpha_1\partial_{lk}T^{lk}\delta^j_i + \alpha_2\partial^j_{\ k}T^k_{\ i}\right)\partial_j v^i, \tag{28}$$

$$\frac{\partial s}{\partial\partial_k F^i_{\ j}}\partial_{kj}v^i \quad = \quad \partial_k\left(\frac{\partial s}{\partial\partial_k F^i_{\ j}}\partial_j v^i\right) - \partial_k\left(\frac{\partial s}{\partial\partial_k F^i_{\ j}}\right)\partial_j v^i. \tag{29}$$

Ezeknek a formuláknak a vizsgálata megmutatja, hogy az extra entrópiaáram-sűrűség milyen választása egyszerűsíti a a disszipációs egyenlőtlenséget megoldható formába. Ezért azt feltételezzük, hogy

$$K^i := \frac{\partial s}{\partial e} v_j T^{ij} - \frac{\partial s}{\partial \partial_i F^k_{\ j}} \partial_j v^k.$$

Végül, bevezetve a hőáram megszokott definícióját: $\hat{q}^i := q^i + v_j T^{ij}$, az entrópia áramsűrűsége a következő lesz:

$$J^i = \frac{\partial s}{\partial e}\hat{q}^i + \frac{\partial s}{\partial \partial_i v^r}\left(\frac{\partial T^{jr}}{\partial e}\partial_j e + \frac{\partial T^{kr}}{\partial \partial_l v^m}\partial_{lk} v^m + \frac{\partial T^{kr}}{\partial \partial_l F^n_{\ m}}\partial_{lk} F^n_{\ m}\right) + \frac{\partial s}{\partial \partial_i F^k_{\ j}}\partial_j v^k. \quad (30)$$

A disszipációs egyenlőtlenség pedig

$$\hat{q}^i \partial_i \frac{\partial s}{\partial e} + \partial_j v^i \left(\frac{\partial s}{\partial e} T_i^j + \frac{\partial s}{\partial F^i_{\ j}} - \frac{\partial s}{\partial e}\left(\alpha_1 \partial_{lk} T^{lk}\delta_i^j + \alpha_2 \partial^j{}_k T^k{}_i\right) - \partial_k \frac{\partial s}{\partial \partial_k F^i_{\ j}}\right) \geq 0. \quad (31)$$

Ekkor bevezetjük a θ termosztatikai hőmérsékletet az entrópia deriváltjaként $\frac{\partial s}{\partial e} = \frac{\partial s}{\partial u} = \frac{1}{\theta}$, és a szabadenergiát: $\psi := u - \theta s$ azért, hogy a fenti formula mechanikai részét egyszerűsítsük. Ráadásul, izoterm folyamatokra szorítkozva, azaz feltéve, hogy a hőmérséklet homogén és állandó θ_0 értékű, azt kapjuk, hogy

$$\theta_0 \sigma_S = \partial_j v^i \left(T_i^j - \frac{\partial \psi}{\partial F^i_{\ j}} - \alpha_1 \partial_{lk} T^{lk}\delta_i^j - \alpha_2 \partial^j{}_k T^k{}_i + \partial_k \frac{\partial \psi}{\partial \partial_k F^i_{\ j}}\right). \quad (32)$$

Végül pedig még az α_1 és α_2 anyagi paraméterekről is feltételezzük, hogy állandóak, hogy az entrópiaprodukció mechanikai részét a lehető legáttekinthetőbb formába alakítsuk:

$$\theta_0 \sigma_S = \partial_j v^i \left(T_i^j - \frac{\partial \psi}{\partial F^i_{\ j}} - \partial_k\left(\alpha_1 \partial_l T^{lk}\delta_i^j + \alpha_2 \partial^j T^k{}_i - \frac{\partial \psi}{\partial \partial_k F^i_{\ j}}\right)\right) =$$
$$\nabla \mathbf{v} : \left(\mathbf{T} - \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{F}} - \nabla \cdot \left(\alpha_1 (\nabla \cdot \mathbf{T})\mathbf{I} + \alpha_2 \nabla \mathbf{T} - \frac{\partial \psi}{\partial \nabla \mathbf{F}}\right)\right) \geq 0. \quad (33)$$

Itt az indexek használata nélkül megadott második sorban a pont jelöli az indexek összegzését, így például $\nabla\cdot$ a divergenciát. A fenti kifejezés zárójelében látható első két tag jól ismert a klasszikus rugalmasságtanból [36]. (32) utolsó tagja a hiperfeszültség bevezetésével, a virtuális teljesítmény módszerével kapható tagra emlékeztet.

A nemdisszipatív esetben, amikor a fenti jobb oldali szorzótényező, a termodinamikai áram zérus, kapjuk a harmadfok] rugalmasság anyagtörvényét, ami a következő relációt jelenti a feszültség, annak térderiváltjai, illetve a szabadenergia megfelelő deriváltja között

$$\mathbf{T} - \nabla \cdot (\alpha_1 (\nabla \cdot \mathbf{T})\mathbf{I} + \alpha_2 \nabla \mathbf{T}) = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{F}} - \nabla \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \nabla \mathbf{F}}. \quad (34)$$

Ez nem a szokásos anyagi függvénykapcsolat, hanem a balodla második tagja miatt ez egy differenciálegyenlet, melynek szerkezete a feszültség deriváltjainak megjelenése miatt hasonlít a reológia POYNTING-THOMSON testének anyagegyenletéhez. A jobboldal első tagja a hagyományos nemlineáris rugalmasság, az utolsó tagja pedig harmadrendű hiperfeszültség-tenzor segítségével posztulált hiperrugalmasság anyagfüggvényének formáját mutatja.

3. EGYSZERŰ HULLÁMOK

Ebben a szakaszban kiszámoljuk az egydimenziós longitudinális hullámokra vonatkozó diszperziós relációt a kis deformációs közelítésben, hogy a fenti feszültség-deformáció kapcsolat fizikai jellegéről képet kapjunk.

Tegyük fel, hogy a szabadenergia kvadratikus és izotrop a szimmetrikus deformációban, amit a következőképpen definiálunk: $\epsilon^i_j = \frac{1}{2}(F^i_j + F^j_i - 2\delta^i_j)$. Ez a kis deformációs ideális rugalmasságtan anyagfüggvényét adja. Tegyük fel továbbá, hogy hasonlóan kvadratikus és izotrop a szimmetrikus deformációk gradiensében is. Ekkor a reprezentációs tételeknek megfelelően a szabadenergia-függvény két további anyagi paramétert, a_1-et és a_2-t tartalmaz [37]:

$$\psi(\epsilon^i_j, \partial_k\epsilon^i_j) = \frac{\lambda}{2}(\epsilon^i_i)^2 + \mu\epsilon^i_j\epsilon^i_j + \frac{a_1}{2}\partial_i\epsilon^j_j\partial^i\epsilon^k_k + \frac{a_2}{2}\partial_i\epsilon^j_k\partial^i\epsilon^k_j. \tag{35}$$

A feszültség-deformáció reláció

$$T^j_i - \alpha_1\partial_k\partial_l T^{lk}\delta^j_i - \alpha_2\partial_k\partial^j T^k{}_i = \lambda\epsilon^k_k\delta^j_i + 2\mu\epsilon^j_i - a_1(\partial^k_k\epsilon^l_l)\delta^j_i - a_2\partial^k_k(\epsilon^j_i). \tag{36}$$

Vizsgáljuk a lehető legegyszerűbb egydimenziós esetet, a tárgyalásunkat a fenti tenzoregyenlet egyetlen kompnensére korlátozva. Bevezetve a $T = T^{11}$ és $\epsilon = \epsilon^{11}$ jelöléseket, és ∂_1-et vesszővel jelölve kapjuk, hogy

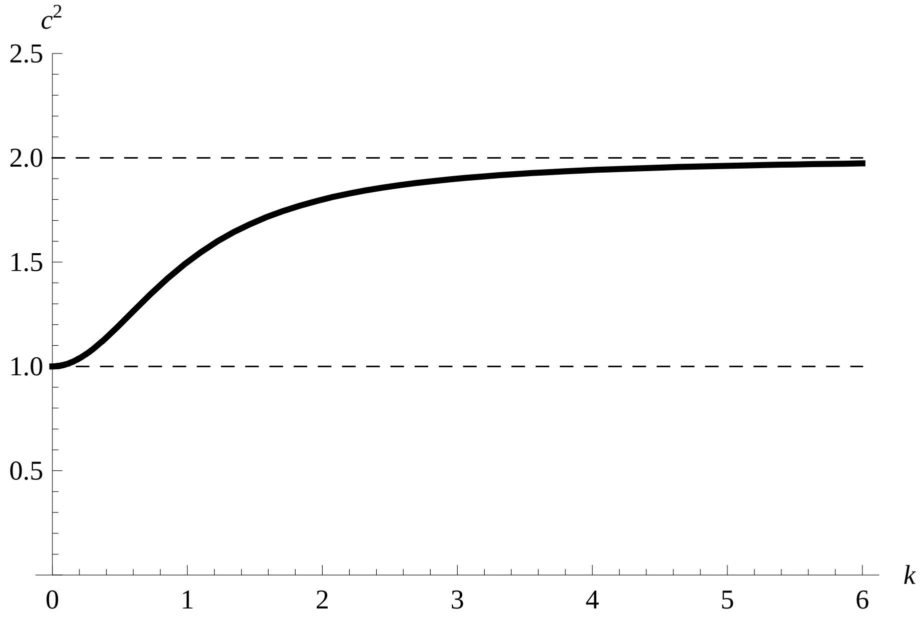
$$T - \alpha T'' = \hat{\lambda}\epsilon - a\epsilon''.$$

ahol $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, $\hat{\lambda} = \lambda + 2\mu$ és $a = a_1 + a_2$. Ez a differenciálegyenlet csatolódik az impulzusmérleghez, ami esetünkben

$$\rho_0\ddot{\epsilon} - T'' = 0.$$

Állandó anyagi paraméterek esetén a diszperziós reláció ezek után a következő:

$$\omega^2 = \frac{k^2(\hat{\lambda} + ak^2)}{\rho_0(1 + \alpha k^2)}.$$



1. ÁBRA. A fázissebesség négyzete $c^2 = (\omega(k)/k)^2$ a hullámszám függvényében. A paraméterek értékei $\rho_0 = 1$, $\hat{\lambda} = 1$, $\alpha = 1$ és $a = 2$.

Ez az $\omega(k)$ diszperziós reláció a kis hullámhosszú és a nagy hullámhosszú határesetben is véges hullámsebességre vezet: $\lim_{k\to 0} \frac{\omega(k)}{k} = \sqrt{\hat{\lambda}/\rho_0}$ és $\lim_{k\to\infty} \frac{\omega(k)}{k} = \sqrt{a/(\alpha\rho_0)}$, ahogy azt az 1. ábrán szemléltettük. Ez a viselkedés például a kettős hullámegyenlet jellemzője [38]. Kettős hullámegyenletet mikroszerkezeti megfontolásokkal kaphatunk, például mikrodeformáció-elméletben, vagy duális belső változók segítségével [37, 21].

4. ÖSSZEFOGLALÁS

Az első fokú viszkoelaszticitás elméletének harmadfokig történő gyengén nemlokális kiterjeszthetőségét vizsgáltuk . Az entrópiaáramot konstitutív mennyiségnek tekintve a LIU-eljárást alkalmaztuk olyan módon, hogy a (2) kinematikai feltétel és az impulzusmérleg gradiensét is, mint további kényszereket is fegyelembe vettük a második főtétel egyenlőtlenségéhez.

A számításokat a PIOLA–KIRCHHOFF-rendszerben, az anyagi objektivitás NOLL-féle megfogalmazásának általánosítását felhasználva végeztük. A konstitutív állapottérben ezért a sebesség és és a mozgásgradiens alkotta téridő négyestenzor komponenseit és ezek első és második térderiváltjait, illetve a fajlagos teljes energiát és annak gradiensét vezethettük be a meghatározandó anyagfüggvényeink változóinak.

Nagyon fontos megjegyeznünk, hogy konstitutív állapottér magasabb deriváltakkal történő kiterjesztése nem fogja megváltoztatni az entrópiaprodukció formáját, ha egyúttal a kényszerek további deriváltjait nem vezetjük be további kényszerként. Ez a kiterjesztés valójában szükséges is legalább egy további rend erejéig, mert különben a tisztán rugalmas eset anyagtörvénye sem értelmezhető, hiszen vegyük észre, hogy a feszültség például nem függhet a deformációgradiens második deriváltjától, legalábbis (18) általunk alkalmazott megoldása kizárja ezt. Eggyel magasabb rend bevezetése könnyen megfontolhatóan már csak a harmadik deriválttól való függést zárja ki, számításaink az anyagtörvény formáját tekintve lényegében triviálisan ugyanarra vezetnek, viszont a formulák mérete és az egyenletek száma is jelentősen megnő, illetve a számítások áttekinthetősége lecsökken.

A nemlokálisan kiterjesztett állapottérrel megadtuk a LIU-egyenletek egy teljes megoldását és ezt felhasználva az entrópiaáramot és a disszipációs egyenlőtlenséget is. Az extra entrópiafluxus célszerű megválasztásával illetve a kvadratikus belső energia bevezetésével megoldhatóvá, azaz erő-áram formájúvá alakítottuk az entrópiaprodukciót. Ebből megkaptuk a nem disszipatív, tisztán mechanikai esetre vonatkozó feszültség-mozgásgradiens anyagtörvényt. Ez tartalmazta a feszültség térderiváltjait is a szokásos rugalmas tagon felül, ráadásul a mozgásgradiens térderiváltjának divergenciáját tartalmazó tagot is, amit általában a kettős feszültség (double stress), vagy hiperfeszültség segítségével vezetnek le. A mi eljárásunk során nem kellett ilyen fogalmakat bevezetnünk.

Végül kiszámítottuk az egy dimenziós hullámok diszperziós relációját, és megállapítottuk, hogy ilyen diszperziós relációkat az anyagok mikroszerkezetének figyelembe vételével kapnak. A magasabbrendű nemlokális kontinuumoktól pedig pontosan az anyag tiszta rugalmasságán túlmutató, azaz a mikroszerkezetet robosztus és univerzális módon leképező konstitutív relációkat várunk [39].

Végezetül, ahogy már a bevezetésben is említettük, (34)-hoz hasonló feszültség-deformácó relációt már javasoltak [24]. Azonban ott ennek motivációja a feszültség szingularitásainak eltüntetése volt egyfajta ad hoc "reakció-diffúzió" forma bevezetésével. Itt most megmutattuk, hogy a gyengén nemlokális termodinamikai elmélet megengedi ezt a fajta kiterjesztést, sőt számos további információt is nyerhetünk. Így például egy variációs megfogalmazásból adódóval egyenértékű természetes peremfeltételeket kaphatunk (az entrópiaáram nulla legyen a peremen) vagy például láttuk, hogy a feszültségderiváltat tartalmazó tagok a mozgásgradiensre vonatkozó kinetikusenergia-tagok következményei.

5. KÖSZÖNETEK

A szerző hálás ARKADI BEREZOVSKInak a remek beszélgetésekért és vitákért, továbbá CHRISTINA PAPENFUSSnak a számítások ellenőrzéséért. A munkát az Otka K81161 pályázatával támogatta.

IRODALOM

[1] C. Truesdell and W. Noll. *The Non-Linear Field Theories of Mechanics*. Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1965. Handbuch der Physik, III/3.

[2] Verhás J. *Termodinamika és reológia*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1985.

[3] M. E. Gurtin. Thermodynamics and the possibility of spatial interaction in elastic materials. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 19:339–352, 1965.

[4] C. Papenfuss and S. Forest. Thermodynamical frameworks for higher grade material theories with internal variables or additional degrees of freedom. *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*, 31(4):319–353, 2006.

[5] A. Acharya and T. G. Shawki. Thermodynamic restrictions on constitutive equations for second-deformation-gradient inelastic behaviour. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 43:1751–1772, 1995.

[6] M. E. Gurtin. *Configurational forces as basic concepts of continuum physics*. Springer, New York-etc., 2000.

[7] G. Maugin. *The thermomechanics of nonlinear irreversible behaviors (An introduction)*. World Scientific, Singapore-New Jersey-London-Hong Kong, 1999.

[8] I. Müller. *Thermodynamics*. Pitman, Toronto, 1985.

[9] P. Ván. Weakly nonlocal irreversible thermodynamics. *Annalen der Physik (Leipzig)*, 12(3):146–173, 2003. (cond-mat/0112214).

[10] I-Shih Liu. Entropy flux relation for viscoelastic bodies. *Journal of Elasticity*, 90(3):259–270, 2008.

[11] D. Jou, J. Casas-Vázquez, and G. Lebon. *Extended Irreversible Thermodynamics*. Springer Verlag, Berlin-etc., 1992. 3rd, revised edition, 2001.

[12] I. Müller and T. Ruggeri. *Rational Extended Thermodynamics*, volume 37 of *Springer Tracts in Natural Philosophy*. Springer Verlag, New York-etc., 2nd edition, 1998.

[13] I-Shih Liu. Method of Lagrange multipliers for exploitation of the entropy principle. *Archive of Rational Mechanics and Analysis*, 46:131–148, 1972.

[14] P. Ván. Exploiting the Second Law in weakly nonlocal continuum physics. *Periodica Polytechnica, Ser. Mechanical Engineering*, 49(1):79–94, 2005. (cond-mat/0210402/ver3).

[15] P. Ván. Weakly nonlocal irreversible thermodynamics - the Guyer-Krumhansl and the Cahn-Hilliard equations. *Physics Letters A*, 290(1-2):88–92, 2001. (cond-mat/0106568).

[16] V. A. Cimmelli, A. Sellito, and D. Jou. Nonlocal effects and second sound in a nonequilibrium steady state. *Physical Review B*, 79:014303, 2009.

[17] P. Ván and T. Fülöp. Weakly nonlocal fluid mechanics - the Schrödinger equation. *Proceedings of the Royal Society, London A*, 462(2066):541–557, 2006. (quant-ph/0304062).

[18] M. A. Goodman and S. C. Cowin. Two problems in the gravity flow of granular materials. *Journal of fluid Mechanics*, 45/2:321–339, 1971.

[19] P. Ván. Weakly nonlocal continuum theories of granular media: restrictions from the Second Law. *International Journal of Solids and Structures*, 41(21):5921–5927, 2004. (cond-mat/0310520).

[20] P. Ván, A. Berezovski, and Engelbrecht J. Internal variables and dynamic degrees of freedom. *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*, 33(3):235–254, 2008. cond-mat/0612491.

[21] A. Berezovski, J. Engelbrecht, and G. A. Maugin. Generalized thermomechanics with dual internal variables. *Archive of Applied Mechanics*, 2010. online first.

[22] Ván P. Weakly nonlocal non-equilibrium thermodynamics - variational principles and Second Law. In Ewald Quak and Tarmo Soomere, editors, *Applied Wave Mathematics (Selected Topics in Solids, Fluids, and Mathematical Methods)*, chapter III, pages 153–186. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2009. arXiv:0902.3261.

[23] W. Muschik, Vita Triani, and Christina Papenfuss. Exploitation of the dissipation inequality, if some balances are missing. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 3(6):1125–1133, 2008.

[24] E. C. Aifantis. Update on a class of gradient theories. *Mechanics of Materials*, 35:259–280, 2003.

[25] Asszonyi Cs. Ván P. és Szarka Z. *Izotróp kontinuumok rugalmas és képlékeny állapota*, volume 5 of *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár*. Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2007. ISBN 978-963-420-932-4.

[26] R. M. Wald. *General Relativity*. The University of Chicago Press, Chicago and London, 1984.

[27] W. Noll. Space-time structures in classical mechanics. In *The foundations of mechanics and thermodynamics (Selected papers by Walter Noll)*, pages 204–210. Springer

Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1974. originally: pp28-34, Delaware Seminar in the Foudnations of Physics, Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 1967.

[28] T. Matolcsi and P. Ván. Can material time derivative be objective? *Physics Letters A*, 353:109–112, 2006. math-ph/0510037.

[29] T. Matolcsi and P. Ván. Absolute time derivatives. *Journal of Mathematical Physics*, 48:053507–19, 2007. math-ph/0608065.

[30] Fülöp T. Kontinuumok kinematikájának új értelmezése. In Fülöp T., editor, *Új eredmények a kontinuumfizikában*, volume 8 of *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár*, chapter 3, pages 55–99. Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2008.

[31] P. Ván. Objective time derivatives in non-equilibrium thermodynamics. *Proceedings of Estonian Academy of Sciences*, 57(3):127, 2008.

[32] P. Ván. Anyagi sokaságok a nemrelativisztikus téridőben. In Fülöp T., editor, *Új eredmények a kontinuumfizikában*, volume 8 of *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár*, chapter 2, pages 37–54. Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2008.

[33] I. Pawł ow. Thermodynamically consistent Cahn-Hilliard and Allen-Cahn models in elastic solids. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 15(4):1169–1191, 2006.

[34] P. Ván. Internal energy in dissipative relativistic fluids. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 3(6):1161–1169, 2008. Lecture held at TRECOP'07, arXiv:07121437 [nucl-th].

[35] V. A. Cimmelli. An extension of Liu procedure in weakly nonlocal thermodynamics. *Journal of Mathematical Physics*, 48:113510, 2007.

[36] In Asszonyi Cs., editor, *Izotróp kontinuumok anyagtörvénye*, volume 3 of *Mérnökgeológia-Kőzetmechanika Kiskönyvtár*. Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2006.

[37] R. D. Mindlin. Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 1:417–438, 1965.

[38] A. V. Porubov, E. L. Aero, and G. A. Maugin. Two approaches to study essential nonlinear and dispersive properties of the internal structure of materials. *Physical Review E*, (79):046608, 2009.

[39] S. Forest and R. Sievert. Nonlinear microstrain theories. *International Journal of Solids and Structures*, 43:7224–7245, 2006.