

Eltérés a lánccörbe ferde és vízszintes felfüggesztésre vonatkozó belógásai között

Difference between the Catenary Sags in Inclined and Level Spans of Overhead Lines

HATIBOVIC Alen
doktorjelölt (BME)

egyéni vállalkozó, okleveles villamosmérnök
levelezési cím: 6500 Baja, Szivárvány u. 40, Magyarország
tel: +36-70/571-5000, e-mail: hatibovic.alen@gmail.com

Abstract

It is a well known fact that the conductor in a span of an overhead line takes originally the shape of the catenary and it can be replaced by the parabola only in the case of short spans. A good knowledge of mathematical properties of the catenary and the parabola curves and also their sags is of high importance for overhead line design engineers. In this context the present paper shows the derivation and the application of the equation, which describes the difference between the catenary sags in inclined and level spans. By using the new equation, the mentioned difference can be determined at any point of the span, and the position of the maximum difference can be obtained as well. Regarding the latter, two new formulas are shown for the two types of inclined spans, while their concrete usage is presented in practical examples.

Összefoglaló

Közismert tény, hogy a vezeték az oszlopközben eredetileg a lánccörbe alakját veszi fel és csak kisebb oszlopközök esetén helyettesíthető a lánccörbe parabolával. A lánccörbe és a parabola, valamint a belógásuk matematikai tulajdonságainak alapos ismerete a szabadvezetékes villamos hálózat tervezői számára kiemelt fontosságú. Ebben az összefüggésben a jelen cikk ismerteti a matematikai egyenlet levezetését és alkalmazását, mely lánccörbe ferde és vízszintes felfüggesztésre vonatkozó belógásai közötti eltérést írja le az oszlopközben. Az új egyenlet felhasználásával meghatározható az említett eltérés az oszlopköz bármely pontján, valamint a legnagyobb eltérés helye is. Az utóbbira vonatkozóan, a két típusú ferde felfüggesztés esetére két új képlet került bemutatásra, míg konkrét alkalmazásuk gyakorlati példákban szerepel.

Kulcsszavak: lánccörbe, parabola, belógás, ferde felfüggesztés, vízszintes felfüggesztés.

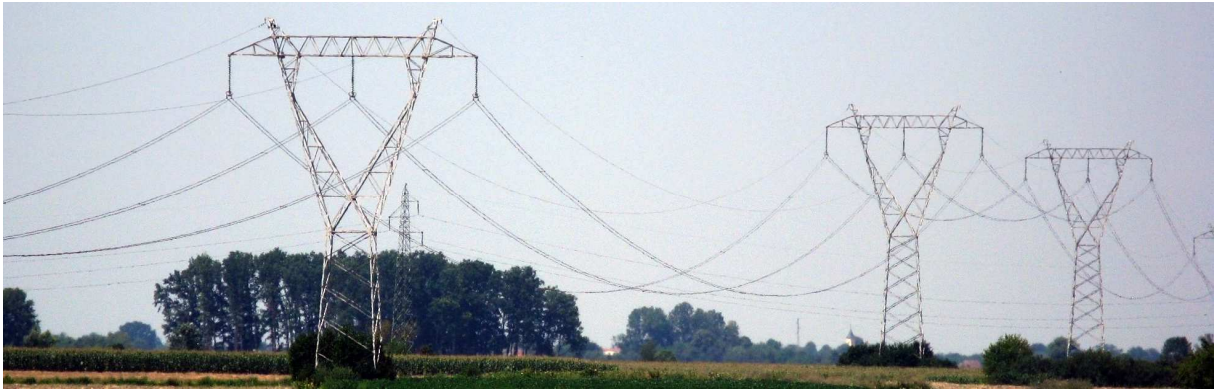
1. Bevezetés

A cikkben a vezeték alakját lánccörbének tekintjük, melyet a *koszinusz hiperbolikus* függvény írja le. Az itt szereplő matematikai levezetésekhez használt bemenő adatok az alább vannak listázva.

- a – oszlopköz hossza
- h_1 – baloldali felfüggesztési pont magassága
- h_2 – jobboldali felfüggesztési pont magassága
- c – lánccörbe paramétere [1,2]

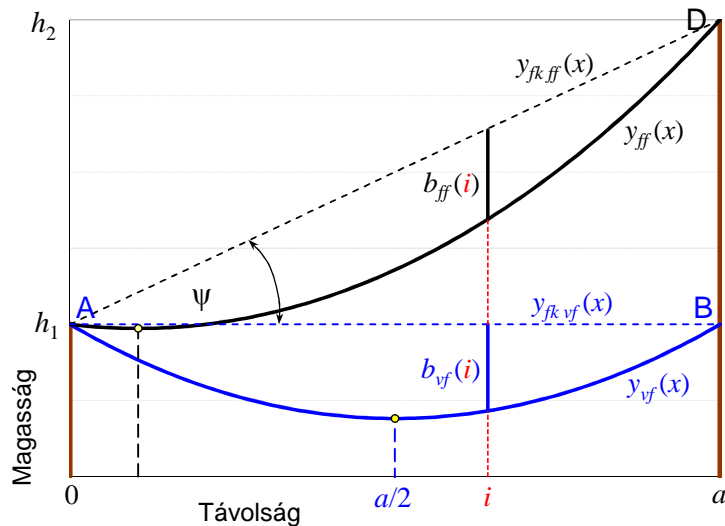
A $h_1=h_2$ esetén vízszintes felfüggesztésről, $h_1 \neq h_2$ esetén pedig ferde felfüggesztésről van szó. Az utóbbinak két típusa van, $h_1 < h_2$ és $h_1 > h_2$. A vízszintes felfüggesztés és ferde felfüggesztés kifejezések

gyakori ismétlődése miatt a továbbiakban a *vf.* és *ff.* rövidítések kerülnek alkalmazásra a leírás egyszerűsítése végett. Az 1. ábrán a *vf.*-i közőkkel alakított szabadvezetékes hálózat látható.



1. ábra
Szabadvezetékes hálózat

A 2. ábra együtt szemlélteti a vezetékgörbét *vf.*-i közőben (AB) és *ff.*-i közőben (AD). Ennek az ábrának a segítségével a következő fejezetben a *ff.*-re és *vf.*-re vonatkozó belógások közötti eltérésének az egyenlete $\Delta b(x)$ kerül levezetésre a láncgörbe esetére. Az ábrán látható jelölések jelentése az ábra alatt szerepel.



2. ábra
Láncgörbe vízszintes és ferde felfüggesztési közőben

- $A(0;h_1)$ – bal oldali felfüggesztési pont *vf.* és *ff.* esetén
- $B(a;h_1)$ – jobb oldali felfüggesztési pont *vf.* esetén
- $D(a;h_2)$ – jobb oldali felfüggesztési pont *ff.* esetén
- ψ – ferdeség
- a – oszlopköz hossza
- $y_{fk_vf}(x)$ – felfüggesztési köző egyenesének egyenlete *vf.* esetén
- $y_{fk_ff}(x)$ – felfüggesztési köző egyenesének egyenlete *ff.* esetén
- $y_{vf}(x)$ – vezetékgörbe egyenlete *vf.* esetén
- $y_{ff}(x)$ – vezetékgörbe egyenlete *ff.* esetén
- $b_{vf}(x)$ – belógási görbe egyenlete *vf.* esetén [3]
- $b_{ff}(x)$ – belógási görbe egyenlete *ff.* esetén [3]
- $b_{vf}(i)$ – belógás az oszlopköz i pontján *vf.* esetén
- $b_{ff}(i)$ – belógás az oszlopköz i pontján *ff.* esetén

A cikk elsődleges célja az (1) egyenlet meghatározása, mely az oszlopköz bármely pontjára alkalmazható. A másodlagos cél a $(\Delta b)_{\max}$ elhelyezkedésének a feltárása az oszlopközben, ami a cikkben az x_u jelölést kapja. Ezt követően a $(\Delta b)_{\max}$ értéke is kiszámítható, a (2) alapján.

$$\Delta b(x) = b_{ff}(x) - b_{vf}(x), \quad x \in [0, a] \quad (1)$$

$$(\Delta b)_{\max} = \Delta b(x_u), \quad x_u \in (0, a) \quad (2)$$

A $b_{vf}(x)$ és $b_{ff}(x)$ belógási görbék egyenleteinek együttes tárgyalásukhoz szükséges alapfeltételek, hogy a kétféle felfüggesztésre vonatkozó a , ill. c adat azonos legyen ($a_{vf} = a_{ff} = a$ és $c_{vf} = c_{ff} = c$) [4].

2. $\Delta b(x)$ egyenlet levezetése és alkalmazása

Láncgörbe esetén a $b_{ff}(x)$ a (3) [5] egyenlettel van megadva. Azonban a $\Delta b(x)$ meghatározásához előzetesen a (3) egyenletet a (7) alakjára kell változtatni, ami a (4), (5) [6,7] és (6) [8] azonosságok felhasználásával lehetséges.

$$b_{ff}(x) = \frac{h_2 - h_1}{a} x - 2c \cdot \text{sh}^2 \left(\frac{a}{4c} - \frac{x}{2c} - \frac{1}{2} \text{arsh} \frac{h_2 - h_1}{2c \cdot \text{sh} \frac{a}{2c}} \right) + 2c \cdot \text{sh}^2 \left(\frac{a}{4c} - \frac{1}{2} \text{arsh} \frac{h_2 - h_1}{2c \cdot \text{sh} \frac{a}{2c}} \right) \quad x \in [0, a] \quad (3)$$

$$2c \cdot \text{sh}^2 \frac{x}{2c} = c \cdot \text{ch} \frac{x}{c} - c \quad (4)$$

$$\text{ch}(x) - \text{ch}(y) = 2 \cdot \text{sh} \frac{x+y}{2} \cdot \text{sh} \frac{x-y}{2} \quad (5)$$

$$\text{sh}(-x) = -\text{sh}(x) \quad (6)$$

$$b_{ff}(x) = \frac{h_2 - h_1}{a} x - 2c \cdot \text{sh} \frac{x}{2c} \cdot \text{sh} \left(\frac{x-a}{2c} + \text{arsh} \frac{h_2 - h_1}{2c \cdot \text{sh} \frac{a}{2c}} \right) \quad x \in [0, a] \quad (7)$$

Ebből közvetlenül adódik a $b_{vf}(x)$, a $h_1 = h_2$ behelyettesítésével:

$$b_{vf}(x) = 2c \cdot \text{sh} \frac{x}{2c} \cdot \text{sh} \frac{a-x}{2c}, \quad x \in [0, a] \quad (8)$$

Ezt követően az (1) alapján definiálható a (9) egyenlet, mely azonban átrendezhető a (10) alakjára.

$$\Delta b(x) = \frac{h_2 - h_1}{a} x - 2c \cdot \text{sh} \frac{x}{2c} \cdot \left[\text{sh} \left(\frac{x-a}{2c} + \text{arsh} \frac{h_2 - h_1}{2c \cdot \text{sh} \frac{a}{2c}} \right) + \text{sh} \frac{a-x}{2c} \right] \quad x \in [0, a] \quad (9)$$

$$\Delta b(x) = \frac{h_2 - h_1}{a} x - 4c \cdot \text{sh} \left(\frac{1}{2} \text{arsh} \frac{h_2 - h_1}{2c \cdot \text{sh} \frac{a}{2c}} \right) \cdot \text{sh} \frac{x}{2c} \cdot \text{ch} \left(\frac{a-x}{2c} - \frac{1}{2} \text{arsh} \frac{h_2 - h_1}{2c \cdot \text{sh} \frac{a}{2c}} \right) \quad x \in [0, a] \quad (10)$$

A (10) egyenlettel kiszámítható a láncgörbe ff -re és vf -re vonatkozó belógásai közötti eltérés az oszlopköz tetszőleges pontján. Az x értéke, melyhez a $\Delta b(x)$ -nek maximuma van az x_u szimbólummal van jelölve és $h_1 < h_2$ esetén a (11) képlettel határozható meg. A (11) a $d(\Delta b(x))/dx=0$ egyenletből került levezetésre [9].

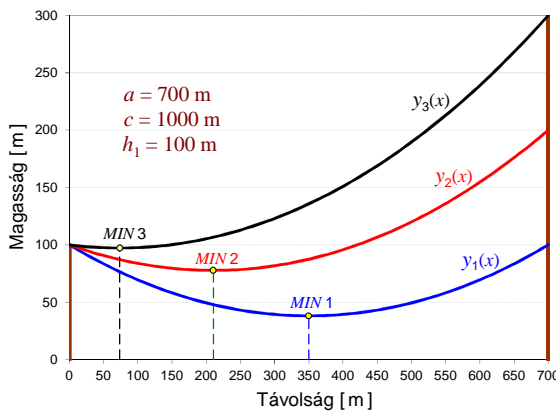
$$x_u = \frac{1}{2} \cdot \left[a - c \cdot \text{arsh} \frac{h_2 - h_1}{2c \cdot \text{sh}(a/2c)} \right] + c \cdot \text{arch} \frac{h_2 - h_1}{2a \cdot \text{sh} \left[\frac{1}{2} \text{arsh} \frac{h_2 - h_1}{2c \cdot \text{sh}(a/2c)} \right]} \quad \forall \quad h_1 < h_2 \quad (11)$$

Azonban a $h_1 > h_2$ esetén a (11) képlet nem érvényes, az *area koszinusz hiperbolikus* függvény ($y = \text{arch}(x)$) miatt. Ilyenkor a (12) képletet kell használni.

$$x_u = \frac{1}{2} \cdot \left[a - c \cdot \text{arsh} \frac{h_2 - h_1}{2c \cdot \text{sh}(a/2c)} \right] - c \cdot \text{arch} \frac{h_2 - h_1}{2a \cdot \text{sh} \left[\frac{1}{2} \text{arsh} \frac{h_2 - h_1}{2c \cdot \text{sh}(a/2c)} \right]} \quad \forall \quad h_1 > h_2 \quad (12)$$

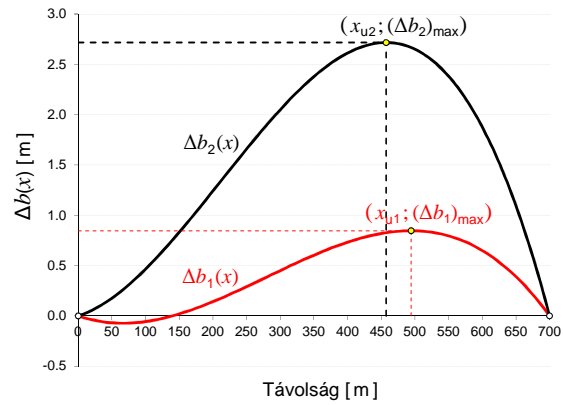
A (10) – (12) kifejezések alkalmazása a következő numerikus példákban kerülnek bemutatásra. Mindkét példa tartalmaz egy láncgörbét ($y_1(x)$, ill. $y_{\text{I}}(x)$) a *vf.*-i között és még két másikat ($y_2(x)$ és $y_3(x)$, ill. $y_{\text{II}}(x)$ és $y_{\text{III}}(x)$) eltérő ferdeségű *ff.*-i között (3. és 5. ábra), de mind a hat esetre vonatkozóan az oszlopköz hossza, valamint a láncgörbe paramétere is azonos. A vezeték legmélyebb pontja [10] a *MIN* jellel van feltüntetve. A két példára az $y_1(x) = y_{\text{I}}(x) = y_{\text{vf}}(x)$ azonosság vonatkozik.

1. Példa: $a = 700 \text{ m}$; $h_1 = 100 \text{ m}$; $h^{(1)}_2 = 100 \text{ m}$, $h^{(2)}_2 = 200 \text{ m}$, $h^{(3)}_2 = 300 \text{ m}$; $c = 10^3 \text{ m}$.



3. ábra

Láncgörbék az 1. példában, közös ábrán



4. ábra

$\Delta b(x)$ görbék az 1. példában, közös ábrán

$$\Delta b_1(x) = b_2(x) - b_1(x) = \frac{1}{7}x - 279,28334 \cdot \text{sh} \frac{x}{2 \cdot 10^3} \cdot \text{ch} \left(\frac{700 - x}{2 \cdot 10^3} - 0,06976 \right) \quad x \in [0, 700] \quad (13)$$

$$x_{u1} = \frac{1}{2} \cdot \left(700 - 10^3 \cdot \text{arsh} \frac{200 - 100}{2 \cdot 10^3 \cdot \text{sh} \frac{700}{2 \cdot 10^3}} \right) + 10^3 \cdot \text{arch} \frac{200 - 100}{2 \cdot 700 \cdot \text{sh} \left(\frac{1}{2} \text{arsh} \frac{200 - 100}{2 \cdot 10^3 \cdot \text{sh} \frac{700}{2 \cdot 10^3}} \right)} = 494,42621 \text{ m}$$

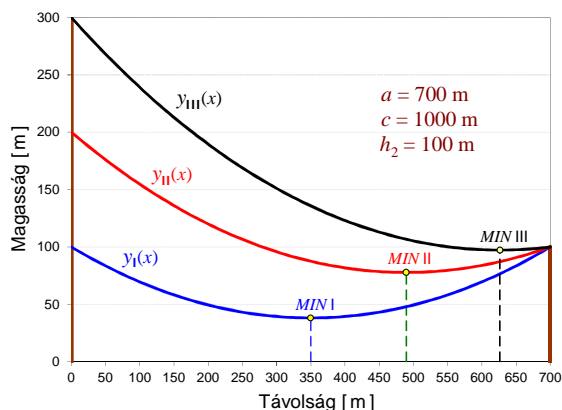
Az x_{u1} -et behelyettesítve a (13) egyenletbe következik: $(\Delta b_1)_{\text{max}} = \Delta b_1(494,42621 \text{ m}) = 0,84638 \text{ m}$

$$\Delta b_2(x) = b_3(x) - b_1(x) = \frac{2}{7}x - 554,62054 \cdot \text{sh} \frac{x}{2 \cdot 10^3} \cdot \text{ch} \left(\frac{700 - x}{2 \cdot 10^3} - 0,13821 \right) \quad x \in [0, 700] \quad (14)$$

$$x_{u2} = \frac{1}{2} \cdot \left(700 - 10^3 \cdot \text{arsh} \frac{300 - 100}{2 \cdot 10^3 \cdot \text{sh} \frac{700}{2 \cdot 10^3}} \right) + 10^3 \cdot \text{arch} \frac{300 - 100}{2 \cdot 700 \cdot \text{sh} \left(\frac{1}{2} \text{arsh} \frac{300 - 100}{2 \cdot 10^3 \cdot \text{sh} \frac{700}{2 \cdot 10^3}} \right)} = 457,36068 \text{ m}$$

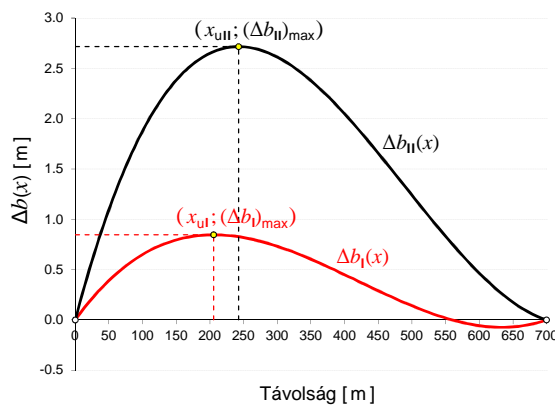
Az x_{u2} -t behelyettesítve a (14) egyenletbe következik: $(\Delta b_2)_{\text{max}} = \Delta b_2(457,36068 \text{ m}) = 2,71708 \text{ m}$

2. Példa: $a=700\text{m}$; $h^{(1)}_1=100\text{m}$, $h^{(2)}_1=200\text{m}$, $h^{(3)}_1=300\text{m}$; $h_2=100\text{m}$; $c=10^3\text{m}$.



5. ábra

Láncgörbék az 2. példában, közös ábrán



6. ábra

$\Delta b(x)$ görbék az 2. példában, közös ábrán

$$\Delta b_I(x) = b_{II}(x) - b_I(x) = \frac{-1}{7}x + 279,28334 \cdot \text{sh} \frac{x}{2 \cdot 10^3} \cdot \text{ch} \left(\frac{700-x}{2 \cdot 10^3} + 0,06976 \right) \quad x \in [0,700] \quad (15)$$

$$x_{uI} = \frac{1}{2} \cdot \left(700 - 10^3 \cdot \text{arsh} \frac{100-200}{2 \cdot 10^3 \cdot \text{sh} \frac{700}{2 \cdot 10^3}} \right) - 10^3 \cdot \text{arch} \frac{100-200}{2 \cdot 700 \cdot \text{sh} \left(\frac{1}{2} \text{arsh} \frac{100-200}{2 \cdot 10^3 \cdot \text{sh} \frac{700}{2 \cdot 10^3}} \right)} = 205,57379 \text{ m}$$

$$(\Delta b_I)_{\max} = \Delta b_I(x_{uI}) = \Delta b_I(205,57379 \text{ m}) = 0,84638 \text{ m}$$

$$\Delta b_{II}(x) = b_{III}(x) - b_I(x) = \frac{-2}{7}x + 554,62054 \cdot \text{sh} \frac{x}{2 \cdot 10^3} \cdot \text{ch} \left(\frac{700-x}{2 \cdot 10^3} + 0,13821 \right) \quad x \in [0,700] \quad (16)$$

$$x_{uII} = \frac{1}{2} \cdot \left(700 - 10^3 \cdot \text{arsh} \frac{100-300}{2 \cdot 10^3 \cdot \text{sh} \frac{700}{2 \cdot 10^3}} \right) - 10^3 \cdot \text{arch} \frac{100-300}{2 \cdot 700 \cdot \text{sh} \left(\frac{1}{2} \text{arsh} \frac{100-300}{2 \cdot 10^3 \cdot \text{sh} \frac{700}{2 \cdot 10^3}} \right)} = 242,63932 \text{ m}$$

$$(\Delta b_{II})_{\max} = \Delta b_{II}(x_{uII}) = \Delta b_{II}(242,63932 \text{ m}) = 2,71708 \text{ m}$$

Megjegyzés:

A fenti két példa úgy került kidolgozásra, hogy a ferde felfüggesztés mindkét típusa ($h_1 < h_2$ és $h_1 > h_2$) legyen bemutatva, és olyan módon, hogy az egyik példa 1–1 ábrája (3. és 4.) a másik példa 1–1 ábrájának (5. és 6.) tükörképét képezze. Ennek megfelelően ebben a speciális esetben, a fenti két példára vonatkozóan, a következő egyenlőtlenségek és egyenlőségek írhatók fel, melyek együttesen egyértelműen alátámasztják az új kifejezések matematikai helyességét:

$$x_{u1} \neq x_{uI} \quad \wedge \quad x_{u2} \neq x_{uII} \quad (17)$$

$$x_{u1} + x_{uI} = a \quad \wedge \quad x_{u2} + x_{uII} = a \quad (18)$$

$$(\Delta b_I)_{\max} = (\Delta b_I)_{\max} \quad \wedge \quad (\Delta b_2)_{\max} = (\Delta b_{II})_{\max} \quad (19)$$

3. Következtetések és további célok

A vezetékgyömbét láncgyömbének tekintve a cikk a láncgyömbé belógásának eltéréseivel foglalkozik ferde és vízszintes felfüggesztés esetén. Két új kifejezés került levezetésre, $\Delta b(x)$ és x_u , a $sh(x)$ és $ch(x)$ függvények, valamint azok inverz függvényei ($arsh(x)$ és $arch(x)$) használatával. Míg a bemutatott $\Delta b(x)$ egyenlet mindkét típusú ferde felfüggesztés esetén egyaránt alkalmazható, az x_u számításához két különböző képlet van megadva a két típusú ferde felfüggesztéshez. Ennek az oka, hogy az x_u esetén szükséges az *area koszinusz hiperbolikus* függvény használata, míg a $\Delta b(x)$ esetén nem. Az új kifejezések alkalmazásának bemutatását a cikkben szereplő gyakorlati példák szolgálják. Azok alapján az alábbi fontos következtetések vonhatók le:

- a $\Delta b(x)$ többnyire pozitív az egész oszlopközben, és csak viszonylag kis ferdeség esetén lehet negatív az oszlopköz egyik részében,
- a $\Delta b(x+a/2)$ se nem páros, se nem páratlan függvény a $[-a/2, a/2]$ intervallumon,
- a $(\Delta b)_{\max}$ azon oszlopköz felében helyezkedik el, amelyhez a magasabb felfüggesztési pont tartozik, továbbá a ferdeség növelésével az oszlopköz felezője ($x=a/2$) irányába tart,
- a $(\Delta b)_{\max}$ nő a ferdeség növelésével.

További célom a bemutatott matematikai levezetések kiterjesztése a parabolára. Azon eredmények összevetésével a jelen cikkben szerepeltettekkel felderíthetők a parabola és a láncgyömb tulajdonságai közötti különleges eltérések, melyeknek ismerete hasznos a szabadvezetékes hálózat tervezése során.

Hivatkozások

- [1] CIGRÉ Green Book, *Overhead Lines*, CIGRÉ Study Committee B2, 2014
- [2] CIGRÉ Technical Brochure No. 324: *Sag–Tension Calculation Methods for Overhead Lines*, CIGRÉ WG B2–12, 2007
- [3] Hatibovic Alen: *Inclined Span Modelling by a Given Levelled Span for OHL Design*, PERIODICA POLYTECHNICA ELECTRICAL ENGINEERING, Budapest University of Technology and Economics, 2014, No. 2, Vol. 58, pp. 69–79, ISSN 2064–5260, DOI: 10.3311/PPee.7373
- [4] Hatibovic Alen: *Derivation and Analysis of the Relation between Conductor Sags in Inclined and Levelled Spans Based on Known Data of the Latter*, Conference International Grand Reseaux Électrique – CIGRÉ, Paris, 2014 august 24–30, Session 45, Paper B2–202, pp. 1–8
- [5] Hatibovic Alen: *Vezetékgörbe egyenletének meghatározása és elemzése a láncgyömbé ismert paramétere alapján 1. rész*, Elektrotechnika, Magyar Elektrotechnikai Egyesület, 2013/4, Évfolyam 106, pp. 9–12, ISSN 0367–0708
- [6] Weir D. Maurice, Hass Joel: *Thomas' Calculus*, Pearson, 2010, ISBN–10: 0–321–64363–1
- [7] Polyanin D. Andrei, Manzhirov V. Alexander: *Handbook of Mathematics for Engineers and Scientists*, Taylor & Francis Group, 2007
- [8] Mannall Geoff, Kenwood H. M.: *Further Pure Mathematics 2*, Heinemann Educational Publishers, UK, 2005
- [9] Hatibovic Alen: *Specijalne matematičke relacije između ugiba lančanice u kosom i ravnom rasponu*, BOSANSKOHERCEGOVAČKA ELEKTROTEHNIKA, 2015, No. 9, (megjelenés alatt)
- [10] Hatibovic Alen: *Vezetékgörbe és belógási görbe egyenletei a szabadvezetékek tervezéséhez a láncgyömbé adott paramétere alapján*, ENELKO 2013, XIV. Nemzetközi Energetika–Elektrotechnika Konferencia, Erdélyi Magyar Műszaki Tudományos Társaság, Nagyszeben, Románia, 2013. október 10–13, pp. 48–53, ISSN 1842–4546