EPQ MODELLEK VÁLTOZTATHATÓ MINŐSÉG-ELLENŐRZÉSI SEBESSÉG ESETÉN[1]

HAUCK ZSUZSANNA
PTE Közgazdaságtudományi Kar

Jelen munkában olyan Economic Production Quantity (EPQ) modelleket vizsgálunk, melyekben minden egyes terméket átvizsgálnak eladás előtt. A selejtes termékek az átvizsgálási periódus végén egyszerre hagyják el a rendszert, arányuk valószínűségi változó. A termelési ráta és a minőség-ellenőrzés sebessége döntési változó a vállalat számára. A szűk keresztmetszet sebességének növelése csökkenti a hiányból adódó költségeket és a selejtaránytól függően hat a készleten tartási, valamint a sorozatkezdési költségekre. A sebesség növelésére vonatkozó különböző költségfüggvények mellett keressük a készletezéssel kapcsolatos összköltség minimumát. Mindezt megtesszük összefüggő ciklusokra, ahol minden periódusban ugyanannyi a selejtarány, illetve egymástól független ciklusokra is, ahol a meghibásodás százaléka periódusonként változik. Eredményeinket az Economic Order Quantity (EOQ) modell eredményeivel is összevetjük.

Kulcsszavak: EPQ modell, minőség-ellenőrzési sebesség, gazdaságos sorozatnagyság

1 Bevezetés

A termelés menedzsment szakirodalom egyik alapműve Harris (1913) Economic Order Quantity (EOQ) modellje, melynek lényege, hogy a kereslet, a fajlagos készletezési költség, valamint a sorozatkezdési költség ismeretében meghatározza azt a gazdaságos sorozatnagyságot, mely mellett a készletezéssel kapcsolatos összköltség minimális lesz. Ezt a problémát gondolta tovább Taft (1918), feltételezve, hogy a termékek nem a készletezési periódus elején, egyszerre, hanem folyamatosan érkeznek a raktárba. Jelen munka az erre a gondolatmenetre felírt Economic Production Quantity (EPQ) modell egy továbbfejlesztett változata.

Az EOQ és EPQ alapmodellek kimondatlanul ugyan, de feltételezik, hogy a raktárba érkező termékek mindegyike kifogástalan minőségű. Erre a problémára többen felhívták ugyan a figyelmet, de Porteus (1986) volt az első, aki EOQ modellben feltételezte, hogy egy bizonyos valószínűség szerint hibás termékek keletkeznek. Rosenblatt és Lee (1986) a probléma kapcsán arra a következtetésre jutott, hogy selejtes termékek előfordulása esetén kisebb sorozatokban célszerű gyártani. Vörös (1999) a Toyota Termelési Rendszerből kiindulva feltételezte, hogy a termelési rátát csökkenthetik a folya-

[1]Beérkezett: 2014. augusztus 22. E-mail: `hauckzs@ktk.pte.hu`.

mat minőségi problémái. Ha ugyanis minőségi hibát találnak a dolgozók, akkor megállíthatják a termelőszalagot. Hiány keletkezését nem megengedő EPQ modelljében arra a következtetésre jutott, hogy a folyamat minőségének romlása növeli a gazdaságos sorozatnagyságot és csökkenti az átállás és készlettartás éves költségeit. Növeli ugyanakkor a javítás költségeit, így meghatározható az optimális folyamatminőség szintje.

Salameh és Jaber (2000) modelljének alapgondolata, hogy eladás előtt a vállalat minden egyes termék minőségét leellenőrzi, az átvizsgálási periódus végén pedig a selejtes termékek távoznak a rendszerből. A téma kiterjesztési irányzatait részletesen tárgyalja Khan et al. (2011). Ezek a modellek jellemzően a gazdaságos sorozatnagyság meghatározásával hivatottak minimalizálni a készletezéssel kapcsolatos összköltséget. Hauck és Vörös (2015) azonban rámutatnak arra, hogy minderre a vállalatnak az átvizsgálási sebesség változtatásának eszköze is rendelkezésére áll. Jelen munka is ezt a két döntési változót veszi figyelembe, azzal a különbséggel, hogy ha a termelési ráta lassabb a minőség-ellenőrzés sebességénél, akkor – mivel ez esetben a termelési ráta a szűk keresztmetszet, ezért – az optimális sebesség a termelésre vonatkozik.

Papachristos és Konstantaras (2006) felhívják a figyelmet arra, hogy Salameh és Jaber (2000) modelljének feltevése nem elegendő a hiány elkerüléséhez. Vörös (2013) megoldja ezt a problémát, és bevezeti az összefüggő, valamint az egymástól független ciklusok fogalmát. Előbbi esetben minden periódusban ugyanúgy viselkedik a rendszer, ahogy az az elsőben kialakult. Utóbbiban minden periódus végén egy a többitől független ciklus kezdődik. Az egymástól független ciklusokra vonatkozó számítások Maddah és Jaber (2008) gondolatán alapulnak, akik a ciklusok hosszának várható értékét javasolják alkalmazni.

A következő szakaszban bemutatjuk a modell alapvetéseit elegendő mértékű jó minőségű kereslet, illetve hiány keletkezése esetére. A 3. részben ezek alapján írjuk fel az összköltség függvényt, melynek minimumát összefüggő és egymástól független ciklusok esetére is bemutatjuk. A 4. szakasz összefoglalja vizsgálódásaink tárgyát és főbb eredményeit.

2 A modell

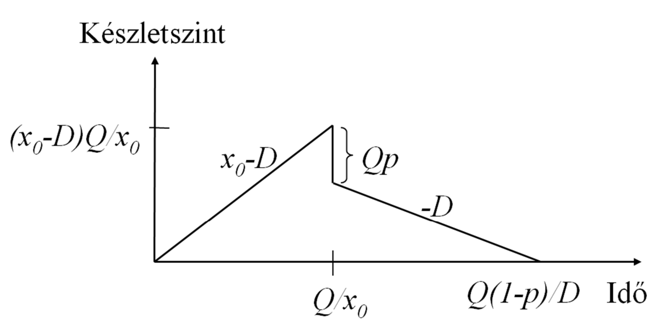
A tanulmányban olyan EPQ modellekkel foglalkozunk, amelyek feltételezik, hogy értékesítés előtt minden egyes terméket át kell vizsgálni. Ez jellemző gyakorlat például az egészségügy számára beszállított termékek (pl. gyógyszerek, gyógyászati segédeszközök) gyártása esetén. A keresletet a jó minőségű termékekkel elégítik ki. Amennyiben ezekből nem áll rendelkezésre megfelelő mennyiség, úgy hátralék keletkezik. Feltételezzük, hogy a ki nem elégített kereslet nem veszik el, és a hiányt minden egyes készletezési ciklus végén egy 100%-ban jó minőséget garantáló beszállító pótolja. Ugyanezekben az időpontokban, egyszerre hagyják el a raktárhelyiséget a selejtnek bizonyult termékek.

A jó minőségű termékek napi keresletét D-vel jelöljük és konstansnak feltételezzük. A selejtarányt, így a rendszer minőségét p valószínűségi változó írja le. Megmutatja, hogy a vállalat egy megtermelt sorozatnak hány százalékát kényszerül megjavítani, alacsonyabb áron értékesíteni vagy megsemmisíteni. A modell a három lehetőséget egy kategóriaként kezeli, minden egyes átvizsgálási periódus végén a Q mennyiségű termékből álló sorozat p aránya egyszerre távozik a rendszerből. Ezen Qp egység további sorsának jelen optimalizálási probléma szempontjából nincs jelentősége.

jelölés	jelentése
D	napi kereslet (db/nap)
x	a minőség-ellenőrzés sebessége (db/nap), döntési változó
x_0	a jelenlegi minőség-ellenőrzési sebesség, $x_0 \geq D$
$x_{\max}$	a legmagasabb elérhető minőség-ellenőrzési sebesség
z	$z = D/x$, $z \leq 1$; $z_{\min} = D/x_{\max}$
$g(z)$	a minőség-ellenőrzés z szintre történő gyorsításának napi költsége
s	sorozatkezdési költség (ciklusonként merül fel)
h	egy termék készleten tartásának napi költsége
b	termékenkénti napi hátralékköltség
Q	sorozatnagyság (db), döntési változó
p	a selejt termékek aránya (%), $p \in [0, 1]$, valószínűségi változó
$f(p)$	a selejt termékek arányának sűrűségfüggvénye
a	a selejt termékek lehető legmagasabb aránya ($a \leq 1$) egy sorozatban
N	egy évben ledolgozott munkanapok száma

1. táblázat. A jelölések jegyzéke

A vállalatnak naponta x mennyiségű termék átvizsgálására van kapacitása. Ezt a sebességet akkor tudja elérni, ha minden nap keletkezik is ennyi késztermék, azaz ha a termelési ráta legalább akkora, mint a minőség-ellenőrzési sebesség. Amennyiben a vállalat naponta x-nél kevesebb mennyiségű terméket küld minőség-ellenőrzésre, úgy nincs értelme növelni annak sebességét, hanem a termelési ráta mint szűk keresztmetszet gyorsítására van szükség. Ha a termelési ráta éppen megegyezik az átvizsgálási sebességgel, úgy az arra kapott optimum a termelési rátára is igaz. Utóbbi esetekben azonban $g(z)$ függvénynek a termelés gyorsításának költségeit (is) tartalmaznia kell.



1. ábra. Készletalakulási diagram hátralék nélküli esetben ($D \leq x(1-p)$).
Forrás: Vörös (2013) alapján saját szerkesztés

Mivel a selejt előfordulásának lehetőségével is számolunk, ezért naponta legalább annyit kell termelnie és átvizsgálnia a vállalatnak (x), hogy ki tudja elégíteni a keresletet, vagyis $x \geq D$ teljesüljön. Ez a mennyiség azonban csak ritkán elegendő, ugyanis mivel a selejt aránya p százalék, ezért naponta valójában csak $x(1-p)$ jó minőségű kínálat keletkezik. Amennyiben ez eléri a napi kereslet szintjét $D \leq x(1-p)$, úgy nem keletkezik hátralék. Ezt az esetet illusztrálja az *1. ábra*.

Az átvizsgálási sebesség kezdeti szintjét jelöli x_0, melyből a napi keresletet kivonva kapjuk, hogy napi $x_0 - D \geq 0$ termék kerül a raktárba (1. ábra). Ez a mennyiség a napi keresletet meghaladó jó minőségű napi kínálat ($x_0(1-p) - D$), valamint a naponta talált selejt darabszám ($x_0 p$) összege. A készletszint növekedése addig tart, amíg a teljes sorozatot, azaz Q db-ot át nem vizsgálnak. Az átvizsgálás tehát Q/x_0 napot vesz igénybe, és ez alatt $(x_0 - D)Q/x_0$, azaz $(1-z_0)Q$ készlet halmozódik fel a raktárban, ahol $z_0 = D/x_0$. Mivel a sorozatnagyságot Q-val jelöljük, melynek p százaléka selejt, ezért Qp selejt hagyja el a rendszert a Q/x_0 időpontban, vagyis a készletszint $(1-z_0-p)Q$ értékre csökken. Ezt követően a ciklus végéig már nem érkezik több termék a raktárba, a megmaradt készlet pedig naponta D mennyiséggel csökken. Mivel a jó minőségű, azaz értékesíthető mennyiség egy készletezési ciklusban $Q(1-p)$ darab, így egy ciklus hossza addig tart, amíg ezt a mennyiséget a kereslet fel nem emészti, vagyis $Q(1-p)/D$ napig (Vörös, 2013).

Készlettartási költség annyi termék után merül fel, amennyi a készletalakulási diagram (1. ábra) görbe alatti területe. A fentieknek megfelelően ez egy ciklusban az (1) egyenlet által leírt $HCC1$ készlettartási költséget jelent, melyben nemcsak a sorozatnagyság, hanem az átvizsgálási sebesség is döntési változó:

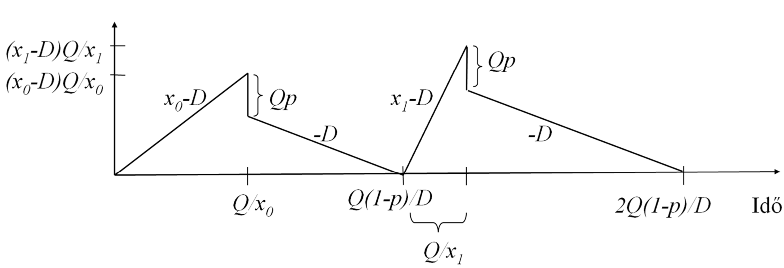
$$HCC1(Q,x) = h\Big[\int_0^{Q/x} (x-D)t\,dt + \int_{Q/x}^{Q(1-p)/D} Q(1-p-z) - Dt\,dt\Big] = \\ = h\frac{Q^2}{2D}\big(2pz + (1-p)^2 - z\big)\ . \tag{1}$$

Mivel hátralék nélküli esetben egy periódus hossza $Q(1-p)/D$, ezért egy évben $ND/Q(1-p)$ pozitív hosszúságú ciklus zajlik le. A kapcsolódó készletezési összköltség három elemből áll. Az egy ciklusban felmerülő $HCC1(Q,x)$ készlettartási költséget a ciklusok számával felszorozva megkapjuk a vonatkozó éves költséget. Emellett minden ciklus elején sorozatkezdési költség merül fel, melynek egyszeri mértékét s-sel jelöljük, éves szintjét pedig az éves ciklusszámmal történő szorzás adja meg. Az eredeti EPQ modellhez képest még egy költségelemmel számolnunk kell a készletezéssel kapcsolatos éves összköltség ($TC1(Q,z)$, ld. (2)) meghatározásához, ez pedig a minőségellenőrzés gyorsításából adódó napi költség, melyet $g(z)$ függvénnyel mérünk.

Az átvizsgálás sebességének növelése történhet alvállalkozó bevonásával, túlóráztatással vagy a technológia fejlesztésével. Ha a sebesség éppen annyi, hogy hibátlan sorozatot feltételezve a vállalat ki tudja elégíteni a keresletet, akkor $x = D$, azaz $z = 1$. Mivel ez a sebesség minimuma, ezért gyorsítás nem történt, emiatt $g(1) = 0$. Amennyiben gyorsabban kell elvégezni a feladatot, úgy az alvállalkozó magasabb áron vállalja azt, vagy a túlóra jár többletköltséggel. A sebességet növelve $g(z)$ tehát nő, viszont x és z között fennálló reciprok viszony ($z = D/x$) miatt ez azt jelenti, hogy $g(z)$ szigorúan monoton csökken z-ben. Konvex csökkenést feltételezünk, ami abból következik, hogy minél magasabb szintről növeljük a sebességet, az annál nagyobb erőfeszítéssel jár. Egy cikluson belül $g(z)$ annyi napon merül fel, amennyin átvizsgálás folyik, azaz hátralék nélküli esetben $Q(1-p)/D$ napból Q/x ideig, ami az évi N számú munkanap $z/(1-p)$ hányadát jelenti. A hányadost nem kell $p = 1$-re értelmeznünk, mivel ha a teljes sorozat hibás, akkor hátralék keletkezik. A hátralék nélküli összköltség:

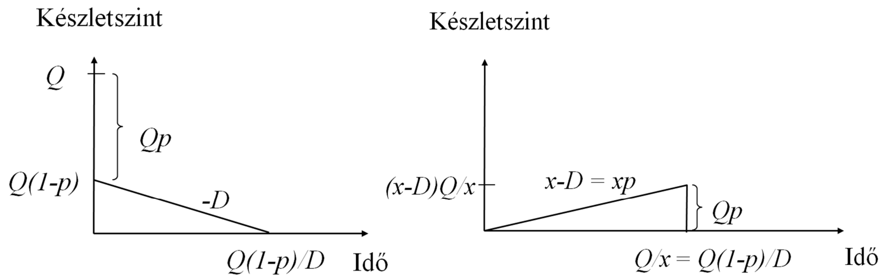
$$TC1(Q,z) = \frac{ND}{Q(1-p)}S + \frac{NhQ}{2(1-p)}(2zp + (1-p)^2 - z) + \frac{N}{1-p}zg(z)\ . \quad (2)$$

Ahogy azt a (2) kifejezés mutatja, a sorozatnagyság mellett a minőség-ellenőrzés sebessége is döntési változó. Előbbi megszokott az irodalomban, utóbbit viszont Hauck és Vörös (2015) vizsgálta először EOQ modellekre. A *2. ábra* megmutatja, mi történik az EPQ modell hátralék nélküli változatában, ha a második ciklusban megnöveljük a minőség-ellenőrzés sebességét ($x_0 < x_1$). Ennek eredményeként a ciklus hossza, így az évente felmerülő ciklusok száma, ebből következően pedig az éves sorozatkezdési költség nem változik. Lerövidül azonban a minőség-ellenőrzési időszak. A selejtes termékek emiatt hamarabb hagyják el a raktárhelyiséget, a jó minőségű napi többletkínálat ugyanakkor korábban kerül be a raktárba, mint az első ciklusban.



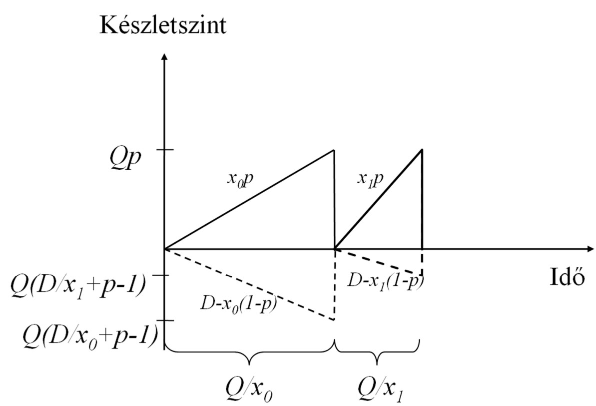
2. ábra. Készletalakulási diagram hátralék nélküli esetben ($D \leq x(1-p)$), a második ciklusban megnövelt átvizsgálási sebességgel ($x_0 < x_1$)

A minőség-ellenőrzési sebességet minden határon túl növelve az átvizsgálás a ciklus kezdetének pillanatában befejeződik, amivel tulajdonképpen az EOQ modellt kapjuk vissza (ld. *3. ábra* bal oldala). A másik véglet, ha a sebesség annyira lassú, hogy minden nap éppen annyi jó minőségű terméket vizsgálnak át, amennyi az aznapi kereslet. Ez azt eredményezi, hogy csak a selejtes termékek kerülnek a raktárba (ld. 3. ábra jobb oldala). Az ábrák érzékeltetik, hogy ha a selejtarány magas, akkor a lehető leggyorsabb minőség-ellenőrzési sebesség mellett adódik a készlettartási költségek minimuma. Ha ugyanis a 3. ábra bal oldalán alacsony lenne a selejtszint, akkor a görbe alatti terület jóval magasabb lenne, ez esetben pedig célszerű megfontolni a jobb oldali ábrán bemutatott lassú átvizsgálást.



3. ábra. Hátralék nélküli EPQ modell készletalakulási diagramja minden határon túl növelt, illetve minimális minőség-ellenőrzési sebesség mellett

Könnyen előfordulhat, hogy – például egy gép meghibásodása miatt – magasabb lesz adott sorozatban a selejtarány, melynek következtében a vállalat nem tudja kielégíteni a keresletet, azaz $D > x(1-p)$. Amennyiben a napi kereslet meghaladja a naponta bevizsgált jó minőségű kínálatot, úgy hátralék keletkezik. Ennek napi mértéke a két mennyiség különbsége, azaz $D - x(1-p)$. Mivel így nem keletkezik többlet jó minőségű termékből, ezért csak a selejt kerül a raktárba. Az átvizsgálás végeztével a ciklus is véget ér, hiszen a Qp selejt eltávolítását követően nem marad más a raktárban. Egy ciklus hossza tehát Q/x, és feltételezzük, hogy ebben az időpontban egy megbízható beszállító tökéletesen pótolja az addig felhalmozott hiányt. A hátralék keletkezéséből származó egységenkénti többletköltséget b fejezi ki, melynek mértékét a hiány pótlásának módja is befolyásolhatja.



4. ábra. Készletalakulási diagram hátralék keletkezése esetén ($D > x(1-p)$), a második ciklusban megnövelt átvizsgálási sebességgel ($x_0 < x_1$)

A hátralék esetét bemutató *4. ábrán* leolvashatjuk, hogy a minőségellenőrzés sebességét növelve (második ciklus) az átlagos készletszint nem változik, ugyanúgy $Qp/2$ marad. A hátralékot azonban hamarabb szünteti meg a beszállító, így annak átlagos szintje, $Q(z + p - 1)/2$, ebből kifolyólag pedig az azzal kapcsolatos költségek is csökkennek. Lerövidül ugyanakkor a ciklushossz, ami évente magasabb ciklusszámot, ezen keresztül pedig a sorozatkezdési költség gyakoribb felmerülését jelenti. Az egy ciklus során felmerülő készlettartási, ill. hátralék költségeket a (3) és (4) egyenletek írják le hátralék keletkezése esetén.

$$HCC2(Q,x) = h\Big[\int_0^{Q/x} xpt\,dt\Big] = h\frac{Q^2}{2D}pz \tag{3}$$

$$BCC2(Q,x) = b\Big[\int_0^{Q/x} (D - x(1-p))t\,dt\Big] = b\frac{Q^2}{2D}(z^2 - z(1-p)) \tag{4}$$

A készletezéssel kapcsolatos éves összköltség hátralék keletkezése esetén négy elemből adódik tehát össze, ezek az éves (i) sorozatkezdési, (ii) készlettartási, (iii) hátralékkal kapcsolatos, valamint (iv) minőségellenőrzési költségek. Utóbbi minden munkanapon felmerül, hiszen nincsen szünet az átvizsgálási periódusok között, az egyik ciklus végeztével azonnal újabb kezdődik. Hátralékot tartalmazó esetben tehát a ciklusok hossza megegyezik az átvizsgálási periódus hosszával, így azok éves száma Q/x reciproka, szorozva az egy évben ledolgozott munkanapok számával (N). Az egy készletezési periódusra vonatkozó $HCC2$ és $BCC2$ mennyiségeket a ciklusszámmal megszorozva kapjuk az (5) egyenlet második és harmadik tagját. A készletezéssel kapcsolatos költségeket a *2. táblázat* listázza az EPQ modell hátralékot feltételező és nem megengedő esetére.

	nem keletkezik hátralék: $D \le x(1-p)$	keletkezik hátralék: $D > x(1-p)$
egy készletezési ciklus hossza	$Q(1-p)/D$	Q/x
ciklusok száma egy évben	$ND/Q(1-p)$	Nx/Q
éves sorozatkezdési költség	$NDs/Q(1-p)$	Nxs/Q
éves készlettartási költség	$\frac{NhQ}{2}\left(z\frac{2p-1}{1-p} + 1 - p\right)$	$\frac{NhQ}{2}p$
hátralék éves költsége	–	$\frac{NbQ}{2}(z + p - 1)$
minőség-ellenőrzés éves költsége	$g(z)zN/(1-p)$	$g(z)N$

2. táblázat. Készletezéssel kapcsolatos költségek EPQ modellben

Hátralék keletkezése esetén a készletezéssel kapcsolatos összköltség tehát:

$$TC2(Q,z) = \frac{ND}{zQ}S + \frac{NhQ}{2}p + \frac{NbQ}{2}(z + p - 1) + Ng(z)\,. \tag{5}$$

1. Tétel. *A folyamatminőség romlása hátralék nélküli esetben növeli, hátralék keletkezését feltételező esetben csökkenti a gazdaságos sorozatnagyságot.*

A (2) összefüggésben definiált összköltség függvény minimumát keresve, hátralék nélküli esetben a gazdaságos sorozatnagyság

$$Q_1^* = \sqrt{\frac{2Ds}{h}}\sqrt{\frac{1}{2zp + (1-p)^2 - z}}\,.$$

A Wilson-formula módosító faktorának nevezője p-ben csökkenő, ha $z \le 1-p$, azaz nem keletkezik hátralék. Mivel p a selejtarány, ezért tulajdonképpen a rendszer minőségét írja le. Ha tehát az előállítási folyamat minősége romlik, azaz több hiba fordul elő a gyártás során, akkor a módosító faktor, ennek következtében pedig a sorozatnagyság is növekszik. Ez összhangban van Vörös (1999) megállapításával, aki a Toyota Termelési Rendszer folyamatminőségét az andon zsinór meghúzása miatti leállások idejével jellemzi.

Az (5) egyenlet alapján hátralékot feltételező esetben a gazdaságos sorozatnagyság $Q_2^* = \sqrt{2Ds/h} \cdot \sqrt{1/(hp + b(z + p - 1))}$. A módosító faktor nevezője p-ben növekvő, vagyis hátralék keletkezése esetén a folyamatminőség romlása csökkenti a sorozatnagyságot.

3 A minőség-ellenőrzési sebesség növelése EPQ modellekben

Az előzőekben láttuk, hogy a napi kereslet, a minőség-ellenőrzési sebesség, valamint a selejtarány mértékétől függően keletkezhet készlettöbblet vagy hátralék. A keresletet konstansnak tekintjük, a sebességről a vállalat dönt, a selejtszázalék pedig valószínűségi változó. Vörös (2013) alapján két esetet különböztetünk meg, majd hasonlítunk össze aszerint, hogy az egymást követő ciklusokban változhat-e a selejtarány, vagy minden periódusban annyi marad, ahogy az az első ciklusban kialakult. Utóbbi esetben összefüggő, a selejtarány változását megengedő esetben egymástól független ciklusokról beszélünk.

3.1 A minőség-ellenőrzési sebesség növelése egymással összefüggő ciklusokban

A (2) és (5) összefüggésekkel leírtuk a készletezéssel kapcsolatos összköltség alakulását hátralék nélküli, majd hátralékot feltételező esetre. Ezen függvények független változója Q és z, melyekről a szóban forgó vállalat a sorozatnagyság (Q), valamint a minőség-ellenőrzési sebesség (x) megválasztásával dönt. Hátralék attól függően keletkezhet, hogy az egy sorozatban jelenlevő selejt aránya (p) meghaladja-e az $(1 - z)$ értéket, ahol z a napi kereslet (D) és az egy nap alatt átvizsgált termékmennyiség (x) hányadosa. Ha ugyanis nem keletkezik hátralék, akkor $D \leq x(1 - p)$, melyet átrendezve $p \leq (1 - z)$. Az összköltségfüggvény tehát

$$TC(Q, z) = \begin{cases} TC1(Q, z), & \text{ha } 0 \leq p \leq 1 - z \\ TC2(Q, z), & \text{ha } 1 - z < p \leq 1\,. \end{cases}$$

Mivel p valószínűségi változó, melynek sűrűségfüggvénye $f(p)$, ezért az összköltség várható értéke:

$$ETC(Q, z) = \int_0^{1-z} TC1(Q, z) f(p)\, dp + \int_{1-z}^{1} TC2(Q, z) f(p)\, dp\,. \qquad (6)$$

Az alábbi mennyiséget szeretnénk tehát minimalizálni:

$$\frac{ETC(Q, z)}{N} = sS(z)D/Q + (H(z) + B(z))Q/2 + G(z)\,, \qquad (7)$$

ahol

$$S(z) = \int_0^{1-z} 1/(1-p)f(p)\,dp + \int_{1-z}^{1} (1/z)f(p)\,dp \tag{7a}$$

$$H(z) = h\int_0^{1-z} (1-2p-2z+z/(1-p))f(p)\,dp + E(p) \tag{7b}$$

$$B(z) = b\int_{1-z}^{1} (z+p-1)f(p)\,dp \tag{7c}$$

$$G(z) = \int_0^{1-z} zg(z)/(1-p)f(p)\,dp + \int_{1-z}^{1} g(z)f(p)\,dp \tag{7d}$$

$$1 \geq D/x_0 = z_{\max} \quad \text{és} \quad z_{\min} = D/x_{\max}\,. \tag{7e}$$

$S(z)$, $B(z)$ és $G(z)$ megegyeznek az EOQ modellben (Hauck és Vörös, 2015) definiált összefüggésekkel, $H(z)$ azonban módosul (ld. Vörös, 2013).

2. Tétel. *A $0 \leq z \leq 1-a$ intervallumon $H(z)$ lineáris, $H(0) = h(1-E(p))$ kezdeti értékkel. Az $1-a \leq z \leq 1$ intervallumra nézve $H(z)$ függvény $z = 0.5$-ig konkáv, majd konvex, és $H(1) = hE(p)$-ben végződik. Amennyiben $a < 0.5$, úgy $H(z)$ konkáv az intervallumon.*

A tétel bizonyításához felhasználjuk a lenti deriválási szabályt:

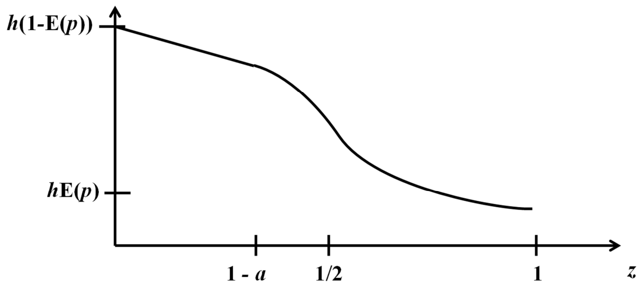
$$\frac{d}{dx}\int_{k(x)}^{l(x)} m(x,p)\,dp =$$
$$l'(x)m(x,l(x)) - k'(x)m(x,k(x)) + \int_{k(x)}^{l(x)} \frac{\partial}{\partial x}m(x,p)\,dp\,,$$

melyből $H_z = h\int_0^{1-z}(-2+\frac{1}{1-p})f(p)\,dp$. H_z előjelét keressük, hogy meg tudjuk határozni a függvény monotonitását. Ehhez szükséges tudnunk, hogy h mindig pozitív, $f(p)$ pedig pozitív értéket vesz fel, ha $0 \leq p \leq a$, egyébként nulla. Definíció szerint $p \leq a$, ezért ha $a < 1/2$, akkor H_z biztosan negatív, azaz a függvény z-ben szigorúan monoton csökken. Az $a \geq 1/2$ esetben az eloszlástól függ, hogy növekvő vagy csökkenő-e a függvény.

Amennyiben $a < 1-z$, úgy H_z konstans, ezért $H(z)$ lineáris. Mindezt a második derivált segítségével is igazolhatjuk, hiszen ezen az intervallumon $f(1-z) = 0$:

$$H_{zz} = h(2-1/z)f(1-z)\,. \tag{8}$$

Ha $(1-z) \leq a$, akkor $f(1-z) > 0$. A második derivált ezért negatív, ha $z < 1/2$, de pozitív, ha $z > 1/2$, a $z = 1/2$ helyen pedig inflexiós pontja van. Ezek szerint $H(z)$ lineáris a $0 \leq z \leq 1-a$ intervallumon, majd konkáv $1-a \leq z \leq 1/2$-ig, $z = 1/2$ helyen inflexiós pontja van, az $1/2$-nél magasabb z-kre pedig konvex. Ezt az esetet mutatja be az *5. ábra*. Amennyiben $a < 1/2$, úgy $1/2 < 1-a$, ami azt jelenti, hogy az $1-a \leq z$ intervallumon $H(z)$ konvex.



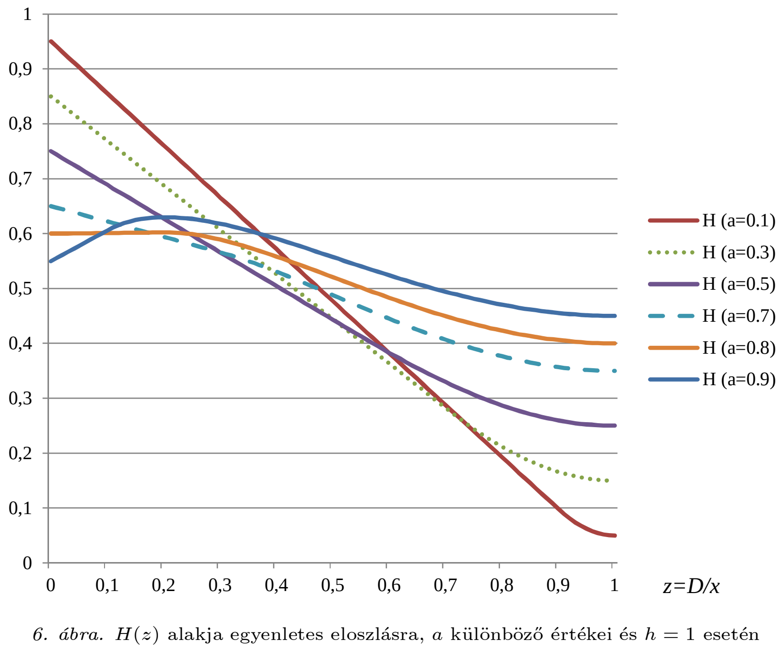
5. ábra. $H(z)$ egy lehetséges alakja

$H(z)$ kezdeti értéke $H(0) = h[1-E(p)]$, végső értéke pedig $H(1) = hE(p)$. Összehasonlítva a két kifejezést, a kezdeti érték a magasabb, ha a selejtarány várható értéke ($E(p)$) alacsonyabb 50%-nál. Tegyük most fel, hogy a selejtarány egyenletes eloszlást követ a $[0, a]$ intervallumon, azaz

$$f(p) = \begin{cases} 1/a\,, & \text{ha } 0 \le p \le a \\ 0 & \text{egyébként}\,. \end{cases} \tag{9}$$

A selejtarány várható értéke ekkor $E(p) = a/2$. Ezek szerint $H(0) \ge H(1)$, ha $1 - a/2 \ge a/2$, vagyis $1 \ge a$. Mivel ez definíció szerint teljesül, ezért a selejtarány egyenletes eloszlása esetén mindig igaz, hogy $H(0) \ge H(1)$.

(7b) és (9) miatt az $a < 1 - z$ intervallumon $H(z) = h[1 - a/2 - 2z - z\ln(1-a)/a]$, $1 - z \le a$ esetén pedig $H(z) = h[(z^2 - z - z\ln z)/a + a/2]$. Ezen összefüggéseket felhasználva a *6. ábra* hat különböző a értékre mutatja be a görbe alakját.



6. ábra. $H(z)$ alakja egyenletes eloszlásra, a különböző értékei és $h = 1$ esetén

Ahogy azt a fentiekben megállapítottuk, a görbe $(1-a)$-ig lineáris, $z = 1/2$-ig konkáv, majd konvex. Konkáv intervallum csak abban az esetben létezik, ha $a > 1/2$, mivel csak $1 - a \leq z$ esetén nem lineáris $H(z)$.

Egyenletes eloszlás esetén az első derivált $H_z = h(-2 - \ln(1-a)/a)$ az $a < 1 - z$ intervallumon, mely konstans előjele a-tól függ. H_z pozitív, azaz $H(z)$ lineárisan növekszik, ha $a \geq 0.8$ (kerekítve). Ellenkező esetben ugyanakkor lineárisan csökken a $0 \leq z < 1 - a$ intervallumon. $1 - z \leq a$ esetén az első derivált $H_x = h(2z - 2 - \ln z)/a$, amely akkor pozitív, azaz $H(z)$ akkor növekszik, ha $z < 0.2$ (megközelítő érték). Ennél nagyobb z-kre a függvény csökkenő. A fentiekben megállapítottaknak megfelelően a függvény $z = 0.5$-ig konkáv, ezt követően pedig konvex.

Hauck és Vörös (2015) alapján minden z-re igaz, hogy a (7) modellnek optimális sorozatnagysága

$$Q_{opt}(z) = \sqrt{2sD}\sqrt{S(z)/(H(z)+B(z))}\,, \tag{10}$$

a készletezéssel kapcsolatos összköltség várható értékének minimális szintje pedig

$$\min_z ETC(z)/N = \sqrt{2sD}\sqrt{S(z)/(H(z)+B(z))} + G(z)\,, \tag{11}$$

feltéve, hogy $z_{\max} \geq z \geq z_{\min}$.

3. Tétel. *Összefüggő ciklusok esetén az EPQ modellben több elemből áll a gazdaságos sorozatnagyság, mint az EOQ modellben.*

A (10) összefüggés az EOQ és EPQ modellre egyaránt igaz, a különbség $H(z)$ szintjében van. Mivel $H(z)$ az EPQ modellben kisebb, ezért az EOQ modellhez képest kisebb a (10) nevezője, amiből következően a hányados, így a gazdaságos sorozatnagyság nagyobb lesz.

Mivel a célfüggvény viselkedését az átvizsgálási sebesség megválasztásával tudjuk befolyásolni, ezért meg kell ismernünk azon kifejezések tulajdonságait, melyek függnek z-től. Ezek $K(z) = S(z)(H(z) + B(z))$ és $G(z)$.

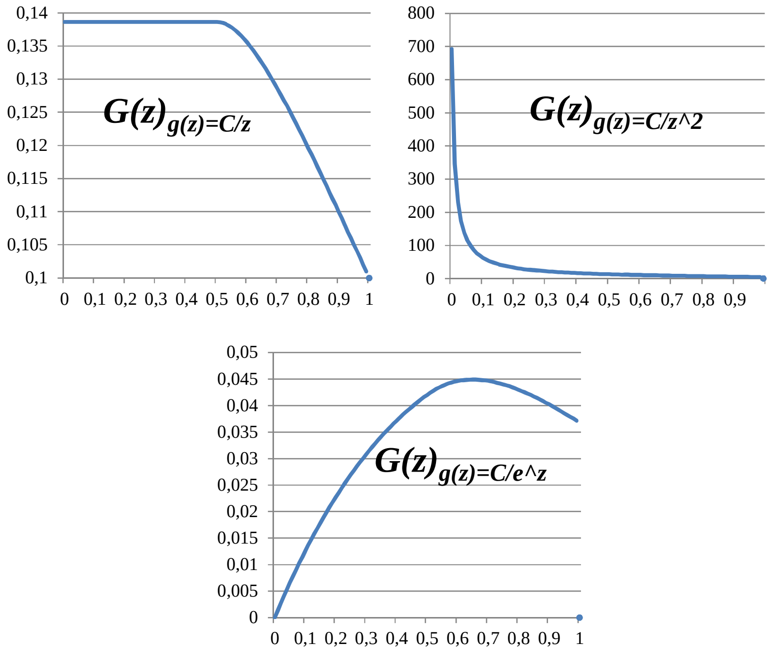
4. Tétel. *Ha a selejtarány eloszlása egyenletes, akkor a $0 \leq z < 1-a$ intervallumon $G(z)$ szigorúan monoton növekszik, ha $-g(z)/g_z > z$, és szigorúan monoton csökken, ha $-g(z)/g_z < z$. A függvény konkáv, ha $-z(g_{zz}/g_z) < 2$, és konvex, ha $-z(g_{zz}/g_z) > 2$. Az $1 - a \leq z \leq 1$ intervallumon $G(z)$ csökkenésének feltétele $a > g(z)\ln z/g_z + z\ln z + 1 - z$ egyenlőtlenség teljesülése. A függvény konvex, ha $a > 2\ln z\, g_z/g_{zz} - g(z)/zg_{zz} + z\ln z + 1 - z$.*

$G(z)$ első és második deriváltját írják le a következő egyenletek:

$$G_z = \int_0^{1-z} (g(z) + zg_z)/(1-p)f(p)\,dp + \int_{1-z}^1 g_z f(p)\,dp$$

$$G_{zz} = \int_0^{1-z} (2g_z + zg_{zz})/(1-p)f(p)\,dp + \int_{1-z}^1 g_{zz} f(p)\,dp - \frac{g(z)}{z} f(1-z)$$

Egyenletes eloszlás esetén ezek a deriváltak az alábbi alakot öltik.



7. ábra. $G(z)$ jellemző alakja három különböző $g(z)$ és $a = 0.5$ esetén

Ha $0 \leq z < 1 - a$, *akkor*

$$G_z = \frac{-\ln(1-a)}{a}(g(z) + zg_z) \quad \text{és} \quad G_{zz} = \frac{-\ln(1-a)}{a}(2g_z + zg_{zz}) \, .$$

Mivel $-\ln(1-a)/a > 0$, ezért a monotonitásról $(g(z) + zg_z)$, a konvexitás-konkavitásról pedig $(2g_z + zg_{zz})$ kifejezés előjele dönt. Mivel $g(z)$ konvex módon csökken, ezért első deriváltja negatív, vagyis $g_z < 0$, a második derivált pedig pozitív, azaz $g_{zz} > 0$. $G(z)$ szigorúan monoton növekszik ezen az intervallumon, ha $-g(z)/g_z > z$, de csökken, ha $-g(z)/g_z < z$. Továbbá konkáv, ha $-z(g_{zz}/g_z) < 2$ és konvex, ha $-z(g_{zz}/g_z) > 2$.

Hauck és Vörös (2015) alapján három lehetséges $g(z)$ függvényt vizsgálunk példaként. Amennyiben $g(z) = C/z$, úgy $G(z)$ konstans, mivel $g(z)+zg_z = 0$, ennek megfelelően pedig a második derivált is nulla. Konvex csökkenő $G(z)$-hez jutunk ugyanakkor, ha $g(z) = C/z^2$. Ekkor ugyanis $-g(z)/g_z = z/2$, ami kisebb z-nél, az első derivált tehát negatív. A konvexitás abból következik, hogy $-z(g_{zz}/g_z) = 3 > 2$. Konkáv növekvő $G(z)$, ha például $g(z) = Ce^{-z}$. Ekkor ugyanis $-g(z)/g_z = 1$, mely értéknél z kisebb, ill. lehet vele egyenlő, így a növekedés $z = 1$ helyen áll meg. A konkavitást tekintve $-z(g_{zz}/g_z = z)$, melyre mindig igaz, hogy 2-nél kisebb értéket vesz fel.

$1 - a < z \leq 1$, *akkor*

$$G_z = \frac{1}{a}(g_z(a - 1 + z - z\ln z) - g(z)\ln z) \, ,$$

$$G_{zz} = \frac{1}{a}(g_{zz}(a-1+z-z\ln z) - 2g_z \ln z - g(z)/z)\,.$$

Az előző intervallumhoz hasonlóan, mivel $1/a$ pozitív, ezért a zárójeles kifejezések döntenek az előjelekről. Ezek alapján $G(z)$ csökkenő z-ben, ha $(a-1+z)/\ln z < z + g(z)/g_z$, és növekvő, ha az egyenlőtlenség a másik irányban teljesül. Mivel $1-a \leq z$, ezért $(a-1+z)$ nemnegatív, és ezt az értéket egy negatív számmal kell osztanunk, tekintve ugyanis, hogy $0 \leq z \leq 1$, $\ln z$ negatív. Az egyenlőtlenség bal oldala tehát negatív vagy nulla. Átrendezéssel kapjuk, hogy a csökkenés feltétele, hogy $a > g(z)\ln z/g_z + z\ln z + 1 - z$. A második derivált pozitív, azaz $G(z)$ konvex, ha $a > 2\ln z g_z/g_{zz} - g(z)/z g_{zz} + z\ln z + 1 - z$.

A másik intervallumon bemutatott három példát folytatva $g(z) = C/z$ esetén $G(z)$ csökkenő, hiszen $z + g(z)/g_z = 0$. A második deriváltat tekintve $g_{zz} = 0$ miatt csak $g_z(1-2\ln z) < g(z)/z$ egyenlőtlenség teljesülését szükséges figyelembe vennünk. Ez mindig igaz, mivel a bal oldal negatív, míg a jobb pozitív. $G(z)$ tehát konkáv.

Ha $g(z) = C/z^2$, akkor $z + g(z)/g_z = z/2$, ami csökkenő irányra utal. $G(z)$ konvex ezen az intervallumon, ha a függvényre aktualizált feltétel, $a > z\ln z/3 + z/6 + 1 - z$ teljesül. Átrendezve ez $a - 1 + z > z\ln z/3 + z/6$, ahol $a-1+z \geq 0$. Numerikusan meghatározva a jobb oldalon álló kifejezés értékét $z \leq 0.7$ esetén negatív számot kapunk, a maximum pedig $z = 1$ helyen 0.176, vagyis ennél nagyobb a-kra biztosan konvex $G(z)$. $0.7 \leq z \leq 1$ esetén pedig kis a-k mellett lehet konkáv.

Végül $g(z) = Ce^{-z}$ függvénnyel kalkulálva $G(z)$ csökken, ha $a > (\ln z - 1)(z-1)$. Ha $z \leq 0.44$, akkor a szorzat értéke meghaladja az 1-et, ezért az ilyen z-kre $G(z)$ biztosan növekvő. A $z = 1$ helyen van minimuma, melynek értéke 0. Van tehát csökkenő függvényrész is, amely a $0.44 < z < 1$ szakaszon kezdődik. A konkavitás feltétele mindig teljesül, mivel $a < 1/z + 1 - z + (z-2)\ln z$ mindig igaz, a kifejezés ugyanis $z = 1$ helyen, 1 értékkel veszi fel minimumát, a maximálisan pedig 1 lehet.

5. Tétel. *A $0 \leq z \leq 1-a$ intervallumon $K(z) = S(z)(H(z)+B(z))$ lineáris; $z = 1$-ben növekvő, ha $b/(b+h) > E(p)$, és csökkenő, ha $b/(b+h) < E(p)$.*

Ahogy a *3. táblázat* összefoglalja, $S(z)$, $H(z)$ és $B(z)$ tulajdonságai jelentősen eltérnek egymástól. Amennyiben $0 \leq z \leq 1-a$, úgy $B(z) = 0$, ezért $K(z) = S(z)H(z)$. Tekintve, hogy $S(z)$ konstans, $H(z)$ pedig lineáris ezen az intervallumon, ezért $K(z)$ is lineáris. A kezdeti érték $K(0) = S(0) \cdot h(1-E(p))$, és $H(z)$ monotonitása dönti el, hogy csökkenő vagy növekvő-e a függvény.

	$0 \leq z < 1-a$	$1-a \leq z \leq 1$
$S(z)$	konstans pozitív	csökkenő; konkáv, majd konvexre válthat $S(1) = 1$
$H(z)$	lineáris; kezdő értéke $H(0) = h(1-E(p))$	$z = 0.5$-ig konkáv, majd konvex, $H(1) = hE(p)$
$B(z)$	nulla	konvex növekvő, $B(1) = bE(p)$

3. táblázat. $S(z)$, $H(z)$ és $B(z)$ tulajdonságai az EPQ modellben.
Forrás: Hauck és Vörös (2015), $H(z)$ saját számítás

A $0 \leq z \leq 1-a$ intervallumon ennek következtében vagy a $z=0$ vagy a $z=1-a$ helyen lesz $K(z)$ minimuma.

A magasabb z-t, azaz lassabb minőség-ellenőrzést jelentő $1-a \leq z \leq 1$ intervallumon sokkal komplexebb a helyzet. Az elemzéshez szükségünk van $K(z)$ kifejezés z szerinti első és második deriváltjaira, melyek az alábbiak:

$$K_z = S_z(H(z)+B(z)) + S(z)(H_z + B_z)\ ,$$

$$K_{zz} = S_{zz}(H(z)+B(z)) + 2S_z(H_z+B_z) + S(z)(H_{zz}+B_{zz})\ .$$

Az előjelek megállapításához ismernünk kell $S(z)$, $H(z)$ és $B(z)$ első és második deriváltjait:

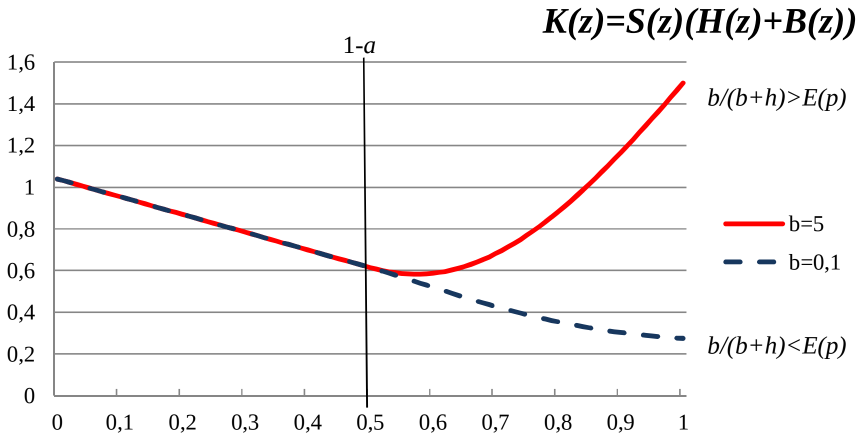
$$S_z = -\int_{1-z}^{1} \frac{1}{z^2} f(p)\,dp \quad \text{és} \quad S_{zz} = 2\int_{1-z}^{1} \frac{1}{z^3} f(p)\,dp - \frac{1}{z^2} f(1-z)\ ,$$

$$H_z = h\int_0^{1-z} \Big(-2 + \frac{1}{1-p}\Big) f(p)\,dp \quad \text{és} \quad H_{zz} = h(2-1/z)f(1-z)\ ,$$

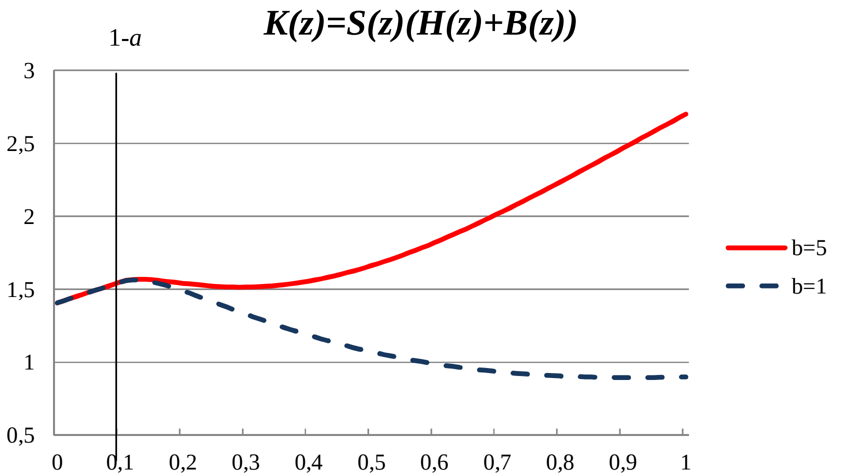
$$B_z = b\int_{1-z}^{1} f(p)\,dp \quad \text{és} \quad B_{zz} = bf(1-z)\ .$$

A lehető legmagasabb z-hez tartozó $K(z)$ érték $K(1) = (h+b)E(p)$. Ebben a $z=1$ pontban $K(z)$ növekvő, ha $K_z(1) = -(h+b)E(p) + b > 0$, azaz $b/(b+h) > E(p)$. Utóbbi egyenlőtlenség bal oldalán az irodalomból jól ismert (ld. Vörös, 2010) optimális termékelérhetőségi szint (optimális fogyasztó-kiszolgálási szint) áll. Amennyiben ez magasabb a selejtarány várható értékénél, úgy $K(z)$ növekvő $z=1$-ben. Nem ebben a pontban van tehát a függvény minimuma, hanem egy alacsonyabb z-hez, azaz magasabb minőség-ellenőrzési sebességhez tartozó pontban. Mivel a hiány fajlagos költsége legalább annyi, mint a fajlagos készletezési költség ($b \geq h$), ezért $b/(b+h) > 1/2$. Ha tehát a selejtarány várható értéke nem haladja meg az 50%-ot, akkor $K(z)$ növekvő $z=1$-ben. Egyenletes eloszlás esetén ez mindig teljesül, ugyanis a selejtarány várható értékének maximuma 1/2.

Eddigi megállapításaink alapján tehát a $0 \leq z \leq 1-a$ intervallumon $K(z)$ lineáris, és lehet végig növekvő vagy végig csökkenő, $z=1$-ben pedig növekvő, ha $b/(b+h) > E(p)$, és csökkenő, ha $b/(b+h) < E(p)$. Ez összesen négy esetet eredményez. A *8. ábra* két olyan esetet mutat be egyenletes eloszlásra, ahol $a < 0.8$, ezért $K(z)$ szigorúan monoton csökken a $0 \leq z \leq 1-a$ intervallumon. Ennél nagyobb z-kre általánosságban annyit állapíthatunk meg, hogy nagyobb b-re a függvény hamarabb kezd növekedni, ha egyáltalán növekszik. Az illusztráció kedvéért egy magas és egy irreálisan alacsony b-t választottunk. Utóbbi azt hivatott bemutatni, hogy $z=1$ helyen csökkenő a függvény, ha $b/(b+h) < E(p)$. A költségfüggvény minimuma ezért $z=1$ helyen, azaz az ellenőrzés gyorsítását nélkülöző helyen van. Magasabb fajlagos hiányköltség esetén az $1-a \leq z < 1$ intervallumon található a minimum.



8. ábra. $K(z)$alakja a selejtarány egyenletes eloszlása, $a = 0.5$, $h = 1$ és b két különböző értéke esetén

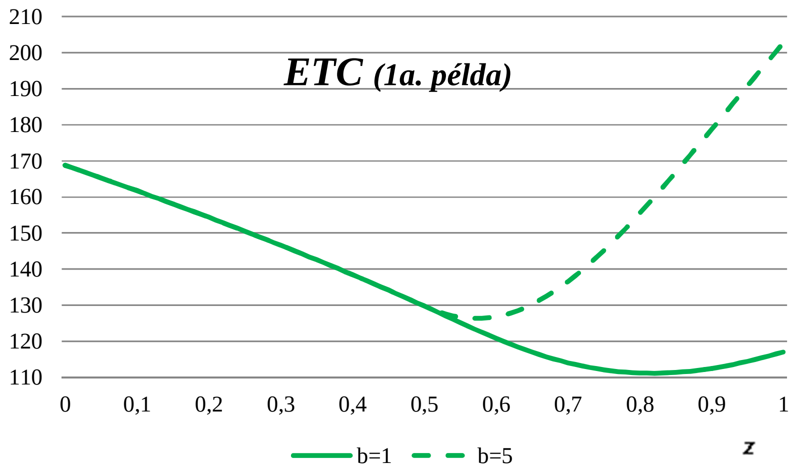


9. ábra. $K(z)$ alakja a selejtarány egyenletes eloszlása, $a = 0.9$, $h = 1$ és b két különböző értéke esetén $(b/(b + h) > E(p))$

A *9. ábra* jóval magasabb maximális selejtarányt enged meg ($a = 0.9$), így az első intervallumon $K(z)$ szigorúan monoton növekszik. Ez a monotonitás a második intervallum elején folytatódik, majd mindkét esetben csökkenés után vált újra növekedésre. A költségfüggvény minimuma ezért vagy ismét az $1 - a \leq z < 1$ intervallumon van, vagy a $z = 0$ helyen. Utóbbi azt jelenti, hogy a minőség-ellenőrzés sebessége végtelen, azaz nulla időegységet vesz igénybe ez a tevékenység. Mivel ez a gyakorlatban nem kivitelezhető, ezért feltételeznünk kell z-nek egy nullánál nagyobb minimumát, és ezen $z_{\min}$ mellett fennálló függvényértéket kell összevetnünk a másik intervallum minimumával.

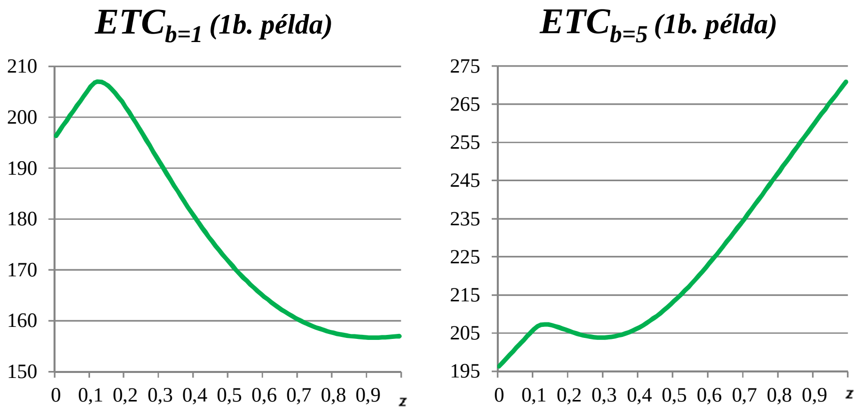
A fenti két ábra segítségével is összefoglalhatjuk, hogy míg $0 \leq z < 1 - a$ és $z = 1$ esetére meg tudtunk mondani bizonyos szabályszerűségeket, addig az $1 - a \leq z < 1$ intervallumon a függvény a paraméterektől függően számos különböző alakot ölthet. Ezen tulajdonságok nagyban befolyásolják az összköltség függvény alakját. Ezek közül mutatunk meg többet a következő három példában.

1a. példa. Legyen $g(z) = Ce^{-z}$, $C = 0.1$, $a = 0,5$, $h = 1$, $b_1 = 1$ és $b_2 = 5$. Salameh és Jaber (2000) alapján $s = 100$ és $D = 137$. Az összköltség függvény $0 \leq z < 0.5$ intervallumon megegyezik a két b értékre, magasabb z-kre azonban jelentős eltérés mutatkozik. A hiány alacsonyabb fajlagos költsége esetén ($b_1 = 1$) alacsonyabb a minimum értéke $ETC_{\min} = 111.15N$, melyet magasabb helyen ($z = 0.82$) vesz fel. $b_2 = 5$ esetén ugyanis $z = 0,57$-ben van minimum, melynek értéke $ETC_{\min} = 126.36N$. A hiány magasabb fajlagos költsége tehát gyorsabb minőség-ellenőrzésre ösztönzi a vállalatot.



10. ábra. Az 1a. példa összköltség függvényei ($g(z) = Ce^{-z}, C = 0.1, a = 0.5, h = 1, s = 100, D = 137$)

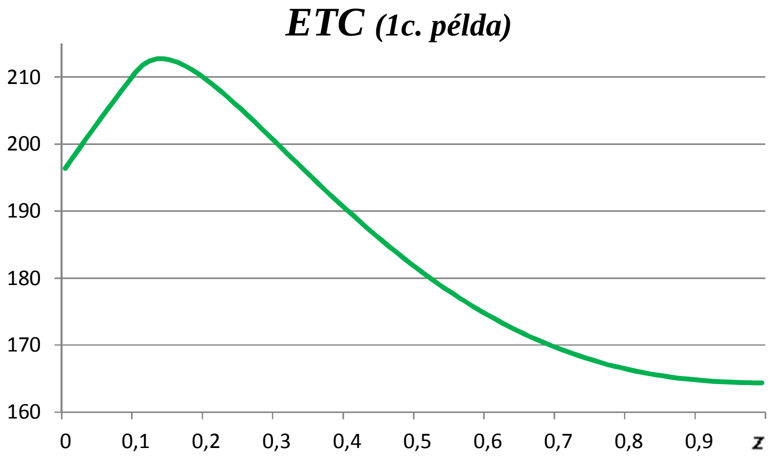
1b. példa. Tekintsük az 1a. példát $a = 0.9$-re. A $0 \leq z < 1 - a$ intervallumon ETC lineáris növekvő, melyet $0.1 \leq z$ szakaszon némi növekedés után csökkenés, majd megint növekedés követ. Alacsony fajlagos hiányköltség esetén az összköltség minimuma a $z = 1$-hez közel helyezkedik el, minimális sebességnövelésre van tehát szükség. Magas b érték esetén azonban épp $z = 0$-ban van az elméleti minimum. Attól függően, hogy hol van z technikai minimuma, vagy abban a $z_{\min}$ pontban, vagy a $z = 0.29$ helyen veszi fel a legalacsonyabb értékét $ETC_{b=5}$.



11. ábra. Az 1b. példa összköltség függvényei ($g(z) = Ce^{-z}$, $C = 0.1$, $a = 0.9$, $h = 1$, $s = 100$, $D = 137$)

Az eddig bemutatott példákban $z = 1$ helyen növekvő volt az összköltség függvény, ami annak köszönhető, hogy $K(z)$ kifejezés nagyobb súllyal szerepelt az összegben. Ahogy a fentiekben láttuk, $G(z)$ csökkenő $z = 1$-ben, ezért ennek a tagnak nagyobb súlyt adva ETC is csökkenhet $z = 1$-ben, így lehet ezen a helyen a minimum. Az 1c. példában ennek érdekében megnöveltük a minőség-ellenőrzés gyorsításának költségét.

1c. példa. Tekintsük az 1a. példát $a = 0.9$, $b = 1$ és $C = 20$ mellett. A függvény menetét tekintve annyi változás történt, hogy $z = 1$-hez közeledve a monotonitás továbbra is csökkenő marad, így a minimum $z = 1$ helyen van. A minőség-ellenőrzés sebességének növelése drágább tehát annál, amennyit a vállalat megtakarítana a gyorsabb munkavégzés következtében.



12. ábra. Az 1c. példa összköltség függvényei ($g(z) = Ce^{-z}$, $C = 20$, $a = 0.9$, $h = 1$, $b = 1$, $s = 100$, $D = 137$)

Ahogy azt a példák is érzékeltetik, az összköltség függvény minimuma a $z_{\max} \geq z \geq z_{\min}$ intervallumon elhelyezkedhet $z_{\min}$, $z_{\max}$, $z = 1-a$ helyeken, illetve a $z_{\max} > z > 1-a$ szakaszon. Amennyiben $K(z)$ és $G(z)$ monotonitása ellentétes irányú, és $G(z)$ annyira magas, hogy ETC nem lineáris a $z_{\min} \leq z \leq 1-a$ intervallumon, úgy ezen szakasz belső pontja is lehet minimumpont. A minimumhely megtalálására alkalmazhatjuk az EOQ modellből ismert (Hauck és Vörös, 2015) algoritmust.

Algoritmus

1. Kiszámítjuk $ETC(z_{\max})$ értékét, és legyen $L = ETC(z_{\max})$, valamint $z_{opt} = z_{\max}$.

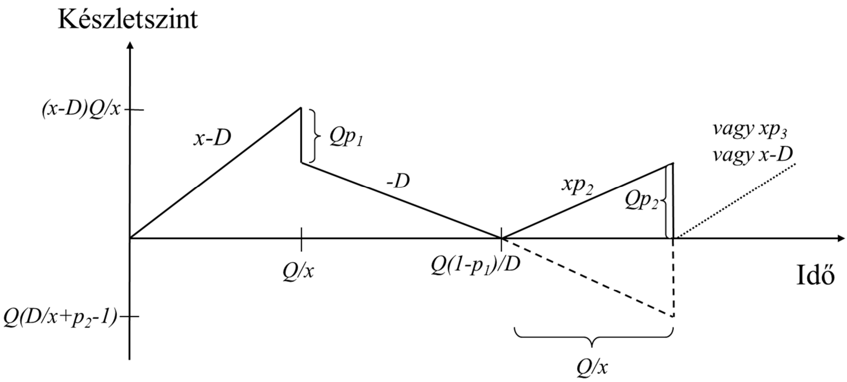
2. Tekintsük $\partial ETC(z)/\partial z$ deriváltat a (7a-e) összefüggések érvényessége mellett az $1-z \leq a$ intervallumon! Megnézzük, hogy $\partial ETC(z)/\partial z = 0$ elsőrendű feltételnek létezik-e megoldása az $[1-a, z_{\max}]$ intervallumon, és az minimumpont-e. Ha van minimum ezen az intervallumon, akkor jelölje z_{opt1}! Az $ETC(z_{opt1})$ érték kiszámítása után megvizsgáljuk, hogy $ETC(z_{opt1}) < L$ teljesül-e. Ha igen, akkor legyen $z_{opt} = z_{opt1}$! Amennyiben nincs minimum az intervallumon, akkor $ETC(1-a)$ értékét számítjuk. Ha $ETC(1-a) < L$, akkor legyen $L = ETC(1-a)$ és $z_{opt} = 1-a$!

3. Tekintsük $\partial ETC(z)/\partial z$ deriváltat a (7a-e) összefüggések érvényessége mellett az $a < 1-z$ intervallumon! Megnézzük, hogy az $\partial ETC(z)/\partial z = 0$ elsőrendű feltételnek létezik-e megoldása a $[z_{\min}, 1-a]$ intervallumon, és az minimumpont-e. Ha van minimum ezen az intervallumon, akkor jelölje z_{opt2}! Az $ETC(z_{opt2})$ érték kiszámítása után megvizsgáljuk, hogy $ETC(z_{opt2}) < L$ teljesül-e. Ha igen, akkor legyen $z_{opt} = z_{opt2}$. Amennyiben nincs minimum az intervallumon, akkor $ETC(z_{\min})$ értékét számítjuk. Ha $ETC(z_{\min}) < L$, akkor legyen $L = ETC(z_{\min})$ és $z_{opt} = z_{\min}$!

4. L értéke megmondja az éves készletezéssel kapcsolatos összköltség minimumát. Az optimális minőség-ellenőrzési sebesség pedig $x_{opt} = D/z_{opt}$ összefüggésből adódik. A kapott értéket a (10) összefüggésbe helyettesítve megkapjuk a gazdaságos sorozatnagyság, Q_{opt} szintjét.

3.2 A minőség-ellenőrzési sebesség növelése egymástól független ciklusokban

Az eddigiekhez képest ebben a szakaszban arra az esetre terjesztjük ki vizsgálódásainkat, hogy mi történik, ha az egymást követő készletezési periódusokban eltérő lehet a selejtarány. Ez olyan ingadozásokhoz is vezethet, hogy egyes ciklusokban keletkezik hátralék, míg másokban nem.



13. ábra. Készletalakulási diagram egymástól független ciklusokra, a második periódusban magasabb selejtaránnyal. Forrás: Vörös (2013) alapján saját szerkesztés

A *13. ábra* egy olyan példát szemléltet, ahol az első ciklusban még alacsonyabb volt a selejtarány, ezért nem fordult elő hiány, a másodikban azonban olyan szintű meghibásodás történt, hogy jelentős mennyiségű hátralék halmozódott fel. Ennek megfelelően a második periódus csak az átvizsgálási időszak végéig tart, vagyis rövidebb az elsőnél. Az éves készletezési összköltség meghatározásához tehát a ciklushossz várható értékével kell számolnunk. Ehhez tudnunk kell, hogy egy periódus $Q(1-p)/D$ ideig tart, ha nincs hiány, és Q/x ideig, ha van:

$$CL(Q,z) = \begin{cases} Q(1-p)/D & \text{ha } 0 \le p \le 1-z\,, \\ Q/x & \text{ha } 1-z < p \le 1\,. \end{cases}$$

A ciklushossz (CL) várható értéke tehát:

$$\begin{aligned} ECL(Q,z) &= \int_0^{1-z} \frac{Q(1-p)}{D} f(p)\,dp + \int_{1-z}^1 \frac{Q}{x} f(p)\,dp = \\ &= \frac{Q}{D}\Big(\int_0^{1-z}(1-p)f(p)\,dp + z\int_{1-z}^1 f(p)\,dp\Big) = \frac{Q}{D}S(z)\,. \end{aligned} \tag{12}$$

Egy évben tehát $1/ECL = D/(QS(z))$ periódust feltételezünk, ha $S(z) > 0$. $S(z)$ definíciója alapján (ld. 7a) $E(p) < 1$ esetén pozitív. Mindig teljesül tehát a feltétel, mivel ha a selejtarány várható értéke 100% lenne ($E(p) = 1$), akkor a vállalkozás működésének nem lenne értelme. A készletezési és hátralék költségek várható összege egy ciklusban:

$$\begin{aligned} ECC(Q,z) = \int_0^{1-z} HCC1(Q,z)f(p)\,dp + \int_{1-z}^1 (HCC1(Q,z) + BCC2)f(p)\,dp = \\ = h\frac{Q^2}{2D}H(z)\,, \end{aligned}$$

ahol

$$\begin{aligned} H(z) = \int_0^{1-z} &(2pz + (1-p)^2 - z)f(p)\,dp + \\ &+ z\int_{1-z}^1 (p + \frac{b}{h}(z-1+p))f(p)\,dp\,. \end{aligned} \tag{13}$$

A fentiekből következően a készletezési összköltség várható értéke:

$$\begin{aligned} ETC(Q,z) &= \frac{ND}{QS(x)}\Big(s+\frac{hQ^2H(z)}{2D}+\frac{g(z)zQ}{D}\Big)= \\ &= \frac{N}{S(x)}\Big(\frac{sD}{Q}+\frac{hQH(z)}{z}+zg(z)\Big)\,, \end{aligned} \tag{14a}$$

így a gazdaságos sorozatnagyság minden $E(p) < 1$-re

$$Q_{opt}(z) = \sqrt{\frac{2sD}{h}}\sqrt{\frac{1}{H(z)}}\,. \tag{14b}$$

6. Tétel. *Egymástól független ciklusokat feltételezve, az EPQ modellben több elemből áll a gazdaságos sorozatnagyság, mint az EOQ modellben.*

$H(z)$-t összehasonlítva az EOQ modellre érvényes értékével, az EPQ-ra jellemző érték z egységgel kevesebb. Ebből következően (14b) miatt a gazdaságos sorozatnagyság nagyobb az EPQ modellben, ami megfelel a szakirodalom minőség-ellenőrzés nélküli EOQ és EPQ modelljeivel kapcsolatos megállapításainak.

(14) felhasználásával a következő optimalizálási problémához jutunk:

$$\min_z ETC(z)/N = (\sqrt{2sDh}\sqrt{H(z)} + zg(z))/S(z) \tag{15}$$

A $zg(z)$ kifejezés z szerinti deriváltja $(g(z)+zg_z)$, ahol mivel $g(z)$ csökkenő, ezért g_z előjele negatív, így az összeg is lehet negatív. A fentiekben vizsgált függvények közül $g(z) = C/z$ esetén a derivált értéke nulla, ezért $zg(z)$ konstans. Negatív a derivált előjele, ha $g(z) = C/z^2$, és pozitív, ha $g(z) = Ce^{-z}$. A második deriváltak alapján előbbi konvex csökkenést, míg utóbbi konkáv növekvést jelent z-ben.

7. Tétel. *Független ciklusok esetén $S(z)$ viselkedése megegyezik az EOQ modellben (Hauck és Vörös 2015) leírtakkal, $H(z)$ tulajdonságai azonban eltérnek attól. A kezdeti értékek megegyeznek, a $0 \le z < 1-a$ intervallumon $H(z)$ lineáris, de az EOQ modellben növekvő, míg az EPQ modellben csökkenő. Az $1-a \le z \le 1$ intervallumon mindkét esetben konvex a függvény, EOQ-ra növekvő. A $z = 1$ helyen felvett érték az EOQ modellben egységnyivel nagyobb, mivel a két függvény értéke között z egységnyi különbség van.*

	$0 \le z < 1-a$	$1-a \le z \le 1$
$S(z)$	konstans pozitív, értéke $1-E(p)$	konvex növekvő, $S(1) = 1$
$H(z)$ – EOQ modell	lineáris növekvő, $H(0) = E(1-p)^2$	konvex növekvő, $H(1) = 1 + E(p) + bE(p)/h$
$H(z)$ – EPQ modell	lineáris csökkenő, $H(0) = E(1-p)^2$	konvex, $H(1) = E(p)(1 + b/h)$

4. táblázat. $S(z)$ és $H(z)$ tulajdonságai független ciklusok esetén.
Forrás: Hauck és Vörös (2015), valamint saját számítás

Mivel

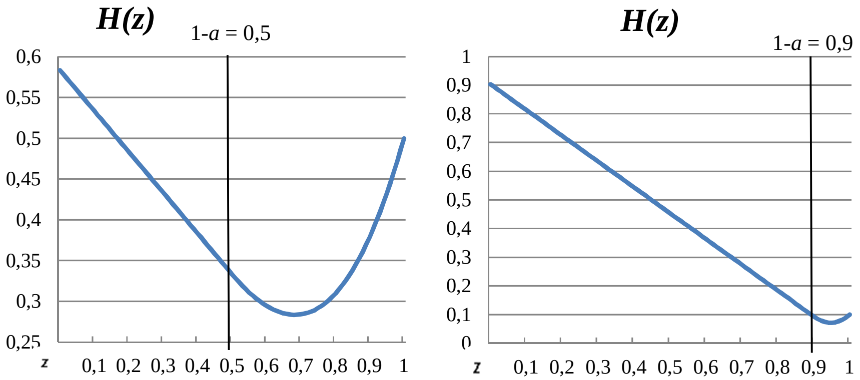
$$H_z = \int_0^{1-z} (2p-1)f(p)\,dp + \int_{1-z}^{1} (p + \frac{b}{h}(2z-1+p))f(p)\,dp\ ,$$

ezért egyenletes eloszlás esetén $H(z)$ lineáris csökkenő a $z < 1-a$ intervallumon, ugyanis $H_z = a-1$, ami $a < 1$ miatt negatív. A függvény konvex az $1-a \le z \le 1$ intervallumon, mivel

$$H_{zz} = z(1+b/h)f(1-z) + (2b/h)\int_{1-z}^{1} f(p)\,dp > 0\ .$$

Nem állapíthatunk meg az egész intervallumra jellemző monotonitási irányt, viszont $z = 1$-ben a függvény növekvő, mivel $H_z(1) = E(p)+E(1+p)\cdot b/h > 0$.

A *14. ábra* egyenletes eloszlásra és két különböző a-ra mutatja be $H(z)$ alakját. Láthatjuk, hogy a csökkenés a második intervallumra érve is folytatódik, majd a minimumot elhagyva konvex módon növekszik.



14. ábra. $H(z)$ alakja egyenletes eloszlásra $a = 0.5$ és $a = 0.1$ esetén $(h = b = 1)$

8. Tétel. *A (15) optimalizálási problémában szereplő* $\sqrt{H(z)}/S(z)$ *hányados a* $0 \le z < 1-a$ *intervallumon csökkenő;* $z = 1$ *helyen növekvő, ha* $b/(b+h) > E(p)$*, és csökkenő, ha* $b/(b+h) < E(p)$*.*

A $\sqrt{H(z)}/S(z)$ tört z szerinti deriváltjának előjelét $(S(z)H_z - 2H(z)S_z)$ előjele határozza meg. Ha $0 \le z < 1-a$, akkor mivel $S_z = 0$, $S(z) > 0$ és $H_z < 0$, ezért negatív eredményt kapunk, a hányados tehát z-ben csökken. A $z = 1$ helyen tudjuk, hogy $S(1) = 1$, $S_z(1) = 1$, $H(1) = (1+b/h)E(p)$ és $H_z(1) = E(p) + (b/h)E(1+p)$. Ebből következően $S(z)H_z - 2H(z)S_z = -(1+b/h)E(p) + b/h$, ami pozitív, tehát a hányados növekvő $z = 1$ helyen, ha $b/(b+h) > E(p)$, és negatív, tehát csökkenést tapasztalhatunk, ha $b/(b+h) < E(p)$. Ez a tulajdonság megegyezik az 5. tételben $K(z)$ szorzatra tett megállapítással.

9. Tétel. *A* $0 \le z < 1-a$ *intervallumon* $ETC(z)$ *összköltség függvény csökkenő, ha* $g(z) + zg_z < 0$*, és abban a ritka esetben növekvő, ha*

$$-\sqrt{2sDh} \cdot (H_z/2\sqrt{H}) < g(z) + zg_z\ .$$

A $z = 1$ helyen a függvény csökkenő, ha $b/(b+h) < E(p)$. Ha $b/(b+h) > E(p)$, akkor a csökkenés feltétele:

$$g_z < \Big(\sqrt{2sDh}(E(p)(1+b/h) - b/h\Big)/2\sqrt{E(p)(1+b/h)}\,.$$

Az összköltség várható értékének minimumát keresve meghatározzuk (15) menetét. Az első derivált az alábbi alakot ölti:

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial z}(ETC/N) = \\ \Big(\sqrt{2sDh}(SH_z/2\sqrt{H} - S_z\sqrt{H}) + (g(z) + zg_z)S - S_z zg(z)\Big)/S^2\,.\end{gathered} \tag{16}$$

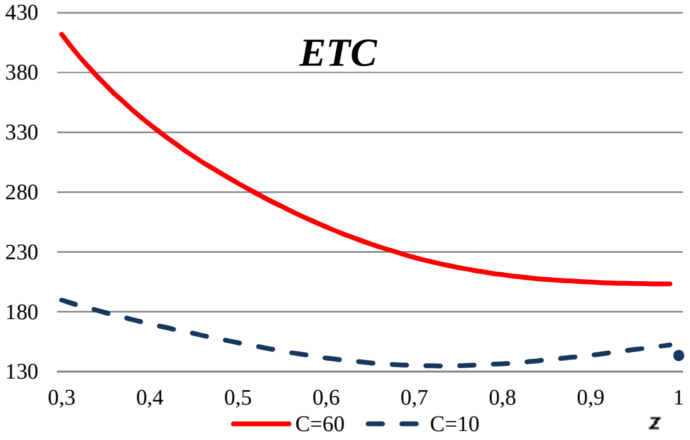
A 8. tétel alapján a $0 \le z < 1-a$ intervallumon az összeg első tagja csökkenő. A második tagban $S_z = 0$ és $S(z) > 0$ miatt $g(z)+zg_z$ dönt az előjelről, melynek viselkedését a fentiekben mutattuk be. Összességében megállapíthatjuk, hogy a $0 \le z < 1-a$ intervallumon az összköltség függvény csökkenő, ha $g(z) + zg_z < 0$. Nem minimum tehát a $z = 0$ pont, ahol a minőség-ellenőrzés sebessége minden határon túl növelt. Növekedés is elképzelhető ezen az intervallumon, ha $g(z) + zg_z > 0$ (pl. $g(z) = Ce^{-z}$ függvényt feltételezve) és $\sqrt{2sDh}$ rendkívül alacsony: $-\sqrt{2sDh}(H_z/2\sqrt{H}) < g(z) + zg_z$.

A $z = 1$ helyen (16) második tagja mindig negatív, mivel $S(z) = S_z(z) = 1$, amiből $(g(z) + zg_z)S - S_z zg(z) = g_z$, ami pedig definíció szerint negatív. (16) első tagja a 8. tétel alapján szintén csökkenő a $z = 1$ helyen, ha $b/(b+h) < E(p)$. Ebben az esetben tehát az összköltség függvény biztosan csökkenő $z = 1$-ben, vagyis lehet minimumhely. Ez azt jelenti, hogy a minőség-ellenőrzés sebessége a napi kereslet ütemével egyezik meg.

(16) első tagja pozitív $z = 1$-ben, ha $b/(b+h) > E(p)$, ezért az összköltség lehet növekvő ezen a helyen. Tekintve, hogy a hiány fajlagos költsége jellemzően magasabb, mint a készlettartásé, ezért $b/(b+h) > 0.5$ reális feltételezés. Az egyenlőtlenség másik oldalán álló $E(p)$ a selejtarány várható értéke, így jellemzően kevesebb 0.5-nél. Egyenletes eloszlásnál például $E(p) = a/2$ és $a < 1$ miatt igaz ez az állítás. Összességében tehát $b/(b+h) > E(p)$ teljesülése a valószínűbb. Ebben az esetben (16) csökkenő $z = 1$-ben, ha

$$g_z < \Big(\sqrt{2sDh}(E(p)(1+b/h) - b/h\Big)/2\sqrt{E(p)(1+b/h)}\,.$$

2a. példa. Legyen $g(z) = C/z^2$, $b = 2h$ és $a = 0.5$. Salameh és Jaber (2000) példájának megfelelően $\sqrt{2sDh} = 165.53$. Az előző egyenlőtlenséget aktualizálva és egyenletes selejteloszlást feltételezve, az összköltség függvény csökkenő $z = 1$-ben, ha $-2C < -119.5$, azaz $C > 59.75$.



15. ábra. A 2a. példa összköltség függvényei. $g(z) = C/z^2, g(z_{\max}) = 0, z_{\max} = 1, z_{\min} = 1,$ $a = 0.5, b = 2h, s = 100, D = 137$

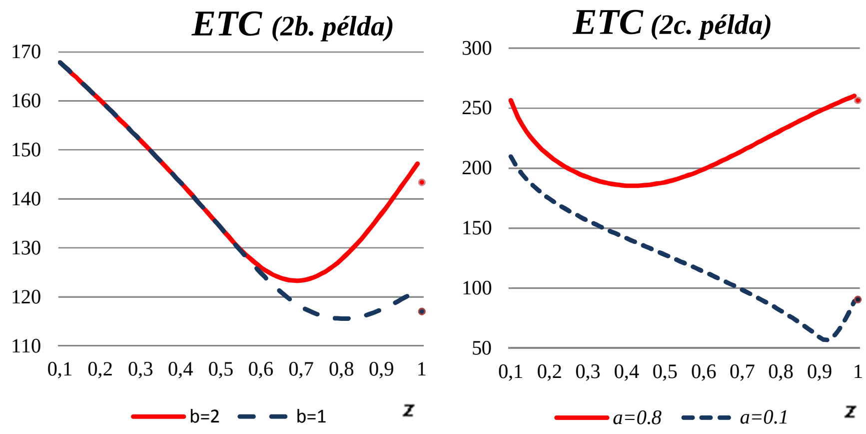
A *15. ábra* bemutatja, hogy a minőség-ellenőrzés növelésének magas költsége ($C = 60$) mellett a függvény csökkenő $z = 1$-ben, azaz a vállalatnak nem célszerű gyorsítania az átvizsgálási sebességet. A minimum értéke $ETC(1) = 143.4N$. Amennyiben azonban olcsóbban ($C = 10$) tudja megvalósítani a gyorsítást, úgy az összköltség minimuma alacsonyabb z, azaz magasabb átvizsgálási sebesség mellett áll elő. Esetünkben $z = 0.73$-ban veszi fel a minimumot, $ETC = 134.8N$ értékkel.

2b. példa. Legyen $g(z) = 5/z$, $a = 0.5$, $z_{\min} = 0.1$, $\sqrt{2sDh} = 165.53$, $h = 1$, $b_1 = 1$ és $b_2 = 2$. A 7. tételnek megfelelően ETC a $0 \leq z < 1 - a$ intervallumon csökkenő, $z = 1$-ben pedig növekvő. A minimum ezért a $0.5 \leq z \leq 1$ szakaszon található. Ahogy az a 16. ábrán is látszik, a hiány fajlagos költségének emelése sürgeti a minőségellenőrzést, $b_1 = 1$ esetén ugyanis $z = 0.8$, míg $b_2 = 2$-re $z = 0.69$ a minimum helye. A minimum értéke rendre $115.6N$ és $123.3N$.

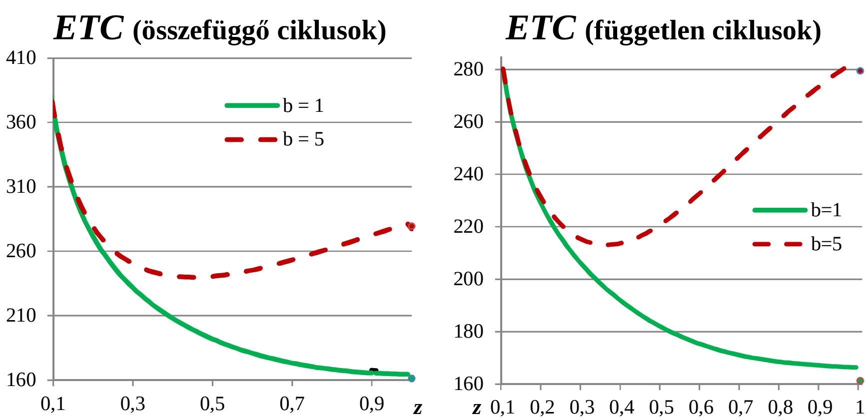
2c. példa. Legyen $g(z) = 5/z^2$, $a_1 = 0.1$, $a_2 = 0.8$, $z_{\min} = 0.1$, $\sqrt{2sDh} = 165.53$, $h = 1$ és $b = 5$. A 7. tételnek megfelelően ETC a $0 \leq z < 1 - a$ intervallumon csökkenő, $z = 1$-ben pedig növekvő. A minimum ezért az $1 - a \leq z \leq 1$ szakaszon található. Ahogy az a 16. ábrán látható, a selejtarány várható értékének növekedése gyorsabb minőség-ellenőrzésre készteti a céget, $a_2 = 0.8$ esetén ugyanis $ETC_{opt}(0.42) = 185.23N$, míg $a_1 = 0.1$-re $ETC_{opt}(0.92) = 56.8N$.

Az összefüggő és egymástól független ciklusok összehasonlításához Hauck és Vörös (2015) EOQ modellekre vonatkozó példáját oldjuk meg. Ez lehetővé teszi, hogy nemcsak a két rendszertípust, de az EOQ és az EPQ modellváltozatok különbségeit is össze tudjuk vetni egymással:

3. példa. Legyen $g(z) = 5/z^2$, $a = 0.95$, $z_{\min} = 0.1$, $\sqrt{2sDh} = 165.53$, $h = 1$ $b_1 = 1$ és $b_2 = 5$. A példát a *17. ábra* illusztrálja.



16. ábra. A 2b és 2c példa összköltség függvényei



17. ábra. A 3. példa összköltség függvényei. $g(z) = C/z^2$, $g(z_{\max}) = 0$, $z_{\max} = 1$, $z_{\min} = 0.1$, $C = 5$, $a = 0.95$, $s = 100$, $D = 137$

Alacsony fajlagos hiányköltség esetén ($b_1 = 1$) az összefüggő és a független ciklusokat bemutató ETC görbék alakja hasonló. A minimum mindkét esetben $z = 1$ helyen van, értéke $161.34N$. A minőség-ellenőrzés sebességét növelve – tehát a görbén jobbról balra haladva – azonban jelentősen magasabb az összefüggő ciklusokra vonatkozó összköltség. Ennek oka, hogy a selejt lehető legmagasabb aránya magas: $a = 0.95$.

Amennyiben megnöveljük a hátralék fajlagos költségét ($b_2 = 5$), úgy az optimumban is nagyobb eltérést tapasztalhatunk. Ismét az összefüggő ciklusokra vonatkozó összköltség a magasabb $ETC_{\min}(0.45) = 24.85N$, melynek a helye az egymástól független ciklusokhoz képest magasabb z helyen van, ami lassabb minőség-ellenőrzést jelent. Ennek minimuma ugyanis $ETC_{\min}(0.36) = 213.07N$.

Az EOQ modell ugyanezen példára kapott eredményeit tekintve $b_1 = 1$ esetén ugyanúgy $z = 1$ helyen van a minimum. Összefüggő ciklusokra $b_2 = 5$

mellett nem találtunk nagy különbséget, ugyanis $z_{opt} = 0.53$ (vs. 0.45). Egymástól független ciklusok esetén jelentősebb különbség mutatkozik, az összköltség függvény ugyanis a $z_{opt} = 0.16$ (vs. 0.36) helyen, tehát jóval gyorsabb minőség-ellenőrzés mellett ($x_{opt} = 865$ vs. $x_{opt} = 304$) veszi fel minimumát. A fentiekben és a szakirodalomban megállapítottaknak megfelelően az EPQ modellben magasabb a gazdaságos sorozatnagyság. A $b_2 = 5$ esetben összefüggő ciklusokat feltételezve 219 egység áll az EOQ 148 darabos sorozatnagyságával szemben, míg egymástól független ciklusokra kisebb a különbség, 252 vs. 232 darab. Ahogy láttuk, nem állapíthatunk meg hasonló szabályszerűséget azonban a minőség-ellenőrzés optimális sebességére vonatkozóan.

4 Következtetések

A tanulmányban olyan Economic Production Quantity (EPQ) modelleket írtunk fel, melyek figyelembe veszik, hogy eladás előtt minden egyes terméket át kell vizsgálnia a vállalatnak, hogy azok megfelelnek-e a minőségi elvárásoknak vagy sem. A minőségellenőrzés sebessége döntési változó, így a gazdaságos sorozatnagyság mellett ennek is kerestük az optimális értékét. Megjegyeztük, hogy a sebesség növelésének akkor van értelme, ha az lassabb a termelési rátánál. Amennyiben a termelési ráta a szűk keresztmetszet, úgy az optimális sebességre tett megállapításokat a termelés sebességére értelmezhetjük.

A rendszer viselkedésének két típusát különböztettük meg aszerint, hogy minden keresletet ki tud-e elégíteni a vállalat vagy sem. Amennyiben az adott napon talált jó minőségű termékek száma meghaladja a napi keresletet, úgy nem keletkezik hiány. Ebben az esetben a minőség-ellenőrzés sebességét akkor lehet érdemes növelni, ha a selejtarány eléri az ötven százalékot. Hátralék keletkezése esetén a sebesség növelése csökkenti a hiány átlagos szintjét, a készleten tartási költségeket nem befolyásolja, ugyanakkor növeli a sorozatkezdések számát. A selejtarány valószínűségi változó, amely meghatározó hatással lehet arra, hogy keletkezik-e hátralék. A vállalat ugyanezt a minőség-ellenőrzési sebesség (termelési ráta) megfelelő változtatásával tudja befolyásolni.

Az elemzést összefüggő és egymástól független ciklusokra is elvégeztük. Előbbi azt jelenti, hogy a rendszer minden egyes periódusban olyan selejtarányt és modelltípust mutat, ahogy az az elsőben kialakult. Összehasonlítottuk ezt azzal az esettel, hogy minden periódus végén az előzőtől független állapot áll elő. Jelentős különbségeket akkor tapasztaltunk, amikor magas fajlagos hiányköltséggel kalkuláltunk.

A problémát a sebességváltoztatás költségének három különböző típusú függvénye mellett vizsgáltuk meg. A készletezéssel kapcsolatos összköltség minimumát minden esetben a sorozatnagyság és az átvizsgálási sebesség döntési változók mentén határoztuk meg. Kitértünk arra is, hogyan hatnak az összköltség függvényre olyan paraméterek, mint a selejtarány maximálisan elérhető értéke, valamint a hiány fajlagos költsége. Ahogy az EOQ modellben, itt is igazolást nyert, hogy a hiány fajlagos költségének emelése különösen sürgeti az átvizsgálást. Az EOQ modellhez képest a gazdaságos sorozatnagyság mind összefüggő, mind egymástól független ciklusok esetén magasabb lett, a minőség-ellenőrzési sebesség optimális szintje azonban hol magasabb, hol alacsonyabb értéket mutatott.

Irodalom

1. Harris, F. (1913), How many parts to make at once, *Factory, The Magazine of Management* 10(2), 135–136.
2. Hauck Zs., Vörös J. (2015), Lot sizing in case of defective items with investments to increase the speed of quality control, *Omega* 52, 180–189.
3. Khan, M., Jaber, M. Y., Guiffrida, A. L., Zolfaghari, S. (2011): A review of the extensions of a modified EOQ model for imperfect quality items, *International Journal of Production Economics* 132, 1–12.
4. Maddah, B., Jaber, M. Y. (2008), Economic order quantity for items with imperfect quality: Revisited, *International Journal of Production Economics* 112, 808–815.
5. Papachristos, S., Konstantaras, I. (2006), Economic order quantity models for items with imperfect quality, *International Journal of Production Economics* 100, 148–154.
6. Porteus, E. L. (1986), Optimal lot sizing, process quality improvement and setup cost reduction, *Operations Research* 34(1), 137–144.
7. Rosenblatt, M. J. – Lee, H. L. (1986), Economic production cycles with imperfect production processes, *IIE Transactions* 18(1), 48–55.
8. Salameh, M. K., Jaber, M. Y. (2000), Economic production quantity model for items with imperfect quality, *International Journal of Production Economics* 64, 59–64.
9. Taft, E. W. (1918), The most economical production lot, *Iron Age* 101, 1410–1412.
10. Vörös, J. (1999), Lot sizing with quality improvement and setup time reduction, *European Journal of Operational Research* 113(3), 568–574.
11. Vörös, J. (2013), Economic order and production quantity models without constraint on the percentage of defective items, *Central European Journal of Operations Research* 21(4), 867–885.

EPQ MODELS WITH THE SCREENING SPEED AS DECISION VARIABLE

In this paper, we consider Economic Production Quantity (EPQ) models where screening of every item is carried out before selling the lot. The proportion of defective items is random, and imperfect products found leave the system in a batch at the end of the screening period. Production rate and screening speed are decision variables. Enhancing speed of the bottleneck makes backlogging costs decrease and – depending on the proportion of defections – it does also affect holding and setup costs. Our goal is to find the minimum of the related total cost for different types of screening accelerating cost functions. Analysis is carried out for connecting and independent cycles as well, where percentage of defection stays the same and can change from period to period, respectively. Results are compared to those of Economic Order Quantity models.

Keywords: EPQ model, screening speed, lot size