

# Végbeszámoló, OTKA K-37735

Szűcs András és Stipsicz András

A kutatási időszakban több témakörben értünk el eredményeket.

- (Szűcs András) Ezen pályázat indulásakor a következő 4 pontos tervet állítottam össze:

2002: Banchoff theorem

2003: Immersions of homotopy spheres,

2004: Elimination of singularities

2005: Lagrange and Legendre manifolds and their singularities

Röviden azt jelenthetem, hogy az első három pontot teljesítettem, a negyediket pedig Kazarian orosz matematikus publikálta.

## 1. Banchoff theorem.

Ez a tétel azt mondja ki, hogy egy zárt felület  $R^3$ -ba menő generikus immerziója háromszoros pontjainak száma kongruens a felület Euler karakterisztikájával modulo 2. Kb. 10 éve társszerzőkkel publikáltuk ennek egy magasabb dimenziós általánosítását. Az azonban nyitva maradt akkor, hogy vannak-e esetleg további összefüggések a különböző multiplicitású többszörös pont sokaságok Euler karakterisztikái között? Most egy rövid cikkben sikerült teljes választ adni erre: Nevezetesen beláttam a következő tételt:

### **Tétel:**

Ha  $M^{2k} \rightarrow R^{2k+1}$  egy generikus immerzió, akkor a következő két eset valamelyike léphet fel:

- a)  $k = 0, 1, 3$  és  $M^{2k}$  kobordáns a  $2k$ -dimenziós projektív térrel és minden páros dimenziós többszörös pont sokaság Euler karakterisztikája páratlan, vagy
- b) Minden többszörös pont sokaság páros Euler karakterisztikájú.

Egy másik, szintén az immerziók többszörös pontjairól szóló cikkben Lippner Gábor doktoranduszommal közösen - sikerült két dologban is előrelépni. Rimányi Richárd korábbi doktoranduszomnak sikerült az általam konstruált univerzális immerziókat felhasználni a többszörös pont formula bizonyítására, azonban csak a komplex esetben és csak modulo torzió. Most

ezt a két hiányosságot kiküszöböltük, másrészt sikerült bizonyos szingularis leképezésekre is kiterjeszteni az eredményt.

## 2. Immersions of homotopy spheres.

A differenciátopológia két, általam mindig nagyon csodált ága az egzotikus gömbök vizsgálata és az immerziók Smale féle elmélete. Ezért szolgált nagy örömmre, hogy Ekholm svéd matematikussal közös eredményben sikerült e két dolgot összekapcsolni. Nevezetesen kiszámoltuk az  $n$ -dimenziós homotopikus gömbök adott euklideszi térbe menő immerzióinak a csoportját. Ez magyarázatot ad arra a kérdésre, hogy Brieskorn híres 40 évvel ezelőtt talált egyenletei, melyek megadják az egzotikus gömböket, miért adják meg valamennyit végtelenül sokszor: Ugyanis ezek az egyenletek tulajdonképpen megadják az összes (2 kodimenziós) beágyazásait is ezen egzotikus gömböknek. (Tudtommal ezt sem Brieskorn, sem senki utána nem tudta.)

Külön érdekessége a dolognak, hogy a bizonyítás fő eszköze egy globális szingularitáselméleti formula (mely egy, a Topologyban megjelent korábbi cikkünkön alapul.) A globális szingularitáselmélet - homologikus formulákon túlmutató - megteremtésén pedig kb. 30 éve dolgozom. (Ez a mindígis fő kutatási témámat adó szinguláris leképezések kobordizmusihoz kulcsfontosságú elem.)

## 3. Elimination of singularities.

Arnold egy nevezetes kérdése, hogy a homologikus vizsgálatok, melyek nyilvánvaló szükséges megszorításokat adnak a bizonyos szingularitásokkal nem bíró leképezések létezésére, vajon mennyire elégségesek. Ezt sikerült a kobordizmuselmélet kereteiben megvizsgálni, és a másodlagos obstrukciók elméletéhez legalábbis egy vizsgálati eljárást megadni. A pályázat utolsó hónapjaiban úgy tűnik sikerült teljes szükséges és elégséges effektív feltételrendszert megadni. (Még nincs leírva.)

4. Az utolsó témáról az orosz Kazarian - igen kiváló, hosszú cikket publikált. Ebben felhasználja (hivatkozva) néhány korábbi beszélgetésünket.

- (Stipsicz András) A racionális lefűjtés operációja segítségével (Szabó Zoltánnal és Jongil Parkkal közösen) olyan egzotikus sima sokaságokat találtunk, melyek a komplex projektív sík hatszoros illetve ötszörös felfűjtjével homeomorfak. Hasonló eredmények nem születtek mintegy 15 évig, amikor is 2003-ban J. Park talált ilyen példákat a hétszörös felfűjtőn. A bizonyítás lényeges lépése a sokaságok Seiberg-Witten invariánsainak kiszámítása. Reményeink szerint ez az irány tovább tartható, és talán megtalálhatók egzotikus struktúrák a komplex projektív síkon is.

Kontakt topológiai vizsgálatainkat (melyet Paolo Lisca és Paolo Ghigini olasz matematikusok társszerzősége mellett folytattunk) meghatározta Ozsváth és Szabó közelmúltban felfedezett kontakt invariánsainak kutatása. Ezen invariánsok lehetővé tették, hogy kontakt mütéti diagrammal meghatározott kontakt struktúrákról (szerencsés esetben) belássuk

azok feszesességét. A probléma megoldása általában egy kobordizmus (tehát peremes 4-sokaság) által meghatározott, az Ozsváth-Szabó homológiákon értelmezett leképezés kiszámításán múlott. Ezen eszközök segítségével végtelen sok feszes de nem betölthető struktúrát találtunk, illetve beláttuk, hogy sok 3-sokaságon (például a legtöbb tóruszcsonó menti műtéten) létezik feszes struktúra. Mint mellékterméket, végtelen sok olyan 3-sokaságot is találtunk, mely nem hordoz feszes struktúrát.

Burak Ozbagci török matematikus társszerzősége mellett kontakt és Stein sokaságokon végrehajtott műtétekről, ezek elméleti alapjairól és a kapott eredményekről (a Springer-Verlag Bolyai sorozatában) egy monográfiát jelentettünk meg.

- (Szűcs András és Stipsicz András) A beszámolási időszak alatt több nemzetközi konferenciát, workshopot, nyári iskolát szerveztünk: 2003-ban (kb. 70 résztvevővel) egy konferenciát szerveztünk a Rényi Intézetben, "Low dimensional topology" címmel. Ennek sikere nyomán, 2004-ben a Rényi Intézetben (szervezésünkben) került sor a Clay Mathematical Institute szokásos nyári iskolájára, melyen 30 kutató mellett mintegy 120 doktorandusz vett részt. 2005-ben az Európai Unió TOK programja keretében intenzív workshopot rendeztünk a Rényi Intézetben, melyen 15 kutató adott elő.

Szűcs András és Stipsicz András