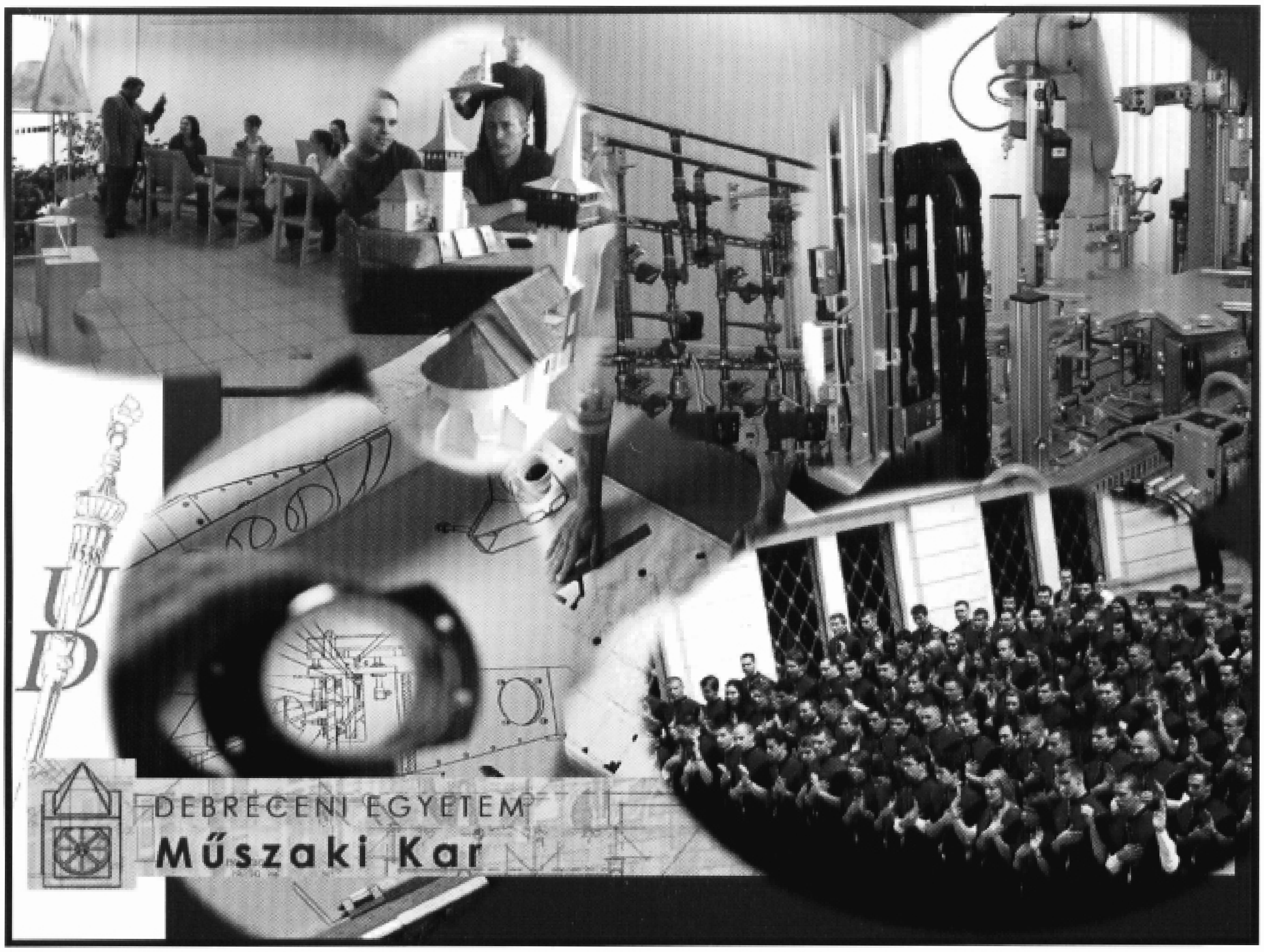
GÉP

A GÉPIPARI TUDOMÁNYOS EGYESÜLET MŰSZAKI FOLYÓIRATA



DEBRECENI EGYETEM
AGRÁR- ÉS MŰSZAKI TUDOMÁNYOK CENTRUMA
MŰSZAKI KAR

2008/8

72 oldal
LIX. évfolyam

RENDSZEREK GRÁF-MODELLEZÉSE

*Pokorádi László**

Egy technikai rendszer vizsgálatának egyik fontos állomása az elemek közti – sok esetben bonyolult kölcsönhatásokat is jelenthető kapcsolatok tényének feltárása és gráfban történő ábrázolása. A rendszerelemek közti kapcsolatokat (például jel- vagy anyagáramok) leíró gráf elemzésével meg tudjuk határozni, hogy egy elem melyik más elemekre gyakorol valamilyen szintű hatást. A tanulmány célja egy jól algoritmizálható módszer bemutatása, mellyel a vizsgált rendszer elérhetőségi mátrixa meghatározható.

1. BEVEZETÉS

A rendszerelmélet gyakorlati alkalmazásaiban, a megoldás lehetőségének megítélésében a vizsgált rendszer mérete az egyik legfontosabb tényező. A méret ekkor durván a rendszerben szereplő elemek számát jelenti, ahol az elemeket „intuitív" értelemben kell definiálnunk.

A diszkrét állapoterű vagy valamilyen módon így approximált (például karbantartási) folyamatok ábrázolása a lehetséges állapotok, és az állapotváltások alkotta gráfok segítségével történhet.

Egy rendszert elemzése során először annak diszkrét gráffal (vagy hálózattal) kell reprezentálni. Ez számos fizikai (például elektromos, mechanikus, hidraulikus) rendszer esetén megtehető. Sőt, parciális differenciálegyenletekkel leírt rendszerek gráfmodellje is megkonstruálható [6].

Egy nagyméretű, lineáris rendszer gráfreprezentációjának meghatározása után a gráfot jelképes értelemben „fel kell vágni" kisebb részgráfokra, majd a részgráfok egyenleteinek megoldása után az egyes részek megoldásait „össze kell kapcsolni" (ha szükséges, akár több lépésben is), ami az eredeti rendszer megoldásához vezet. A gráf egyrészt fontos állomás az eredeti, teljes rendszer egyenleteinek felállításában, másrészt a vágási eljárás megtervezéséhez nyújt segítséget [8].

A defektoszkópia egy adott szerkezeti rész műszaki állapotának meghatározása, valamely kijelölt vagy megengedett minőségi szinthez történő hasonlítás alapján. Defektoszkópiai rendszervizsgálat során a különféle elemek, aggregátok állapotáról csak bináris (jó hibás) információkat, illetve azok hatásait elemezzük.

A tanulmány célja a rendszerek defektoszkópiai elemzése során alkalmazható – könnyen algoritmizálható gráfelméleti, mátrixaritmetikai módszer bemutatása.

* *egyetemi tanár, Debreceni Egyetem, Menedzsment és Vállalkozási Tanszék*

A cikk az alábbi fejezetekből áll: A 2. fejezetben a gráfelmélet – a későbbi vizsgálat szempontjából fontos (matematikai) alapfogalmait ismertetjük. A 3. fejezetben a rendszerek elérhetőségi mátrixai meghatározásának egy, a szerző által kidolgozott mátrixaritmetikai eljárását mutatjuk be. A 4. fejezet egy rövid esettanulmányon keresztül szemlélteti a módszer alkalmazását.

2. GRÁFELMÉLETI ALAPFOGALMAK

A gráfelméletnek és mérnöki alkalmazásának kiterjedt matematikai és műszaki szakirodalma található. Például az [1]; [2]; [4]; [5]; [6]; [7] és [8] irodalmak.

A *gráf* olyan alakzat, amely pontokból és bizonyos pontpárokat összekötő (nem feltétlenül egyenes) vonaldarabokból áll. Matematikai megfogalmazásban a $G(P;E;f)$ gráfon olyan alakzatot értünk, amely a P pontokból és bizonyos pontokat összekötő E vonaldarabokból áll. A P halmaz elemeit *pont*oknak (esetleg gráf *szögpont*jainak vagy *csúcs*ainak), az E halmaz elemeit pedig a gráf *él*einek nevezzük [1]. A fenti jelölésben szereplő f függvény az E halmazt képezi le a PxP-re, azaz bármely e élhez hozzárendel egy pontpárt a P halmaz elemei közül. Ezért f-t szokás *illeszkedési leképezés*nek is nevezni [2].

*Irányított gráf*ról akkor beszélünk, ha az élek végpontjainak sorrendjére is tekintettel vagyunk.

A gráfokat általában grfikusan ábrázoljuk lásd a későbbi esettanulmányt szemléltető *2. ábrát*. Egy másik ábrázolási, leírási módja a belőlük képezhető különböző mátrixok alkalmazása.

A gráf szögpontjai közti kapcsolatokat az úgynevezett *csúcs-* (*szomszédossági*, vagy *adjacencia-*) *mátrix*szal lehet táblázatosan megadni.

Az irányítatlan gráf $\mathbf{A} = [a_{ij}]$-vel jelölt – szomszédossági mátrixa i-edik sor j-edik elemének a_{ij} értéke jelöli a p_i és a p_j szögpontokat összekötő élek számát [1].

Irányított gráf esetén az $\mathbf{A}$ mátrix i-edik sor j-edik elemének a_{ij} értéke a p_i szögpontból induló és a p_j végpontú élek számát jelöli.

Könnyen belátható, hogy irányítatlan gráf esetén az adjacencia-mátrix mindig szimmetrikus, míg irányított gráfnak a szomszédossági mátrixa antiszimmetrikus is lehet.

A (főleg nem matematikai) szakirodalmak egy köre nem a fentiekben leírt definíciókat használja. A rendszerek és folyamatok modellezése szempontjából a legfontosabb kérdés a rendszer elemei, a folyamat állomásai közti kapcsolat létének feltárása. Ezért azt nem szükséges vizsgálnunk, hogy a szomszédos pontok között vannak-e többszörös élek és hurokélek, mint azt majd a következő fejezetben tapasztalhatjuk. Így a továbbiakban az alábbi definíciókat fogjuk alkalmazni:

Az irányítatlan gráf **A**-val jelölt szomszédossági mátrixa i-edik sor j-edik elemének értéke 1, ha az i-edik és a j-edik szögpontokat közvetlenül összeköti a gráf valamely éle, illetve 0, ha nem. Matematikailag felírva:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha van olyan él, amelynek két végpontja } p_i \text{ és } p_j \\ 0, & \text{minden más esetben} \end{cases} \quad (1)$$

Irányított gráf esetén az **A** mátrix a_{ij} eleme pedig:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha van } p_i\text{-ből induló és } p_j\text{-be vezető él} \\ 0, & \text{minden más esetben} \end{cases} \quad (2)$$

Könnyen belátható, hogy a korábban definiált csúcsmátrixból a szignumfüggvény felhasználásával – lásd (6) és (7) egyenletek – megkapható a fenti definíció szerinti szomszédossági mátrix.

3. AZ ELÉRHETŐSÉGI MÁTRIX MEGHATÁROZÁSA

Az elemek közti összetett kapcsolatokat a rendszer vizsgálati gráfjának úgynevezett elérhetőségi mátrixa jellemzi.

Egy m szögpontból álló gráf elérhetőségi mátrixán azt az m sorból és oszlopból álló $\mathbf{Z}_{m \times m} = [z_{ij}]$ négyzetes mátrixot értjük, ahol:

$$z_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha a } p_i \text{ csúcsból a } p_j \text{ szögpont elérhető} \\ 0, & \text{ha nem} \end{cases} \quad (3)$$

Egy adott rendszer vagy diszkrét állapotterű folyamat gráfelméleti vizsgálatánál az egyik fő feladat az elérhetőségi mátrix létrehozása – azaz az elérhetőség, hatásgyakorlás tényének egzakt meghatározása. Ez a mátrix egy rendszer esetén például azt mutatja meg, hogy az egyik (az i-edik) elem anomáliája hatással van-e a másik (j-edik) elem működésére. Valamely folyamat vizsgálata esetén pedig megadja azt, hogy mely állapotokból lehet mely állapotokba eljutni.

A [4] irodalom alapján az elérhetőségi mátrixot a szomszédossági mátrix hatványai segítségével tudjuk felállítani. Ehhez a mátrixszorzás szabályainak megfelelően határozzuk meg az $m \times m$ méretű **A** adjacencia-mátrix $\mathbf{A}^2$ jelű négyzetmátrixának $a_{ij}^{[2]}$ elemét az:

$$a_{ij}^{[2]} = \sum_{s=1}^{m} a_{is} a_{sj} \quad (4)$$

egyenlettel.

A korábbi definíciókat felhasználva kijelenthetjük, hogy

$$a_{is} a_{sj} = 0 ,$$

Ha nem tudunk egy lépésben eljutni az i-edik szögpontból az s-edikbe (azaz ha $a_{is} = 0$), vagy ha az s-edikből a j-edikbe (vagyis ha $a_{sj} = 0$).

Ha egy-egy lépésben el tudunk jutni p_i-ből p_s-be és p_s-ből p_j-be, azaz, ha $a_{is} = a_{sj} = 1$:

$$a_{is} a_{sj} = 1 .$$

Így a (4) egyenlettel meghatározott $a_{ij}^{[2]}$ értéke – a fenti szorzatok szummázása következtében azt adja meg, hogy a gráf i-edik szögpontjából hány különböző úton tudunk két lépéssel eljutni a j-edik szögpontba.

Fontos itt megjegyezni, hogy jelen tanulmányban az utak különbözőségén az általuk érintett szögpontok, vagy azok sorrendjének különbözőségét értjük. Az ugyanazon szögpontokat megegyező sorrendben tartalmazó, de más élekből álló utakat azonosaknak tekintjük. Ilyen eset fordulhat elő, ha a gráfon belül két szögpontot egynél több él köt össze. Ezt az egyszerűsítő feltételt azért vezetjük be, mert végső célunk az elérhetőség vagy el nem érhetőség tényének megállapítása a tényleges utak egymástól függetlenül. Vizsgálatunk fő célja a gráfok szögpontjai közt meglévő kapcsolatok feltárása.

Könnyen belátható az **A** szomszédossági mátrix $\mathbf{A}^k$-val jelölt k-adik hatványmátrixának $a_{ij}^{[k]}$ eleme azt mutatja meg, hogy k lépésben az i-edik szögpontból a j-edikbe hány egymástól – a fenti értelmezés szerint – független úton lehet eljutni. Ennek a kijelentésnek pontos, matematikailag egzakt bizonyítása a [4] irodalomban található meg.

A hatványmátrixok

$$\mathbf{H}_k = \sum_{n=1}^{k} \mathbf{A}^n \quad (5)$$

összegével kapott $\mathbf{H}_k$ összegmátrix $h_{ij}^{[k]}$ eleme azt adja meg, hogy legfeljebb k lépésben az i-edik szögpontból a j-edikbe hány – egymástól független – úton lehet eljutni.

Képezzünk a $\mathbf{H}_k$ mátrixokból $\mathbf{S}_k$ jelű mátrixokat az alábbi függvény szerint:

$$\mathbf{S}_k = sign\ \mathbf{H}_k \quad (6)$$

$$s_{ij}^{[k]} = sign\ h_{ij}^{[k]}$$

ahol:

$$sign\,\eta = \begin{cases} 1, & \text{ha } \eta > 0 \\ 0, & \text{ha } \eta = 0 \\ -1, & \text{ha } \eta < 0 \end{cases} \quad (7)$$

és nevezzük el ezeket a $\mathbf{H}_k$ mátrix szignummátrixának.

Az így kapott szignummátrixok $s_{ij}^{[k]}$ elemei azt adják meg, hogy legfeljebb k lépésben a gráf p_i szögpontjából el lehet-e jutni a j-edik szögpontjába – a (3) egyenlettel megadott elérhetőségi mátrixszal analóg módon – azaz:

$$s_{ij}^{[k]} = \begin{cases} 1, & \text{ha a } p_i \text{ csúcsból a } p_j \text{ szögpont} \\ & \text{maximum } k \text{ lépésben elérhető} \\ 0, & \text{ha nem} \end{cases} \qquad (8)$$

Mivel egy m szögpontból álló gráfban a leghosszabb lehetséges élsorozat maximum m élből állhat, mely – a kiindulási szögpont kivételével – minden hozzá tartozó szögpontot csak egyszer érint – azaz a lehetséges leghosszabb kör, vagy pálya –, a fenti mátrixműveleteket végezzük el m-szer.

Az így kapott $\mathbf{S}_m$ szignummátrix lesz a vizsgált gráf elérhetőségi mátrixa.

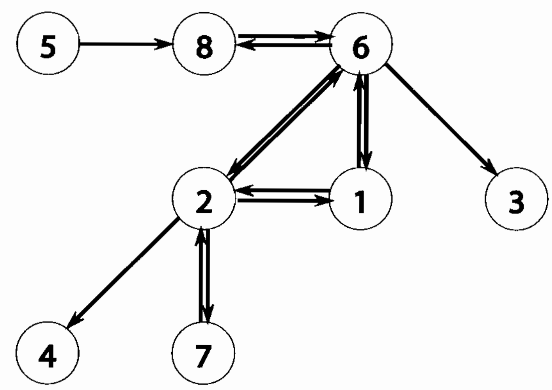
A fentiek alapján megállapítható, hogy egy m szögpontból álló gráf $\mathbf{A}_{m \times m}$ szomszédossági mátrixának ismeretében a $\mathbf{Z}_{m \times m}$ elérhetőségi mátrixa

$$\mathbf{Z} = sign \sum_{n=1}^{m} \mathbf{A}^n \qquad (9)$$

egyenlettel meghatározható [6].

4. ESETTANULMÁNY

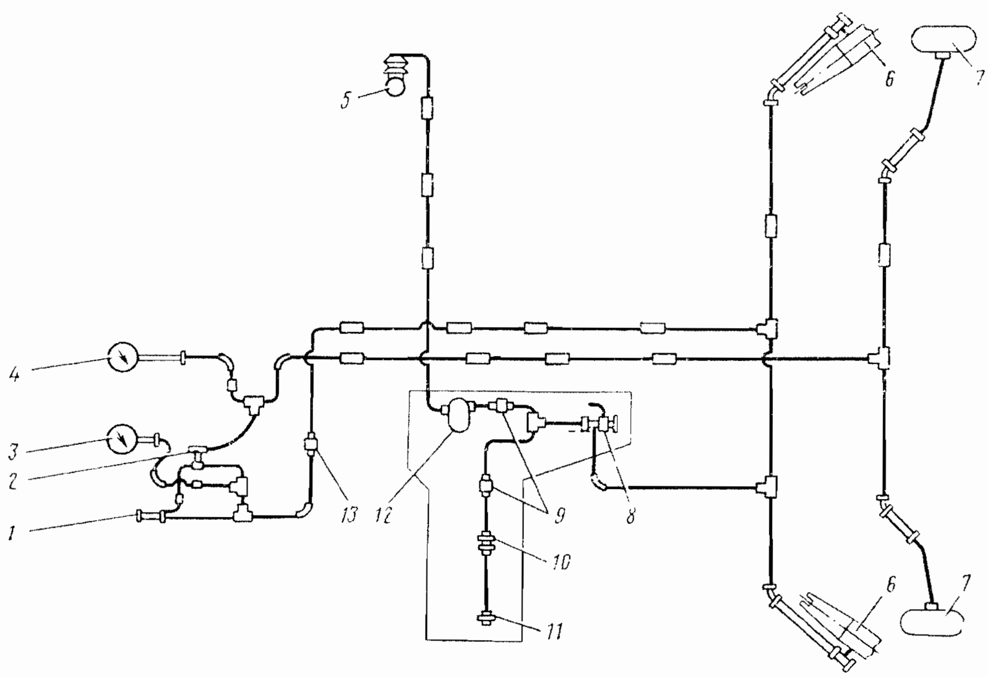
A fentiekben leírt módszer szemléltetése érdekében határozzuk meg az *1. ábrán* látható helikopter féklevegő rendszer elérhetőségi mátrixát a rendszer állandósult (befékezett) állapotát vizsgálva. A működés elemzése során megállapítható, hogy a 10, 12 és 13 jelű elemek passzívaknak tekinthetők. A különféle szűrök nem játszanak szerepet a rendszer állandósult üzemállapotai során, még a 11 jelű fedélzeti feltöltő csonknak szerepe csak a rendszer karbantartása során van. A 9 jelű visszacsapó szelepek is passzívnak tekinthetők. De, mivel azok meghatározzák az adott csőszakaszban a sűrített levegő áramlásának irányát, így a rendszer működését leíró gráfot „irányítottá teszik". A fenti megfontolások, és a részegységek működésének elemzése alapján tudjuk felvenni a rendszer irányított gráfját, amit a *2. ábra* szemléltet.



2. ábra. A vizsgált rendszer gráfja (forrás: Szerző)

A (2) egyenlet alapján felírt szomszédossági mátrix:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (10)$$



1. ábra. Mi–8 Hip helikopter levegőrendszerének elvi rajza (forrás: [3])
1 – vezérlőberendezés; 2 – redukciós gyorsító; 3; 4 – nyomásmérők; 5 – légsűrítő; 6 – levegőtartályok; 7 – fékberendezések; 8 – nyomásautomata; 9 – visszacsapó szelep; 10; 13 – levegőszűrők; 11 – feltöltőcsonk; 12 – ülepítőszűrő

A fenti **A** mátrixból kiindulva, a (4); (5); (6), valamint a (9) egyenletek felhasználásával a vizsgált gráf elérhetőségi mátrixa:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad (11)$$

Természetesen a bemutatott egyszerű példa esetén a gráf megtekintéséből is belátható, hogy az 5 jelű légsűrítőre nem gyakorol hatást a rendszer valamely más elemének meghibásodása – a **Z** mátrix 5. oszlopa csak zérus elemeket tartalmaz. A (11) egyenlet **Z** mátrixa azt is szemlélteti, hogy a 3 és 4 jelű nyomásmérő műszerek üzemzavara, meghibásodása nem gyakorol hatást a többi elem működésére – mivel a mátrix 3. és 4. sorai csak zérus elemeket tartalmaznak.

Természetesen, egy összetettebb rendszer, tehát bonyolultabb gráf esetén a fenti bekezdésben tett megállapítások belátása könnyen nem lehetséges, így az ismertetett módszer alkalmazása szükségessé válik.

IRODALOM

[1] ANDRÁSFALVI, B.: Gráfelmélet, Polygon, Szeged, 1997., pp. 174.

[2] BRONSTEJN, I. N.–SZEMENGYAJEV, K. A. MUSIOL, G. MÜHLIG, H.: Matematikai kézikönyv, Typotex, Budapest, 2006, pp. 1209.

[3] ДАНИЛОВ, В. А.: Вертолет Ми–8, Транспорт, Москва, 1988, pp. 278.

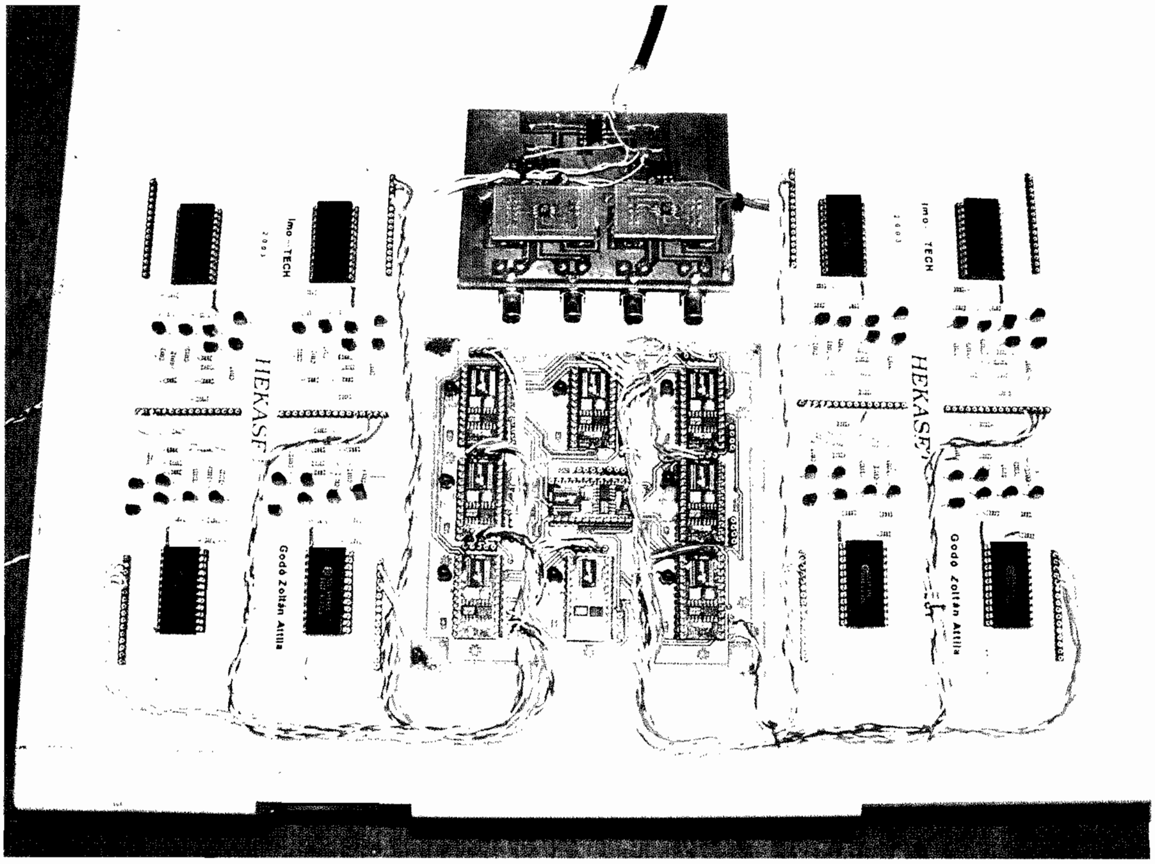
[4] FAZEKAS, F.: Alkalmazott matematika II., egyetemi jegyzet, Tankönyvkiadó, Budapest, 1979., pp. 347.

[5] POKORÁDI, L., Karbantartáselmélet, DE MFK, Debrecen, 2002., http://www.mfk.unideb.hu/userdir/pokoradi/karb elm.pdf, pp. 101.

[6] POKORÁDI, L.: Rendszerek és folyamatok modellezése, Campus Kiadó, Debrecen, 2008., pp. 242.

[7] SZABÓ, I.: Gépészeti rendszertechnika, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1986., pp. 541.

[8] ZADEH, L. A.–POLAK, E.: Rendszerelmélet, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1972., pp. 476.



Multiprocesszoros neuronhálózat