A T 037752 OTKA téma szakmai zárójelentése (2002-2005)

A pályázat elkészítésekor (2001) meghatározott témakörök mellett több új, a főtémához tartozó kutatási terület is kialakult, amelyekről szintén beszámolunk. A kutatási időszak (4 év) alatt a kutatók eredményeikről mintegy 45 dolgozatban számoltak be, amelyek nagy része már megjelent, de legalábbis közlésre elfogadták. (Az OTKA támogatására való hivatkozás 26 dolgozaton szerepel.)
Az írásos közzététel mellett kutatóink számos konferencián tartottak előadást, (néhányon meghívott előadóként), rendszeresen szerepeltek hazai és külföldi egyetemi és kutatóintézeti szakszemináriumokon, két fiatal kutató pedig a témakörben elért eredményeivel eredményesen védte meg Ph.D. értekezését.

Egyoldali Hadwiger szám
E téren Bezdek Károly és P. Brass értek el új eredményt [5]. Bevezették az egyoldali Hadwiger szám fogalmát tetszőleges *d*-dimenziós konvex testre vonatkozólag a következő természetes módon: Ha **K** egy konvex test a *d*-dimenziós euklideszi térben, akkor ennek egyoldali Hadwiger száma legyen az a legnagyobb pozitív *n* egész szám, amelyre teljesül, hogy létezik *n* egymást át nem fedő eltoltja **K**-nak úgy, hogy ezek mindegyike érinti **K**-t (kívülről) és együttvéve **K** egy zárt támasz-félterében fekszenek. A cikk fő eredménye annak kimutatása, hogy a *d*-dimenziós euklideszi térben tetszőleges konvex test egyoldali Hadwiger száma legfeljebb 2x3^(*d-1*)-1 és ez a felső korlát csak az affin *d*-dimenziós kockára vétetik fel. E tétel kapcsán számos nyitott kérdés vetődik fel. Így pl. a következő igen konkrét kérdés: Mi az egyoldali Hadwiger száma a 3-dimenzios szimplexnek?

Szoliditási problémák
Fejes Tóth László nyomán egy kitöltést (fedést) *szolid*nak nevezünk, ha a benne szereplő tartományok bármely véges részhalmaza csak úgy rendezhető át az eredeti kitöltési (fedési) tulajdonság megtartása mellett, hogy a végeredmény az eredetivel kongruens lesz. Fejes Tóth László 1968-ban kimondott híres sejtése szerint az Archimédeszi félig szabályos mozaikok beírt (körülírt) köreiből álló rendszerek szoliditása csak attól függ, hogy a mozaik csúcsaiban hány cella találkozik. Ha a fokszám 3, akkor az elrendezés szolid, ha nagyobb háromnál, akkor nem. Heppes Aladár egy A. Florian-nal közös dolgozatban számol be az e téren elért legújabb eredményeikről [12]. Ezzel a síkra és a gömbfelületre vonatkozóan a sejtés maradéktalanul igazolást nyert.

Heppes Aladár gömbsüvegekre vonatkozóan új típusú szolid rendszereket talált. Eredményeiről a Salzburg-i egyetemen tartott konferencián számolt be.

Körelhelyezési problémák

<u>Sűrű elhelyezések a síkon kétféle körrel</u>
Az inkongruens körökkel való kitöltési problémákkal mintegy 50 éve foglalkoznak. (V. ö. Fejes Tóth László: Lagerungen ... c. könyvét). Kétféle kört tartalmazó kitöltések sűrűségi problémája kezelésére kidolgozott új módszerrel Heppesnek hat ilyen

kitöltésről sikerült bizonyítania, hogy a maga nemében legsűrűbb, azaz ugyanilyen sugarú körökből nem lehet sűrűbb kitöltést készíteni. Ez az első ilyen jellegű eredmény [13].

Minkowski elhelyezések

Sikerült igazolni Fejes Tóth László következő sejtését (Böröczky Károly és Szabó László): A μ maggal rendelkező, nem feltétlen kongruens körök legsűrűbb elhelyezései között minden $\mu \leq \sqrt{3} - 1$ esetén van olyan, amelyik kongruensek körökből áll [3].

- Az *n*-dimenziós térben $\mu \leq 1/n$ maggal rendelkező Minkowski gömbök legsűrűbb elhelyezésének sűrűségére a D-V cellában egy a Rogers korlátnak megfelelő sűrűségbecslést adott Böröczky Károly és Szabó László különböző sugarú gömbökre [21].

Körelhelyezések hatékonysági mértékei

A körelhelyezései vizsgálatok kezdetben a maximális kitöltési (minimális fedési) sűrűség meghatározására irányultak, eleinte feltétel nélkül, később mellékfeltételekkel. Nemrég egyéb hatékonysági mértékek (pl. a körök között maradó *hézagok nagysága*, *k*-szoros telítettség, stb.) vizsgálata is felmerült. (lásd pl. G. Fejes Tóth, W. Kuperberg, Packing and Covering with Convex Sets, in Handbook of Convex Geometry, 843-844). Heppes Aladár dolgozatában [2, 4] rácsszerű körelhelyezéseket vizsgált. Bevezette a *k*-szoros *telítési sugár* fogalmát és meghatározta az egyszeres illetve a kétszeres telítési sugár és a telítési sűrűség kapcsolatát minden előforduló értékre.

A kitöltési sűrűség helyett más hatékonysági mérték, a *fedetlenül hagyott rész* területének becslését alkalmazta Heppes Aladár egy vizsgálata [1], amely különösen bizonyos nem-kongruens tartományok esetében mond lényegesen újat. Ha egy gömbfelületet olyan egyszeresen összefüggő (nem feltétlen kongruens) tartományokkal töltünk ki, amelyek határa nem görbül befelé jobban, mint egy *r*-sugarú kör, akkor a fedetlenül maradó részek összterülete legalább $2(n-2)t$, ahol *t* a három *r*-sugarú kör által közrefogott terület, *n* pedig a tartományok darabszáma. Ez a tétel számos esetben pontos értéket ad. A kitöltendő tartomány lehet a teljes gömbnél kisebb is, ekkor a határának görbülete a kitöltő tartományokéval ellentétesen korlátozott. Utóbbival analóg tételek érvényesek az euklideszi illetve hiperbolikus sík korlátos részén is.

Tammes problémakör

Új bizonyítást adott Böröczky Károly az u.n. Newton-Gregory problémára, azaz arra, hogy egy gömböt legfeljebb 12 ugyanakkora, egymásba nem nyúló gömb érinthet [8].

Böröczky Károly és Szabó László ért el új eredményeket [9] lényegesen javítva a gömbön elhelyezett *n* pont közti minimális távolság maximumára eddig ismert becslést az *n* =13 esetben.

A Tammes probléma felső korlátjára talált Böröczky Károly és Szabó László az eddig ismertnél lényegesen jobb becslést n=14,15,16 és 17 esetén [7].

Voronoi cellák térben
Darócz-Kiss Endre és Ph. D. témavezetője Bezdek Károly az u.n. erős dodekaéder sejtéssel kapcsolatban vizsgálták Voronoi cellák tulajdonságait. Az eredményeiket tartalmazó elfogadott dolgozat [24] megjelenés alatt van.

Darócz-Kiss Endre Ph. D. értekezésében általános háromdimenziós rácsegységgömb-pakolásokkal kapcsolatosan ért el új eredményeket , elsősorban a Voronoi cellájának felszíni területére, illetve generáló-éleinek összhosszúsága vonatkozóan. Összefüggéseket vezetett le a térfogati és felületi sűrűségfüggvények közt.

Állandó szélességű halmazok

Kiterjesztési probléma.
Naszódi Márton és Visy Balázs azt vizsgálta, hogyan konstruálható olyan halmaz, amelynek állandó szélességűvé való kiterjesztése egyértelmű [19].

Álladó szélességű halmazok jellemzés
Heppes Aladár és G. Averkov az álladó szélességű halmazok újfajta, kettévágáson alapuló jellemzésével kapcsolatban ért el eredményeket [23], amelyek publikálás alatt vannak.

Borsuk-felosztás
A Borsuk-féle darabolási probléma alapkérdése, hogy ha egy egység átmérőjű, *d*-dimenziós testet kisebb átmérőjű részekre akarjuk feldarabolni, akkor mi a darabszám (dimenziótól függő) garantálható minimuma.
Heppes Aladár és W. Kuperberg a problémának azt a variánsát vizsgálták, amelyben a darabolást u. n. *hengeres* darabolásra korlátozták. Hengeres feldarabolásról beszélünk, ha az a test valamely (d-1)-dimenziós vetületének feldarabolásán alapul olymódon, hogy a test egyes darabjait a vetület darabjaira emelt hengerek határozzák meg.
A szerzők kimutatták [34], hogy hengeres Borsuk-felosztás létezésének szükséges és elégséges feltétele, hogy a test ne legyen állandó szélességű. Ezzel az állandó szélességű halmazok egy eddig ismeretlen *jellemzés*ét adták.
A darabszámra alsó és felső korlátot is adtak. (Pl. d=3 esetén a 7 részre vágás mindig elegendő.)

Véges dimenziós valós vektorterek Petty száma

Egy Minkowski tér *m*-edik Petty száma az a legnagyobb *k* szám, amelyre igaz, hogy elhelyezhető a térben *k* pont úgy, hogy bármely *m* között van kettő egymástól 1 távolságra. A leggyakrabban vizsgált tereken, az euklideszi téren, a maximum normával ellátott téren és az összeg normával ellátott téren kívül Bezdek Károly, Naszódi Márton és Visy Balázs vizsgálta annak a térnek a Petty számait is, amelynek egységgömbje a szimplex szimmetrizáltja. Bizonyítottak általános felső korlátokat is [6].

Antipodális poliéderek
Egy ponthalmaz *antipodális*, ha bármely két elemén át fektethető párhuzamos támaszsík-pár. Egy poliédert *él-antipodális*nak neveznek, ha bármely élének végein át a teljes poliédert közrefogó párhuzamos síkpár fektethető.

Bezdek Károly, Naszódi Márton és D. Oliveros euklideszi eredményeknek a hiperbolikus terekre való általánosítási lehetőségeit vizsgálták. Eredményeikről elfogadott közlemény van megjelenőben [26].

Csikós Balázs él-antipodális poliéderekkel foglalkozva Talata egy sejtésére adott bizonyítást. Eredményét publikálta [11]

Böröczky Károly és Bisztriczky Tibor, - Csikós Balázs fent említett kutatásaihoz csatlakozva -, az u.n. él-antipodális poliéderek meghatározásában ért el eredményt, amelyet közös dolgozatban készülnek publikálni. Egyúttal igazolták Grünbaum egy 1961-ből származó sejtését, mely szerint szigorúan antipodális poliéderek csúcsainak száma legfeljebb 5.

Relatív hossz problémák
Lángi Zsolt (és Ph.D. témavezetője, M. Lassak) vizsgálatainak témaköre a következő: Legyen ***C*** egy konvex síkidom, *p* és *q* tetszőleges pontok a síkon és *p'q'* a *pq*-val párhuzamos ***C***-beli maximális szelő. *p* és *q* relatív távolságán a *pq* hosszának és a *p'q'* hossza hányadosának a kétszeresét értjük. Legyen *n* egynél nagyobb egész és keressük azt a legnagyobb *d* számot, amelyre igaz, hogy minden konvex síkidomban található *n* pont páronként legalább *d* relatív távolságra. Hasonló kérdés fogalmazható meg a síkidom határán levő pontok relatív távolságára vonatkozólag.

Lángi Zsolt és M. Lassak egy konvex alakzatban lévő 4 pont relatív távolságára adtak becslést [18], majd meghatározták a ***C*** pozitív homotetikus képeinek esetén a homotécia legnagyobb lehetséges arányát, azon feltétel mellett, hogy a homotetikus képek **C**-t érintik, és elhelyezést alkotnak [36].

Lángi Zsolt kimutatta, hogy minden síkbeli konvex test határán található 7 olyan pont, amelyek páronkénti relatív távolsága legalább 2/3 [22].

Böröczky Károly és Lángi Zsolt pontos becslést adtak egy síkbeli konvex testben lévő 6 pont relatív távolságára [28]. Míg Joós és Lángi leadott dolgozatukban a 7 pontra vonatkozó analóg problémával foglalkoznak.

Lángi Zsolt vizsgálta konvex poligonok oldalainak lehetséges relatív hosszát [16], valamint kapcsolatot talált egy konvex alakzat határán lévő *k* pont közti relatív hosszak és a konvex alakzatot érintő *k* homotetikus másolat méretaránya közt [17].

Ebből a témakörből Lángi Zsolt pedig eredményesen védte meg Ph.D. értekezését.

Fedési problémák

Legritkább fedés körtől különböző alakzattal -- nem-keresztezési feltétel nélkül.
A sík centrál-szimmetrikus konvex tartományokkal való legritkább fedésének meghatározása régi keletű probléma. Az eddigi eredmények olyan módszerre támaszkodtak, amely csak akkor működik, ha a tartományokról eleve feltesszük, hogy nem keresztezik egymást. Heppes Aladár eredményei szerint “nem nagyon elnyúlt” ellipszisek esetében a sík legritkább fedésének meghatározásánál el lehet tekinteni az u.n. nem-keresztezési feltételtől . Ilyen ellipszisek esetében tehát a “non-crossing” mellékfeltéttel nélkül is a rácsszerű fedés a leggazdaságosabb [14].

Gömbön elhelyezett pontok legkisebb fedőköre.
Böröczky Károly bizonyos a gömbön elhelyezett pontok legkisebb fedőkörének meghatározásában ért el eredményeket

Elliptikus sík.
Heppes Aladár meghatározta az elliptikus sík négy egybevágó körrel való legritkább fedését [15].

Kör, négyzet és szabályos háromszög átmérő-korlátozott fedései.
Többen vizsgálták négyzet, kör és szabályos háromszög fedését adott számú körrel azt követelve, hogy a körök átmérője minél kisebb legyen.
Heppes egy rokon problémát vizsgált meg valamennyi olyan esetre, amikor a körök méretére a pontos korlát. Ebben a fedő tartományként bármilyen alak megengedett, de változatlanul átmérőjük csökkentése volt a cél.
Valamennyi esetben sikerült tisztázni, hogy a fedő halmazok alakjának feloldása csökkenti-e a darabok átmérőjének maximumát. Sok esetben a maximális átmérő minimumát is meghatározta.
Az eredményekről készített dolgozat benyújtásra került.

Izoperimetrikus problémák

Mozaikokon értelmezett izoperimetrikus problémák
Heppes Aladár és Frank Morgan a szabályos hatszögmozaik véges darabjaira vonatkozó izoperimetrikus problémát vizsgálta [35]. Az alapprobléma az, hogy a szabályos hatszögmozaik *k* számú celláját hogyan kell kiválasztani ahhoz, hogy a cellák együttesének a kerülete minimális legyen. Meghatározták az extremális klasztereket és becslést adtak a nem-merev mozaikok esetére is.

Diszkrét izoperimetrikus probléma
A diszkrét izoperimetrikus probléma annak vizsgálata, hogy az adott kerületű poligonok közül melyiknek a területe maximális. A síkon ennek a problémának a megoldása klasszikusnak számító eredmény. A gömbön Fejes Tóth László, a hiperbolikus síkon Bezdek Károly nevéhez fűződik a válasz megadása. Csikós Balázs, Lángi Zsolt és Naszódi Márton kiterjesztette diszkrét izoperimetrikus probléma megoldását állandó geodetikus görbülettű oldalakkal határolt poligonokra mind a három állandó görbületű síkon.
Eredményükből készült kéziratot közlésre elfogadták [30].

Helly típusú transzverzális problémák
A vizsgált transzverzális problémák a Helly tétellel mutatnak rokonságot. Tartományok egy halmazáról azt mondjuk, hogy rendelkezik a *T(k)* tulajdonsággal, ha bármely *k* eleméhez található transzverzális, azaz valamennyit metsző egyenes. A vizsgálatok arra irányulnak, hogy mely tartomány-együttesek esetében mely *k* érték garantálja az összes tartományt szelő egyenes létezését, illetve ez a cél milyen mértékben garantálható. Tipikus eredményként említhető Hadwiger tétele, mely szerint egy konvex tartomány diszjunkt eltoltjaiból álló végtelen sok elemű halmaz esetében *T(3)* biztosítja a mindent szelő egyenes létezését. Vizsgálataink az euklideszi síkra vonatkoztak és több irányban hoztak eredményt.
(Három megjelent és egy leadott dolgozat.)

Heppes Aladár vizsgálta, hogy egy konvex tartomány diszjunkt eltoltjaiból álló véges sok elemű halmaz esetében hogyan függ a halmaz elemszámától az összes halmazt fedő sáv relatív szélessége.
Igazolta, hogy ez a Hadwiger fenti tételében szereplő 0-hoz tart [32].

Körök diszjunkt rendszereire szorítkozott több vizsgálatunk. Egy az irodalomban régen kimondott sejtést megközelítve Heppes Aladár igazolta, hogy diszjunkt *d* átmérőjű körökből álló *T(3)* halmaz esetén (amikor tehát bármely három középpont egy *d* szélességű sávban van) a középpontok halmaza 1.65*d* szélességű sávval mindig lefedhető [33]. (A sejtett legjobb érték 1.618*d.*)

Részben a fenti eredményre támaszkodva Heppesnek sikerült igazolnia Katchalski és Lewis 20 éves sejtését, mely szerint diszjunkt egységkörökből álló rendszereknél a *T(3)* tulajdonság garantálja a *T-2* tulajdonságot, vagyis azt, hogy van olyan egyenes, amely legfeljebb 2 kör *kivételével* valamennyit metszi. Előzőleg Kaiser *T-12* becslése volt a legjobb eredmény. Dolgozatát közlésre benyújtotta.

Új kutatási irányként Bezdek Károly, Bisztriczki Tibor, Csikós Balázs és Heppes Aladár tanulmányozta azt a Helly típusú kérdést, hogy milyen feltételek mellett garantálhatjuk, hogy ha egy egységnyi átmérőjű körökből álló rendszer bármely *k* eleméhez van a köröket metsző egyenes, akkor az összes körhöz is van ilyen. Belátható, hogy minden *k*-hoz van olyan *d*, hogy a fenti Helly-típusú tétel igaz azzal a feltétellel, hogy a középpontok távolsága >*d*. Az ilyen d távolságok infimumaként adódó t_k sorozatnak sikerült pontosan meghatározni néhány kezdő tagját, és bebizonyítottuk a $t_k=O(1/k)$ aszimptotikát.
Az eredmények egy közlésre már elfogadott dolgozatban fognak megjelenni [27].

Danzer síkra vonatkozó tétele szerint: Ha kongruens körök diszjunkt sokasága rendelkezik a T(5) tulajdonsággal (bármely 5-nek van transzverzálisa), akkor van egyenes, amely valamennyit metszi.
Böröczky Károly hiperbolikus síkra általánosította. Eredményét szemináriumi előadáson ismertette.

Kneser-Poulsen problémakör

Kneser híres sejtése szerint ha gömbök egy együttesére olyan leképezést alkalmazunk, amely eredményeképpen bármely két gömb középpontja az eredetinél nem kerülhet messzebb, akkor az együttesen fedett terület csak csökkenhet. Csikós Balázs a probléma súlyozott változatának vizsgálata során ért el új eredményeket.

Csikós Balázs Schläfli klasszikus formuláját a szférikus tér szimplex-térfogatainak differenciáljáról kiterjesztette pseudo-Riemann Einstein sokaságok görbelapú poliédereire, majd ezt egy forgástestekre vonatkozó általános formulával kombinálva a sejtést igazolta mindhárom állandó görbületű tértípusra abban az esetben, ha a gömbök centrumai egy kettővel magasabb dimenziós térben folytonosan átmozgathatók a kontrahált középpontrendszerbe úgy, hogy a mozgás során a pontok közti távolságok folytonosan csökkenjenek [29]. (Ennek az állításnak az euklideszi esetét korábban Bezdek Károly és R. Connelly bizonyították). Az általánosított Schläfli-formula segítségével hasonló eredményt sikerült bizonyítani egy Kneser-től származó kérdés kapcsán, mely az eredeti kérdés egy általánosítása, annak egy súlyozott változata.

Bezdek Károly, Csikós Balázs és R. Connelly közösen vizsgálta R. Alexander egy sejtését, mely a sík egységkörei metszetének kerületéről állítja, hogy nem csökkenhet, ha a köröket úgy rendezzük át, hogy középponttávolságaik ne nőjenek. Ez a kérdés egyszerű hangzása ellenére elég nehéznek tűnik, de bizonyos speciális esetekben sikerült a pozitív választ bebizonyítani. Az eredményeket az [20] cikk tartalmazza.

Csikós Balázs Moussong Gáborral közösen folytatta a tavaly megkezdett, a Kneser-Poulsen sejtéssel kapcsolatos vizsgálódásait az elliptikus térben. A híres sejtés szerint, ha gömbök egy együttesét úgy rendezzük át, hogy bármely két gömb középpontja az eredetinél csak közelebb kerülhet, akkor az együttesen lefedett tartomány térfogata csak csökkenhet. Mint kiderült, tetszőleges dimenzióban megadható három olyan folytonosan mozgó kongruens gömb az elliptikus térben, melyeknél a mozgás során a középpont-távolságok monoton csökkennek, mégis a gömbök uniójának térfogata nő. Tudjuk, hogy ilyen ellenpélda az n-dimenziós szférán nincs. Noha ez a példa mutatja, hogy a Kneser-Poulsen sejtés nem igaz az elliptikus térben, sikerült belátni a sejtésnek azt a következményét, hogy ha az n-dimenziós elliptikus térben n+1 gömb úgy helyezkedik el, hogy középpontjaik távolsága az elliptikus tér átmérője, akkor a gömbök által lefedett tartomány térfogata maximális.

****

Egyéb témák

<u>Gömb-poliéderek vizsgálata</u>
Bezdek Károly és Naszódi Márton folytatta egységgömbök közös részeként előálló poliéder-szerű struktúrák, főképp a gömbpoliéderek duálisán értelmezett lap-rács tulajdonságainak vizsgálatát. Fő eredményük [25] a Cauchy merevségi tétellel analóg.

Gömbfelhők. Daróczy-Kiss Endre Ph. D. értekezésében 34-re javította a merőlegesen sugárzó egységgömböt radiálisan takaró gömbfelhő elemszám korlátját.

Gömbhéjba írt poliéderek
Böröczky Károly társszerzőkkel (Böröczky Károly Jr.; Böröczky Károly Jr.; illetve Böröczky Károly Jr., C. Schütt és Wintsche) gömbhéjakba írt poliéderek szélsőérték-tulajdonságait vizsgálta. Eredményeikről a szerzők 3 kéziratban számoltak be.

Méretarány poliéderekben.
Böröczky Károly és Csikós Balázs az vizsgálta, mi az összefüggés egy legalább egységnyi élekkel rendelkező poliéder csúcsszáma és átmérője között. Eredményeiket [10] alatt publikálták.

Körhalmaz átmérője. Többek által vizsgált probléma *k* számú, egymástól legalább egységnyi távolságra lévő pontból álló halmaz átmérőjének meghatározása. Daróczy-Kiss Endre új, az eddiginél jobb felső korlátot adott 9 pont esetére [31].