A pályázat keretében – munkatervünknek megfelelően – a legnagyobb súlyt az általános és halmazelméleti topológia terén végzett kutatások képezték. Ezek között számos már korábbban elkezdett kutatási téma mellett több új témát is sikeresen elindítottunk.

Hosszabb ideje tanulmányozzuk a szétszórt kompakt terek – vagy ami ezzel ekvivalens: szuperatomos Boole-algebrák – számosságsorozatait. [23]-ban teljes jellemzését adtuk az ω_1-hosszú ilyen sorozatoknak, ami $\omega_1 + 1$-hosszú sorozatokra már nem lehetséges. Megadtunk viszont az ω_2-nél rövidebb sorozatokra egy olyan elégséges feltételt, aminél jobb ZFC-ben nem remélhető; ezzel egyébként Bagaria és Martinez korábbi eredményeit élesítettük. Erre is támaszkodva azután [20]-ban teljes jellemzését adtuk az ω_2-nél rövidebb sorozatoknak ÁKH mellett. Nyitva maradt az a kérdés, hogy ω_2-re ugyanez lehetséges-e?!

W. Just egy eredményét messzemenően általánosítottuk [7]-ben: megmutattuk, hogy tetszőleges számú Cohen-valóst adjungálva az alapmodellhez, a keletkezett bővítésben minden számosságsorozatnak legfeljebb κ megszámlálható eleme lehet, ahol κ az alapmodellbeli kontinuum. (ZFC-ben csak az látható be, hogy legfeljebb [a bővítésbeli] kontinuum sok ilyen lehet.)

Ide illik a [24]-beli "fellépési" eredményünk, ami Martinez egy tételét élesíti, s egyben jelentősen egyszerűsíti: Ha van olyan természetes forszolás, ami κ magas és λ széles szétszórt kompakt teret ad, akkor minden $\alpha < \lambda^+$-ra is van olyan, ami α magas (és λ széles) ilyen teret ad.

Jelentős eredményeket értünk el topologikus terek felbonthatósági tulajdonságainak vizsgálatában. Egy tér κ-felbontható, ha tartalmaz κ diszjunkt sűrű halmazt. X maximálisan felbontható, ha $\Delta(X)$-felbontható, ahol $\Delta(X)$ jelöli az X nem-üres nyílt részhalmazai számosságainak minimumát.

[21]-ben egy igen általános és hatékony módszert vezettünk be a legkülönbözőbb felbontási tulajdonságú terek konstrukciójára. Ennek lényege az, hogy segítségével a megadott terek (ezek mindíg bizonyos Cantor-kockák sűrű alterei) összes sűrű részhalmazáról teljes áttekintés adható. Módszerünkkel teljes megoldását adtuk Ceder és Pearson egy 1967-ben publikált – s azóta sokat vizsgált – problémájára, ami azt kérdezte, hogy egy ω-felbontható tér maximálisan felbontható-e. (Erre korábban csak nem Tyihonov, vagy nem ZFC-beli ellenpéldák voltak ismertek.) Egyik fő eredményünk szerint, ha λ reguláris, minden $\kappa \geq \lambda$-ra van olyan sűrű X altere a 2^κ súlyú Cantor-kockának, amire $\Delta(X) = \kappa$ és X minden $\mu < \lambda$-ra μ-felbontható, de nem λ-felbontható. [21]-ben számos további nyitott problémát is megválaszoltunk, így pl. beláttuk, hogy minden κ-ra van a 2^κ-súlyú Tyihonov-kockának κ számosságú szubmaximális sűrű altere, továbbá megadtunk egy kontinuum számosságú és szeparábilis szubmaximális Hausdorff-teret.

O. Pavlov mély felbonthatósági eredményeit jelentősen élesítettük [26]-ban. Így pl. beláttuk, hogy ha X tetszőleges olyan tér, amiben minden diszkrét altér legfeljebb κ-s és $\Delta(X) > \kappa$, akkor X maximálisan felbontható. Pavlov ezt csak $\Delta(X) > \kappa^+$ mellett tudta, s pl. $\kappa = \omega$ esetén még öröklődően Lindelöf terekre is problémaként fogalmazta meg, hogy $\Delta(X) > \omega$ elegendő-e X felbonthatóságához.

Kutatásainkban most is központi szerepet játszottak a kompakt terek halmazelméleti struktúrájával kapcsolatos vizsgálatok. [11]-ben homogén kompakt terek számosságára adtunk meg (konzisztens) felső korlátokat, bizonyos szétválasztási, ill. fedési feltételek mellett. Ezzel pl. (konzisztencia erejéig) igenlő választ adtunk van Mill kérdésere, hogy egy öröklődően normális homogén kompaktum legfeljebb kontinuum számosságú-e.

[12]-ben Okunyev és Tkacsuk egy problémáját oldottuk meg, konzisztens példát adva olyan kompakt térre, amiben ω_1 minden sűrű altérnek kalibere, de aminek a d-szűksége ω_2, s így nem megszámlálható.

Arhangelszkij még 1967-ben kérdezte, hogy egy kompakt (T_2-)térben van-e mindíg olyan diszkrét altér, amelynek lezártja a térrel egyenlő számosságú. A. Dow nemrég adott erre konzisztens ellenpéldát, s cikkében kérdezte, igaz-e ez legalább megszámlálhatóan szűk kompaktumokra. [19]-ben erre konzisztens igenlő választ sikerült adnunk amellett az ÁKH-nál gyengébb feltevés mellett, hogy minden limesz számosság erős limesz.

[10]-beli fő eredményünk is Arhangelszkij egy problémájának megoldása: Ha egy megszámlálhatóan kompakt tér előáll megszámlálható sok D-altér egyesítéseként, akkor kompakt. Mivel minden balról szeparált tér D-tér, ez Tkacsenko egy 1979-es klasszikus és igen nehéznek tartott eredményét is élesíti. Ugyanebben a cikkben Tkacsenko egy másik addíciós tételét is élesítettük belátva, hogy ha egy kompaktum $\mathrm{cov}(\mathcal{M})$-nél kevesebb balról szeparált altér uniója, akkor szétszórt.

A [10]-hez szorosan kapcsolódó [27] dolgozatban azt az addíciós kérdést kedtük el vizsgálni, hogy egy (önmagában sűrű) kompakt teret hány diszkrét altérrel lehet lefedni. Azt sejtettük, hogy ehhez legalább kontinuum sok diszkrét altér kell, de ezt csak öröklődően normális kompaktumokra tudtuk belátni. Igaz, ebben az esetben több is kijött: a teret nem lehet, vagy kontinuumnál kevesebb jobbról szeparált, vagy kontinuumnál kevesebb balról szeparált altérrel lefedni.

Szintén addíciós jellegű eredményeket láttunk be [28]-ban. Jakovlev egy nevezetes tétele szerint minden Eberlein-kompaktum (azaz valamely Banach-tér gyengén kompakt altere) öröklődően σ-metakompakt. Mi megmutattuk, hogy ha egy kompaktum véges sok metrizálható altér uniója, akkor ennek a megfordítása is igaz. Analóg tételeket igazoltunk az Eberleinnél bővebb Corson-kompaktumok és az annál szűkebb uniform Eberlein-kompaktumok osztályaira is.

Klasszikus általános topológiai kérdést vizsgáltunk [6]-ban, nevezetesen azt, hogy az X és Y topologikus terekre tett milyen feltevések esetén igaz az, hogy közöttük bármely $f : X \to Y$ őrzőfüggvény, azaz olyan leképezés, melynél összefüggő (ill. kompakt) halmaz képe összefüggő (ill. kompakt) folytonos. A korábbi pozitív eredmények közül a legerősebb McMillan tétele volt, miszerint ez igaz, ha X lokálisan összegüggő Frechet-tér és Y Hausdorff. Ezt a tételt számos irányban élesítettük, de fő eredményünk a következő, teljesen új típusú tétel: Ha X összefüggő rendezett terek szorzata és Y reguláris akkor minden $f : X \to Y$ őrzőfüggvény folytonos. Mivel R^{ω_1} nem k-tér, ebből rögtön negatív választ kapunk McMillan ama kérdésére, szükséges-e X-nek k-térnek lennie ahhoz, hogy minden X-en értelmezett őrzőfüggvény folytonos legyen. A téma általános jellege és az eredmények meglepő volta magyarázza, hogy [6] igen széles érdeklődést váltott ki; internetes megjelenése után a folyóirat második legtöbbet letöltött cikke lett, csupán egy problémacikk előzte meg.

Egy közel 30 éve nyitott problémát sikerült megoldani [22]-ben azáltal, hogy Fodor nevezetes regresszív függvényes tételének tisztán topológiai megfogalmazását és bizonyítását adtuk meg. Ez így szól: Legyen X olyan nem-kompakt, lokálisan kompakt Hausdorff-tér, amelyben bármely két nem-korlátos zárt halmaz metszi egymást. Ha U egy környezet-kijelölés egy $S \subset X$ stacionárius halmazon, akkor van olyan stacionárius $T \subset S$, melyre $\bigcap\{U_x : x \in T\} \neq \emptyset$. (Természetesen X egy részhalmaza akkor korlátos, ha lezártja kompakt, s akkor stacionárius, ha minden nem-korlátos zárt halmazt metsz.) Sikerült ebben a kontextusban – Fodor tétele mellett – Solovay stacionárius halmazok felbontására vonatkozó tételének tisztán topológiai változatait is megadni.

Egy igen egyszerű és természetes MAF forszolás útján kapott generikus balról szeparált terek alkalmazásait adtuk meg a [3] dolgozatban. Juhász és Szentmiklóssy korábbi kérdéseit megválaszolva kimutattuk, hogy az így kapott 0-dimenziós Hausdorff-terek öröklődően Lindelöfök, megszámlálhatóan szűkek, de sűrűségük tetszőleges, az alapmodellben előre megadott κ reguláris számossággal egyenlő lehet. Speciálisan, ekkor κ nem lehet kalibere a térnek, de rajta kívül minden más reguláris számosság az. Nem lehet tehát Sapirovszkij tételében, miszerint egy megszámlálhatóan szűk kompakt tér szeparábilis, ha ω_1 kalibere, a kompaktság helyébe (öröklődő) Lindelöfséget tenni.

Toronto-térnek hívunk egy olyan nem-megszámlálható, nem-diszkrét reguláris teret, amely homeomorf bármely nem-megszámlálható alterével. A halmazelméleti topológia egyik legnevezetesebb megoldatlan problémája az, hogy vajon konzisztens-e Toronto-tér létezése. A mindmáig legerősebb részeredményt ebben az irányban [8]-ban sikerült belátni, aholis egy u.n. "darabonként" Toronto-teret adtunk meg forszolás segítségével. Ezalatt olyan nem-megszmlálható, nem-diszkrét reguláris teret értünk, amelyet akárhogy bontunk fel véges sok részre, valamelyik rész homeomorf az egész térrel.

Egy topologikus teret "ön-tranzverzális"-nak hívunk, ha van rajta egy az eredetivel homeomorf másik toplógia úgy, hogy a két topológia együtt már a (maximális) diszkrét topológiát generálja az alaphalmazon. A [13] dolgozatban az ön-tranzverzális terek struktúráját vizsgáltuk, különösen azzal összefüggésben, hogy a tér milyen és mekkora diszkrét altereket tartalmaz. Pl. ha X-ben van X-szel egyenlő számosságú zárt diszkrét altér, akkor X ön-tranzverzális, s ha X ön-tranzverzális, akkor X^2-ben van X-szel egyenlő számosságú diszkrét altér. Minden megszámlálható Hausdorff-tér és minden szétszórt metrikus tér ön-tranzverzális, s az az állítás, hogy egy X metrikus tér pontosan akkor ön-tranzverzális, ha $|X| = w(X)$ független ZFC-től. Sikerült továbbá megválaszolni Sakhmatov, Tkacsuk és Wilson egy sor problémáját: Létezik olyan szétszórt tér, ami nem ön-tranzverzális, léteznek akármilyen nagy számossagú ön-tranzverzális CCC kompaktumok, stb.

Arhangelszkij egy 40 éves problémája azt kérdezi, hogy egy gyengén első megszámlálható kompakt tér első megszámlálható-e, ill. lehet-e kontinuumnál nagyobb számosságú? Jakovlev adott az első, Malüchin pedig a második kérdésre negatív választ, mindketten a KH segítségével. Mindkét kérdés ZFC-ben máig nyitva van, viszont [15]-ben a KH-nál lényegesen gyengébb "$\mathbf{b} = \mathbf{c}$" feltétel mellett tudtunk megadni $\mathbf{c}^+$ számosságú gyengén első megszámlálható kompakt teret. Továbbá azt is beláttuk, hogy ha tetszőleges alapmodellhez iterálva adjungálunk ω_1 domináló valóst, akkor a generikus bővítésben létezik akármilyen nagy számosságú gyengén első megszámlálható kompakt tér. Valamennyi eredményünk olyan lokálisan megszámlálható reguláris terek konstukcióját igényli, amelyek a megszámlálható kompaktság egy gyenge formáját teljesítik (ezeket neveztük Jakovlev-tereknek). Ezért a megszámlálhatóan kompakt és lokálisan megszámlálható reguláris terek lehetséges számosságaira vonatkozó klasszikus kérdés és a Jakovlev-terek közt szoros kapcsolat van, lásd az Open Problems in Topology új kiadása számára írott [29] áttekintő cikket.

A kutatásaink súlypontját jelentő halmazelméleti topológiai témák mellett – munkatervünkkel összhangban – foglalkoztunk inkább geometriai, ill. valós függvénytani és mértékelméleti, valamint tisztán kombinatorikai jellegű kérdésekkel is.

Halmazelméleti és geometriai-topológiai módszerek érdekes és újszerű kombinációját alkalmaztuk [14]-ben annak a kérdésnek a vizsgálatára, hogy egy (lokálisan) kompakt metrikus térben mikor található kontinuumnál több páronként majdnem diszjunkt összefüggő halmaz. Mivel a számegyenes összefüggő részhalmazai az intervallumok, ott ez nem lehetséges. Megadtunk viszont két elégséges feltételt, melyek azt mondják, hogy terünk "eléggé" különbözik az egyenestől: a tér dimenziója legalább 2, vagy tartalmaz nem-megszámlálható sok ágú "csillagot". Ha ezek valamelyike teljesül, akkor a térben megadható annyi majdnem diszjunkt összefüggő halmaz ahány majdnem diszjunkt kontinuum-számosságú halmaz egyáltalán létezik.

G. Gruenhage egy fontos kérdését válaszoltuk meg [4]-ben, megmutatva az egyenes olyan kompakt nullmértékű részhalmaza létezésének konzisztenciáját, amelynek kontinuumnál kevesebb eltoltjával lefedhető a teljes egyenes. Folytatva ilyen irányú kutatásainkat, [16]-ban sikerült ezt az eredményt az egyenesről tetszőleges lokálisan kompakt csoportokra kiterjeszteni: Meghatároztuk azokat a csoportokat, melyekre konzisztens olyan kompakt és nulla Haar-mértékű halmaz létezése, amelynek kontinuumnál kevesebb eltoltjával lefedhető a teljes csoport.

Egy Laczkovich Miklós által a 90-es évek első felében felvetett problémát vizsgáltunk és majdnem teljesen megoldottunk [2]-ben és [18]-ban. A kérdés az volt, hogy egy metrikus téren értelmezett folytonos, ill. Baire-1 függvények pontonként parciálisan rendezett halmazaiban milyen rendtípusú láncok léphetnek fel. Azt mutattuk meg, hogy a Martin-axióma feltételezése mellett egy kontinuumnál kisebb számosságú rendezett halmaz pontosan akkor reprezentálható Baire-1 függvényekkel, ha minden jólrendezett része megszámlálható. Komjáth egy tétele szerint ennél több nem bizonyítható. Emellett megmutattuk, hogy kontinuum számosságú rendezésekre ilyen jellegű karakterizáció nem érvényes.

[17]-ben Mauldin egy 10 éves kérdésére válaszolva megmutattuk, hogy a Liouville-számok halmazát „nem lehet megmérni", abban az értelemben, hogy a mértéke minden eltolás-invariáns mértékre nézve vagy nulla, vagy nem σ-véges. Ezután más természetes halmazokra, például a nem-normális számokra, illetve a számegyenes additív, nem F_σ részcsoportjaira mutattuk meg ugyanezt a tulajdonságot. A bizonyítások transzfinit rekurzióval definiált kompakt halmazokat használnak.

[9]-ben részleges választ sikerült adnunk Preiss egy problémájára. Azt bizonyítottuk, hogy a kontinuum-hipotézis feltételezése mellett a különböző dimenziós Hausdorff-mértékek izomorfak. Ez az eredmény igen nagy visszhangot váltott ki, már megjelenése előtt több hivatkozás született rá, többek között David Fremlintől.

Egy sokat ígérő, de eddig meglehetősen elhanyagolt kutatási irányt indítottunk el [25]-ben, aholis azt próbáljuk meg módszeres vizsgálat tárgyává tenni, hogy bizonyos véges kombinatorikai eredmények miként vihetők át a végtelen esetre. Így [25]-ben pl. azt a – véges esetben egyszerűen megválaszolható – kérdést vizsgáltuk, hogy egy P végtelen parciálisan rendezett halmaz maximális antiláncai mikor hasadnak. Megmutattuk, hogy ha P vágás-mentes, akkor benne minden véges maximális antilánc hasad. Másrészt beláttuk, hogy minden elég gazdag strukturájú megszámlálható P egyaránt tartalmaz hasadó és nem hasadó maximális antiláncot is.