TANÁCS JÁNOS

A Bolyaiak *absurdum*-vezérelt helyettesítési kísérletei a *Párhuzamosok Problémájának* megoldására*

I. BEVEZETÉS

A párhuzamosok problémájának története során három fő megoldási kísérlet öltött formát: (1) a párhuzamossági posztulátumot közvetlen bizonyítás segítségével levezetni a maradék axiómarendszerből, (2) közvetett módon, azaz a párhuzamossági posztulátum tagadásából levezetett ellentmondás révén bizonytani a posztulátum igazságát, (3) egyszerűbb, könnyebben belátható axiómát találni, amellyel a posztulátum/axióma helyettesíthető.

A nem-euklideszi geometria matematikatörténet-írási irodalmában a *reductio ad absurdum* típusú indirekt bizonyítás szinte kizárólagos szerephez jut a másik két megoldási kísérlet rovására. Ez egyben az indirekt bizonyítás túlértékelését is jelenti. Az írások egy része úgy tekint az indirekt bizonyítások színre lépésére a történet adott pontján, mint ami a probléma megoldási kísérleteinek sorában gyökeres fordulatot hozott: végre a nem-euklideszi geometria felfedezése felé mutató lépések történtek (Eves 1997. 54; Houzel 1992. 3; Martin 1975. 302; Sommerville 1958. 11). Mivel Saccheri (és Lambert) módszerét *reductio ad absurdum* típusú indirekt bizonyításként tartják számon, ezért Bonola, Houzel és Sommerville szerint az igazi fordulat Saccherinek és az általa alkalmazott módszernek köszönhető (Bonola 1955. 97; Houzel 1992, 3; Sommerville 1958. 11).

A *reductio ad absurdum* típusú indirekt bizonyítás tűnik ugyanis olyan módszernek, amely képes az anti-euklideszi állításokat és a köztük lévő belső kapcsolatokat feltárni. Bár az anti-euklideszi állítások és összefüggések a nem-euklideszi geometriától többek között abban a nagyon fontos dologban különböznek, hogy nem bírnak az euklideszi geometriától független, önálló entitás státuszával, mégis a nem-euklideszi geometria csírájaként értékelhetők. Ezért a *reductio ad absurdum* típusú indirekt bizonyítást tekintik úgy, mint

* A dolgozat elkészítését az OTKA K 72598 számú pályázata, valamint a TÁMOP-4.2.2/B-10/1-2010-0009 számú pályázata támogatta. Köszönettel tartozom Fehér Mártának, Láng Benedeknek, Margitay Tihamérnak és Zemplén Gábornak észrevételeikért és javaslataikért.

ami képes volt az euklideszi feltevésrendszer belsejében a nem-euklideszi geometriát kicsíráztatni.

Egyes szerzők éppen a heurisztikus termékenység alapján állítják szembe az indirekt és a direkt kísérleteket: „a megoldási kísérletek sora mindaddig meddő maradt, amíg direkt bizonyításokkal próbálkoztak, míg az indirekt kísérletek keresése hosszú, éles elméjű okoskodás segítségével meglepő tételekhez vezetett" (Szénássy 1992. 161).[1]

Ezzel szemben a helyettesítési kísérletek alig vonzottak figyelmet, és ha mégis, akkor is kimerült a dolog a javasolt helyettesítő axiómák ismertetésében – a további metodológiai részletek nem képezték vizsgálódás tárgyát.

Az indirekt bizonyítások túlreprezentálása és túlértékelése a direkt bizonyítások meddőnek nyilvánításával és a helyettesítő kísérletek negligálásával együtt azt a képet festi a nem-euklideszi geometria felfedezéséhez vezető folyamatról, hogy kizárólag az indirekt módszer nyilvánítható (legalább utólag visszatekintve) módszertanilag gyümölcsözőnek.

Nincs ez másként a Bolyaiak esetében sem. Bár Bolyai Farkas mindhárom módszerrel próbálta megoldani a problémát, az irodalom a legtöbb figyelmet indirekt kísérleteinek szenteli. A helyettesítési kísérletek módszertani részletei pedig egyáltalán nem kerültek az elemzések és vizsgálódások látóterébe. Bár a helyettesítési próbálkozások ignorálásának nincs explicit indoklása, a ki nem mondott megfontolások nagyjából a következőképpen rekonstruálhatók. A párhuzamossági posztulátum helyettesítésére szánt matematikai állítás egyszerűségének, könnyebb beláthatóságának interszubjektív megítélése és közösségi elfogadása első ránézésre is problematikusnak tűnik. Nem csupán aktuális, modern nézőpontunkból, hanem már az adott történeti pillanatban is világos kellett (vagy kellett volna) lennie annak, hogy bármely egyedi javaslat alapvetően vitatható lesz, következésképp a probléma végérvényes lezárása ily módon nem remélhető. A helyettesítési kísérletek azt a benyomást keltik, hogy lényegileg elhibázottak voltak, és emiatt további módszertani részleteik sem érdemelnek figyelmet. Ráadásul úgy tűnik, hogy ez a megoldási kísérlet nélkülöz minden további metodológiai finomságot: a módszer egy adott állítás egyszerűségére és a könnyebb beláthatóságára vonatkozó igény bejelentésében, valamint ezeknek a tulajdonságoknak a közösségi kiértékelésében összegződik.[2] És bár a helyettesítő állítás és a párhuzamossági posztulátum logikai ekvivalenciája (egymás-

[1] „Mások – jeles matematikusok mellett dicsőségre vágyó műkedvelők is – azon fáradoztak, hogy az euklideszi geometria többi alaptételére támaszkodva bebizonyítsák az 5. posztulátumot. Ez az út is terméketlennek mutatkozott mindaddig, amíg *direkt* bizonyításokat kerestek. Ezzel szemben meglepő eredményekhez vezettek azok az *indirekt* bizonyítási kísérletek, amelyeket arra a feltevésre építettek, hogy az euklideszi axióma nem igaz." (Szénássy 1970, 165. Kiemelések az eredetiben – T. J.)

[2] Bolyai Farkas kapcsán ez úgy finomodik, hogy azért is érdektelenek a módszertani részletek, mert a *Tentamen*ben szereplő nyolc helyettesítő axióma egyet kivéve korábbi állítások alig módosított átvétele: „Nagyon valószínű, hogy jó húsz év során gyarapodott ennyire e

ból való kölcsönös levezethetősége), amelyet a javaslattevőnek szükséges volt megmutatnia, további vizsgálódásra érdemes lehetne, ezt a módszer alapvetően problémás volta érdektelenné teszi.[3]

Bolyai János esetében az indirekt bizonyítások iránti pozitív elfogultság a másik két megoldási kísérlet rovására még inkább kézzelfogható. A matematikatörténet-írás szerint Bolyai János 1821 előtt, amikorra is realizálta, hogy a párhuzamosok posztulátumának bizonyítása hiábavaló, kizárólag indirekt próbálkozások keretében próbálkozott problémájának megoldásával (Szénássy 1992, 161). Az irodalom azt is sugallja, hogy Bolyai János nem kísérletezhetett olyan elhibázott vagy meddő módszerekkel, mint a direkt bizonyítás vagy a helyettesítési kísérlet. A leírások kimerülnek az indirekt módszer megnevezésében, és nem képezték vizsgálódás tárgyát sem a módszertani részletek, sem a kísérletek episztemológiai hozzájárulása a végső, nem-euklideszi fejleményekhez.

Mindezeket figyelembe véve a következőkben amellett kívánok érvelni, hogy a Bolyaiak matematikai gyakorlata, így Bolyai János 1821 táján követett módszere *sem* a párhuzamosok posztulátumának *reductio ad absurdum* típusú indirekt bizonyítása. Ezzel összefüggésben egyrészt azt képviselem, hogy a Bolyaiak *absurdum*-kereső módszere nem kizárólag az indirekt bizonyításokhoz kapcsolódott, hanem a helyettesítési kísérletek keresésében is szerepet játszott. Másrészt amellett fogok érvelni, hogy a Bolyaiak *absurdum*-kereső módszere nem *logikai ellentmondás* feltárását, hanem ettől különböző matematikai abszurditás keresését célozta. Végül megpróbálom azonosítani az *absurdum*-vezérelt helyettesítési kísérleteknek a Bolyai-geometriához való eljutásban játszott episztemológiai szerepét.

II. A KÉT BOLYAI 1821 TÁJÁN KÖVETETT MÓDSZERÉNEK MATEMATIKATÖRTÉNET-ÍRÁSI BEÁLLÍTÁSA

A matematikatörténet-írás szerint Bolyai Farkas kutatásainak első periódusára az jellemző, hogy meg volt győződve a párhuzamossági posztulátum maradék axiómarendszerből való levezethetőségéről. Erre a meggyőződésre alapozva próbálta cáfolni a posztulátummal ekvivalens állítás tagadását. Erőfeszítésének írásbeli dokumentációja, amelyet a Gausshoz 1804. szeptember 16-án írott levélhez mellékelt, *Theoria Parallelarum* néven vált ismertté. A párhuzamossági posztulátummal ekvivalens állítás, amelynek tagadását ellentmondás révén cáfolni kívánta, a következő (Szénássy 1970. 156–157; Szénássy 1975. 104; Szénássy 1992. 151): az egyenes távolságvonala, azaz az egyenestől egyenlő távolságra elhelyez-

szám, olyképp, hogy egyes axiómák megfogalmazásához már régebbi időkben mások által közöltek kis módosítása nyújtott Bolyainak segítséget." (Szénássy 1975. 107)

[3] Lásd Bolyai Farkas kapcsán a II. pontban.

kedő pontok alkotta vonal maga is egyenes. Gauss a válaszlevélben rámutatott, hogy Bolyai Farkasnak nem sikerült kielégítően bizonyítania az ellentmondást. Bolyai Farkas egy kiegészítésben *(Supplementum 1808)* próbálta orvosolni a problémát, ezt 1808. decemberi 27-i levelében küldte el Gaussnak. Ez a levél megválaszolatlan maradt. Az irodalom szerint Bolyai Farkas ekkortájt új irányban kezdte keresni a párhuzamosok problémájának megoldását: a párhuzamossági posztulátumnál egyszerűbb, könnyebben belátható helyettesítő axióma keresése évtizedekre lekötötte a figyelmét (Szénássy 1970. 157; Szénássy 1975. 106; Szénásy 1992. 153).

A Gausshoz írott levelezésben (a *Theoria Parallelarum*ban és a *Supplementum*ban) közzétett ellentmondáskeresés alapú korai bizonyítási kísérletek részletesen kerülnek bemutatásra és elemzésre (Szénássy 1970. 156–157; Szénássy 1975. 103–106; Szénássy 1992. 150–153), és értékelésük is alapvetően pozitív. Ezzel szemben Farkas fő művében, a *Tentamen*ben (1831) publikált helyettesítési próbálkozások (Szénássy 1970. 157–161; Szénássy 1975. 107–109), módszertanilag sokkal negatívabb megítélésben részesültek. Ezek a próbálkozások kevés figyelmet kaptak, és a Farkas által javasolt helyettesítő axiómák értékelése is alapvetően negatív. Két dolgot vetnek Bolyai Farkas szemére. Egyrészt, hogy a javasolt helyettesítő axiómák szándékuk ellenére egyáltalán nem szemléletesek és egyszerűek (Szénássy 1970. 158; Szénássy 1975. 106). Másrészt megalkotásuk nem tűnik komoly intellektuális munkának, hiszen korábbi javaslatok kissé módosított átvételének tűnnek.[4]

A helyettesítő axiómák előállításának módszertani részletei pedig azért is érdektelenek, mert „[az egyszerűség megítélésére igénybe vett] 'súlyozás' és a felhasznált eszközök szemléletességének kérdése azonban egyéni megítélés dolga. A következőkben ezért sem az ekvivalencia, sem az egyszerűségi vizsgálatokkal részletesen nem foglalkozunk." (Szénássy 1975. 107.)

Ha a Bolyai János-féle nem-euklideszi geometria megformálásának folyamata felé fordulunk, akkor azt látjuk, hogy a korai időszak módszerét a párhuzamos-

[4] „Nagyon valószínű, hogy jó húsz év során gyarapodott ennyire [nyolcra – T. J.] e szám, olyképp, hogy egyes axiómák megfogalmazásához már régebbi időkben mások által közöltek kis módosítása nyújtott Bolyainak segítséget" (Szénássy 1975. 107).

„Nem mind a kilenc helyettesítő axióma Bolyai [Farkas – beszúrás tőlem. T. J.] eredeti alkotása, néhány közülük némi hasonlóságot mutat előzőleg már ismert ekivalens posztulátumokkal. A *Tentamen*ben levő megfogalmazásuk rendkívül nehézkes, Bolyai szokatlan szóhasználata szinte elfedi a szemléletileg könnyen belátható geometriai tartalmat." (Szénássy 1975. 106.)

Szénássy művének angol kiadásában némiképp sarkosabban fogalmaz: „The wording of the substitute postulates proposed in the *Tentamen* is laboured, some statements are rather vague and sometimes the involvement of the motion of time (tempus) conceals the otherwise plausible geometrical contents. Their originality can also be questioned: they are much rather the re-wording of attempts made during the earlier centuries to replace the parallel postulate. What still endows them with some significance is that Bolyai just have thought over the proof of their equivalence with the Euclidean parallel postulate." (Szénássy 1992. 153.)

sági posztulátum valamely ekvivalensének tagadására adandó *reductio ad absurdum* típusú cáfolat kereséseként jellemzik. Mivel Saccheri és Lambert is *reductio ad absurdum* típusú indirekt bizonyítással próbálta a kérdést megoldani (Bonola 1955. 23; 43 és 97; Houzel 1992. 3 és Sommerville 1958. 11), és Bolyai János módszere ugyanaz, mint az előbbi két geométeré (Bonola 1955. 23 és 97; Stackel 1913. 76; Stackel 1914. 74), így értelemszerű, hogy Jánosé is indirekt bizonyítás. Howard Eves János módszerét ellentmondás keresését célzó kísérletként jellemzi (Eves 1997. 61), míg Jeremy Gray olyan leírását adja János korai próbálkozásainak, amely a párhuzamosok problémájának *reductio ad absurdum* alapú megoldásaihoz közelíti: „Mindketten [ti. Bolyai János és Lobacsevszkij] abbéli meggyőződésükben kezdtek a párhuzamosok problémáján dolgozni, hogy szert tesznek az alternatív hipotézis kétséget kizáró cáfolatára" (Gray 1979. 96).

Különös, hogy sem Bonola, sem Eves, sem Gray nem hivatkoznak semmilyen konkrét történeti evidenciára állításuk alátámasztása céljából (Bonola 1955. 97; Eves 1997. 61; Gray 1979. 96). Ezzel együtt igaz, hogy állításuk közvetett módon megtámogatható, és ehhez a leginkább kézenfekvő út a legjobb elérhető másodlagos forráshoz, jelesül a Paul Stackel által publikált forrásokhoz fordulni. Stackel nem csupán Saccheri és Lambert módszeréhez hasonlítja a János által követett utat, hanem idéz egy olyan, Jánostól származó fragmentumot, amely a módszer részleteit illetően is fontos adalékokkal szolgál. (A továbbiakban ezt *1. Fragmentum*nak fogom hívni.)

1.Fragmentum

> „A XI. axióma bebizonyíthatására – írja János – először azt az utat követtem, hogy bebizonyítsam, hogy az egyenessel egyenközű vonal, azaz a síkban tőle mindenütt egyenlő távolságra lévő vonal szintén egyenes, és e végből megvizsgáltam, hogy mik az ilyen vonal tulajdonságai az ellenkező esetben." Ma tudjuk, hogy Saccheri (1733) és Lambert (1766) ugyanerre az útra léptek és jó darabot meg is tettek rajta (Stackel 1914, 74).[5]

[5] A fragmentum eredetije mint elsődleges forrás nem ismert, ezért csak a Stackel által közölt formában áll rendelkezésünkre. Fontos azonban, hogy a Bolyaiaktól származó idézetek, szövegek, levelek stb. Stackel-féle közlései rendkívül precízek. Érdemes megjegyezni, hogy Stackel 1913-as eredeti német munkájának egy évvel későbbi, 1914-ben kiadott magyar nyelvű fordításában közölt, a Bolyaiaknak tulajdonított szövegek tökéletes egyezést mutatnak azokkal a forrásokkal, ahol lehetőségünkben áll összevetni a kettőt, így például a később alaposan elemzett, Bolyai Farkas által Jánosnak küldött 1820. április 4-i keltezésű levelet is. Mindez azt mutatja, hogy Stackel fordítója, Rados Ignácz a német főszöveget lefordította, a forrásokat viszont az elérhető eredetiben közölte. Ennek alapján jó okunk van elfogadni Stackel forrásközléseit azokban az esetekben is, ahol az eredeti nem áll rendelkezésünkre.

Szénássy szerint „[k]ezdetben Bolyai János is az indirekt bizonyítás útját követte, de 1825-ben új, forradalmian merész irányba indult el" (Szénássy 1970. 165). Egy másik esetben pedig Bolyai János módszerét közvetlenül Bolyai Farkas indirekt kísérleteivel kapcsolja össze:

> Apja nyomdokain haladva, kezdetben (1820 körül) Bolyai János is az euklideszi párhuzamossági posztulátum helyettesítőjének indirekt bizonyításával próbálkozott. Hamarosan, talán még abban az évben, realizálta az ilyen irányú kísérletek terméketlenségét. (Szénássy 1992. 161, fordítás tőlem – T. J.)

A matematikatörténet-írás többnyire az 1820-as évet tekinti a párhuzamosok problémájának kutatásában bekövetkezett gyökeres fordulat idejének: Bolyai János ekkor adta fel azt a feltevését, hogy a párhuzamosok posztulátuma a maradék axiómarendszertől nem független. A szakirodalom szerint ebből fakadóan értelemszerűen feladta, hogy a maradék axiómarendszerből a párhuzamossági posztulátumot levezesse, illetve bebizonyítsa. Ez a módszertani fordulat a két Bolyai közötti levélváltással kerül alátámasztásra (Gray 1979. 96–97; Gray 2004. 50–51).

A levélváltás első felvonásában Bolyai János tudósította apját arról, hogyan gyürkőzött neki a kérdés megoldásának. Bolyai Farkas erre a hírre inkább kétségbeesett, mint örült, ezért válaszlevelében megpróbálta óva inteni fiát, felvázolva azokat a rá váró nehézségeket, amelyekkel majd szembe kell néznie. A történeti probléma az, hogy a levélpár első darabja, János Farkashoz írt levele elveszett, ezért csupán Bolyai Farkas híres és bizonyos vonatkozásokban sokat idézett 1820. április 4-i levele nyújt fogódzót a rekonstrukcióhoz (Benkő 1975. 117–28).

A szóban forgó levél első része, ahol Farkas elvileg óva inti fiát („A parallelákat azon az úton ne próbáld…"), a leggyakrabban idézet szövegek közé tartozik a Bolyai-féle geometria megszületésének kánonjából (Alexander 2006. 715; Boyer 1968. 587; Gray 1979. 96; Gray 2004. 51; Martin 1975. 307; Rosenfeld 1988. 108; Struik 1981. 289–291; Stillwell 1989. 272; Szénássy 1992. 159; Weszely 1981. 62–63; Weszely 2002. 62–39). Ezzel szemben a levél későbbi, módszertani vonatkozású részét alig idézik; ha mégis, akkor nem kötik össze a levél első részével (Weszely 1981. 62–63; Weszely 2002. 62–63). Ez azért is különös, mert a módszertani rész felvezető mondata igen erősen rezonál az egyszer már elhangzott intésre. Bolyai Farkas tehát először általános formában fogalmazza meg a Jánosra váró nehézségeket, itt alapvetően arról van szó, hogy fogja az életét szétzilálni a párhuzamosok problémájával való foglalkozás. Ezt követően pedig a Bolyai János előtt álló konkrét metodológiai nehézségeket ecseteli: azokat, amelyek a választott módszerből fakadnak. (A továbbiakban *2. Fragmentum* néven is hivatkozom a szövegre.)

2. Fragmentum: Módszertani figyelmeztetés

> Ne próbáld, soha meg nem mutatod, hogy azokkal a meg nem szűnő mind egymértékű béhajlásokkal valaha az alsó rectát vágni fogja… egy örökké magába vissza forgató circulus van ebbe a matériába, szünetlen becsaló labirintus, mint a kincsásó elszegényül, aki ebbe elegyedik s tudatlanul marad. – Akármicsoda absurdumra menj ki, mind semmi, nem teheted axiomának; felteszem, hogy Δ–τ *s akárhány oldalú polygonumot lehet csinálni, ha nem igaz a parallelar[um] theoria, melynek minden szegleteinek summája omni dabili kisebb, s ezer efélék*, a recta egyedül volna, mely a reá írt perpendicularisokat mind vágná, több recta nem volna, mely mind vágná azokat – a legkisebb szegletbe bé lehetne tenni a legnagyobb convexus angulust mind a két infinitum crussával. Akármekkora, akármilyen kicsi summa duorum internorumra lehetne demonstrálni, hogy vágja két recta egymást akármilyen nagy rectának két végéről, osztán a többit cum rigore tudom; de már ilyent axiomának venni nem lehet. Mindenik demonstratio sokból áll együtt, külön is némelyik hosszú – egyszer mind közlöm. Vannak olyan axiomák is az enyimek között, melyek hirtelen jóknak tetszenének; de nem jók, nem tökéletes simplex s elég tiszta fundamentum egy olyan tudománynak, amilyen a Geometria. (Benkő 1975. 125.)[6]

Bolyai János alternatív hipotézis cáfolási kísérletét Jeremy Gray közvetlenül Bolyai Farkas első, általános figyelmeztetésével kapcsolja össze Gray (Gray 1979. 96): ez azt sugallja, hogy a Farkas által Jánosnak tulajdonított módszer ellentmondás-kereső eljárás. Bár Farkas csak itt, a levél módszertani figyelmeztetést tartalmazó részében hozza szóba az *absurdum*ra kifuttatott próbálkozások kudarcát, első látásra úgy tűnik, hogy a *Módszertani figyelmeztetés* alátámasztja Gray és Szénássy módszertani olvasatát, miszerint az 1820-as évben Bolyai János – apja nyomdokain haladva – valóban *reductio ad absurdum* típusú indirekt eljárással kísérletezett.

Mielőtt megpróbálnám részleteiben megmutatni, hogy miért elégtelen, illetve téves a levél módszertani olvasata, és ezzel együtt a Bolyaiak módszerének leírása, összefoglalnám a körvonalazódó matematikatörténeti képet.

A kép öt fő alkotóelemből áll. Az első, hogy Bolyai János módszere megegyezik Saccheriével. Ez az állítás azonban, legalábbis ahogy megjelenik a publikációkban, inkább kinyilvánításként van jelen az irodalomban, lényegében nincs alátámasztva közvetlen történeti evidenciákkal. A második képalkotó elem az a Jánosnak tulajdonított módszertani leírás (az *1. Fragmentum*), amelyet csak Stackel közléséből ismerünk. Annak ellenére, hogy ez csak másodlagos forrás, jó

[6] Vö. Stackel német művének magyar fordításával (Stackel 1914. 74–76), amelyben a fenti levelet eredeti nyelvén, azaz magyarul közölték, valamint az eredeti német művel, amely számára viszont Rados Ignác a levelet fordította le németre (Stackel 1913. 76–78).

okunk van elfogadni, mint töredékes, de hiteles beszámolót.[7] A harmadik elemet Szénássy azon állításai alkotják, amelyek szerint Bolyai János módszere az indirekt bizonyítás volt, és ez hasonlatos, illetve össze is kapcsolható Bolyai Farkas korai időszakának indirekt eljárásával. Ezek az állítások ismét csak közvetlen történeti alátámasztás nélkül állnak. A negyedik elem az a kapcsolat, ahogyan Jeremy Gray összeköti az alternatív hipotézis cáfolására irányuló Bolyai János-féle korai kísérleteket Bolyai Farkas 1820-as levelének általános intelmeket megfogalmazó részével (Gray 1979. 96; Gray 2004. 50–51). Ez vezet el végül a jelen pillanatban legkonkrétabb és legerősebbnek tűnő történeti evidenciához, Bolyai Farkas Jánoshoz írott leveléhez. A levél módszertani intelme, amellett, hogy leírását adja János módszerének, hivatkozik az *absurdum*ra kifutó bizonyításra. Ez alapján végre megalapozottnak tűnik az állítás, hogy Bolyai János módszere 1820 táján a *reductio ad absurdum* típusú indirekt bizonyítás lehetett.

III. A KÉT BOLYAI TÉNYLEGES MÓDSZERE: *ABSURDUM*-VEZÉRELT HELYETTESÍTÉSI KÍSÉRLETEK *REDUCTIO AD ABSURDUM*-TÍPUSÚ CÁFOLÁSI KÍSÉRLETEK HELYETT

A következőkben a fenti két fragmentum módszertani újraértelmezését kívánom elvégezni.

Az *1. Fragmentum* alaposabban szemügyre véve jó néhány érdekességet mutat. Az első az, hogy azoknak a vonalaknak a *tulajdonságára* koncentrál, amelyeknek egy síkbeli egyenestől mért távolsága állandó. A második jellegzetesség, hogy a szöveg nem beszél a bizonyítási folyamat végpontjáról: nincsen szó arról, hogy a végcél a párhuzamossági posztulátum igazságának *ellentmondás* révén történő bizonyítása lenne. Az eljárás önmagában vett céljának a párhuzamossági posztulátummal logikailag ellentétes eset *elemzése* tűnik, nem pedig a cáfolata. Ezek a sajátosságok együtt Bolyai János módszerét megkülönböztetik a fentebb látott *reductio ad absurdum* típusú indirekt kísérletektől, vagy legalábbis megkérdőjelezik, hogy valóban ez utóbbiról van-e itt szó.

Érdemes felfigyelni arra, hogy a szóban forgó fragmentum első mondata a párhuzamossági posztulátummal ekvivalens állítás direkt bizonyítását sejteti. Következésképpen: a kísérlet átfogó célja akár a párhuzamossági posztulátummal ekvivalens állítás bizonyítása is lehet, amelyhez a logikailag ellentétes eset elemzése egyfajta előzetes vizsgálódás a végső cél, azaz a közvetlen bizonyítás megalkotása érdekében. Ez pedig újabb támpont ahhoz, hogy ne tekintsük nyilvánvalónak: itt valóban az indirekt módszer leírásáról van szó.

Az egész azért zavarba ejtő, mert a szöveg egy olyan sémát ír le, ami célját tekintve a direkt bizonyításhoz illeszkedik, miközben a részletek némiképp

[7] Lásd az 5. lábjegyzetet.

magukon hordják a *reductio ad absurdum* jegyeit is, de ennek megkülönböztető jegye: a cáfolási szándék említése nélkül.

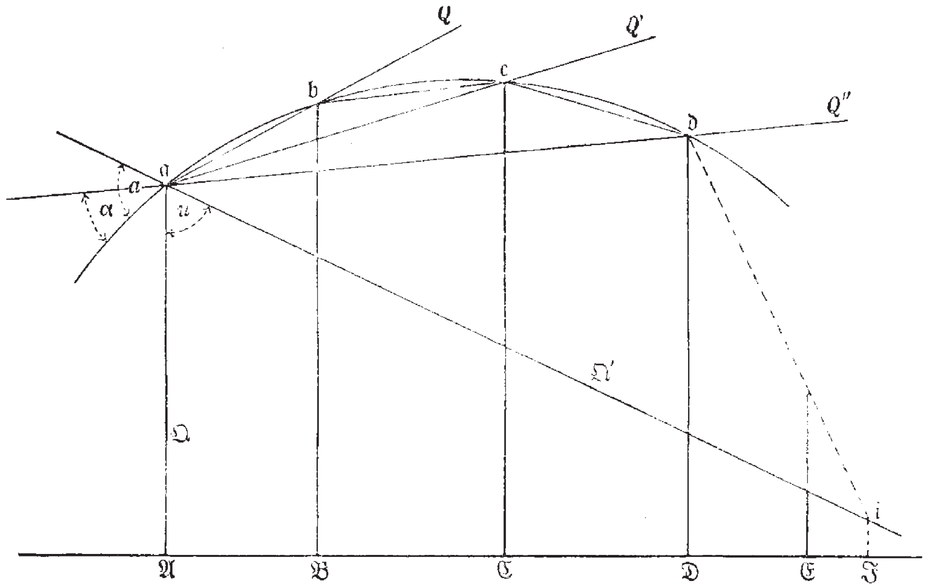
Áttérve a *2. Fragmentum* elemzésére, az általános figyelmeztetéssel indító rész alapján („A parallelákat azon az útan ne próbáld: tudom én azt az utat is mind végig…" Benkő 1975. 123), valamint a módszertani figyelmeztetés részletessége alapján indokoltnak tűnik, hogy a leírt eljárást Bolyai Farkas módszerének tekintsük. Bolyai Farkas pedig úgy beszél a leírt módszerről, mint amely Bolyai Jánosnak is sajátja. Itt fontos emlékeznünk rá, hogy a levélváltás első levele elveszett, ugyanakkor az, ahogyan Bolyai Farkas fiának módszerét jellemzi, és párhuzamba vonja saját korábbi kísérleteivel, nem tekinthető az első levéltől független, véletlen mozzanatnak. Ez alapján az első, Bolyai János-féle levelet egy részletes módszertani beszámolónak gondolhatjuk, és jó okunk van feltételezni, hogy Bolyai Farkas pontosan azt a módszert és következményeit ecseteli, amit János eredetileg a levelében felvázolt. Ezzel együtt is érdemes további érvekkel alátámasztani, hogy valóban van alapunk Bolyai János próbálkozásaként is látni a Bolyai Farkas által leírtakat.

A „meg nem szűnő mind egymértékű béhajlások" kifejezés egy egyenes törött távolságvonalára utal, azaz egy olyan törött vonalra, amely bizonyos pontjai egy egyenestől egyenlő távolságra vannak, és e pontokat egyenes szakaszok kötik össze. Ez az a törött távolságvonal, amelynek tulajdonságait János az *1. Fragmentum* szerint az „ellenkező esetben" (azaz amikor hamis az állítás, hogy „az egyenestől egyenlő távolságra lévő vonal egyenest alkot") vizsgálni kezdte. Van azonban egy töredék is, amelyben Bolyai János az „egyenletes polygonális vonal vagy tört egyenes" vizsgálatáról – tehát olyan esetről, amikor a párhuzamosok posztulátuma nem igaz – beszél (Stackel 1913. 234; Stackel 1914. 235).[8]

Bolyai Farkas a *2. Fragmentum*ban tehát pont olyan törött távolságvonalakról beszél, mint amelyek vizsgálatára János is utal az *1. Fragmentum*ban. Következésképpen a két módszertani vonatkozású töredék egymással szoros kapcsolatban van a „meg nem szűnő mind egymértékűen béhajló vonalakon" keresztül.

A *2. Fragmentum* módszertani figyelmeztetésében felfigyelhetünk a szövegben egy töréspontra: a kezdőmondat („Ne próbáld, soha meg nem mutatod, hogy azokkal a meg nem szűnő mind egymértékű béhajlásokkal valaha az alsó rectát vágni fogja") intése a gondolatjelig valóban értelmezhető lenne a párhuzamossági posztulátummal ekvivalens állítás cáfolási kísérleteként. A gondolatjelet követő rész azonban nem. Hogy miért nem, az a „meg nem szűnően egymértékű

[8] A teljes szövegkörnyezet: „Valamely tetszés szerinti egyenletes polygonális vonal vagy tört egyenes vizsgálata, melyre a párhuzamosaknak arra a feltevésre támaszkodó értelmezése indított, hogy van két egyenes, melyeknek távolsága mindenütt egyenlő, ép úgy mint atyámnál, nálam is az első út vagy gondolat volt, melynek alapján a XI. axiómát vagy X-et [Bolyai János és Farkas jelölése a római tizenegyes szám jelölésére – T. J.] bebizonyítani, helyesebben és biztosabban vele tisztába jönni próbáltam és bebizonyítani vagy eldönteni törekedtem, hogy minden ilyen fajta vonal vagy önmagába tér vissza, vagy legalább csomós."



1. ábra. Az „egymértékűen béhajló vonalak” konstrukciója Bolyai Farkasnál. (Az eredeti ábra lelőhelye: Stackel 1914/2, 105.)

béhajló vonalaknak” Bolyai Farkas kísérleteiben játszott különböző szerepeiből érthető meg.

Nem meglepő, hogy ezek a „meg nem szűnően egymértékű béhajló vonalak” Bolyai Farkas megoldási próbálkozásaiban is visszatérő szerepet játszottak: nem csak a szóban forgó levélben beszél sajátjaként róluk, hanem a publikált kísérletekben is azonosíthatók, ahogy azt látni fogjuk (Stackel 1914. 43–44).

A „meg nem szűnően egymértékű béhajló vonalakat” két lépésben alkotja meg Bolyai Farkas. Az első lépésben az egyenestől egyenlő távolságra lévő törött vonalat konstruálja meg. Második lépésként pedig e törött vonal *abc*, *bcd*, *cde* … szögeinek egybevágóságát kell bizonyítani a párhuzamossági posztulátum nélkül *(1. ábra)*.

Bolyai Farkas azt próbálta megmutatni, hogy az *a*, *b*, *c*, δ, … pontokra illeszkedő, és egyenlő *abc*, *bc*δ, … hajlási szögű törött vonal az alsó vonalat (azaz az *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*…pontokra illeszkedő egyenes vonalat) metszeni fogja. Ha ez kivitelezhető lenne, akkor valóban *reductio ad absurdum* típusú indirekt bizonyítási eljárásnak tekinthetnénk. Meglátásom szerint azonban Bolyai Farkas a levél módszertani részének töréspontját követően (az „[a]kármicsoda absurdumra menj ki, mind semmi, nem teheted axiómának…” résztől kezdődően) másfajta módszerre utal. Amiről itt szó van, az a helyettesítési kísérletek módszeréhez kapcsolódik. Emellett több érv is szól. Elsőként az, hogy a gondolatjel tipográfiailag is két részre osztja a szöveget; ez is a módszertanra vonatkozó megjegyzésekben történő váltást jelzi. A második érv, hogy Bolyai Farkas itt olyan állításról beszél, amely amellett, hogy *absurdum*ot fejez ki, *valamiképpen* axiómaként állítható. Harmadszor, miután felsorol jó néhány, a párhuzamossági axióma hamissága esetén kijelenthető állítást, ezen állítások mint *potenciális axiómák* tökéletességének és egyszerűségének problémájáról ír. Mindez sokkal inkább a helyettesítési esetek problémáiról szóló eszmefuttatásnak tűnik, mintsem a párhuzamossági posztulátum remélt cáfolási kísérletei során előálló nehézségekről szóló beszámolónak. Ezekre alapozva azt állítom, hogy Bolyai Farkas beszámolóját az 'absurdum' kifejezés ellenére sem tekinthetjük egy szokásos értelemben vett *reductio ad absurdum* típusú eljárás leírásának.

A legfontosabb, ami itt hiányzik, hogy igazi *reductio ad absurdum* eljárásnak tekinthessük, a logikai ellentmondás kritériuma. Bár a levél módszertani részének a gondolatjelig tartó szakaszára is igaz volt, hogy az ellentmondásra hivatkozás nem történik meg, de volt alapunk indirekt módszernek rekonstruálni. Így egyfelől igaz, hogy az ellentmondásra hivatkozás hiányában nem kell automatikusan elvetni az eljárás indirekt jellegét. Másfelől azonban legalább egy rekonstrukció keretében tudni kell megmutatni, hogy indokolt a kontextus hallgatólagos információi alapján az ellentmondás keresésére következtetni. Ott azonban, ahol Bolyai Farkas felsorolja a képtelenséget kifejező állításokat, nincs olyan további evidencia, amely a logikai ellentmondás implicit jelenlétét mutatná, ahogy ő sem látszik ellentmondónak tekinteni őket. És emlékezzünk rá, hogy az ellentmondásra utalás hiányzik az *1. Fragmentum*ból is.

Hogy lehet azonban egy abszurditás axióma? A szöveg ugyanis azt sugallja, hogy erről van szó. Értelmezésem szerint nem az abszurditást kijelentő állítás, hanem annak tagadása lehet axióma.

Ha a szóban forgó, abszurditást kifejező állítás valóban ellentmondást eredményezne, akkor az euklideszi párhuzamossági posztulátum nélkül megmaradó, ún. maradék axiómarendszer kiegészítése vele az egész rendszert inkonzisztenssé tenné. Ez azt jelenti, hogy az abszurditást kifejező állítás *tagadását* lehetne a maradék axiómarendszer logikai következménynek tekinteni. Feltéve, hogy a maradék axiómarendszer konzisztens, a maradék axiómarendszer bővítése logikai következményével (azaz: az abszurditást kifejező állítás tagadásával) nem lenne informatív, nem tenne hozzá semmit a maradék axiómarendszerhez.

Más azonban a helyzet, ha az abszurditást kifejező állítás nem eredményezne ellentmondást. Ekkor az állítás tagadása nem logikai következménye a maradék axiómarendszernek, ezért az axiómarendszer tartalmasan, informatív módon bővíthető a tagadott állítással. Addig van tehát értelme a maradék axiómarendszer bővítéséről beszélni, legyen szó akár az abszurditást kifejező állításról, akár a tagadásáról, amíg a képtelenség nem jelent logikai ellentmondást.

Nézzük, milyen történeti evidenciák szólnak amellett, hogy Bolyai Farkas valóban az abszurditást kimondó állítás tagadásával kívánja a maradék axiómarendszert kiegészíteni.

Bolyai Farkas a *Tentamen*ben négy axiómacsoportba sorolva összesen nyolc helyettesítő axiómára tesz javaslatot. Az egyes csoportok a helyzet, a quantitás, az eltérés és a hasonlóság axiómái. Az első két csoportba 3-3 alaptétel tartozik, ezt egészíti ki egy eltéréssel és egy hasonlósággal kapcsolatos axióma. A három helyzeti axióma közül rögtön az első a következőképpen hangzik:

> Bármennyire is növekedjék valamely egyenes, a belső szögek összege, melyeket vele két olyan egyenes alkot, a mely tőle ugyanannak a síknak ugyanarra az oldalára esik, folytonosan fogyva, nem válhatik kisebbé bármely megadhatónál, hacsak az a két egyenes nem metszi egymást (Stackel 1913/2. 98; Stackel 1914/2. 101).

Vessük össze ezt az axiómajavaslatot a *2. Fragmentum*ban szereplő, abszurdként jellemzett alábbi kijelentéssel:

> Akármekkora, akármilyen kicsi summa duorum internorumra [két belső szögösszegre] lehetne demonstrálni, hogy vágja két recta egymást akármilyen nagy rectának két végéről.

Míg az axiómajavaslat azt állítja, hogy a belső szögek összege *nem* válhat kisebbé bármely előre megadható értéknél, addig a párhuzamosok elméletének nem igaz volta arra az abszurditásra fut ki, hogy a belső szögek összege bármely előre megadható értéknél kisebb értéket felvehet. Látható, hogy e vonatkozásban a két állítás egymásból logikai tagadással kapható. Bolyai Farkas tehát a *Tentamen*ben 1831-ben olyan állítást javasolt a párhuzamossági posztulátumot helyettesítő axiómának, amelynek *tagadását* az 1820. április 4-i levelében abszurditásnak nevezi. Érdemes tehát felfigyelni, hogy *ez utóbbi* abszurditás az, amit nem tekint logikai ellentmondásnak.

Ennek fényében Bolyai Farkas korábbi módszertani leírása úgy látható, hogy a párhuzamossági posztulátum nem igaz voltából levezetendő *absurdum*ról van szó, de az előálló abszurditást nem tekinti logikai ellentmondásnak, logikai tagadását pedig helyettesítő axiómának javasolja. Bolyai Farkas tehát nem az abszurditást, hanem tagadását teszi axiómának. Következésképpen az a megjegyzése, hogy akármilyen *absurdum*ra fusson is ki az eljárás, azt eredményül kapott állítás nem tehető axiómának, az elliptikus beszédmódnak tulajdonítható. Mindaddig, amíg az *absurdum*ot a logikai ellentmondással azonosítjuk, nem értelmezhető, hogy akár az ellentmondást, akár a tagadását axiómaként javasolhassa a maradék axiómarendszer kiegészítésére. Az iménti gondolatmenet azonban plauzibilissé válik, ha itt olyan *absurdum*-kereső eljárásról van szó, amelynek eredménye nem logikai ellentmondás, és amelyeknek tagadásával a maradék axiómarendszer kiegészíthető.

Foglaljuk össze az eddigieket. Van két fontos módszertani töredék, és mindkettő annak a feltevésnek a vizsgálatáról szól, hogy a párhuzamosok posztulátuma nem igaz. Az egyik közvetlenül, a másik közvetve, de megalapozottan hozható kapcsolatba olyan (törött) vonallal, amelynek töréspontjai egyenlő távolságra helyezkednek el egy egyeneshez képest. Annak ellenére, hogy a párhuzamossági posztulátummal ellentétes felvetés vizsgálatáról szólnak, azaz indirekt módszert sugallnak, egyik töredék sem utal arra, hogy a vizsgálódás célja ellentmondás keresése lenne. Bár a módszertani intés első mondatai rekonstruálhatók egy ellentmondás keresését célzó eljárásra utaló megjegyzésként, de a fragmentum határozott tipográfiai törésponttal rendelkezik. E töréspontot követően azonban egy olyan *absurdum*-kereső eljárás részletes leírását találjuk, amely kapcsán feltűnő az ellentmondásra történő explicit vagy implicit utalás hiánya. Ráadásul az eljárás kifejezett céljának tűnik olyan állítások találása, amelyek helyettesítő axiómák lehetnek, és amelyek legnagyobb problémája, hogy nem elég egyszerűek. A töréspontot követően tehát a levél az indirekt bizonyítás jellemzése helyett sokkal inkább a helyettesítési-szimplifikációs eljárás módszertani leírásának tűnik. Azt elsőre valóban különösnek kell tekintenünk, hogy Bolyai Farkas a helyettesítő eljárás összefüggésében beszél bizonyos állítások matematikai abszurditásáról, és hogy a helyettesítő axiómákat előállító módszer *absurdum*-kereső eljárásként jelenik meg. Ezt azonban segít értelmezni, hogy az egyik szóban forgó abszurd matematikai állítás tagadása a *Tentamen*ben valóban egy lehetséges helyettesítő axiómaként kerül elő. Következésképpen, a szóban forgó módszer a megfelelő helyettesítő axiómákat előállító *absurdum*-kereső eljárás jellemzésének tűnik. Ezt a helyettesítő axiómákat generáló *absurdum*-kereső eljárást az 1820. április 4-i levél szövegének fényében nem csupán Bolyai Farkas, hanem Bolyai János módszerének jellemzéseként is kell látnunk. Eszerint korrigálni kell azt a matematikatörténeti beállítást, amely szerint Bolyai János kizárólag az indirekt bizonyítás keretében próbálkozott 1820–1821 táján a párhuzamosok problémájával.

Ha a két Bolyai módszerének fenti jellemzése helyes, akkor annak van néhány további fontos konzekvenciája is. Elsőként az, hogy a *reductio ad absurdum* módszert a neve ellenére rendszerint nem csupán egy képtelenség keresésének eljárásaként, hanem a logikai ellentmondás találását célzó lépéssorként kezelik. Másként: a matematikai *absurdum*ot általában azonosítják a logikai *absurdum*mal, és ez utóbbit pedig a logikai ellentmondással. A két Bolyai fentebb rekonstruált módszere a helyettesítő axiómák előállítására azonban csak akkor tekinthető *reductio ad absurdum*nak (RAA), ha megkülönböztetjük a logikai *reductio ad absurdum*tól, azaz a *reductio ad contradictionem*től (RAC).

A matematikai abszurditás tehát a Bolyaiak számára olyan matematikai különösség vagy paradoxon kijelentése, amely maga nem hamis, és amelynek tagadása igaznak fogadható el. A Bolyaiak számára tehát a matematikai abszurditás fogalma elválik a logikai abszurditás vagy logikai ellentmondás fogalmától.

IV. AZ *ABSURDUM*-VEZÉRELT HELYETTESÍTÉSI KÍSÉRLETEK MÓDSZERÉNEK EPISZTEMOLÓGIAI HOZADÉKA A KÉT BOLYAI SZÁMÁRA

Fontos és nem kézenfekvő kérdés, hogy a *absurdum*-vezérelt helyettesítési kísérletek gyakorlata hogyan érinti a Bolyaiak vizsgálódásainak eredményeit. Sokkal jobban megérthetjük a dolgot, ha kontrasztba állítjuk Saccheri esetével. Saccheri esetében helyesnek látszik a leírás, hogy a párhuzamossági posztulátum tagadásából fakadó következmények vizsgálódásának célja logikai ellentmondás jellegű *absurdum* keresése volt. Ezért aztán amikor azt találta, hogy nem lehet kizárni egymáshoz vég nélkül közeledő egyenesek létezését, akkor ezt az aszimptotikus viselkedést az „egyenes természetével ellentétesnek” találta (Bonola 1955. 43; Gray 1979. 51–62; Rosenfeld 1988. 98–99). Eredményét úgy értékelte, hogy amit az egyenesek viselkedése kapcsán fellelt, az olyan probléma, ami megengedi számára a párhuzamossági posztulátum igazsága bizonyításának lezárását. Számára tehát a feltárt következmény logikai ellentmondásként funkcionált.

Ha azonban valaki azt gondolja, hogy a párhuzamosok problémáját megoldotta és ezért a probléma lezárható, akkor ez kizárja, hogy a nem-euklideszi geometria megalapítója legyen. A nem-euklideszi geometria megalapítása ugyanis annak elfogadását feltételezi, hogy az euklideszi geometriának olyan alternatívája van, amely nem áll ellentmondásban vele. Másként: legalább implicit módon el kell fogadni a párhuzamossági posztulátum függetlenségét a maradék axiómarendszertől. Aki pedig azt hiszi, hogy a párhuzamosok problémáját megoldotta, legalább implicit módon hiszi a párhuzamossági posztulátum függőségét a maradék axiómarendszertől. Az a vélekedés tehát, hogy a párhuzamosok problémája nincs megoldva, szükséges, bár nem elégséges feltétele a problémán való munkálkodásnak. Előfeltétele a nem-euklideszi geometria felé vezető folyamatnak. Ebből a szempontból pedig döntő, hogy a két Bolyai nem azonosította az általuk fellelt *absurdum*ot logikai ellentmondásként vagy valami olyasmiként, ami számukra a vizsgálódás lezárását eredményezhette volna.

A korábbi matematikatörténeti kép szerint úgy lehetett volna látni a két Bolyai és Saccheri közti különbséget, hogy mindnyájan ellentmondást kerestek, de szemben a két Bolyaival csak Saccheri vélte úgy, hogy azt is talált. Az újonnan rekonstruált módszertan fényében azonban a dolog úgy néz ki, hogy a Bolyaiak nem ellentmondást, csupán abszurditást kerestek, és azt is találtak.

Érdemes felfigyelni arra a körkörösségre, amit az eredményeink felszínre hoznak. A korábbi matematikatörténeti kép szerint ugyanis úgy festett a dolog, hogy a Bolyaiak attól függetlenül azonosították volna matematikai abszurditásként a módszer által szolgáltatott eredményeket, hogy ellentmondást kerestek. Az új kép fényében azonban nem ez a helyzet: a módszer céljából fakadó előzetes várakozás és a módszer által szolgáltatott eredmények azonosságot mutatnak, és egy olyan kört rajzolnak, hogy mind a Bolyaiak, mind Saccheri azt találták, amiért előzetesen elindultak. A módszer által szolgáltatott eredmények értékelése valamilyen módon nem független attól, ami a módszer eredendő célja. Ez a matematikatörténeti eset azt sugallja, hogy a matematikai eredmények értékelésében az előzetes várakozásoknak és szándékoknak nagyobb szerepe lehet, mint azt gondolni szokás.

V. TÁVLATOK

A matematika- és tudománytörténet számos történetet ismer azzal kapcsolatban, hogy bizonyos matematikai fogalmak milyen lényeges változásokon mentek keresztül. Ebből a szempontból az *absurdum*, illetve a *reductio ad absurdum* kifejezések újabb példát szolgáltatnak, és megerősítik azt a történeti módszertani hozzáállást, hogy minden centrális filozófiai, tudományos és matematikai terminust szemantikailag terheltnek kell tekinteni, és azzal az alapvető gyanúval kell közeledni hozzájuk, hogy esetleg mást jelentenek, mint amit evidensnek veszünk.

Hasonlóan általános formában szeretném felvetni azt a kérdést, amit a jelen esettanulmány sugall, jelesül, hogy a nem-empirikus vizsgálódások esetében mennyiben találhatók analóg jelenségek azzal, mint amit a tudományfilozófiai a megfigyelések elméletterheltsége kapcsán a megfigyelési várakozásoknak az észlelésben játszott szerepével összefüggésben jól ismer.

IRODALOM

Benkő Samu 1975. *Bolyai-levelek.* Bukarest, Kriterion.

Alexander, Amir R. 2006. Tragic mathematics: romantic narratives and the refounding of mathematics in the early nineteenth century. *Isis* 97. 714–726.

Bolyai Farkas 1804. A párhuzamosok elmélete. In Stackel 1914/2, 5–15.

Bolyai Farkas 1808. A párhuzamosok elméletének toldaléka. In Stackel 1914/2, 16–22.

Bonola, Roberto 1906/1955. *La geometria non-euclidea: esposizione storico-critica del suo sviluppo.* Bologna, Ditta Nicola Zanichelli. Angol változat: *Non-Euclidean Geometry. A Critical and Historical Study of its Developments.* Ford. Hoartio Scott Carslaw. New York, Dover.

Boyer, Carl B. 1968. *A History of Mathematics.* New York, John Wiley & Sons.

Eves, Howard 1958. *Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics.* Mineola, New York, Dover.

Gray, Jeremy 1979. *Ideas of Space: Euclidean, Non-Euclidean, and Relativistic.* Oxford, Clarendon.

Gray, Jeremy 2004. *János Bolyai, Non-Euclidean Geometry, and the Nature of Space.* Cambridge/MA, MIT Press.

Houzel, Christian 1992. The birth of non-Euclidean geometry. In Luciano Boi – Dominique Flament – Jean-Michel Salanskis (szerk.) *1830–1930: A Century of Geometry: Epistemology, History and Mathematics.* Berlin, Springer. 3–21.

Martin, George Erward 1975. *The Foundations of Geometry and the Non-Euclidean Plane*. New York, Springer.

Rosenfeld, Boris Abramovich 1988. A History of Non-Euclidean Geometry. Evolution of the Concept of a Geometric Space. *Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences*. 12. Ford. Abe Shenitzer – Hardy Grant. New York, Springer.

Sommerville, Duncan MacLaren Young 1958. *The Elements of Non-Euclidean Geometry*. New York, Dover.

Stackel, Paul 1913. *Wolfgang und Johann Bolyai geometrische Untersuchungen, mit Unterstützung der Ungarischen Akademie der Wissenschaften*. Liepzig–Berlin, B. G. Teubner.

Stackel, Paul 1914. *Bolyai Farkas és Bolyai János geometriai vizsgálatai*. Ford. Rados Ignácz. Budapest, Magyar Tudományos Akadémia.

Stillwell, John 1989. *Mathematics and Its History*. New York, Springer.

Struik, Dirk J. 1981. Janos (Johann) Bolyai. In Charles C. Gillispie (szerk.) *Dictionary of Scientific Biography* Vol. 2. New York, Charles Scribner's Sons. 269–271.

Szénássy Barna 1970. *A magyarországi matematika története*. Budapest, Akadémiai.

Szénássy Barna 1975. *Bolyai Farkas (1775–1856)*. Budapest, Akadémiai.

Szénássy Barna 1992. *History of Mathematics in Hungary until the 20th Century*. Ford. Pokoly Judit. Budapest, Akadémiai/Springer.

Weszely Tibor 1981. *Bolyai János matematikai munkássága*. Bukarest, Kriterion.

Weszely Tibor 2002. *Bolyai János. Az első 200 év*. Budapest, Vince.