12

SUR LES ANNEAUX INFINIS NE CONTENANT QUE DES SOUS-ANNEAUX NONTRIVIAUX DE L'INDEX FINI

F. Szász (Debrecen)

Dans cet article est traité un problème de la théorie des anneaux Nous avons déterminé dans un article antérieur [5] tous les anneaux R n'ayant que des sous-anneaux qui sont les multiples nR, où nR est engendré des éléments $n\gamma$ ($\gamma \in R$ et n est un nombre rationnel entier). L'ensemble des anneaux cycliques épuise la classe des anneaux de cet attribut, où un anneau R est nommé anneau cyclique dès que son groupe additif R^+ est cyclique. A titre d'exemple l'anneau J des nombres rationnels entiers est évidemment cyclique.

Il est bien trivial que tous les sous-anneaux S d'un anneau fini R ont des indices finis dans R. Nous remarquons que Y. G. Fedorov (Ю. Г. Фёдоров) a déterminé dans son article intéressant [7] tous les groupes infinis G ne contenant que des sous-groupes non-triviaux de l'index fini. Puis I. Kovács a vérifié dans son article [1] que si un anneau infini R n'a pas d'idéaux à gauche infinis et non-triviaux, alors il est un corps ou bien un zéro-anneau avec le groupe additif du type p^∞, où $R^2=0$.

Au moyen de ces remarques nous allons introduire la suivante.

Définition. Un anneau R est nommé anneau de l'attribut A dès qu'il est infini et ne contient que des sous-anneaux non-triviaux de l'index fini. Par exemple l'anneau J possède l'attribut A.

On remarque que les notions les plus importantes de l'algèbre moderne sont accessibles e.g. dans les livres [2], [3] et [4]. Après cela nous approuvons le théorème suivant qui sert à caractériser les anneaux infinis cycliques. La preuve tâche d'être élémentaire et brève.

Théorème. Un anneau infini et associative R, possède l'attribut A dans le cas et uniquement dans le cas, où il est cyclique.

Démonstration. Si R contient un élément $a \neq 0$ de l'ordre fini, alors R^+ est de l'ordre borné, parce que R/R^* est fini, où R^* signifie un idéal constitué des éléments de l'ordre p (p est un nombre premier). Mais R est évidemment un p-anneau sur la base de l'attribut A et du fait que R est la somme directe de ses p-composants en raison de la théorie des anneaux. Si $pR \neq \{0\}$, alors R/pR serait fini, mais c'est impossible à cause de la décomposition directe $R^+ = \sum C(p^n)$ et du fait élémentaire $R^+/pR^+ = \Sigma C(p^n)/p\,.\,C(p^n)$ puisque R^+/pR^+ a infini de composant $C(p)$. C'est pourquoi nécessairement $pR = \{0\}$. On peut remarquer que n'importe quel sous-anneau S d'un anneau R d'attribut A possède à son tour l'attribut A, ainsi un p-anneau élémentaire $\{a\}$, engendré par l'élément a doit avoir l'attribut A. Conséquemment $\{a\}$ ne contient que des sous-anneaux non triviaux infinis, c'est-à-dire l'élément a est transcendent sur K_p à cause du fait $pR = \{0\}$, où K_p est un corps premier de la caractéristique p. Maintenant nous montrons l'existence des éléments algébriques sur K_p, et c'est ce qui se ferait pendant que $pR = \{0\}$. Soit $S = \{a^2\}$ le sous-anneau regardé dans $\{a\}$, c'est pourquoi $\{a^2\}$ est d'index fini dans $\{a\}$, ainsi il y a des éléments a^{2m+1} et a^{2n+1} dans la suite infini $a, a^3, a^5, a^7, \ldots$ pour laquelle $a^{2m+1} - a^{2n+1} \in \{a^2\}$, c'est-à dire il existe un polynome $f(x) \in x\,.\,K_p[x]$ pour lequel $a^{2m+1} - a^{2n+1} = f(a^2)$, mais ce fait contredit à la transcendence de l'élément a sur K_p.

Donc R est de caractéristique 0. S'il existe un sous-anneau propre cyclique $C \neq \{0\}$, alors $n\ R \subseteq C$ pour un $n > 0$ à cause de l'attribut A. Mais ainsi nR est cyclique. On peut constater que la correspondance $\gamma \to n\gamma$ est un isomorphisme du groupe R^+ sur son sous-groupe $(nR)^+$, donc R est aussi cyclique. Ainsi cela suffit à vérifier l'existence des sous-anneaux non-triviaux cycliques dans R.

Quand R est sans diviseurs de zéro, alors la correspondance $\gamma \to \gamma a\ (a \in R)$ est un isomorphisme du groupe R^+ sur $(Ra)^+$, où $a \neq 0$. Donc $nR \subseteq Ra$ à cause de l'attribut A avec un nombre convenable $n \in J$. Soit maintenant $0 \neq b \in R$, pour lequel $na = ba$. On va considérer l'ensemble von-vide S de tous les éléments $c \in R$ pour lesquels il y a un nombre n_c — défini uniquement avec $c\,.\,a = n_c\,.\,a$. On peut approuver avec une calculation assez simple que la correspondance $c \to n_c$ est un isomorphisme du sous-anneau S sur un sous-anneau T de l'anneau J, c'est pourquoi S et R même sont cycliques.

Quand R contient des éléments $a \neq 0$ et $b \neq 0$, et $ab = 0$, alors l'intersection $Z = \{a\} \cap \{b\}$ est un zéro-anneau $\neq 0$ qui contient naturellement un sous-anneau cyclique $C = \{z\} \neq \{0\}$.

Inversement, il est bien évident que l'anneau infini et cyclique n'a que des sous-anneaux non-triviaux de l'index fini.

Ainsi le théorème est démontré.

Reçu le 26. 2. 1956

LITTERATURE

1. István Kovács. Infinite rings without infinite proper subrings, Publ. Math. Debrecen 4 (1955) pp. 104—107.
2. А. Г. Курош. Теория групп, Москва, 1953.
3. G. Pickert. Einführung in die höhere Algebra, Göttingen, 1951.
4. L. Rédei. Algebra I., Budapest, 1954.

5. F. Szász. On rings every subring of which is a multiple of the ring. Publ. Math. Debrecen 4 (1956), pp. 237—238.

6. T. Szele. On direct decompositions of abelian groups. Journal of the London Math. Soc., 28 (1953) pp. 247—250.

7. Ю. Г. Фёдоров. О бесконечных группах, все нетривиальные подгруппы которых имеют конечный индекс, Успехи Мат. Наук, 6:1 (1951), 187—189.