/16

Die Abelschen Gruppen, deren volle Endomorphismenringe die Minimalbedingung für Hauptrechtsideale erfüllen

Von

F. Szász, Budapest

(Eingegangen am 25. Mai 1960)

Die folgende allgemeine Frage scheint bemerkenswert: Es sind alle Abelschen Gruppen G zu bestimmen, deren (voller) Endomorphismenring eine festgewählte Eigenschaft E besitzt. In dieser Note werden wir ein spezielles Problem von derselben Art erörtern.

Bekanntlich hat Professor *L. Fuchs* in seinem Buch [2] alle Abelschen Gruppen bestimmt, deren volle Endomorphismenringe die Minimalbedingung für Linksideale erfüllen. Schreibt man die Endomorphismen der Gruppe immer als rechtsseitige Operatoren, so sieht man, daß zwei verschiedene Probleme entstehen, wenn man die Minimalbedingung erstens für Linksideale, zweitens für Rechtsideale fordert.

Der Zweck der vorliegenden Note ist nun, zu zeigen, daß man stets dieselbe Klasse von Abelschen Gruppen als Lösung der Frage erhält, wenn man die Minimalbedingung erstens für die Linksideale, zweitens für die Hauptlinksideale, drittens für die Rechtsideale, viertens für die Hauptrechtsideale voraussetzt. Aus unserem Satz folgt ferner, daß nur die endlichen Abelschen Gruppen endliche volle Endomorphismenringe haben. Wir werden auch eine notwendige Bedingung dafür herleiten, daß im vollen Endomorphismenring von G die Minimalbedingung für die (zweiseitigen) Hauptideale gelte.

Bezüglich der Grundbegriffe verweisen wir auf das Buch [2]. Weiter haben wir eine Theorie der *MHR*-Ringe (d. h. Ringe mit Minimalbedingung für Hauptrechtsideale) in unserer Kandidatsdissertation [3] entwickelt. Für die Publikation des Stoffes der Dissertation verweisen wir auf [4] bzw. [5], [7] und [6]. Inzwischen erschien nämlich auch eine Note von *C. C. Faith* über ähnliche ringtheoretische Fragen.

Es gilt nun der

Satz. *Es sei G eine beliebige Abelsche Gruppe und A der volle Endomorphismenring (als ein rechtsseitiger Operatorenbereich) von G. Dann sind die folgenden Bedingungen untereinander äquivalent:*

1. *im Endomorphismenring A gilt die Minimalbedingung für Hauptrechtsideale;*
2. *im Endomorphismenring A gilt die Minimalbedingung für Hauptlinksideale;*
3. *G ist die direkte Summe einer endlichen Abelschen Gruppe und endlich vieler Exemplare $\mathfrak{R}$ der additiven Gruppe aller rationalen Zahlen;*
4. *im Endomorphismenring A gilt die Minimalbedingung für Rechtsideale;*
5. *im Endomorphismenring A gilt die Minimalbedingung für Linksideale.*

Ergänzung. *Gilt in A die Minimalbedingung für die zweiseitigen Hauptideale, so ist G notwendig die direkte Summe einer Abelschen Gruppe von beschränkten Ordnungen der Elemente und von Exemplaren $\mathfrak{R}$ der additiven Gruppe aller rationalen Zahlen. Ist insbesondere A endlich, so ist G ebenfalls endlich.*

Nun werden wir zwei elementare Hilfssätze beweisen:

Hilfssatz 1. Es sei $\eta, \vartheta \in A$, $\eta = m\chi (\chi \in A)$ und $n\vartheta = 0$ $(1 \leqq m, n \in J$; J ist der Ring der ganzen rationalen Zahlen). Dann bestehen $G\eta \subseteq mG$ und $n(G\vartheta) = 0$.

Beweis. Es gilt $G\eta = G(m\chi) = m(G\chi) \subseteq mG$. Ferner ist $n(G\vartheta) = G(n\vartheta) = G\,0 = 0$.

Hilfssatz 2. Es sei G die direkte Summe abzählbar unendlich vieler Untergruppen $G_i \neq 0$ $(i=1, 2, 3, \ldots)$. Dann gilt im vollen Endomorphismenring A der Abelschen Gruppe G die Minimalbedingung weder für die Hauptrechtsideale, noch für die Hauptlinksideale.

Beweis. Die Untergruppen $S_n = \sum_{j=n+1}^{\infty}{}^{+} G_j$ bilden eine unendliche absteigende Kette der direkten Summanden von G. Es sei π_n die Projektion (d. h. ein idempotenter Endomorphismus) von G auf S_n (denn es gilt $G = G_1 \oplus \ldots \oplus G_n \oplus S_n$ für jeden Index n). Nun bestehen $\pi_n \pi_{n-1} = \pi_n$ und $\pi_{n-1}\pi_n = \pi$ wegen $S_n \subset S_{n-1}$. Also erhält man für die Hauptlinksideale $(\pi_n)_l$ von A eine Beziehung $(\pi_{n-1})_l \supseteq (\pi_n)_l$ und für die entsprechenden Hauptrechtsideale die Relation $(\pi_{n-1})_r \supseteq (\pi_n)_r$. Wir zeigen nun, daß das Umfassen echt ist. Da der Ring A ein zweiseitiges Einselement e besitzt, genügt es, die Unlösbarkeit sowohl einer Gleichung $\eta_n \pi_n = \pi_{n-1} (\eta_n \in A)$ als einer Gleichung $\pi_n \vartheta_n = \pi_{n-1}$ $(\vartheta_n \in A)$

nachzuweisen. Dies folgt aber wegen $S_{n-1} = G_n \oplus S_n$ aus den folgenderweise entstehenden Widersprüchen: $G_n = G_n \pi_{n-1} = G_n(\eta_n \pi_n) = (G_n \eta_n) \pi_n \subseteq G \pi_n = S_n$, $G_n \subseteq S_n \cap G_n$, $G_n = 0$ bzw. $G_n = G_n \pi_{n-1} = (\pi_n \vartheta_n) = (G_n \pi_n) \vartheta_n = 0 \vartheta_n$, $G_n = 0$, denn es gilt $G_n \neq 0$. Hiernach bestehen $(\pi_{n-1})_l \supset (\pi_n)_l$ und $(\pi_{n-1})_r \supset (\pi_n)_l$ für jeden Index n, w.z.b.w.

Der Beweis des Satzes besitzt das folgende logische Schema bezüglich des Verhältnisses der Bedingungen, die im Satz erwähnt wurden:

Aus 1) folgt 3). Nehmen wir an, daß die Bedingung 1) erfüllt ist. Es sei ferner ε das Einselement (= der identische Automorphismus von G) aus A, und $(m\,\varepsilon)_r$ ein minimales Hauptrechtsideal von A in der Menge aller Hauptrechtsideale der Gestalt $(n\,\varepsilon)_r = n\,A (m, n \in J)$. Dann gilt $m\,A = k\,m\,A$ für jede natürliche Zahl k, folglich besteht auch $m\,\varepsilon = k\,m\,\chi_k$ ($\chi_k \in A$; $1 \leqslant k \in J$). Nach dem Hilfssatz 1. erhält man $m\,G = G(m\,\varepsilon) \subseteq k\,m\,G \subseteq m\,G$ d. h. $m\,G = k\,m\,G$ $(k=1, 2, 3, \ldots)$. Die vollständige Abelsche Gruppe $m\,G$ ist also ein direkter Summand in G. Folglich gibt es eine Untergruppe H von G mit $G = m\,G \oplus H$, die wegen $H \cong G/m\,G$ beschränkt ist, d. h. $m\,H = 0$. Da ein Endomorphismus χ_p mit $m\,\varepsilon = p\,m\,\chi_p$ in einer Untergruppe $Z(p^\infty)$ von G keine eindeutige Abbildung wäre, so existiert in G keine $Z(p^\infty)$, und es gilt

$$G = \sum_{\nu} \oplus \underset{(\nu)}{\mathfrak{R}} \oplus \sum_{p_\nu^{k_\nu}/m} \oplus Z(p_\nu^{k_\nu})$$

denn jede beschränkte Gruppe läßt sich in die direkte Summe von zyklischen Gruppen zerlegen. Nach dem Hilfssatz 2. besitzt aber $\sum_{\nu} \oplus \underset{\nu}{\mathfrak{R}}$ einen endlichen Rang n_0 und auch die Untergruppe $\sum_{p_\nu^{k_\nu}/m} \oplus Z(p_\nu^{k_\nu})$ ist endlich.

Aus 2) folgt 3). Der Beweis ist dem von „aus 1) folgt 3" ähnlich.

Aus 3) folgt 4). Im Falle der Bedingung 3) ist der volle Endomorphismenring A_1 von $\sum_{\nu} \oplus \underset{\nu}{\mathfrak{R}}$ ein voller Matrizenring des Typs $n_0 \chi n_0$ über dem rationalen Zahlkörper K_0, und der volle Endomorphismenring A_2 von $\sum_{p_\nu^{k_\nu}/m} \oplus Z(p_\nu^{k_\nu})$ ist endlich. In diesen zwei Ringen gilt offenbar die Minimalbedingung für (alle) Rechtsideale. Da die Gruppe $\mathfrak{R}$ keine echte Untergruppe mit endlich vielen Nebenklassen in $\mathfrak{R}$ besitzt, ist jeder Homomorphismus von $\mathfrak{R}$ in eine endliche Abelsche Gruppe der Nullhomomorphismus. Ferner ist jeder Homomorphismus einer endlichen Gruppe in $\sum_{\nu} \oplus \underset{(\nu)}{\mathfrak{R}}$ der Nullhomomorphismus, denn $\sum_{\nu} \oplus \underset{(\nu)}{\mathfrak{R}}$ ist torsionsfrei. Folglich gilt im Ring A, der hiernach die ringtheoretische direkte Summe der obigen Ringe A_1 und A_2 ist, die Minimalbedingung für (alle) Rechtsideale.

Aus 3) folgt 5). Der Beweis ist dem von „aus 3) folgt 4)" ganz ähnlich.

Aus 4) folgt 1). Dies ist klar.

Aus 5) folgt 2). Dies ist ebenfalls trivial.

Somit ist der Satz bewiesen.

Die erste Behauptung der Ergänzung folgt aus der Untersuchung der Hauptideale $(n\,\varepsilon) = A(n\,\varepsilon)\,A = n\,A$ von A mit Hilfe ähnlicher Methoden wie beim Beweis der Aussage „aus 1) folgt 3)". Ist nun A insbesondere endlich, so ist G ebenfalls endlich wegen des Satzes, denn A besitzt keinen unendlichen Unterring $A_1 \cong (K_0)_{n_0}$, der der Endomorphismenring von $\sum_{\nu} \underset{(\nu)}{\mathfrak{R}}$ ist, und hiernach enthält G tatsächlich keine Untergruppe $\mathfrak{R}$.

Literatur

[1] *C. C. Faith*, Rings with minimum condition on principal ideals, Archiv der Math., 10: 5 (1959) 327—330.

[2] *L. Fuchs*, Abelian groups, Publishing House Hung. Acad. Sci. Budapest (1958).

[3] *Szász F.*, A főjobbideálokra nézve minimum-feltételü gyürük (kandidátusi disszertáció), Budapest (1959).

[4] *F. Szász*, Über Ringe mit Minimalbedingung für Hauptrechtsideale I., Publ. Math. Debrecen 7. (Im Erscheinen.)

[5] *F. Szász*, Über Ringe mit Minimalbedingung für Hauptrechtsideale II., Acta Math. Acad. Sci. Hung. (Im Erscheinen.)

[6] *Szász F.*, Az operátormodulusok Kertész-féle radikáljáról, M. T. A. III. Oszt. Közl. 10 (1960) 35—38.