23

MATHEMATICS

BEMERKUNGEN ZU ASSOZIATIVEN HAUPTIDEALRINGEN

VON

FERENC A. SZÁSZ (Budapest)

(Communicated by Prof. N. G. DE BRUIJN at the meeting of June 24, 1961)

Sowohl in der Zahlentheorie, als auch in der Theorie der Operatormoduln spielen die kommutativen nullteilerfreien Hauptidealringe mit Einselement eine wichtige Rolle. Im Buch [5] von N. JACOBSON wurden auch die nichtkommutativen Hauptidealringe ohne Nullteiler diskutiert. Diese Ringe und insbesondere die diskreten Bewertungsringe wurden im Buch [7] von J. KAPLANSKY von einem anderen Gesichtspunkt aus untersucht. Neulich ist die Struktur der kommutativen Hauptidealringe, die im allgemeinen auch Nullteiler, aber kein Einselement haben können, in der Arbeit [15] von G. POLLÁK erörtert worden. In gewissen Sinne wurde die Strukturfrage der beliebigen kommutativen Hauptidealringe auf den Fall der kommutativen Hauptidealringe mit Einselement zurückgeführt. Ferner hat G. POLLÁK in [15] darauf hingewiesen, dass ein direkt unzerlegbarer kommutativer Hauptidealring mit Einselement entweder nullteilerfrei ist, oder ein einziges Primideal ($\neq O$) hat, das ein nilpotentes maximales Ideal ist.

Andererseits hat unsere Arbeit [17] in einer Aufzählung nach der additiven Gruppe des Ringes die Klasse $\mathscr{K}$ aller solchen (assoziativen) Ringe ganz explizit bestimmt, deren jedes echte endlich erzeugbare Unterring ein Hauptrechtsideal des Ringes ist [1]). Ist insbesondere ein Ring A aus $\mathscr{K}$ auch selbst ein Hauptrechtsideal von A, so ist A kommutativ und jeder Unterring von A ist dann ein Hauptideal von A (vgl. [17]).

In der vorliegenden Note möchten wir einige Eigenschaften gewisser Hauptidealringe, der s.g. Ω-Ringe betrachten.

In dieser Note werde ein assoziativer Ring A kurz ein Ω-Ring genannt, wenn jedes Rechtsideal ein Hauptrechtsideal von A, und jedes Linksideal ein Hauptlinksideal von A ist. Also wird in dieser Definition weder die

---

1) Die Ringe aus $\mathscr{K}$ brauchen im allgemeinen nicht kommutativ zu sein, und sie können auch Nullteiler bzw. kein Einselement haben. Jeder Ring aus $\mathscr{K}$ hat nur abzählbar viele Elemente; jedoch ist die Mächtigkeit aller nichtisomorphen Ringe aus $\mathscr{K}$ das Kontinuum. Ferner gilt in einem Ring aus $\mathscr{K}$ im allgemeinen weder die Maximalbedingung, noch die Minimalbedingung für die Rechtsideale. In diesen Ringen stimmt das klassische Radikal (d.h. die Summe aller nilpotenten Rechtsideale) mit dem Brown–McCoyschen Radikal überein, und der Faktorring nach diesem Radikal ist dann eine subdirekte Summe von endlichen Primkörpern.

Kommutativität, noch die Nullteilerfreiheit, noch die Existenz des Einselementes vorausgesetzt.

Alle kommutativen Hauptidealringe sind Ω-Ringe, und der Quaternionenschiefkörper ist ein nichtkommutativer Ω-Ring. Jeder halbeinfache Ring mit Minimalbedingung für Rechtsideale ist ebenfalls ein Ω-Ring. Die diskrete ringdirekte Summe von unendlich vielen Schiefkörpern ist aber kein Ω-Ring. Dieses Beispiel zeigt, dass eine subdirekte Summe von subdirekt-unzerlegbaren Ω-Ringen im allgemeinen kein Ω-Ring zu sein braucht. Jedoch ist jeder Ω-Ring eine subdirekte Summe von subdirekt unzerlegbaren Ω-Ringen, denn die Ω-Eigenschaft ist invariant für Ringhomomorphismen.

In einigen Fällen brauchen wir noch die folgende Bedingung:

(V): *es gilt* $x \in xA \cap Ax$ *für jedes Element* x *des Ringes* A.

Ein Ω-Nilring (z.B. der Zeroring über der additiven unendlichen zyklischen Gruppe) befriedigt die Bedingung (V) nicht. Jeder Ring mit Einselement ist offenbar ein Ring mit Bedingung (V'), und es gibt viele Ringe ohne Einselement, in denen die Bedingung (V) erfüllt ist. (Siehe z.B. die diskrete direkte Summe von unendlich vielen Schiefkörpern.) Der Ring $A=\{a,b\}$ mit den Relationen $2a=2b=a^2=ab=ba+a=b^2+b=0$ erfüllt die Bedingung (V) nicht, und A ist kein Ω-Ring, denn A ist kein Hauptlinksideal, obwohl jedes Rechtsideal von A ein Hauptrechtsideal ist. Hiernach sind die linksseitigen und rechtsseitigen Bedingungen in der Definition der Ω-Ringe voneinander unabhängig.

Ist in einem Ring jedes Rechtsideal ein Hauptrechtsideal, so ist auch jedes Ideal ein Hauptideal. Dies gilt also auch in den Ω-Ringen. In einem solchen einfachen Ring mit Minimalbedingung für Hauptrechtsideale, in dem die Minimalbedingung für alle Rechtsideale nicht gilt, ist jedes Ideal ein Hauptideal, aber nicht jedes Rechtsideal ein Hauptrechtsideal. Solche Ringe wurden in [18] untersucht und dort einige auch explizit gegeben. Offenbar ist ein Ω-Ring dann und nur dann ein Ring mit Minimalbedingung für die Rechtsideale, wenn in ihm die Minimalbedingung für die Hauptrechtsideale gilt.

(1) *Ein assoziativer Ring* A *ist dann und nur dann ein* Ω*-Ring mit Einselement, wenn* A *die ringdirekte Summe von endlich vielen ringdirekt unzerlegbaren* Ω*-Ringen mit Einselement ist.*

Zum Beweis ist nämlich jeder direkte Summand, als ein endomorphes Bild von A, ebenfalls ein Ω-Ring mit Einselement. Es sei A_1 ein direkt unzerlegbarer direkter Summand von A, d.h. $A=A_1 \oplus B_1$. Ähnlich erhält man durch Iteration $A=A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_n \oplus B_n$, wobei alle A_i direkt unzerglegbar sind. Da A ein Einselement hat, ist die Anzahl der von Null verschiedenen direkt unzerlegbaren Summanden A_i endlich. Daher gilt $A=A_1 \oplus \dots \oplus A_m$, w.z.b.w.

(2) *In einem* Ω*-Ring* A *gilt die Maximalbedingung sowohl für die Rechtsideale, als auch für die Linksideale.*

Ein wohlbekannter Beweis folgt daraus, dass die einseitigen Ideale endlich erzeugbar sind. Die Vereinigung einer wachsenden Rechtsidealkette ist nämlich ein Hauptrechtsideal von A, dessen ein erzeugendes Element in einem Rechtsideal der Kette liegt.

(3) *In einem Ω-Ring A existiert stets das Koethesche Radikal, das jetzt mit dem Baer–McCoyschen unteren Nilradikal, mit dem Levitzkischen Radikal und mit dem oberen Nilradikal von A übereinstimmt.*

Der Beweis folgt aus (2) und aus einem tiefen Satz von Levitzki [11], [6, Seite 199.], nach dem jedes Nilrechtsideal eines Ringes mit Maximalbedingung für Rechtsideale nilpotent ist, w.z.b.w.

Es ist zu bemerken: Im Zahlring A aller rationalen Zahlen mit ungeraden Nennern gilt offenbar die Bedingung (V), und wegen der Nullteilerfreiheit ist das obere Nilradikal von A genau (O), das in A ein vollständiges Primideal ist. (P ist in A ein vollständiges Primideal, wenn aus $xy \in P$ stets $x \in P$ oder $y \in P$ folgt. Hiernach ist jedes vollständiges Primideal auch ein Primideal des Ringes; das umgekehrte gilt aber für nichtkommutative Ringe im allgemeinen nicht.) Im obigen Zahlring A ist sowohl das Jacobsonsche Radikal, als auch das Brown–McCoysche Radikal von A genau $2A$ $(\neq O)$.

Nach einem anderen Satz von Levitzki [12], [6, Seite 196] und nach (3) enthält jedes Primideal P des Ω-Ringes das obere Nilradikal N.

(4) *Sei A ein Ω-Ring, P ein vollständiges Primideal von A und $x \in (xA+P) \cap (Ax+P)$ für jedes $x \in A$ (d.h. in A/P gilt die Bedingung (V)). In diesem Fall hat A/P notwendig ein Einselement, und in A gilt die Minimalbedingung für alle solchen Rechtsideale und Linksideale, die das Ideal P und ein festes Element $b \notin P$ $(b \in A)$ enthalten.*

Zum Beweis sei nach den Methoden von [5] eine Kette $(a_1)_r \supseteq (a_2)_r \supseteq (a_3)_r \supseteq \dots$ mit $(a_i)_r \supseteq (P, b)_r$ $(a_i, b \notin P,\ a_i,\ b \in A;\ i=1, 2, 3, \dots)$ gegeben. Dann gelten wegen $a_i \in a_iA+P$ offenbar $b=a_ib_i+c_i$ und $a_{i+1}=a_id_i+c_i'$ mit Elementen $c_i, c_i' \in P;\ b_i, d_i \notin P$ für $i=1, 2, 3, \dots$. Da P ein vollständiges Primideal ist, und

$$a_ib_i+c_i=a_{i+1}b_{i+1}+c_{i+1}\ (b=b)$$

gilt, erhält man wegen $a_i \notin P$ und $a_i(d_ib_{i+1}-b_i) \in P$ sofort $d_ib_{i+1}-b_i \in P$. Daher besteht $(b_{i+1})_l+P \supseteq (b_i)_l+P$, und nach (2) existiert ein m mit $(b_n)_l+P=(b_{n+1})_l+P$ für jedes $n \geqq m$. Wegen $b_n \in Ab_n+P$ existiert auch ein $f_n \in A$ und $g_n \in A$ mit $b_{n+1}=f_nb_n+g_n$, woraus sich wegen $d_nb_{n+1}-b_n \in P$ auch $d_nf_nb_n-b_n \in P$ ergibt. Sind nun $x \notin P$ und $y \notin P$ beliebige Elemente von A, so folgt $(xd_nf_n-x)\,b_n \in P$ und wegen $b_n \notin P$ auch $xd_nf_n-x \in P$. Daher erhält man wegen $x(d_nf_ny-y) \in P$ und wegen $x \notin P$ sofort $d_nf_ny-y \notin P$. Also ist das Produkt d_nf_n ein zweiseitiges Einselement im nullteilerfreien Ring A/P. Hiernach besteht wegen $a_{n+1}=a_nd_n+c_n'$ gewiss $a_n=a_{n+1}f_n+h_n$ mit einem Element $h_n \in P$. Folglich ergibt sich wegen $(a_n)_r \supseteq P$ auch $(a_n)_r=(a_{n+1})_r$, w.z.b.w.

(5) *Sind A ein Ω-Ring, P ein vollständiges Primdieal von A derart, dass P ein echter Teil des Jacobsonschen Radikals J von A ist, und dass $x \in (xA+P) \cap (Ax+P)$ für jedes $x \in A$ gilt, so besteht $G=J$ für das Brown-McCoysche Radikal G von A.*

Beweis folgt aus (2) und (4).

Ich weiss bisher noch nicht, ob $G=J$ für jeden Ω-Ring gelten soll.

Es ist ferner zu bemerken, dass sich im kommutativen Ω-Ring $A=\{a\}$ mit den Relationen $2a=a^3+a^2=0$ $(a^2+a\neq 0)$ offenbar $Z=A\neq G=J=\{a^2+a\}$ ergibt, wobei Z das Fuchssche Zeroidradikal [3] von A bezeichnet. Im schon erwähnten Ring A der rationalen Zahlen mit ungeraden Nennern erhält man aber $Z=(0)\neq 2A=G=J$.

(6) *Ist A ein primitiver Ω-Ring mit von Null verschiedenen minimalen Rechtsidealen, so ist A ein einfacher Ring mit Minimalbedingung für Rechtsideale.*

Zum Beweis sei S der Rechtssockel von A. Da es ein $s \in S$ mit $S=(s)_r$ gibt, ist S die Summe von endlich vielen idempotenten minimalen Rechtsidealen. Hiernach hat S ein Linkseinselement e, das wegen der Halbeinfachheit von A bzw. von S auch ein zweiseitiges Einselement des Ideales S von A ist. Daher ist S ein ringdirekter Summand von A, d.h. $A=S\oplus T$ mit einem Ideal T von A, woraus wegen der Primitivität von A sofort $T=O$ folgt. Im Fall eines treuen einfachen A-Moduls M erhält man nämlich wegen $S\neq 0$ offenbar $MS\neq 0$, also $M=MS$. Wegen $ST=0$ und wegen der Primitivität von A besteht nun wirklich $T=0$ und somit $A=S$. Nach einem wohlbekannten Satz von E. Noether ist dann A ein einfacher Ring mit Minimalbedingung für die Rechtsideale, denn A ist die (direkte) Summe endlich vieler idempotenter minimaler Rechtsideale von A, w.z.b.w.

(7) *Ein von Neumann-regulärer Ring A mit Einselement ist dann und nur dann ein Ω-Ring, wenn A ein halbeinfacher Ring mit Minimalbedingung für Rechtsideale ist.*

Zum Beweis erwähnen wir einen von Neumannschen Satz [14], nach dem zu jedem Hauptrechtsideal $(a)_r$ in einem regulären Ring A mit Einselement ein Hauptrechtsideal $(b)_r$ mit $(a)_r \cap (b_r)=0$ und $A=(a)_r+(b)_r$ d.h. mit $A=(a)_r\oplus(b_r)$ existiert. Da aber A ein Ω-Ring ist, ist jedes Rechtsideal R von A ein direkter Summand des A-Rechtsmoduls A, woraus folgt, dass A die direkte Summe von endlich vielen idempotenten minimalen Rechtsidealen ist. Die Anwendung des Noetherschen Satzes beweist nun die Behauptung (7), w.z.b.w.

Im weiteren werden wir die additive Gruppen von speziellen Ω-Ringen betrachten.

(8) *Eine periodische Abelsche Gruppe A^+ ist dann und nur dann zur additiven Gruppe eines (kommutativen) Ω-Ringes A (mit Einselement) isomorph, wenn $nA^+=0$ mit einer natürlichen Zahl $n(\neq 0)$ besteht (d.h. wenn A^+ von beschränkter Ordnung der Elemente ist).*

In A ist nämlich die additive Untergruppe $A[n]=[x;\, nx=0,\, x\in A]$

ein Ideal, und somit kann wegen (2) keine Folge von Elementen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ mit der Bedingung $O(a_{i+1}) = k_i \cdot O(o_i)$, $k_i > 1$ gegeben werden (k_i ist eine natürliche Zahl, $i = 1, 2, 3, \ldots$), denn sonst gilt die Maximalbedingung für die Ideale $A[O(o_i)]$ nicht.

Umgekehrt sei eine Abelsche Gruppe A^+ mit $nA^+ = 0$ gegeben ($n \neq 0$). Dann ist A^+ die direkte Summe von ihren endlich vielen p-Komponenten A_p^+, und es gilt $p^k A_p^+ = 0$. Nach dem interessanten Lemma 72.4 des Buches [4] von L. Fuchs lässt sich auf jede Gruppe A_p^+ ein solcher kommutativer Ring A_p mit Einselement e_p konstruieren, dessen sämtliche Ideale die Untergruppen $A_p, pA_p, p^2A_p, \ldots, p^{k-1}A_p (\neq 0)$ und $p^kA_p = 0$ sind. Diese Ideale sind offenbar Hauptideale, wie dies $p^iA_p = (p^ie_p)$ zeigt. Definiert man jetzt A, als $\sum_p \oplus A_p$, so ist A nach (1) ein kommutativer Ω-Ring mit Einselement $e = \sum_{p/n} e_p$, w.z.b.w.

9) *Die Abelsche Gruppe A^+ ist dann und nur dann die additive Gruppe eines Ω-Nilringes A, wenn A^+ die direkte Summe von endlich vielen zyklischen Gruppen ist. Insbesondere ist die additive Gruppe A^+ eines Ω-Nilringes A dann und nur dann torsionsfrei, wenn der Ring A über A^+ ein linksseitiges (rechtsseitiges) Annullatorelement $a \neq 0$ mit $O(a) = 0$ hat.*

Nach dem Beispiel des Ringes $A = \{a\}$ mit den Relationen $pa = a^3 = 0$ braucht die additive Gruppe eines nilpotenten Ω-Ringes im allgemeinen nicht zyklisch zu sein.

Zum Beweis von (9) ist zu bemerken, dass ein Ω-Nilring nach (3) stets nilpotent ist. Bestehe nun $A^n = 0$, $A^{n-1} \neq 0$. Im Fall $n = 2$ ist A ein Zeroring, und somit folgt aus $A = (a)_r$ sofort $A = I, a$, wobei I den Ring der ganzen rationalen Zahlen bezeichnet. Die erste Behauptung werde jetzt für alle $k \leq n-1$ als schon bewiesen vorausgesetzt. Dann ist wegen $A^{n-1} \cdot A = 0$ die additive Gruppe $(A^{n-1})^+$ zyklisch, denn A^{n-1} ist ein Hauptrechtsideal von A, und $(A/A^{n-1})^+$ ist wegen der Voraussetzung der Induktion endlich erzeugbar. Daher ist aber auch A^+ selbst eine endlich erzeugbare Abelsche Gruppe. Also kann der Hauptsatz über die endlich erzeugbaren Abelschen Gruppen angewandt werden. — Ist nun A^+ insbesondere torsionsfrei, und besteht $A^n = 0$, $A^{n-1} \neq 0$, so ist $A^{n-1} \neq 0$ ein torsionsfreies Annullatorideal für A. Umgekehrt sei jetzt $A^n = 0$, $A^{n-1} \neq 0$ und $aA = 0$ für ein $a \neq 0$ mit $O(a) = 0$ erfüllt, wobei A ein Ω-Ring ist. Bezeichne T das maximale periodische Ideal von A, und wir werden $T = 0$ indirekt beweisen. Da $TA^{n-1} = 0$ ist, gibt es ein m mit $TA^m = 0$ und $TA^{m-1} \neq 0$. (Im Fall $TA = 0$ soll es $TA^0 = T$ verstanden werden.) Wegen $TA^{m-1} \subseteq T$ existiert ein $t \in T$, $\neq 0$ mit $tA = pt = 0$, wobei p eine Primzahl ist. Da $aA = 0$ besteht, ist die additive Gruppe $B = t \cdot I + a \cdot I$ ein Rechtsideal von A, und zwar ein Hauptrechtsideal $(b)_r$, wofür sich wegen $b = k_1t + k_2a (k_i \in I)$ offenbar $(b)_r = B = I \cdot b$ ergibt. Dann erhält man wegen $a \in B = I \cdot B$ auch $O(b) = 0$, was der Bedingungen $t \in B$, $O(t) = p$ widerspricht. Also muss wirklich $T = 0$ bestehen, w.z.b.w.

(10) *Ist A ein nullteilerfreier Ω-Ring mit der Bedingung (V), so sind die additiven Gruppen von jedem Rechtsideal $R \neq 0$ und von jedem Linksideal*

$L \neq 0$ *untereinander isomorph, und zwar gilt*

$$R^+ \cong A^+ \cong L^+.$$

Ist insbesondere A^+ *torsionsfrei, so hat der Typ von jedem Element* $a \neq 0$ *von* A^+ die Gestalt $(s_1, s_2, s_3, \ldots)$, *wobei entweder* $s_i = 0$, oder $s_i = \infty \, (i = 1, 2, 3, \ldots)$ *gelten. Ist aber* A^+ *bei den obigen Voraussetzungen nicht torsionsfrei, so gilt* $pA^+ = 0$ *für eine Primzahl* p.

Der Beweis der letzten Behauptung folgt einfach aus der Nullteilerfreiheit, denn im Falle $O(a) = p$ ist $a \cdot (pA) = 0$.

Zum Beweis der ersten Behauptung ist zu beobachten, dass bei diesen Bedingungen die Minimalbedingung für die Linksideale und für die Rechtsideale nach (4) in jedem echten homomorphen Bild A^+ von A gilt. Also können wir im torsionsfreien Fall den Satz 75.3 von L. Fuchs [4] bezüglich A^+ anwenden. Ist nun A^+ beliebig, so erhält man wegen der Bedingung (F) offenbar $(a)_r = aA$ und $(b)_l = Ab$. Dann sind die Abbildungen $x \to ax$ und $y \to yb$ wegen der Nullteilerfreiheit von A gruppentheoretische Isomorphismen von A^+. Folglich bestehen

$$R^+ = (a)_r^+ = (aA)^+ \cong A^+ \cong (Ab)^+ = (b)_l^+ = L^+ \qquad (R \neq 0,\ L \neq 0),$$

womit alle Behauptungen in (10) bewiesen sind.

Es scheint interessant die Radikale, die Halbeinfachheiten und die additiven Gruppen der Ω-Ringe ohne beschränkende Nebenbedingungen zu untersuchen.

LITERATUR

1. R. Baer, Radical ideals, Amer. Jour. Math. **65**, 537–568 (1943).
2. Brown, B. and N. H. McCoy, Radicals and subdirect sums, Amer. Jour. Math. **69**, 46–58 (1947).
3. Fuchs, L., On a new type of radical, Acta Sci. Math. Szeged **16**, 43–53 (1955).
4. ———, Abelian groups, Budapest (1958).
5. Jacobson, N., The theory of rings, New York (1943).
6. ———, Structure of rings, Providence (1956).
7. Kaplansky, I., Infinite abelian groups, Ann Arbor (1954).
8. Kertész, A., Beiträge zur Theorie der Operatormoduln, Acta Math. Acad. Sci. Hung. **8**, 235–257 (1957).
9. Koethe, G., Die Struktur der Ringe, deren Restklassenring nach den Radikal vollständig reduzibel ist, Math. Zeitschrift **32**, 161–186 (1940).
10. Levitzki, J., On the radical of a general ring, Bull. Amer. Math. Soc. **39**, 462–466 (1943).
11. ———, Solution of a problem of G. Koethe, Amer. Journ. Math. **67**, 437–442 (1946).
12. ———, Prime ideals and the lower radical, Amer. Jour. Math. **73**, 25–29 (1951).
13. McCoy, N. H., Prime ideals in general rings, Amer. Jour. Math. **71**, 823–833 (1949).
14. Neumann, J. von, On regular rings, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **22**, 707–713 (1936).

15. Pollák, G., Über die Struktur kommutativer Hauptidealringe, Acta Sci. Math. Szeged *22*, 62–74 (1961).

16. Rédei, L., Algebra I, Leipzig (1959).

17. Szász, F., Die Ringe, deren endlich erzeugbare echte Unterringe Hauptrechtsideale sind, Acta Math. Acad. Sci. Hung. 13 (im Erscheinen).

18. ———, Über Ringe mit Minimalbedingung für Hauptrechtsideale, I, Publ. Math. Debrecen 7, 54–64 (1960); II, Acta Math. Acad. Sci. Hung. 12 (im Erscheinen).