

## A tőkepiaci idősorok extrém elmozdulásai

**Kiss Gábor Dávid,**  
a Szegedi Tudományegyetem  
egyetemi adjunktusa  
E-mail: [kiss.gabor.david@eco.u-szeged.hu](mailto:kiss.gabor.david@eco.u-szeged.hu)

**Varga János Zoltán,**  
a Szegedi Tudományegyetem  
PhD-hallgatója  
E-mail: [vmz@eco.u-szeged.hu](mailto:vmz@eco.u-szeged.hu)

A tanulmány célja a tőkepiaci hatékonyság statisztikai elvárásainak sérüléseit kiaknázó eljárások definiálása és összehasonlítása annak érdekében, hogy a főáramúnak tekintett, normális eloszlást feltételező, feltételes varianciára építő value at risk-eljáráshoz képest relevánsabb eredményeket kapjunk az extrém árfolyam-ingadozásokkal kapcsolatban. A szerzők a hatékonyság feltételeinek sérülése alatt a pénzügyi idősorok normális eloszlástól vett eltérését (különösen az alacsony valószínűségű esetekben), a negyedik momentum kiugró értékét és a hosszan fennmaradó autokorrelációt értik és használják fel három különböző eljárás definiálásakor. Az egyes módszerek relevanciájának megállapítása során megvizsgálják, hogy az általuk extrém árfolyammozgásuként definiált kereskedési napok a teljes sokasághoz képest mennyire tekinthetők ritkának, mennyire jelennek meg a válságos időszakokban, és leválasztásuk után a csonka idősor momentumai mennyiben közelítik az ideálisnak tekintett szinteket. Az egyes eljárásokat a Dow Jones industrial average index 1896 és 2014 közötti napi záró hozamain ( $N = 30\,717$ ) tesztelték a kellően nagy mintanagyság érdekében. Az elemzés alapján az alacsony valószínűségű esetekben a hozamok normális eloszlástól vett eltéréseit felhasználó módszer bizonyult a legeredményesebbnek az extrém árfolyammozgások meghatározására.

TÁRGYSZÓ:  
VaR-eljárás.  
Extrém érték.  
Pénzügyi idősor.

DOI: 10.20311/stat2016.02.hu0162

Egy sztochasztikus változó esetében az extrém események időben és térben mindig korlátozottan, az alapállapothoz képest határozottan alacsonyabb valószínűséggel, de egyediségük és váratlanságuk nyomán sokkal komolyabb hatással következnek be (*Jentsch–Kantz–Albeverio* [2006]). Adatelemzés szempontjából a meghatározás hasonló a *Jiawei–Micheline* [2004] által leírt extrémérték fogalmához, melynek értelmében az adathalmaz többi részétől durván eltérő adatelemeket sorolhatjuk ide. Az extrémítások meghatározásához tehát szükség van egy, az adathalmazok inkonzisztenciáját kimondó rendezőelvre, mely a változók valószínűségi eloszlásán vagy egymástól vett távolságán alapulhat. A tőkepiacokon a gazdasági szereplők által felvett pozíciók árfolyamkockázatának kezelésére a nyolcvanas évek végétől a VaR- (value at risk – kockázatosított érték) módszertant használják (*Dunbar* [2000]).

Munkánk célja, hogy ennek a hagyományos megközelítésnek az esetleges alternatíváit tárjuk fel, a *Fama*-féle [1970] féle hatékony piacok elméletére (efficient market hypothesis) és a tőkepiacok komplexitásának irodalmára (*Bonanno–Lillo–Mantegna* [2001], *Albeverio–Piterbarg* [2006], *Gabaix et al.* [2003]) támaszkodva – végső soron elvégezve a természet- és társadalomtudományok által korábban is alkalmazott módszerek pénzügyi hasznosíthatóságának értékelését. Az értékelni kívánt eljárások relevanciájának vizsgálatát az egyes módszerek által meghatározott extrém elmozdulások mintán belüli alacsony arányára (ritkaságára), illetve a múltbeli válságidőszakokra való illeszkedés mértékére alapozzuk. Az alkalmazott eljárások gyakorlati felhasználhatóságát azonban a számítások időigényén keresztül is vizsgáljuk. A különböző technikák összehasonlításához az egyik legrégebb óta számított tőzsdeindex, a DJIA (Dow Jones industrial average – Dow Jones ipari átlag) 1896. május 27. és 2014. október 2. közötti ( $N = 30\,717$ ) értékeit<sup>1</sup> elemezzük.

Tanulmányunk legfőbb megállapítása, hogy visszamenőleges adatokon elvégzett tesztek alapján lehetséges a hagyományos VaR-modellnél relevánsabb módon is eldönteni a piaci elmozdulások halmazáról, hogy azok extrémnek vagy normálisnak tekinthetők-e. Erre a célra a hozamok normális eloszlástól történő eltérését kiaknázó technika bizonyult a legalkalmasabb eszköznek.

A következő fejezetben első lépésként összefoglaljuk a tőkepiaci hozamok statisztikai jellemzőivel kapcsolatos szakirodalmi elvárásokat és megállapításokat, majd megfogalmazzuk az ezekre épülő extrémhozam definíciókat és a meghatározásukra, illetve relevanciájuk megállapítására alkalmazott módszerek sorát is. Ezt követően munkánkat az eredmények bemutatásával és összeggzéssel zárjuk.

<sup>1</sup> Forrás: Stooq.com.

## 1. Elméleti összefoglaló

A hatékony piacok elméletét megalapozó *Fama* [1970] híres cikkében a piaci szereplők informáltsága alapján vezette le a gyenge-közepes-erős hatékonyságot. A gyenge hatékonyság elvetéséhez az autokorreláltság igazolását követeli meg (*Fama* [1970] 387. old.), kiegészítve az általa összefoglalt szakirodalomban megjelenő bolyongás–Markov-folyamat–normális eloszlás gondolatkört, miután a 384. és 386. oldalakon előbb a „fair játék”<sup>2</sup> majd a szubmartingál<sup>3</sup> szükségességét hangsúlyozza a tőkepiaci hozamok esetében. Ezt követően mutatja be a szerző a bolyongás modelljét, és csak ezután fogalmazza meg a hatékonyság különböző formáihoz kötődő piaci feltételeket. A felállított modell tesztelése során pedig külön kitér a hozamok eloszlásának kérdésére is (*Fama* [1970] 399. old.). *Fama* megállapítása alapján a nem normális stabilis eloszlások alkalmasabbak a napi tőkepiaci hozamok leírására, a variancia végtelensége mégsem teszi lehetővé a hagyományos eszköztár alkalmazását. Ezért fordulhat elő, hogy az ökonometriával foglalkozó szakirodalom a hatékony piacokat automatikusan összekapcsolja a bolyongással (lásd például *Alexander* [2008] 213. old., *Nagy–Ulbert* [2007]), vagy éppen azt feltételezik, hogy a vizsgált idősorokat létrehozó sztochasztikus gazdasági folyamatok mögött kizárólag a véletlen áll (*Lütkepohl–Kratzig* [2004], *Greene* [2003] 845. old.).

*Bonanno–Lillo–Mantegna* [2001] kutatásaikban a piacok komplexitásának elemzésével három fő következményt is megfogalmaztak a kérdéskört illetően: 1. idősorok szintjén elmondható, hogy a piaci hozamok és szórások csak megközelítőleg stacionerek, miközben a hozamok autokorrelációja legalább húsz kereskedési napig elnyújtott monoton csökkenést mutat. 2. létezik iparágakon és idősoron belüli keresztkorreláció is, lehetőséget nyújtva az eseményalapú kereskedésre a létrejövő szinkronhatásokból adódóan. 3. az extrém események idején megfigyelhető a korreláció megugrásának<sup>4</sup> jelensége.

A logaritmikusan eloszlású hozamok empirikus eloszlása sokkal inkább jellemezhető valamilyen vastagfarkú<sup>5</sup> (például Pareto-) eloszlással, mint normális eloszlással, függetlenül a piac típusától, a tér- és időbeli karakterisztikáitól (*Molnár* [2006], *Gabaix et al.* [2003], *Clauset–Shalizi–Newman* [2009], valamint *Jentsch–Kantz–Albeverio*

<sup>2</sup> A hozamok az egyensúlyi várható érték körül ingadoznak.

<sup>3</sup> Egy eszköz várható hozama legyen nagyobb vagy egyenlő nullánál, ami nullánál nagyobb esetben a játékos szempontjából „kedvező” játékot jelent.

<sup>4</sup> Ebben az esetben a Világbank által alkalmazott legszűkebb definíció szerint fertőzésről beszélhetünk – hiszen sokk hatására szignifikánsan megugrott a korreláció (<http://go.worldbank.org/JIBDRK3YCO>).

<sup>5</sup> Az angolszász irodalomban jellemzően a negyedik momentum (csúcsosság, kurtózis) háromnál nagyobb értékét jelölik a „fat tailness” vagy „heavy tailness” (*Gabaix et al.* [2000]), „long tails”, „high tails” (*Fama* [1970]) kifejezésekkel, melynek fordítására a *vastagfarkúság* megnevezést alkalmazzuk *Király–Nagy–Szabó* [2008] és *Feller* [1978] nyomán. *Reiss–Thomas* [2001] azonban kiemeli, hogy „heavy tailness” esetén egy momentum végtelenségével kell számolnunk, míg ez „fat tailness” esetén nem áll fenn.

[2006]), amely jó magyarázatot szolgáltat a *Fama* [1970] által már megállapított vastagfarkúság megragadására is.

Az említett elméletek alapján tehát célunk annak bemutatása, hogyan választhatjuk a  $H$  tőkepiaci hozamokat két,  $N$  normális és  $X$  extrém halmazra, ahol:  $H = N \cup X$ . Az  $N$  normális hozamok rendelkeznek mindazon ideális tulajdonságokkal, amelyeket a hatékony piacok elméletének legszűkebb értelmezése nyomán feltételezhetünk: normális eloszlással (vagy legalább a vastagfarkúság hiányáról, azaz háromhoz közeli negyedik momentumról beszélhetünk) és az autokorreláltság hiányával. Ezzel szemben az  $X$  extrém hozamok már a teljes  $H$  minta eltérését eredményezik mind a normális eloszlástól, mind pedig az autokorrelálatlanságtól. A szakirodalmi áttekintés elméleti hátterét felhasználva a továbbiakban lehetőségünk nyílik az  $X$  extrém hozamok megragadására alkalmas módszerek definiálására és tesztelésére is.

## 2. Módszertan

*Jiawei–Micheline* [2004], illetve *Irada* [2010] szerint az extrém értékek meghatározásakor támaszkodhatunk parametrikus (statisztikai) és nemparametrikus megközelítésekre is – utóbbiak tovább bonthatók távolság- és eltérésalapú eljárásokra is. A statisztikai megközelítés során az adathalmazról valamilyen valószínűségi eloszlást (például normális eloszlást) feltételezünk, és a szélsőséges  $X$  értékeket ennek megfelelően keressük meg. Feltételezzük, hogy a teljes  $H$  mintánkat létrehozó adatgeneráló-folyamat az elvárt  $F$  normális eloszlásból származó adatok mellé kisszámú,  $G_1, \dots, G_k$  eloszlásokból származó elemeket is beemel (*Irada* [2010]).

A nemparametrikus módszerek közül a távolságalapú eljárások egyik csoportját jelentik a hierarchikus klaszterelemzésen alapuló technikák, ahol a jellegzetes fadiagramjában (dendrogramjában) megjelenő, elenyésző elemszámú csoportokat keressük. Mindez azt jelenti, hogy kiszámítjuk a  $p$  elemszámú  $h \in H$  mintaelemek euklideszi távolságát

$$d(i, j) = \sqrt{|h_{i1} - h_{j1}|^2 + |h_{i2} - h_{j2}|^2 + \dots + |h_{ip} - h_{jp}|^2}, \quad /1/$$

majd az adatelemeket egy klaszterekből álló fába csoportosítjuk, hogy megkeressük azon elemeket, amelyeknek nincs elegendő szomszédjuk. Az eltérésalapú eljárások alkalmazása ehelyett az egyes elemek főbb jellemzőit vizsgálja meg, és azokat sorol-

ja be a szélsőséges értékek halmazába, amelyek „eltérnek” a minta fő jellemzőitől (Jiawei–Micheline [2004]).

Az említett eljárások operacionalizálása során nagyban támaszkodtunk a Reiss–Thomas [2001] munkájára, amelyben az extrém értékek diagnosztikájánál kiemelték a parametrikus eloszlások, a kvantilis-quantilis (Q-Q) ábra, a trendek, a szezonalitások, az autokorrelációk, illetve a klaszterezési eljárások alkalmazhatóságát. Az  $r_X$  extrém hozamok egyes típusainak definiálásához a statisztikai megközelítéshez tartozó és általánosan használt VaR mellett elvethető  $r_{XVaR}$  hozamokat hasonlítottuk össze a normalitás hiányából kiinduló  $r_{Xfat}$  vastagfarkú hozamok módszerével, a távolságalapú megközelítésre épülő  $r_{Xout}$  outlier hozamokkal, valamint a Fama [1970] és Bonano–Lillo–Mantegna [2001] nyomán definiált  $r_{Xsau}$  súlyosan autokorrelált hozamokkal, valamint a Detken–Smets [2004] munkája alapján megfogalmazott  $r_{XHP}$  trendtől eltérő hozamokkal.

A VaR mellett elvethető  $r_{XVaR}$  hozamnak /2/ a normális eloszlás feltételezése mellett 5 százalékos alatti valószínűséggel rendelkező logaritmikus árfolyam-elmozdulásokat neveztek. Ebben az esetben csak azokat a hozamokat tekinthetjük extrémnek, amelyek 95 százalékos valószínűség mellett 1,65 szórásonyit messzebb vannak a zérusnak feltételezett várható értéktől (Madura [2008]). Feltételezve, hogy az extrém hozamok csak az eloszlás szélein helyezkednek el, míg az eloszlás „testét” jelentő komolyabb valószínűséggel rendelkező területeken nem, így a módszer a gyakorlatban a normális eloszlású farkaknál feltételezethez képest nagyobb számban jelezhet extrém elmozdulásokat.

$$\left( P(r)_{XVaR} \right) < 5\% \text{ és } r_{XVaR(-)} \ll r_N \ll r_{XVaR(+)} ,$$

$$r_{XVaR(+)} > 1,65 \cdot \sigma_t \text{ és } r_{XVaR(-)} < 1,65 \cdot \sigma_t . \quad /2/$$

Ez a módszertani technika a VaR-eljárás logikáját követve vizsgálja a logaritmikus differenciáltakat annak tükrében, hogy kívül esnek-e a 95 százalékos konfidencia-intervallumoknak megfelelő 1,65 szórásonyi sávból.

A  $r_{Xfat}$  vastagfarkú hozamok meghatározása a tapasztalati eloszlás és az elméleti normális eloszlás farkain jelentkező eltérésekből fakad, ami a Q-Q ábrán jellegzetes S alakú eloszlást mutat (Clauset et al. [2009], Gabaix et al. [2003]). (Lásd a /3/ képletet.) Amennyiben a vizsgált idősorra normális eloszlást illesztve meghatározzuk az  $r_{normal}$  értékeket, Jiawei–Micheline [2004] alapján statisztikai becslést adhatunk annak feltételezésével, hogy adott kis  $p_L$  valószínűségek mellett a tapasztalati elmozdulásunk meghaladja az elméletben várt szintet:

$$r_{X^{\text{fat}(+), p_L} \gg r_{\text{normal}, p_L} \text{ vagy } r_{X^{\text{fat}(-), p_L} \gg r_{\text{normal}, p_L}, \text{ ahol } p_L \ll p_{E(r)}. \quad /3/$$

A Q-Q ábra esetében két valószínűségi eloszlást ( $\Phi_1$ -t és  $\Phi_2$ -t) ábrázolunk egymáson a következő kérdéssel: adott  $P = \Phi_1(X)$  valószínűség mellett milyen  $Y$  értéket kell hozzárendelnünk a  $\Phi_2$  eloszláshoz, hogy ugyanazt a  $P$  valószínűséget kapjuk? Egyszerűbben fogalmazva: milyen  $Y$ -t kell választanunk az  $\Phi_1(Y) = \Phi_2(X)$  egyenlőség létrehozásához? Mindkét  $X$  és  $Y$  érték a két valószínűségi eloszlás adott  $P$  valószínűség melletti percentilise; az  $Y$   $X$ -re vetítésével definiálhatjuk az  $Y = f(x)$   $Y=f(x)$  függvényt /4/, amely alapján:

$$f(x) = \Phi_2^{-1}(\Phi_1(X)). \quad /4/$$

Amennyiben két véletlen változóról van szó, a Q-Q ábra egy egyenes vonal, amelynek meredekségét a két változó szórásának  $\sigma_2/\sigma_1$  hányadosa határozza meg, míg eltolását a  $\mu_2 - \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \mu_1$ -gyel kifejezett várható értékek és a szórások hányada. A  $\Phi_2$  valószínűségi eloszlás gyakran valamely tapasztalati eloszlást takar és ennek valamely  $\Phi_1$  elméleti eloszláshoz való illeszkedését vizsgáljuk. Ehhez a  $T$  számú minta  $\varepsilon_i$  értékeit növekvő sorrendbe kell rendeznünk, majd ennek a rendezett sorozatnak minden olyan része, amely kisebb vagy egyenlő  $\varepsilon_i$ -vel az  $i/T$ . Nagy  $T$  mintanagyság esetén ez az  $i/T$  arány jól közelíti az empirikus valószínűségét /5/ annak, hogy a véletlen szám kisebb vagy egyenlő  $\varepsilon_i$ -vel:

$$\Phi_2(\varepsilon_i) = p_i \approx \frac{i}{T}. \quad /5/$$

A tapasztalati és az elméleti eloszlások adott percentilisei így a következő módon fejezhetők ki:

$$Y_i = \Phi_2^{-1}(p_i) = \varepsilon_i, \text{ illetve } X_i = \Phi_1^{-1}(p_i) = \Phi_1^{-1}\left(\frac{i}{T}\right) \text{ minden } i < T\text{-re.} \quad /6/$$

Standard  $\Phi_1 = N(0, 1)$  normál eloszlás alkalmazása esetén az  $Y_i = \mu_2 + \sigma_2 X_i$  minden  $i = 1, \dots, T$ -re érvényes egyszerűbb alakot kapjuk (Deutsch [2002] 690–691. old.).

A vastagfarkú eloszlások esetén a Q-Q-n ábrázolt tapasztalati eloszlás jellegzetes S alakot vesz fel, ami által szembetűnővé válik az elméleti normál és a tapasztalati hatvány eloszlás közötti különbség, valamint lehetőségünk nyílik az eloszlás farkainak lehatárolására (*Clauset–Slahizi–Newman* [2009]).

Az  $r_{xkl}$  outlier hozamok olyan kis elemszámú számú  $\Theta$  klaszter tagjai, amelyek a teljes  $H$  minta kiugró (3 feletti) csúcosságáért felelősek /7/. Az outlier hozamokat a minta szisztematikus hierarchikus klaszterezésével (euklidészi távolságok szerint), a klaszterszám növelésével (darabolásával) kaphatjuk meg oly módon, hogy addig növeljük a klaszterszámot, amíg a legnagyobb klaszter negyedik momentuma 3 nem lesz.

$$r_{xkl} \in \Theta \text{ és } H = \Theta \cup N, \text{ ahol } E_H \left[ (r - \mu)^4 \right] \gg 3 \text{ és } E_N \left[ (r_n - \mu)^4 \right] \approx 3 \quad /7/$$

A /7/ képletben  $H$  a teljes mintát,  $\Theta$  az  $r_{xkl}$  outlier hozamok halmazát, míg  $N$  a  $r_n$  normál hozamok halmazát jelöli. A vizsgálat során a mintát hierarchikus klaszterezési eljárással 50-től 1 250 klaszterig bontottuk fel annak érdekében, hogy megkeressük azt a legkevesebb klaszterezéssel járó esetet, ahol a legnagyobb klaszterbe jutó elemek csúcossága már 3-nál kisebb értéket vesz fel. A klaszterek számának széles intervallumok közé szorítását indokolta az az empirikus tapasztalat, melynek tükrében jellemzően 390 és 530 klaszter képzésére volt szükség a szimulált tőkepiaci mintákban ahhoz, hogy a legnagyobb klaszter csúcossága 3 alá csökkenjen. Semmi nem zárja ki azonban, hogy a legnagyobb elemszámú klaszter még az előtt felbomlik, hogy a csúcossága a kis elemszámú klaszterek leválogatása nyomán elérné a 3-as értéket. Ebben az esetben az alkalmazott algoritmus a legkevesebb klaszterezéssel a 3-hoz legközelebbi csúcosságú esetet emeli ki.

A  $r_{xak}$  súlyosan autokorrelált hozamok meghatározására a *Bonanno–Lillo–Mantegna* [2001] által megállapított szabályszerűségből indultunk ki, mely szerint a tőkepiaci idősorok autokorrelációja legalább húsz kereskedési napig elnyújtott monoton csökkenést mutat szemben a gyenge hatékonyság által megkövetelt autokorrelálatlansággal.

E megállapítás teszteléséhez Ljung–Box-teszt segítségével megvizsgáltuk 30 késleltetés mellett az idősor autokorreláltságát:

$$p_{LB, t-1} < 0,05, p_{LB, t-2} < 0,05, p_{LB, t-a} < 0,05, \dots, p_{LB, t-k} < 0,05, \dots, p_{LB, t-30} < 0,05, \\ p_{LB, t-k} < 0,05 \text{ esetén } H_{t-k} = 1, \text{ azaz } p_{r, 1, k} \neq 0, \quad /8/$$

ahol  $p_{LB, t-k}$  a Ljung–Box-teszt (*Lütkepohl–Kratzig* [2004])  $p$ -értéke a  $t$ . napon  $k$  visszatekintés mellett, és a  $H = 1$  az autokorreláltságot jelöli.

Ezt követően megvizsgáltuk, hogy a halmazon értelmezve mely napokra teljesül a feltétel:

$$r_t = r_{ak,t,k}, \text{ ha } \sum_1^k H_{t-k} = k, \quad /9/$$

ahol  $r_{ak,t,k}$  az autokorrelált hozamok halmazát jelöli a  $t$ . napon és  $k$  késleltetésszám mellett úgy, hogy minden egyes késleltetésre autokorrelált. Ezzel definiálhatóvá válnak azok a speciális kereskedési napok, amelyek akár 30 kereskedési napig elnyújtott monoton csökkenést mutatnak, ezzel is fölé menve a *Bonano–Lillo–Mantegna* [2001] által megfogalmazott várakozásoknak. Kérdéses azonban, hogy mi legyen a megfelelő  $k$  mutató a kissé önkényesnek tekinthető 20 helyett?

Ehhez meghatároztuk minden részhalmaz teljes  $R(r \in R)$  sokaságon belüli  $w_k$  súlyát:

$$\frac{\sum_k^{30} r_{ak,k}}{R} = w_k. \quad /10/$$

Ezt követően megvizsgáltuk, hogy a  $k$  értékének fokozatos emelésével mikor teljesül a  $\sum_k^{30} w_k < 0,05$  összefüggés, azaz minden késleltetésükben autokorrelált hozamok teljes sokaságon belüli súlya kevesebb, mint 5 százalék lesz-e? Ezeket az elemek alkotják a súlyosan autokorrelált hozamok halmazát:

$$r_{Xak} = \left( r \mid p_{r,1:k} \neq 0, k < 31, k \in Z \right) \text{ és } \frac{\sum r_{Xsau}}{R} < 0,05. \quad /11/$$

Az  $r_{XHP}$  hozamok az idősor trendjétől extrém mértékben eltérő árfolyammozgásokat tartalmaznak. A trend számításához egyoldalas Hodrick–Prescott- (HP-) filtert használtunk, ami a standard kétoldalas HP-filtert futtatja rekurzívan, így csak azokat az adatokat veszi figyelembe, amelyek az adott pillanatban rendelkezésre álltak /12/. A trend számítása különböző simító paraméterértékek (lambda) mellett történt. A HP-filter elsősorban GDP- és inflációs idősorok simítására, hosszú távú trendjének meghatározására (*Mehra* [2004]), emellett eszközár és hitelpiaci anomáliák detektálására használatos (*Gourinchas–Valdes–Landerretche* [2001], *Borio–Lowe* [2002], *Detken–Smets* [2004]).

$$r_{XHP} = \left\{ r_t : r_t \in H, r_t > r_t^* + a \right\} \text{ vagy } r_t < r_t^* - b, \quad /12/$$



ahol  $r_t^*$  a HP-filter által számított trend,  $a$ ,  $b$  pedig az extrém pozitív, illetve negatív küszöb.

Az extrém elmozdulások vizsgálatának eredménye – még az üzleti ciklusok NBER (National Bureau of Economic Research – az Egyesült Államok Nemzeti Gazdaságtudató Irodája) szerinti beemelése mellett is – függhet a történelmi esetlegességektől. Ennek elkerülése érdekében a 30 717 kereskedési nap hosszú DJIA-idősornak elkészítettük száz szimulált változatát, amelyeken újra megvizsgáltuk az extrém és normális kereskedési napok eltérő módszertanok szerint tapasztalható karakterisztikáit. A szimulációk egy aszimmetrikus  $t$ -eloszlású (skew- $t$ ) hibatagokkal rendelkező APARCH(1,1,1)- (asymmetric power autoregressive conditional heteroskedasticity – aszimmetrikus hatvány autoregresszív feltételes heteroskedaszticitás) modellen alapultak, miután a *Cappeillo–Engle–Sheppard* [2006] által leírt modellszelekciós eljárás<sup>6</sup> során ez rendelkezett a legalacsonyabb BIC- (Bayesian information criterion – Bayes-féle információkritérium) értékkel, és eredményezett<sup>7</sup> homoskedasztikus hibatagokat.

Az aszimmetrikus GARCH-ok családját a *Ding–Granger–Engle* [1993] cikk APARCH( $p$ ,  $o$ ,  $q$ )-modellje írja le a legátfogóbban, azaz:

$$\sigma_t^\delta = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i (|\varepsilon_{t-i}| - \gamma_i \varepsilon_{t-i})^\delta + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^\delta, \quad /13/$$

ahol  $\delta > 0$  és  $-1 < \gamma_i < 1$ , a  $p$  paraméter a modellbe bevont múltbeli újdonságok, az  $o$  paraméter a negatív elmozdulások volatilitásra gyakorolt hatását, míg a  $q$  a volatilitás késleltetését határozza meg. Az illesztést követően a /14/ paraméterezés szerint szimuláltuk a 100 idősort:

$$\sigma_t^{1,266} = 0,00004 + 0,077 (|\varepsilon_{t-1}| - (-0,3996\varepsilon_{t-1}))^{1,266} + 0,9223 \sigma_{t-1}^{1,266} \quad /14/$$

(BIC = -3,3212),

ahol az  $\varepsilon$  hibatagok valószínűségi eloszlása a következőképp írható le:

$$p(x|v, \mu, \lambda) = \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \left(\frac{\lambda}{\pi v}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{\lambda(x-\mu)^2}{v}\right)^{-\frac{v+1}{2}}, \quad /15/$$

<sup>6</sup> A következő GARCH-modelleket normális, Student- $t$ , általánosított hiba- (GED), aszimmetrikus  $t$ -eloszlású hibatagok mellett vizsgáltuk: GARCH(1,1)(1,2)(2,1)(2,2), GJR-GARCH(1,1,1)(2,1,1)(1,1,2)(2,1,2), TAR(1,1,1)(2,1,1)(1,1,2)(2,1,2) és APARCH(1,1,1).

<sup>7</sup> Ennek kiszámításához a *Kevin Sheppard* által Matlab alá kidolgozott UCSD toolboxot használtuk.

ahol  $\mu$  a módusz és a várható érték a  $\nu > 1$  esetekben,  $\nu$  az eloszlás szabadsági foka, és a  $\lambda = \frac{1}{\sigma^2}$  az inverz skálaparaméter. Az illesztés alapján a  $\nu = 6,5207$ ,  $\mu = 0$ ,  $\lambda = -0,079$  paraméterezéssel dolgoztunk.

Az egyes eljárások relevanciájának megállapítása során az extrémnek tekintett hozamok mintán belüli súlyát (mind a pozitív, mind a negatív hozamok esetében is 5 százalék alatti), a normális részhalmaznál a negyedik momentum csökkenését (a jelentős elmozdulások valószínűségei közelítik-e a véletlennél elvárhatót), illetve az extrém események sűrűsödését vizsgáltuk a NBER által recessziósnak definiált időszakokban. Az NBER-módszertan szerint meghatározott üzleti ciklusok a reál-GDP, a reáljövedelmek, a foglalkoztatottság, az ipari termelés és a nagykereskedelmi-kiskereskedelmi eladások többhónapos változásán alapulnak. A rendelkezésre álló idősor 1896. május 27. és 2014. július 30. közé esik, ami az 1. táblázatban látható recessziós időszakokat foglalja magába.

1. táblázat

*Üzleti ciklusok csúcs- és mélypontjai által közrezárt recessziós időszakok az Egyesült Államokban (1896. május 27.–2014. július 30.)*

Csúcspont	Mélypont	Csúcspont	Mélypont
1895. december	1897. június	1945. február	1945. október
1899. június	1900. december	1948. november	1949. október
1902. szeptember	1904. augusztus	1953. július	1954. május
1907. május	1908. június	1957. augusztus	1958. április
1910. január	1912. január	1960. április	1961. február
1913. január	1914. december	1969. december	1970. november
1918. augusztus	1919. március	1973. november	1975. március
1920. január	1921. július	1980. január	1980. július
1923. május	1924. július	1981. július	1982. november
1926. október	1927. november	1990. július	1991. március
1929. augusztus	1933. március	2001. március	2001. november
1937. május	1938. június	2007. december	2009. június

*Forrás:* NBER-kronológia, <http://www.nber.org/cycles.html>

Feltételezve, hogy a New York-i értéktőzsdén mért DJIA-index volatilitása a recessziós időszakokban megnő, várhatóan az extrém árfolyammozgások jelentős hányada is ezekbe az intervallumokba fog esni.

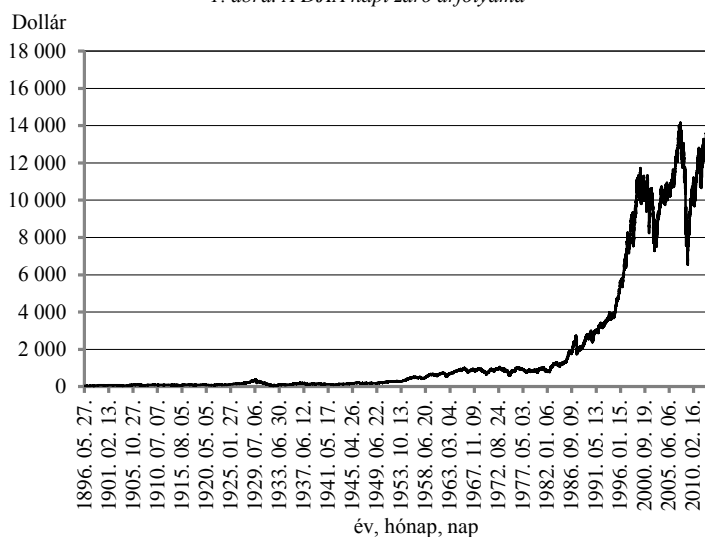
Az egyes eljárások felhasználhatóságát az extrém árfolyammozgások kiszűrésére a következő kritériumok alapján hasonlítottuk össze:

- ritka extrém hozamok (teljes sokaság 10 százaléknál kevesebb);
- a „normális” részhalmoz első két momentuma csökken és szimmetrikusabbá válik;
- a „normális” részhalmoz csúcsossága 3-hoz közelít;
- számítási idő;
- NBER-recessziós időszakokba esés (DJIA historikus idősről).

### 3. Eredmények

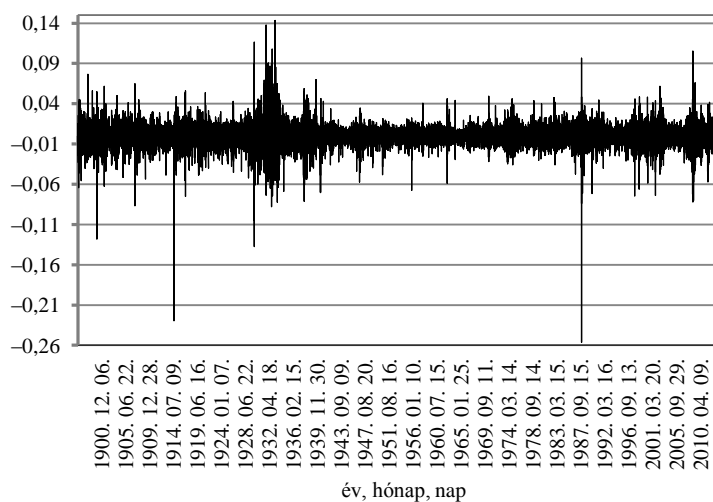
A DJIA-indexének záró árfolyama exponenciális növekedést mutatott a vizsgálatba bevont 30 717 kereskedési nap alatt, így a logaritmikus hozam számítása magától értetődött. (Lásd az 1. és 2. ábrát.) A hozamok segítségével láthatóvá vált, hogy néhány nevezetes nap és időszak kirajzolódik az index történetében: az első világháború kitörése 1914. július 30-án  $-0,23$ -os elmozdulást eredményezett, a nagy válság 1929. október 26-án  $-0,14$ -os hozamot produkált, míg 1987. október 16-án a portfólióbiztosítás és opcióreplikáció csődjéhez köthető válságos nap  $-0,26$ -os zuhanást eredményezett.

1. ábra. A DJIA napi záró árfolyama



Forrás: Stooq.com alapján saját szerkesztés.

2. ábra. A DJIA napi logaritmikus hozama



*Forrás:* Stooq.com alapján saját szerkesztés.

Felmerül a kérdés, hogy egy ilyen hosszúságú idősoron vajon kimutatható-e a normális eloszlás központi (centrális) határeloszlás-tétele, azaz a kellően nagyszámú független és azonos eloszlású (independent and identically distributed – iid) véletlen változó véges összeg standardizáltja megközelítőleg normális eloszlást követ-e? Mint látható, a normális eloszlás hipotézisét a pénzügyi idősoroknál alkalmazott Jarque–Bera-tesztel elvetettük (Lütkepohl–Kratzig [2006]).

2. táblázat

## Az idősor alapstatisztikái

Mérőszám	DJIA-hozam
Ferdeség	-0,8091
Csúcsosság	27,9152
Normális eloszlás: Jarque–Bera ( $p$ )	0,0001
Autokorreláció: Ljung–Box ( $p$ )	1,19E-08
Heteroszkedaszticitás: ARCH-LM ( $p$ )	0,0281
Gyenge stacionaritás: ADF ( $p$ )	0

*Forrás:* Saját szerkesztés.

A 2. táblázatban látható alapstatisztikai jellemzők alapján megállapítható a hozamok negatív ferdesége – az idősor nagyobb tömegben tartalmaz negatív elemeket, míg a 27,9-es csúcsosság jelentősen meghaladja a normális eloszlásnál elvárt 3-as

értéket –, azaz a DJI a véletlenszerű ingadozáshoz képest sokkal nagyobb számban produkált extrém elmozdulásokat (ez alátámasztja a normális eloszlás hiányáról tanúskodó Jarque–Bera-teszt is). A Ljung–Box-teszt két nap késleltetés mellett 0,05-nél kisebb  $p$ -értéket, azaz autokorrelációt, míg a szintén két nap késleltetésű ARCH-LM-teszt 0,05-nél kisebb  $p$ -értéke heteroszkedaszticitást jelzett. Az ADF- (augmented Dickey–Fuller – kiegészített Dickey-Fuller) teszt tanulsága szerint azonban az idősor első és a második momentuma explicit módon nem függ az időtől. A normális eloszlás hiánya és az autokorreláció megléte egyaránt a *Fama-i* [1970] értelemben vett hatékonyság hiányára utal.

3. táblázat

Az egyes eljárások alapján kapott extrém hozamok tulajdonságai

Mérőszám		VaR-	fat-	kl-	ak-	HP-
		eljárás				
Átlag	teljes	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
	normális	0,0005	0,0006	0,0004	0,0003	0,0002
Szórás	teljes	0,0113	0,0113	0,0113	0,0113	0,0113
	normális	0,0073	0,0079	0,0061	0,0107	0,0114
Ferdesség	teljes	-0,8091	-0,8091	-0,8091	-0,8091	-0,8091
	normális	-0,0577	0,0268	-0,0362	-0,0690	-0,8039
Csúcosság	teljes	27,9152	27,9152	27,9152	27,9152	27,9152
	normális	2,8179	3,1395	2,9123	13,0610	27,5037
Extrém pozitív küszöb		0,0188	0,0237	0,0156		0,1435
Extrém negatív küszöb		-0,0184	-0,0208	-0,0150		-0,2563
Extrém pozitív elemek száma		1 027	573	1 606		794
Extrém negatív elemek száma		1 237	953	1 823	1 762	832
Normális elemek száma		28 452	29 190	27 287	28 954	29 090
Klaszterek száma				750		
Autokorreláltság (lag)					12	
HP-lambda						10 000 000
Számítási idő (perc)		0,3278	0,1839	121	8	147

Forrás: Saját szerkesztés.

A 3. táblázat alapján megállapítható, hogy a DJIA esetében a normálisnak tekintett csonka eloszlás első momentuma nulla közelében maradt, míg második momentuma kisebb lett, miközben az aszimmetriája is csökkent. A negyedik momentum 3-hoz közeli értéket vett fel az első három módszernél. 12 napos visszatekintéssel és afölött a folyamatosan (minden napra) autokorrelált napok aránya 5 százalék alá került, azonban ezzel a minta 5,7 százalékát fedik le az  $r_{xak}$  súlyosan autokorrelált

hozamok. Mindez nem bizonyult elegendőnek a kiugró csúcosság lecsökkentéséhez, miközben a többi módszernél rendre 7-5-11 százalékot tettek ki az extrém napok. Számolási idő szempontjából az első két eljárás bizonyult gazdaságosnak (az  $r_{Xkl}$  outlier hozamoknál a minta hosszának növelését a számolási idő<sup>8</sup> nem lineárisan követi). (Lásd a Függelék F1. ábráját.) A HP-filteren alapuló eljárás sem a momentumok, sem a számolási idő szempontjából nem tűnik célravezetőnek.

4. táblázat

*Az extrém hozamok hány százaléka esik az NBER által recesszióként meghatározott időszakba?*  
(százalék)

Megnevezés	VaR-	fat-	kl-	ak-	HP-
	eljárás				
Recessziós időszakokba eső extrém napok aránya	45	51	42	25	50
Extrém recessziós időszakok aránya	14	10	19	6	11

*Forrás:* Saját szerkesztés.

Az általunk extrémként definiált napi mozgásoknak kevesebb mint fele esett bele az NBER által recesszióként meghatározott időszakba, míg a recessziós időszakok kevesebb mint 20 százaléka volt extrémnek tekinthető valamilyen módszertan szerint. Elmondható, hogy az  $r_{Xfat}$  vastagfarkú hozamok jelentek meg legnagyobb arányban (51%) a recessziós kereskedési napokon, miközben a súlyuk nem lépte át a 10 százalékot sem ezekben az időszakokban, sem az 5 százalékot a teljes mintán. Az  $r_{XHP}$  idősor trendjétől extrém mértékben eltérő hozamok fele beleesett a recessziós időszakokba, ami a második legjobb eredmény lett.

Az 5. táblázat alapján megállapítható, hogy a normálisnak tekintett csonka idősor első két momentuma egyaránt csökkenést mutatott, miközben szimmetrikusabbá váltak (kivéve a legutolsó módszernél). Az első három eljárás ugyancsak alkalmasnak bizonyult a csúcosság 3 közelébe csökkentésére, ami kis gyakoriságú, ámde nagy magnitúdójú mozgások kiszűrésére utal. A VaR- és a klaszterezésen alapuló technikák átlagosan a minta 9 és 8 százalékát helyezték az extrém kategóriába, míg a normális eloszlás sérülését kiaknázó módszernél ez az érték 6 százalék volt. A túlzott autokorreláltságra alapozó eljárásnál nagyon kevés esetet sikerült kiszűrni átlagosan. HP-filter alkalmazása mellett a lambda megtalálása eredményezte a szükséges számolási idő majdnem négynaposra növekedését – bár a momentumok szempontjából ez az eljárás nem jelentett előrelépést.

<sup>8</sup> A klaszterelemzés alapjául szolgáló euklideszi távolság mátrixának meghatározása egy  $(N \times (N - 1)/2)$ -es mátrixot feltételez, amely jelen idősor esetében hozzávetőlegesen 3,5 gigabájtot foglal el a számítógép memóriájában.

Fekvő táblázat! Külön oldalon küldve.

6. táblázat

*Az eljárások használhatóságának összevetése  
(százalék)*

Idősor	Kritérium	VaR-	fat-	kl-	ak-	HP-
		eljárás				
Historikus	Ritka extrém hozamok a valóságban (teljes sokaság 5 százalékánál kevesebb)	7	5	11	6	5
	„Normális” részhalmoz első két momentuma csökken, szimmetrikusabbá válik	+	+	+	+	-
	„Normális” részhalmoz csúcossága 3-hoz közelít	+	+	+	0	0
	Számítási idő	+	+	-	0	-
	NBER recessziós időszakokba esés	45	51	42	25	50
	NBER recessziós napokon belüli arány	14	10	19	6	11
	Ritka extrém hozamok (teljes sokaság 5 százalékánál kevesebb)	9	6	8	3	7
Szimulált	„Normális” részhalmoz első két momentuma csökken, szimmetrikusabbá válik	+	+	+	0	0
	„Normális” részhalmoz csúcossága 3-hoz közelít	+	+	+	0	0
	Számítási idő	+	+	-	-	-

*Forrás:* Saját szerkesztés.

Az egyes módszereket hasonlítja össze a 6. táblázat felhasználói szempontból. Ennek kapcsán megállapítható, hogy a klaszterezésre, autokorrelációra és HP-filterre alapozó eljárások számítási időigénye csak az egyik probléma. A száz szimulációból egy vizsgálata rendre 13, 8 és 54 percet igényelt, a futási idő mindháromnál  $O(n^3)$ , míg a VaR esetében  $O(n^2)$ .<sup>9</sup> A klaszterező eljárásnál problémát jelenthet elméletben, ha a legnagyobb klaszter a klaszterszám emelése közben még azelőtt felbomlik, mielőtt a csúcossága elérné a hármat (bár ilyen eset sem a szimulációk, sem a historikus idősnál nem állt fenn). Az autokorreláltság a mély elméleti megalapozottság dacára nem bizonyult hasznosnak a szimulációk szerint, tekintve, hogy csak ennél a módszernél nem valósult meg a csúcosság 3-ra csökkenése. A HP-filterezés pedig napi, historikus adatokon nem bizonyult életképes megoldásnak. Az általánosan elfogadottnak tekintett VaR jelzései annyira nem voltak ritkák, és annyira nem illeszkedtek jól az amerikai recessziós időszakokba, mint a normalitás sérülésére alapozó vastagfarkú hozamok módszere.

<sup>9</sup> Az algoritmus alapján számítható a futási idő, ami az algoritmus időigényét mutatja meg a bemenő adatok függvényében (Cormen *et al.* [2003]).



## 4. Összegzés

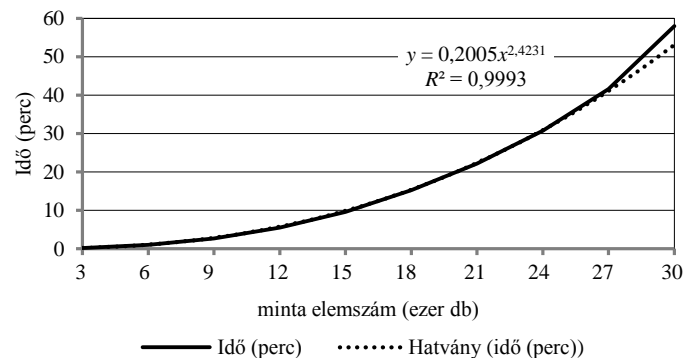
A hatékony piacok elmélete által elvárt statisztikai tulajdonságokkal a DJIA indexe még 100 éves időtávon sem rendelkezik. Azonban sikerült hatékonyság által feltételezett normális eloszlás sérülésére alapozott eljárások segítségével a tőkepiacon elfogadottnak számító VaR-módszernél relevánsabb eredményt adva meghatározni az extrém hozamokkal bíró kereskedési napok halmazát. Ezen eljárás kisebb számú, de a piaci válságidőszakokra jobban illeszkedő extrém elmozdulások detektálására képes.

Egyes piaci folyamatok utólagos elemzése szempontjából a kevesebb, ám turbulens piaci időszakban megjelenő extrém elmozdulások meghatározása elősegíti a gazdaságpolitikai lépések utólagos elemzését a piaci válságperiódusok könnyebb lehatárolásának elősegítésével.

A szakirodalomban felbukkanó távolságalapú eljárással számolt  $r_{Xkl}$  outlier hozamok előállítására egyfelől aránytalanul számításigényesnek bizonyult, másfelől csupán a recessziókba való időbeli besimulását tekintve bizonyult jobbnak a VaR-hoz képest. A hatékony piacok elméletéből és a komplex piacok ökonometria jellemzőiből egyaránt levezethető  $r_{Xak}$  súlyosan autokorrelált hozamok mutatták a legkomolyabb időbeni sűrűsödést, azonban leválogatásuk után a „normális” hozamok halmazának momentumai nem közelítettek az elvárthoz.

## Függelék

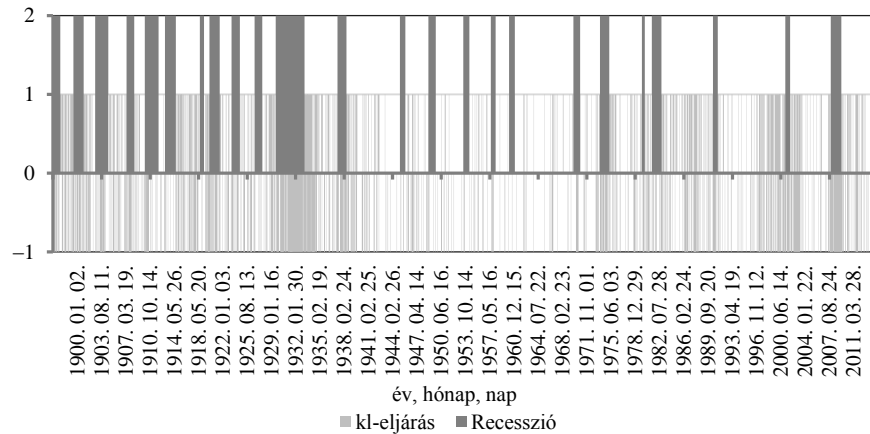
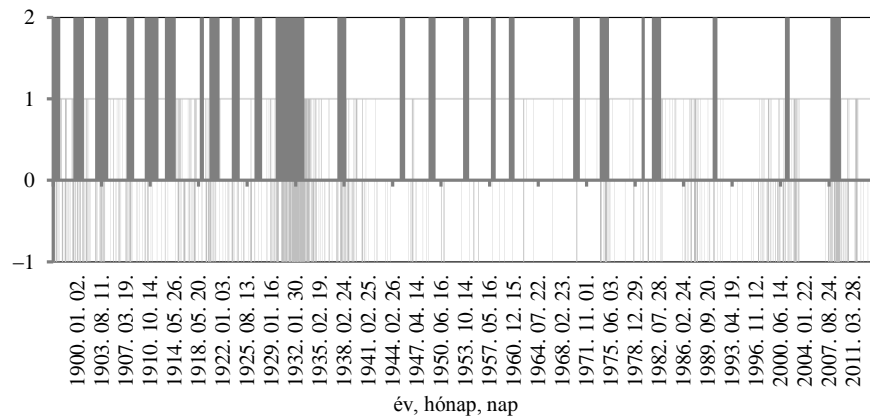
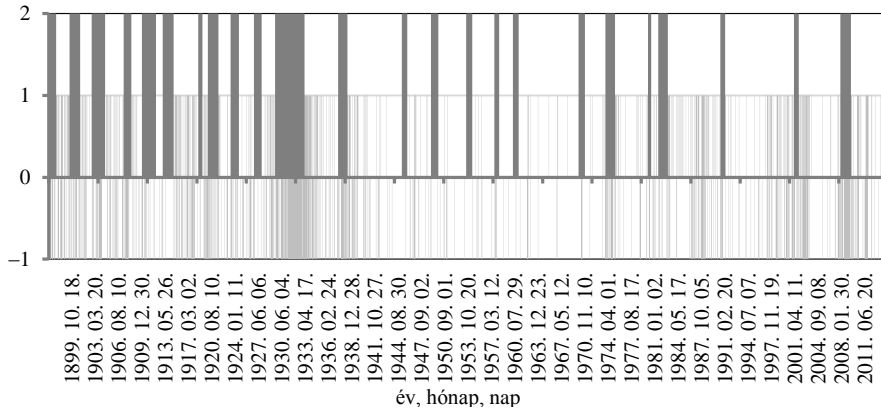
F1. ábra. Távolságalapú extrémérték-számítás időigénye a mintaelemszám függvényében



Forrás: Saját szerkesztés.

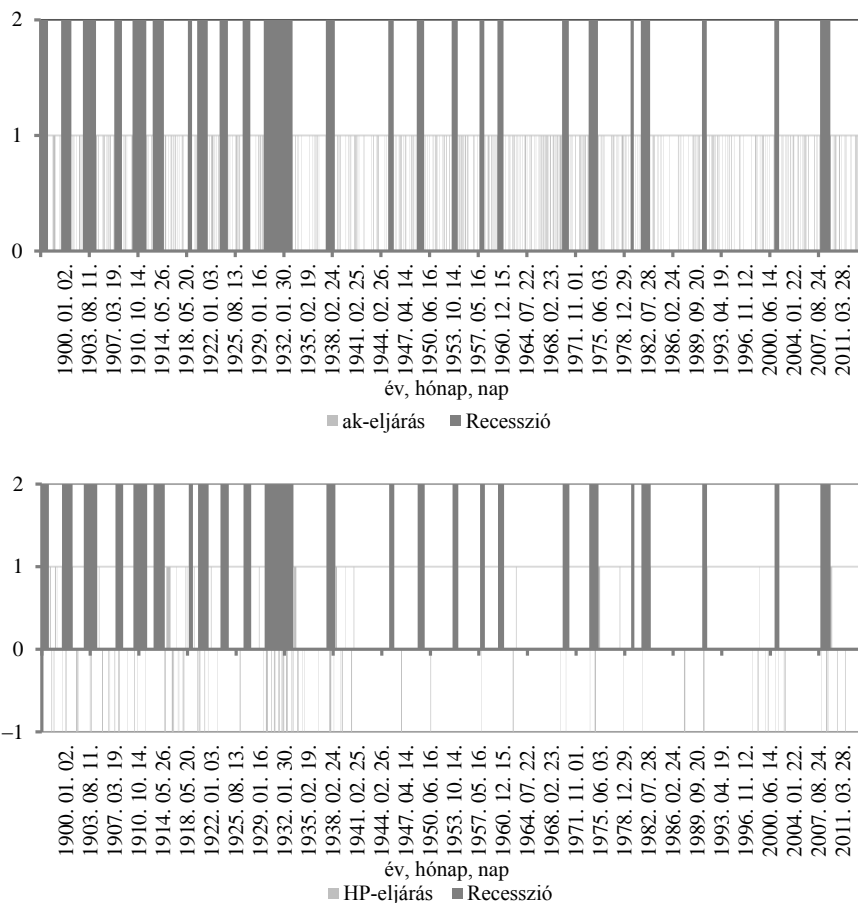
A minta növekedésével a számolás időigénye jól illeszkedik a hatványtrendfüggvényre. A mérést 64 bites Matlab R2014a szoftverrel, Windows 8.1 operációsrendszer alól, Intel i5-4200U processzor és 8 GB RAM felhasználásával.

F2. ábra. Extrém elmozdulások időbeli eloszlása és a recessziók



(Az ábra folytatása a következő oldalon.)

(Folytatás.)



*Megjegyzés.* Az 1 érték az index extrém erősödését, a -1 az extrém gyengülését jelenti.

*Forrás:* NBER-adatok alapján saját szerkesztés.

## Irodalom

- ALBEVERIO, S. – PITERBARG, V. [2006]: Mathematical methods and concepts for the analysis of extreme events. In: *Albeverio, S. – Jentsch, V. – Kantz, H. (eds.): Extreme Events in Nature and Society*. Springer. Heidelberg. pp. 47–68. [http://dx.doi.org/10.1007/3-540-28611-X\\_3](http://dx.doi.org/10.1007/3-540-28611-X_3)
- ALEXANDER, C. [2008]: *Market Risk Analysis: Practical Financial Econometrics*. Wiley and Sons, Inc. New York.
- BOLLERSLEV, T. [1986]: Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*. Vol. 31. Issue 3. pp. 307–327.

- BONANNO, G. – LILLO, F. – MANTEGNA, R. [2001]: Levels of complexity in financial markets. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*. Vol. 299. Issue 1–2. pp. 16–27. [http://dx.doi.org/10.1016/S0378-4371\(01\)00279-5](http://dx.doi.org/10.1016/S0378-4371(01)00279-5)
- BORIO, C. – LOWE, P. [2002]: *Asset prices, financial and monetary stability: Exploring the nexus*. BIS Working Papers. No. 114. Bank for International Settlements, Press & Communications. Basel.
- BUGÁR GY. – UZSOKI M. [2006]: Befektetések kockázatának mérése. *Statisztikai Szemle*. 84. évf. 9. sz. 877–898. old.
- CAPPIELLO, L. – ENGLE, R. F. – SHEPPARD, K. [2006]: Asymmetric dynamics in the correlations of global equity and bond-returns. *Journal of Financial Econometrics*. Vol. 4. No. 4. pp. 537–572.
- CLAUSET, A. – SHALIZI, C. R. – NEWMAN, M. E. J. [2009]: Power-law distributions in empirical data. *SIAM Review*. Vol. 51. No. 4. pp. 661–703. <http://dx.doi.org/10.1137/070710111>
- CORMEN, T. H. – LEISERSON, C. E. – RIVEST, R. L. – STEIN, C. [2003]: *Új algoritmusok*. Sclar Kiadó. Budapest.
- DETKEN, C. – SMETS, F. [2004]: *Asset Price Booms and Monetary Policy*. ECB Working Paper. No. 364. European Central Bank. Frankfurt am Main.
- DEUTSCH, H.-P. [2002]: *Derivatives and Internal Models*. Palgrave Macmillan. Basingstoke.
- DING, Z. – GRANGER, C. W. J. – ENGLE, R. F. [1993]: A long memory property of stock market returns and a new model. *Journal of Empirical Finance*. Vol. 1. pp. 83–106.
- DUNBAR, N. [2000]: *Inventing Money – Long-Term Capital Management and the Search for Risk-Free Profits*. Wiley. New York.
- ENGLE, R. F. [1982]: Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of UK inflation. *Econometrica*. Vol. 50. No. 4. pp. 987–1007.
- FAMA, E. F. [1970]: Efficient capital markets: A review of theory and empirical work. *Journal of Finance*. Vol. 25. No. 2. pp. 383–417. <http://dx.doi.org/10.2307/2325486>
- FELLER, W. [1978]: *Bevezetés a valószínűségszámításba és alkalmazásaiba*. Műszaki könyvkiadó. Budapest.
- GABAIX, X. – GOPIKRISHNAN, P. – PLEROU, V. – STANLEY, H. E. [2003]: A theory of power-law distributions in financial market fluctuations. *Nature*. Vol. 423. Issue 6937. pp. 267–270. <http://dx.doi.org/10.1038/nature01624>
- GOURINCHAS, P.-O. – VALDES, R. – LANDERRETCHÉ, O. [2001]: Lending booms: Latin America and the World. *Economía*. Vo. 1. No. 2. pp. 47–99. <http://dx.doi.org/10.1353/eco.2001.0004>
- GREENE, W. H. [2003]: *Econometric Analysis*. Prentice Hall. Pearson.
- IRAD, B.-G. [2010]: Outlier detection. In: Maimon, O. – Rokach, L. (eds.): *Data Mining and Knowledge Discovery Handbook*. Springer. Heidelberg. pp. 117–131. <http://dx.doi.org/10.1007/978-0-387-09823-4>
- JENTSCH, V. – KANTZ, H. – ALBEVERIO, S. [2006]: Extreme events: Magic, mysteries and challenges. In: Albeverio, S. – Jentsch, V. – Kantz, H. (eds.): *Extreme Events in Nature and Society*. Springer. Heidelberg. pp. 1–18. <http://dx.doi.org/10.1007/3-540-28611-X>
- JIawei, H. – MICHELINÉ, K. [2004]: *Adatbányászat, koncepciók és technikák*. Panem Kft. Budapest.
- KIRÁLY J. – NAGY M. – SZABÓ E. V. [2008]: Egy különleges eseménysorozat elemzése – a másodrendű jelzőloghitel-piaci válság és (hazai) következményei. *Közgazdasági Szemle*. LV. évf. július–augusztus. 573–621. old.

- LÜTKEPOHL, H. – KRATZIG, M. [2004]: *Applied Time Series Econometrics*. Cambridge University Press. Cambridge.
- MADURA, J. [2008]: *International Financial Management*. South-Western Cengage Learning. Mason.
- MEHRA, Y. P. [2004]: *The Output Gap, Expected Future Inflation and Inflation Dynamics: Another Look*. FRB Richmond Working Paper. No. 04-06. Federal Reserve Bank. Richmond. <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.2184948>
- MOLNÁR M. A. [2006]: A hatékony piacokról szóló elmélet kritikái és empirikus tesztjei. *Hitelintézet Szemle*. 5. évf. 3. sz. 44–62. old.
- NAGY B. – ULBERT J. [2007]: Tőkepiaci anomáliák. *Statisztikai Szemle*. 85. évf. 12. sz. 1014–1032. old.
- REISS, R.-D. – THOMAS, M. [2001]: *Statistical Analysis of Extreme Values, with Applications to Insurance, Finance, Hydrology and Other Fields*. 2<sup>nd</sup> Edition. Birkhauser. Basel.

## Summary

The paper evaluates three different approaches of detecting extreme price fluctuations by the failures of market efficiency assumptions to identify a better technique than the value-at-risk (VaR) method that is based on mainstream assumptions (such as normal distribution) and conditional variance. Market efficiency assumes statistical properties like normal distributed returns (even on the tails) without excess kurtosis and persistent autocorrelation. The relevancy of the various methods grounded on market efficiency failures were tested by their scarcity, their appearance under well-known crisis periods and their impact on the moments of the remaining dataset after their removal. To achieve high sample size, the applications were researched on the daily closing data of the Dow Jones industrial index between 1896 and 2014 ( $N = 30\,717$ ). The method built on non-normal distribution at the tails was proven the most relevant solution to detect extreme fluctuation of pricing.