

A Kepler-féle egyenlet és az affin transzformációk

Péntek Kálmán

Nyme SEK TTMK Matematika és Fizikai Intézet
pentek.kalman@nyme.hu

Összefoglaló: A dolgozatban a klasszikus Kepler-egyenlet egy egyszerű geometriai bizonyítását mutatjuk be az affin transzformációk alkalmazásával.

Abstract: In the paper, we present a simple proof of the classical Kepler's Equation with the using of the affin transformations.

1. Bevezetés

1609-ben jelent meg Johannes Kepler (1571-1630) német matematikus és csillagász *Astronomia nova* c. korszakalkotó műve. Ebben a könyvben szerepel a később róla elnevezett bolygómozgási törvények közül az első kettő. A ma elsőként emlegetett törvény azt a tényt rögzíti, hogy a bolygók ellipszis alakú pályákon keringenek a Nap körül úgy, hogy e pályák közös gyújtópontjában a Nap áll. A második törvény a területi sebesség állandóságát mondja ki, vagyis azt, hogy a Naptól a vizsgált bolygóig húzott sugár a bolygó változó sebességű mozgása folytán úgy halad, hogy közben egyenlő nagyságú időtartamok alatt azonos nagyságú területeket sűrol. Más szóval a sűrolt terület arányos az eltelt idővel. E felismerés fontos következménye az volt, hogy a bolygók a Nap közelében gyorsabban, míg a Naptól távoli pályáíven lassabban mozognak. Fontos kérdés tehát az ellipszis pályán végighaladó bolygók esetén a mozgás időbeni lefolyása, vagyis annak ismerete, hogy az adott időpillanatban az égitest pályájának mely pontján tartózkodik.

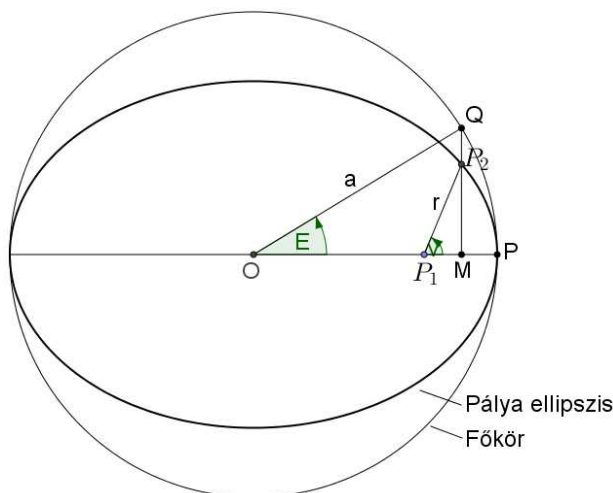
Johannes Kepler bolygómozgási törvényeit Tycho de Brahe (1546-1601) dán csillagász észlelési és mérési eredményeinek gondos, közel 8 éven át tartó elemzésével ismerte fel. A pálya alakját számos lehetséges síkgörbe tanulmányozása után a Pergai Apollóniosz (Kr.e. 265 – Kr. e. 190) által részletesen vizsgált kúpszeletek között találta meg. A bolygók mozgásának időbeni lefolyását leíró egyenletet Kepler geometriai módszerek felhasználásával vezette le saját, második törvényének felhasználásával. A dolgozat ezen, később Kepler-egyenlet néven elhíresült összefüggésnek az affin transzformációkra támaszkodó egyszerű geometriai bizonyítását mutatja be.

2. A Kepler-egyenlet

Tekintsük az O szimmetria középpontú pályaellipszist, tartózkodjék a Nap a P_1 fókuszpontban, ezen ellipszis mentén P_1 körül keringő égitest a t időpillanatban legyen a P_2 pontban. Jelölje $r = P_1P_2$ a Naptól az égitestig húzott rádiuszvektort, s tegyük fel, hogy a vizsgált égitest a P pericentrum ponton a τ időpontban halad át. Rajzoljuk meg a pályaellipszis főkörét, majd állítsunk merőlegest a P_2 pontban az ellipszis nagytengelyére.

Jelölje M e merőleges nagyteneggellyel alkotott metszéspontját, Q a főkörrel alkotott egyik metszéspontját (1. ábra).

A keringő P_2 égitest helyzetét minden t időpontban egyértelműen jellemzi a $\nu = \angle PP_1P_2$, amelyet *valódi anomáliának* nevezünk. A mozgás könnyebb tanulmányozása érdekében az $a = OQ$ főkör sugarának pillanatnyi helyzete is jól jellemzi a P_2 pont pillanatnyi helyzetét, hiszen a Q pontból a pályaellipszis nagytenegyére bocsájtott merőleges ellipszisre eső merőleges vetülete éppen P_2 . A Q pont főkörön elfoglalt helyzetét megadja az $E = \angle POQ$ szög, amelyet *excentrikus anomáliának* nevezünk. Célszerűen a ν és az E szögeket egyaránt radiánban mérjük.



1. ábra. A ν valódi anomália és az E excentrikus anomália értelmezése

Feladatunk az ellipszisen végbemenő pályamenti mozgás időbeni leírása, tehát meghatározandó a $\nu = \nu(t)$ és az $E = E(t)$ függvénykapcsolat. Az ehhez szükséges geometriai ismereteket az alábbiakban foglaljuk össze.

Az affin transzformációk, vagy röviden affinitások, az euklideszi sík önmagára történő bijektív és egyenestartó leképezései. Az affinitások párhuzamosság-, osztóviszony- és területaránytartó leképezések, amelyeket egyértelműen meghatároz 3 általános helyzetű pont és affin képének megadása. Fontos típusú képezések e leképezések között a tengelyes affinitások, amelyeknél a tengely egyenese pontonként fix. Ekkor a pontokat a képükkel összekötő egyenesek párhuzamosak, amelyet a tengelyes affinitás irányának nevezünk. Ha ez merőleges a tengely irányára, ortogonális affinitásról beszélünk.

Legyen t az affinitás tengelye, P' a P pont ezen affinitás melletti képe, P_0 a PP' és t metszéspontja, akkor a $P'P_0:PP_0$ arány minden ilyen egymásnak megfelelő pontpár esetén azonos értékű lesz, amelyet a tengelyes affinitás arányának nevezünk. Az affin transzformációk részletes tárgyalását REIMAN [4] könyvében megtalálhatjuk.

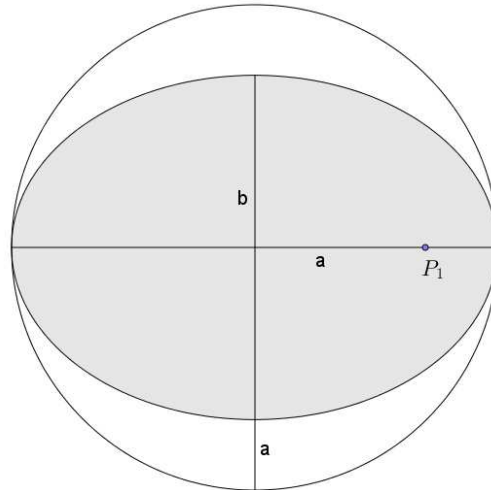
Jelölje ezután $2a$ a vizsgált pályaellipszis nagytenegyét, $2b$ a kistengelyét és tekintsük azt az α tengelyes affinitást, amelynek tengelye az ellipszis nagytenegyére, iránya az ellipszis kistengelye és aránya $b:a$. Ez a leképezés ellipszis főkörét pontosan az ellipszisre képezi le (2. ábra).

A pályaellipszis és főköre területaránya a fentiek szerint éppen az α affinitás aránya:

$$\frac{t_{\circ}}{t_{\circ}} = \frac{b}{a}, \quad (1)$$

ahonnan az ellipszis területe:

$$t_{\circ} = \frac{b}{a} \cdot t_{\circ} = \frac{b}{a} \cdot a^2 \cdot \pi = a \cdot b \cdot \pi. \quad (2)$$



2. ábra. Az a sugarú főkör tengelyes affín képe a $2a$ nagytengelyű és $2b$ kistengelyű ellipszis

Tekintsük a pályae ellipszis P_1PP_2 szektorát, amelynek területe Kepler II. törvénye szerint éppen úgy aránylik a teljes ellipszis területéhez, mint ahogyan a PP_2 ellipszis-ív befutásához szükséges $t-\tau$ időtartam aránylik a keringő égitest teljes T sziderikus keringési idejéhez:

$$\frac{t_{P_1PP_2}}{t_\odot} = \frac{t-\tau}{T}. \quad (3)$$

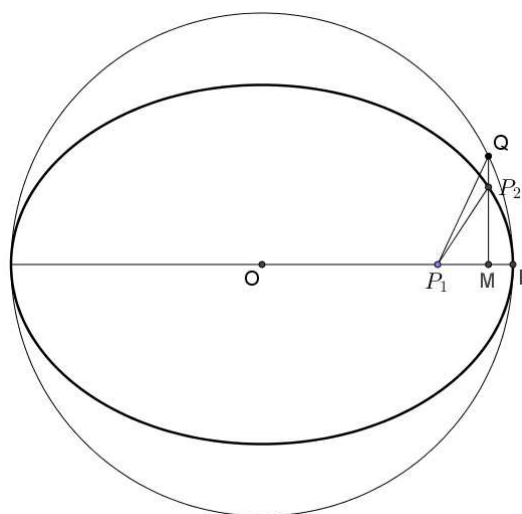
Feladatunk ezért a P_1PP_2 ellipszisszektor területének kiszámítása. Vegyük észre, hogy ezen P_1PP_2 ellipszisszektor éppen a P_1PQ körszektor α tengelyes affinitás melletti képe, ezért a fentiek szerint

$$\frac{t_{P_1PP_2}}{t_{P_1PQ}} = \frac{b}{a} \quad (4)$$

teljesül, ahonnan átrendezéssel

$$t_{P_1PP_2} = \frac{b}{a} \cdot t_{P_1PQ} \quad (5)$$

adódik (3. ábra).

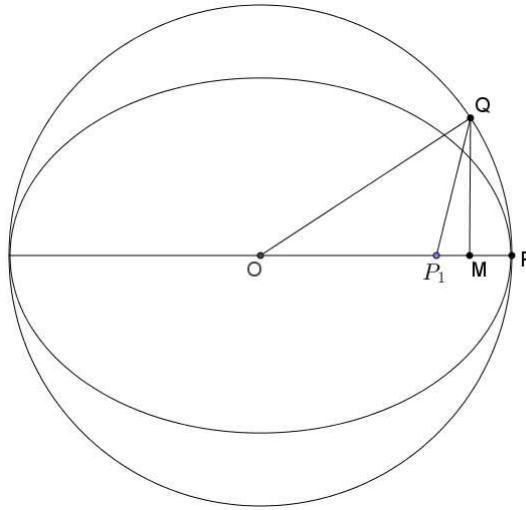


3. ábra. A P_1PQ körszektor tengelyes affín képe a P_1PP_2 ellipszisszektor

Figyeljük azonban meg, hogy a P_1PQ körszeletet előállíthatjuk, ha az OPQ körcikkből elhagyjuk az OP_1Q háromszöget, ezért fennáll a

$$t_{P_1PQ} = t_{OPQ} - t_{OP_1Q} \quad (6)$$

összefüggés (4. ábra).



4. ábra. A P_1PQ körszelet előállítása az OPQ körcikk és az OP_1Q háromszög segítségével

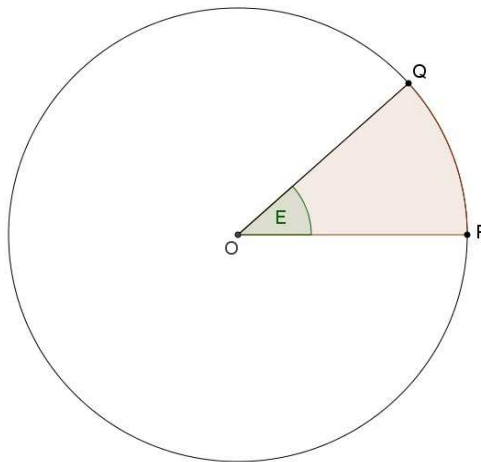
Az OPQ körcikk területét viszont könnyen kaphatjuk, hiszen ennek értéke arányos lévén az E szöggel:

$$\frac{t_{OPQ}}{t_{\odot}} = \frac{E}{2\pi}, \quad (7)$$

ahonnan közvetlenül

$$t_{OPQ} = t_{\odot} \cdot \frac{E}{2\pi} = a^2 \cdot \pi \cdot \frac{E}{2\pi} = \frac{1}{2} a^2 E \quad (8)$$

következik (5. ábra).

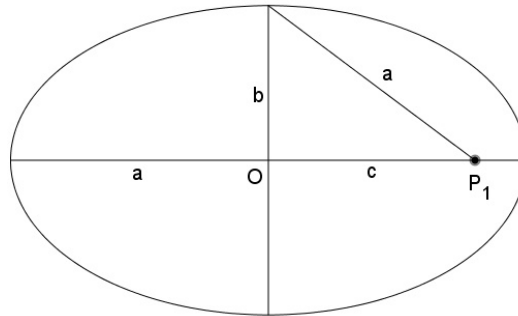


5. ábra: Az E szögű OPQ körcikk

Az OP_1Q háromszög területére pedig fennáll:

$$t_{OP_1Q} = \frac{1}{2}c \cdot a \cdot \sin E = \frac{1}{2}e \cdot a^2 \cdot \sin E, \quad (9)$$

ahol $c = d(OP_1)$ a pályaellipszis lineáris excentricitása, továbbá $e = \frac{c}{a}$ jelenti az ellipszis numerikus excentricitását (6. ábra).



6. ábra. A pályaellipszis a félnagy tengelye, b félkistengelye és c lineáris excentricitása

Ekkor a P_1PP_2 ellipszisszektor területe (5), (6), (8) és (9) felhasználásával:

$$t_{P_1PP_2} = \frac{b}{a} \cdot \left(\frac{1}{2}a^2 \cdot E - \frac{1}{2}e \cdot a^2 \cdot \sin E \right) = \frac{b}{a} \cdot \frac{a^2}{2} (E - e \sin E) = \frac{a \cdot b}{2} (E - e \sin E) \quad (10)$$

adódik. Ekkor a (2), (3) és (10) összefüggések szerint viszont

$$\frac{\frac{a \cdot b}{2} (E - e \sin E)}{a \cdot b \cdot \pi} = \frac{t - \tau}{T} \quad (11)$$

következik, amelyből egyszerűsítéssel és átrendezéssel közvetlenül adódik a

$$\boxed{E - e \cdot \sin E = \frac{t - \tau}{T} \cdot (t - \tau)} \quad (12)$$

Kepler-egyenlet.

Maga Kepler e formula levezetése során a Szürakuszai Arkhimédész (Kr. e. 287 – Kr. e. 212): *A konoidokról és szferoidokról*, valamint az Alexandriai Euklidesz (Kr.e. 365? – Kr.e. 300?) *Elemek* c. munkájára támaszkodott. Munkájának eredménye az *Astronomia nova* c. könyve 60. fejezetében olvasható.

A (12) összefüggésben szereplő

$$n = \frac{2\pi}{T} \quad (13)$$

mennyiség a P_2 égitest *közepes szögsebessége*, ezt az égi mechanikában *középmozgásnak* nevezik. A (12) Kepler-egyenlet teljes jobb oldalán álló mennyiséget pedig

$$M = \frac{2\pi}{T} (t - \tau) \quad (14)$$

középanomáliának mondják, ez az a szög, amelyet a P_2 égitest $t - \tau$ idő alatt leírna, ha T sziderikus keringési ideje változatlan megmaradása mellett a főkörön egyenletesen mozogna. A (14) felhasználásával nyerjük a Kepler-egyenlet szokásos

$$\boxed{E - e \cdot \sin E = M} \quad (15)$$

tömör alakját, amelyből a többi mennyiség ismeretében a feladat az E excentrikus anomália kiszámítása egy adott t időpontban.

Megjegyezzük, hogy a Kepler-egyenlet megoldásaként nyert E excentrikus anomáliából a v valódi anomáliát a

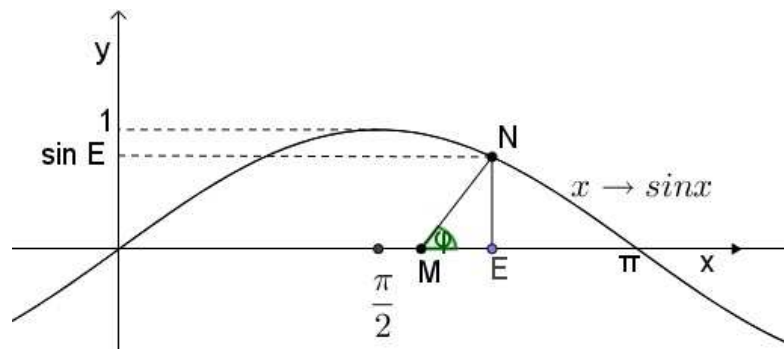
$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cdot \operatorname{tg} \frac{E}{2} \quad (16)$$

Gauss-féle képlet alapján számíthatjuk ki, amely képlet levezetése ÉRDI [1] munkájában megtalálható.

2. A Kepler-egyenlet megoldása

Mivel (15) Kepler-egyenlet transzcendens, így csak közelítő módszerekkel lehet megoldani. A továbbiakban egy grafikus megoldási módot mutatunk be, amelyet KÖVESLIGETHY [2] ismertet részletesen.

Feladatunk tehát M és e ismeretében az excentrikus anomália közelítő E értékének meghatározása (7. ábra).



7. ábra. A Kepler-egyenlet közelítő grafikus megoldása

Első lépésként t és T birtokában (14) alapján kiszámítjuk M értékét. Ezután megkeressük M helyét a vízszintes tengelyen. Ezt követően mérünk fel az M pontból kiindulva egy olyan φ szöveget, amelyre $\operatorname{ctg} \varphi = e$ teljesül. Az így kapott szög szár és az $x \mapsto \sin x$ görbéjének N metszéspontját merőlegesen az x -tengelyre vetítve nyerjük az E pontot. Valóban, az $MEN\Delta$ háromszögből

$$\frac{E-M}{\sin E} = \operatorname{ctg} \varphi = e \quad (17)$$

adódik, amelynek átrendezésével

$$E - M = e \cdot \sin E \quad (18)$$

következik, ebből már közvetlenül adódik a (15) Kepler-egyenlet.

Ezzel megkaptuk E közelítő értékét, amelynek egy pontosabb értékéhez is eljuthatunk, pl. a Newton-féle iterációs eljárással.

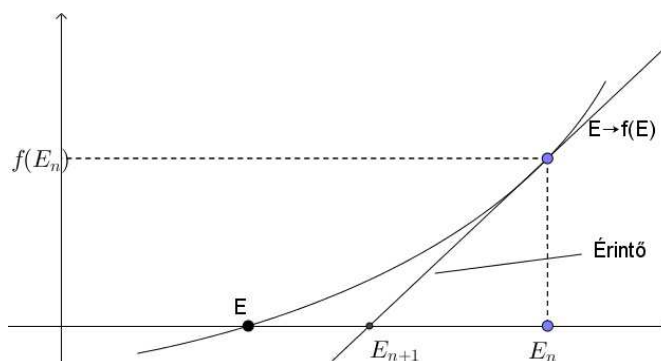
Tekintsük ugyanis az

$$f(E) := E - e \cdot \sin E - M \quad (19)$$

függvényt, amelynek E szerinti első deriváltja

$$f'(E) = 1 - e \cdot \cos E \quad (20)$$

alakú lesz.



8. ábra. Az E excentrikus anomália megközelítése a Newton-féle iterációs eljárással

A 8. ábra jelöléseivel ekkor az $f(E)$ görbe E_n abszcisszájú pontjához tartozó érintőjére teljesül az

$$\frac{f(E_n)}{E_n - E_{n+1}} = f'(E_n) \quad (21)$$

összefüggés, amelynek egyszerű átrendezésével adódik

$$E_{n+1} = E_n - \frac{f(E_n)}{f'(E_n)} \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (22)$$

ha E_0 az előző lépésben bemutatott grafikus eljárással nyert közelítő értéke az E excentrikus anomáliának.

A Naprendszer bolygóinál az e numerikus excentricitás kicsi, de az eljárás nem csupán itt, hanem az elliptikus pályát jellemző teljes $0 \leq e < 1$ intervallumon gyorsan konvergál a keresett E értékhez.

A Kepler-egyenlet megoldása az egyik legnagyobb jelentőségű problémája a csillagászatnak. A Kepler-probléma megoldására számos eljárás született, ezeket részletesen tárgyalja ODELL-GOODING [3] munkája.

Sir Isaac Newton (1643-1727) munkái nyomán felismerték, hogy az általános tömegvonzás törvényére épülő 2-test probléma megoldása során az égi mechanikában az ellipszis pályák mellett felléphetnek parabola és hiperbola pályák is. Hiperbola pálya esetén pl. a (15) Kepler-egyenlet összefüggésével analóg formula

$$e \cdot \operatorname{sh} H - H = M \quad (23)$$

alakú, amelynek jelen dolgozatban tárgyaltakhoz hasonló elemi levezetésével a jövőben kívánunk foglalkozni.

Köszönetnyilvánítás

A szerző köszönetét fejezi ki Varga Enikő Erzsébet matematika-német szakos középiskolai tanárnőnek a cikkben szereplő ábraanyag gondos megszerkesztéséért.

Irodalomjegyzék

- [1] **Érdi, B.**, Égi mechanika I., Tankönyvkiadó, Budapest, (1977), p.319.
- [2] **Kövesligethy, R.**, A matematikai és csillagászati földrajz kézikönyve, Kogutovicz és társa Magyar Földrajzi Intézete, Budapest, (1899), p.911.
- [3] **Odell, A. W.** – Gooding, R. H., Procedures for Solving Kepler's Equation, Celestial Mechanics, 38. (1986), 307-334. <http://dx.doi.org/10.1007/BF01238923>
- [4] **Reiman, I.**, A geometria és határterületei, Gondolat, Budapest, (1986), p.419.