

NYEREGFELÜLET ALAKÚ PONYVASZERKEZET ALAKVÁLTOZÁSA, KÜLÖNÖS TEKINTETTEL A VÍZSÁK KELETKEZÉSÉNEK VESZÉLYÉRE

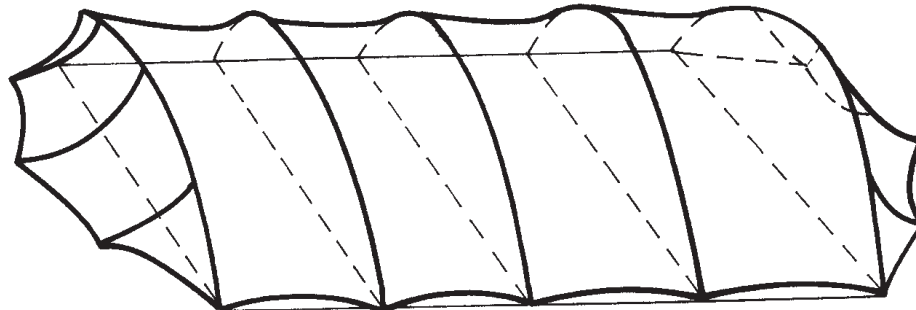
BÓDI ISTVÁN*

A cikk a feszített sátorszerkezetek egy lokális stabilitási problémájával, az összegyűlő csapadék-víz („vízsák”) okozta stabilitásvesztéssel foglalkozik. A bemutatásra kerülő egyszerűsített megoldási módszer hatékony eszközt kínál, elsősorban a feszített sátorszerkezetek közelítő ellenőrzéséhez, továbbá a javasolt módszer előnyeit számpéldán is bemutatja.

Kulcsszavak: Hiperbolikus paraboloid, sátorszerkezet, stabilitás, vízsák

1. BEVEZETÉS ÉS CÉLKITŰZÉSEK

A vizsgálat tárgyát képező szerkezet általános elrendezését az *1. ábrán* mutatjuk be.



1. ábra. Ívekre feszített ponyvaszerkezet

* Okl. építómérnök, PhD, egyetemi docens. BME Hidak és Szerkezetek Tanszéke. 1111 Budapest, Bertalan Lajos u. 2. „Z” épület. Tel.: 463-1726; e-mail: bodi@goliat.eik.bme.hu

Egy közbenső szekciót fogunk vizsgálni a szakaszos hőterhelés, valamint a feszítés esetére. Vizsgálataink során a következő feltételezésekkel élünk:

- Lapos héj-alakot feltételezünk, és épp ezért (közelítésként) nem teszünk különbséget a körív és a másodrendű parabola között.
- A ponyva anyagát homogénnek, izotropnak, lineárisan rugalmasnak tekintjük, rugalmassági modulusát jelöljük E -vel (dimenziója kN/m). A ponyvában keletkező metszeterők jele N_x , illetve N_y (a nyíróerő zérus).

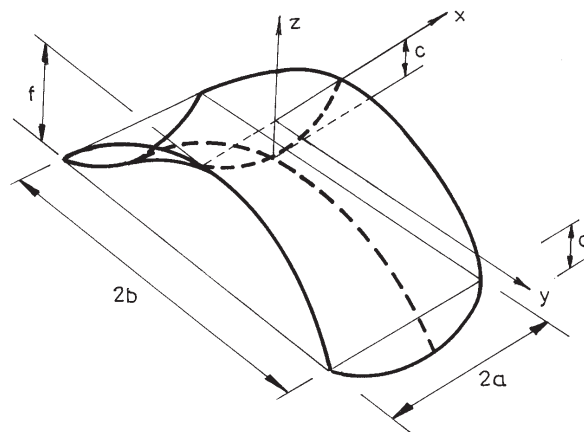
A ponyvahéj geometriai adatait, illetve azok jelölését a 2. ábrán tüntettük fel.

- További kiinduló feltevésünk az, hogy a terhelés x irányban egyenletes eloszlású, így a $p(y)$ teherfüggvény csak y -tól függ.
- Feltételezzük továbbá, hogy a z irányú $w(x,y)$ alakváltozás x irányban másodrendű parabola.

Ezzel az egyszerűsítő feltevésekkel élve a feladatot egyváltozósra redukálhatjuk, ha $w(x,y)$ függőleges elmozdulás függvény helyett a $w_0(y)$ függvényt keressük a következő alakban:

$$w(x, y) = w_0(y) \cdot \left[\left(\frac{x}{a} \right)^2 - 1 \right].$$

Vizsgálatainkat a $w_0(y)$ lehajlásfüggvényre korlátozzuk, a vízszintes elmozdulások vizsgálatától eltekintünk.



2. ábra. A ponyvaszerkezet geometriai paramétereit

2. A PONYVAHÉJ ALAKVÁLTOZÁSA

A ponyvahéj kiinduló felületének egyenlete a feltevések alapján legyen:

$$z = c \left[\left(\frac{x}{a} \right)^2 - 1 \right] - f \left(\frac{y}{b} \right)^2. \quad (1)$$

A fő görbületek:

$$\frac{1}{R_x} \cong 2 \frac{c}{a^2}, \quad (2)$$

illetve alakváltozás után

$$\frac{1}{R_x} \cong 2 \frac{c + w_0}{a^2} \quad (2/a)$$

és

$$\frac{1}{R_y} \cong -2 \frac{f}{b^2} \equiv \rho, \quad (3)$$

illetve alakváltozás után

$$\frac{1}{R_y} \cong \rho + w_0''. \quad (3/a)$$

Az egyensúlyt az alábbi ismert [1] egyenlet fejezi ki:

$$\frac{N_x}{R_x} + \frac{N_y}{R_y} = p(y), \quad (4)$$

illetve az egyenletet a fajlagos nyúlásokkal fejezve ki, a kontrakciót elhanyagolva:

$$\frac{\varepsilon_x}{R_x} + \frac{\varepsilon_y}{R_y} = \frac{p(y)}{E}. \quad (5)$$

A ponyvahéj alakváltozását fokozatosan megközelítve írjuk le:

1. Első lépésként a ponyva egyirányú, az x irányú kötélszerű teherviselését vesszük csak figyelembe.
2. Második lépésként a ponyvahéj $y = \pm b$ peremén az első lépésből származó elmozdulásokat szüntetjük meg és ezzel megkapjuk a peremén elmozdulásmentesen rögzített héj esetét.
3. A második lépés azonban az $y = \pm b$ peremen külső erő keletkezését feltételezi, ezért a harmadik lépésben ezt a külső erőt ellenkező előjellel működtetve a peremen megkapjuk a szabad peremű ponyvahéj alakváltozását.
4. Végül a negyedik lépésben a külső feszítés alakváltozásra gyakorolt hatását vizsgáljuk.

Az első lépésben az (5) egyenlet bal oldalán csak az első tag marad. Az egyenlet megoldásához szükség van az x irányú fajlagos nyúlás értékére. Ezt az értéket az $x = \pm a$ teljes ívhosszon számított ε_x átlagértékkel vesszük figyelembe:

$$\varepsilon_x = \frac{\tilde{s} - s}{s} = \frac{\tilde{s}}{s} - 1, \quad (6)$$

ahol s a teljes ívhosszúság és \tilde{s} ennek a lehajlás utáni, megváltozott értéke. Ennek pontos értéke (a részletes levezetést lásd a Függelékben) :

$$\varepsilon_x = \frac{\sin[\operatorname{atg}(2\xi)]}{\operatorname{atg}(2\xi)} \cdot \frac{\operatorname{atg}[2(\xi + \eta)]}{\sin[\operatorname{atg}(2 \cdot (\xi + \eta))]} - 1, \quad (7)$$

ahol $\xi = \frac{c}{a}$ és $\eta = \frac{w_0}{a}$ dimenzió nélküli érték, illetve változó. A technikailag valószínű esetekben ez a függvény jól megközelíthető egy lineáris összefüggéssel:

$$\varepsilon_x = \Theta \cdot \eta, \quad (8)$$

ahol

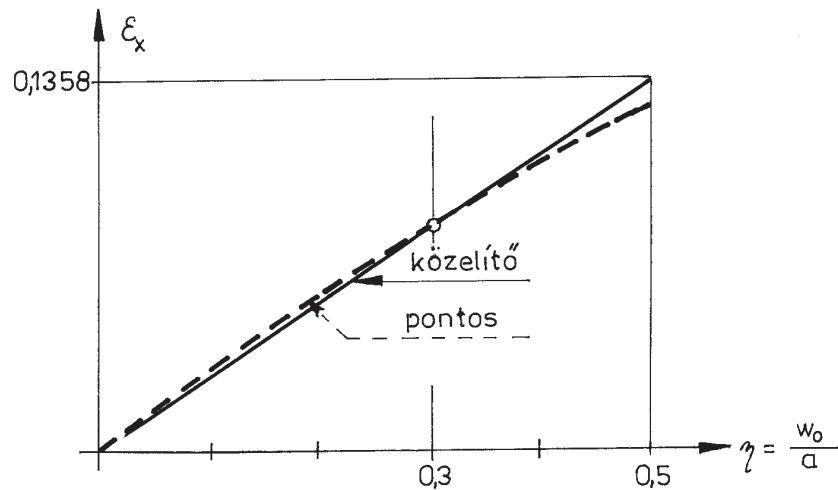
$$\Theta = \frac{c}{0,3} \left\{ \frac{\operatorname{atg}[2(\xi + 0,3)]}{\sin[\operatorname{atg}(2(\xi + 0,3))]} - \frac{\operatorname{atg}[2\xi]}{\sin[\operatorname{atg}(2\xi)]} \right\}. \quad (9)$$

A technikailag valószínű esetek az $\eta = \frac{w_0}{a} < 0,3$ tartományba esnek.

Ellenőrizzük a közelítést egy technikailag valószínű esetre, a Függelék F.3 pontjában bemutatandó számpélda kapcsán:

$$\begin{aligned} a &= 5,0 \text{ m} \\ b &= 10,0 \text{ m} \\ c &= 2,0 \text{ m} \\ f &= 5,0 \text{ m} \end{aligned}$$

Erre az esetre az x irányú fajlagos nyúlás pontos, illetve közelítő alakjának ábrázolása a 3. ábrán látható.



3. ábra. A fajlagos nyúlás változása a η függvényében

Ez esetben Θ értéke a (9) képlet alapján számítva 0,2244 volt. A kétféle függvény közötti illesztés az $\eta = 0,3$ pontnál történt. [Erre utal a (9) képletben három helyen szereplő 0,3-as érték. Más, adott esetben a közelítés javítása érdekében ez az érték a képletben módosítható.]

Miután így egyszerű összefüggést kaptunk a w_0 lehajlás és a hozzá tartozó ε_x fajlagos nyúlás között, egyszerűen ki tudjuk számítani az $x = 0$ tengelyhez tartozó lehajlás értékeket. Az (5) alatti egyensúlyi egyenletben csak az első tagot véve figyelembe és behelyettesítve a (2/a) és (8) alatti összefüggéseket, egy másodfokú egyenletet kapunk:

$$\frac{\Theta}{a^3} w_0^2 - \frac{\Theta}{a^3} c \cdot w_0 = \frac{p(y)}{2E}, \quad (10)$$

melyből bármely y értékhez és a hozzá tartozó $p(y)$ teher figyelembevételével az itt keletkező w_0 lehajlás kiszámítható. Egyelőre tekintsük a terhet egyenletesen megoszlónak, vagyis $p = \text{const}$.

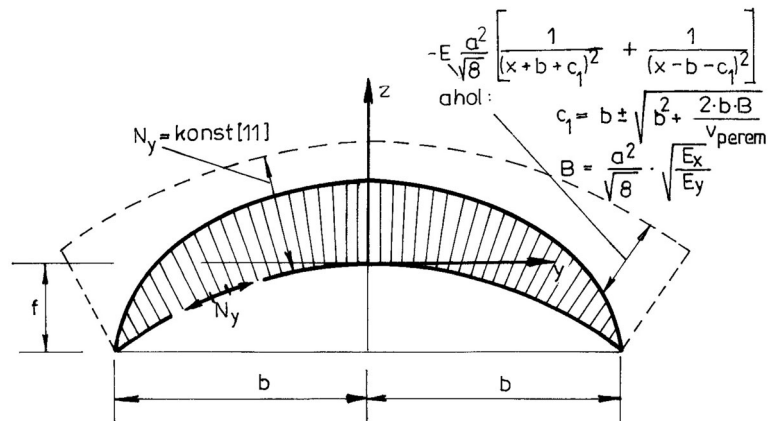
Második lépésként rögzítsük a ponyvát az $y = \pm b$ peremeken. Ebben az esetben a gátolt kontrakció hatására N_y metszeterő is keletkezik:

$$N_y = E \cdot \nu \cdot \varepsilon_x = \nu \cdot \Theta \cdot E \cdot \frac{w_0}{a}, \quad (11)$$

amely az y tengely mentén szintén egyenletes eloszlású. Ennek egy „felkeményítő” hatása van a szerkezetre, amit a (10) egyenlet jobb oldalának módosításával vehetünk figyelembe:

$$\frac{\Theta}{a^3} w_0^2 - \frac{\Theta}{a^3} c \cdot w_0 = \frac{p}{2(1 + \nu^2) \cdot E}. \quad (12)$$

Harmadik lépésként az $y = \pm b$ peremeken működtessük az így kapott N_y metszeterőt ellenkező előjellel, így megkapjuk a kontrakciót is figyelembe vevő, de szabad peremű ponyva alakváltozását. Ennek az ily módon külső erőként működtetett metszeterőnek az eloszlása az y tengely mentén nem lesz egyenletes, hanem a peremtől távolodva lecseng. A peremen rögzített ponyvában keletkező (11) szerinti N_y metszeterő húzás, így a szabad perem létrehozására működtetendő peremen $N_{perem} = -N_y$ nyomás lesz, de mivel ennek hatása a peremtől távolodva csökken, így az mindenütt az N_y húzás alatt marad. Ennek megfelelően az ellenkező előjellel működtetett metszeterő olyan törvényszerűségeknek tesz eleget, mint a külső feszítés. Ezt a problémát egy korábbi publikációban tárgyaltuk [2], most az ott levezetett képletet használjuk fel. Így a szabad peremű feszítés nélküli ponyvában az $x = 0$ tengelyen keletkező N_y metszeterő eloszlása a 4. ábra szerint alakul.



4. ábra. Az N_y metszeterő alakulása a ponyvahéj középső ($x = 0$) metszetében

Mivel a peremen ezek után kilépő N_y metszeterő már nem működik, a peremszál lehajlása már nem a (12) egyenlet, hanem a (10) egyenlet szerint alakul, vagyis a peremen egy alakváltozási inkompatibilitás áll elő, amelynek nagysága

$$w_{perem} = w_b - w_a, \quad (13)$$

ahol w_b az alábbi egyenlet megoldása

$$w_b^2 + c \cdot w_b = \frac{p}{E} \cdot \frac{a^3}{\Theta} \quad (14)$$

w_a pedig a

$$w_a^2 + c \cdot w_a = \frac{p}{(1 + \nu^2) \cdot E} \cdot \frac{a^3}{\Theta} \quad (15)$$

egyenletnek tesz eleget. Ennek a külső alakváltozási kényszernek a lecsengését az alábbi függvénnyel írhatjuk le (ennek indoklását lásd a függelékben az F.2 pont alatt):

$$w = w_{perem} \cdot e^{-\sqrt{\frac{c}{N_y}}(b-y)}. \quad (16)$$

Gyakran előforduló eset az, hogy a meredekebb felületeken a hó lecsúszik, és így szakaszos hóterhelés alakul ki. Ebben az esetben a terhelt és terheletlen szakaszok csatlakozásánál az egyirányú, kötélszerű teherviselési modellel számítva a lehajlást, alakváltozási inkompatibilitás alakul ki:

$$\Delta w = w_b - w_j, \quad (17)$$

ahol w_b az alábbi egyenlet megoldása

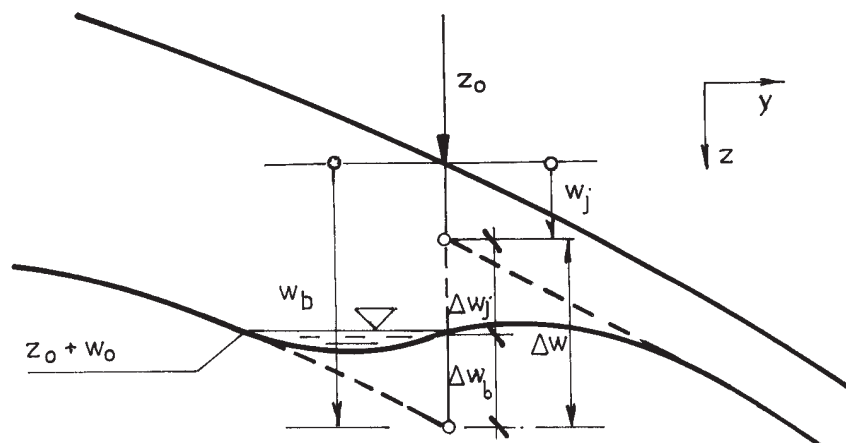
$$w_b^2 + c \cdot w_b = \frac{p_{hó+öns}}{(1 + \nu^2) \cdot E} \cdot \frac{a^3}{\Theta}, \quad (18)$$

w_j pedig a

$$w_j^2 + c \cdot w_j = \frac{p_{öns}}{(1 + \nu^2) \cdot E} \cdot \frac{a^3}{\Theta} \quad (19)$$

egyenletnek tesz eleget. Ezt az inkompatibilitást a peremen alkalmazott módszerhez hasonló módon oldhatjuk fel: a (16) összefüggés alapján, de w_{perem} helyett a (17) szerinti Δw -t vesszük figyelembe.

A vízszák akkor alakul ki, ha az $0 < y < b$ tartományban a $z_0(y) + w_0(y)$ görbe nem monoton növekvő (lásd az 5. ábrát).



5. ábra. A vízszák kialakulása

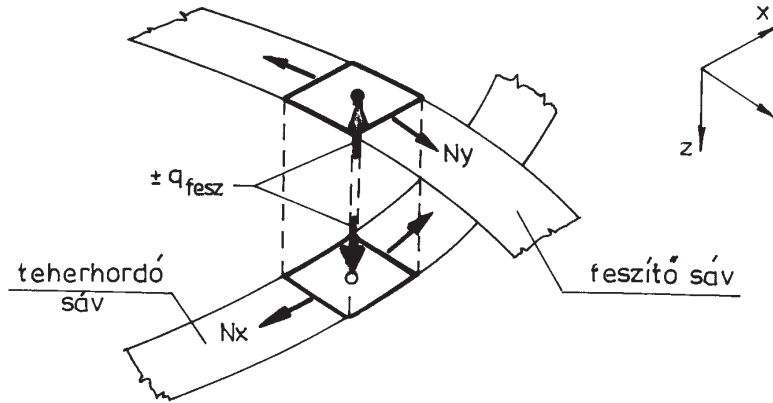
Súlyosbítja a helyzetet az a körülmény, ha a hőteher tartós teherként hat, és így lassú alakváltozással is számolni kell, amit a rugalmassági modulus csökkentésével közelíthetünk meg. További veszély az, hogy a vízszák a lassú alakváltozás következtében egyre mélyül ezzel a benne lévő víz mennyisége, és így a terhelés is nő, vagyis egy pozitív visszacsatolás jön létre.

A vízszákképződés veszélyét két módon lehet csökkenteni. Az egyik mód a ponyvaanyag merevségének növelése. Mivel a rugalmassági modulus keresztmetszetre vonatkozik (dimenziója kN/m), ezt a ponyva vastagságának növelésével is elérhetjük. A másik lehetőség a feszítés alkalmazása.

A feszítésből származó alakváltozásokat egy korábbi publikációban [2] tárgyaltuk, most az ott levezetett képleteket fogjuk felhasználni. A feszítés az építési technológia során, még terheletlen állapotban következik be, mint egy peremen működő külső teher. A hég egyébként terheletlen, felületén nem működik külső teher, így az egyensúlyi egyenlet az [1] szerint:

$$\frac{N_x}{R_x} + \frac{N_y}{R_y} = 0 \quad (20)$$

alakú lesz. A 6. ábra alapján a teherhordó sávra jutó q_{fesz} többletterhelés kifejezhető:



6. ábra. A ponyvahéj egyszerűsített erőtanai modellje

A [2] publikációban levezetett összefüggéseket felhasználva a többletterhelés:

$$q_{fesz} = \rho \cdot E \cdot B \cdot \left[\frac{1}{[y + b + C_1]^2} + \frac{1}{[y - b - C_1]^2} \right], \quad (21)$$

ahol

$$C_1 = -b \pm \sqrt{b^2 + \frac{2 \cdot b \cdot B}{v_{perem}}} \quad \text{és} \quad B = \frac{a^2}{\sqrt{8}},$$

illetve a (3) összefüggés szerint:

$$\rho = -2 \cdot \frac{f}{b^2}.$$

Ezt a többletterhet a (18), illetve (19) egyenletekben szereplő p tehertaghoz hozzáadva a $z_0 + w_0$ függvény lefutására kedvezőbb alakot kaphatunk.

ÖSSZEFOGLALÁS

A tanulmányban az 1. ábra szerint kialakított, ívtartókra feszített ponyvaszerkezet általános szekciójának alakváltozását vizsgáltuk. A vizsgálat külön figyelmet szentel a szakaszos hőteher esetére és ebben az esetben előadódó vízszákképződés veszélyére.

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

A bemutatott vizsgálat részét képezi a „Feszített sátorszerkezetek és peremtartók” c. OTKA kutatási programnak. A szerző köszönetét fejezi ki a T 030690 kutatási téma keretében kapott anyagi támogatásért.

A HIVATKOZOTT IRODALOM

- [1] Menyhárd I.: *Héjszerkezetek*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1966.
- [2] Bódi I., Fűzy J.: Ívtartókra feszített ponyvasítrák feszítési veszteségei a peremelmozdulás függvényében. *A Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Építőmérnöki Kar, Vasbetonszerkezetek Tanszéke Tudományos Közleményei* 2000, 49–54.

FÜGGELÉK

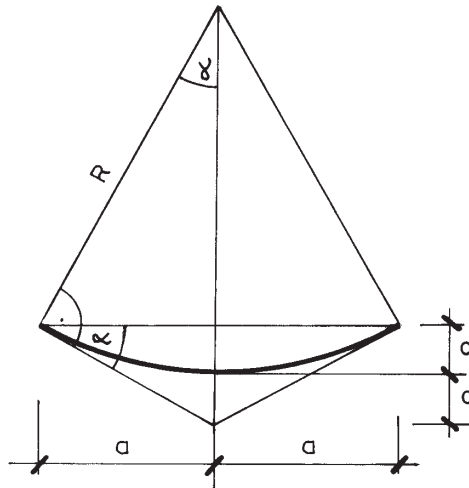
F. 1. Az x irányú átlagos nyúlás számítása a ponyvában

A közelítő számítás során a másodrendű parabola és a kör között nem teszünk különbséget. Az ív központi szöge a 7. ábra alapján:

$$\alpha = \operatorname{atg} \left[2 \left(\frac{c}{a} \right) \right].$$

Ennek ismeretében a görbületi sugár:

$$R_x = \frac{a}{\sin \alpha},$$



7. ábra. A köralakú vezérgörbe geometriája

melynek ismeretében az alakváltozás előtti ívhossz az alábbi módon fejezhető ki az eddig levezetett adatokból:

$$s = \alpha \cdot R_x = a \cdot \frac{\operatorname{atg}\left[2\left(\frac{c}{a}\right)\right]}{\sin\left[\operatorname{atg}\left(2\frac{c}{a}\right)\right]}$$

A megváltozott (megnyúlt) ívhossz analóg módon kifejezve:

$$\tilde{s} = a \cdot \frac{\operatorname{atg}\left[2 \cdot \frac{c+w}{a}\right]}{\sin\left[\operatorname{atg}\left(2 \cdot \frac{c+w}{a}\right)\right]},$$

illetve bevezetve az alábbi dimenzió nélküli változókat:

$$\xi = \frac{c}{a}$$

$$\eta = \frac{w}{a}$$

a fajlagos nyúlás az $x = \pm a$ tartományon átlagosan:

$$\varepsilon_x = \frac{\tilde{s} - s}{s} = \frac{\tilde{s}}{s} - 1,$$

vagyis

$$\varepsilon_x = \frac{\sin[\operatorname{atg}(2\xi)]}{\operatorname{atg}(2\xi)} \cdot \frac{\operatorname{atg}[2 \cdot (\xi + \eta)]}{\sin[\operatorname{atg}(2 \cdot (\xi + \eta))]}.$$

Ez az összefüggés a technikailag gyakori esetekben jól közelíthető egy lineáris összefüggéssel:

$$\varepsilon_x = \Theta \frac{w}{a} = \Theta \cdot \eta,$$

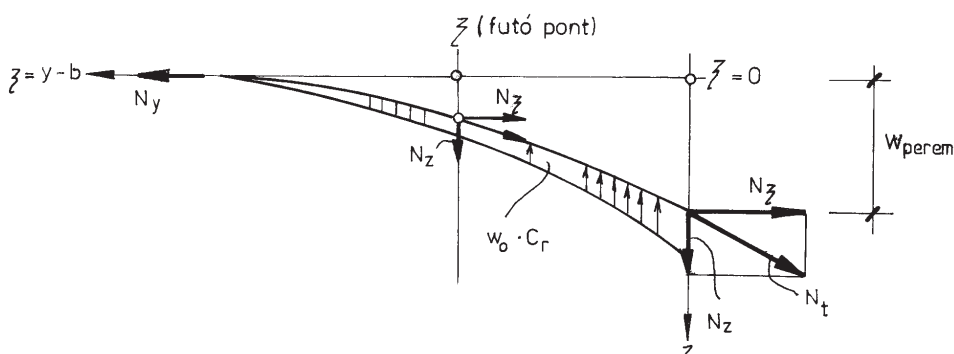
ahol

$$\Theta = \frac{c}{0,3} \left\{ \frac{\operatorname{atg}(2\xi + 0,3)}{\sin[\operatorname{atg}(2 \cdot (\xi + 0,3))]} - \frac{\operatorname{atg}(2\xi)}{\sin[\operatorname{atg}(2\xi)]} \right\}.$$

A fenti kifejezésben a technikailag nagy valószínűséggel előforduló $\eta = 0,3$ esetet vettük alapul, de természetesen más közelítést érhetünk el azzal, ha η más értékénél egyeztetjük a pontos, illetve a közelítő függvényt.

F. 2. A karakterisztikus tényező megállapítása

A karakterisztikus tényező meghatározásához fel kell írjuk a perem egyensúlyi feltételét a 8. ábra alapján.



8. ábra. A perem egyensúlya

Az N_t metszeterő nem konzervatív, de a lapos jellegre való tekintettel az y irányú komponenssel azonos nagyságúnak fogadjuk el. A z irányú komponens értéke pedig az egyensúlyból következően az alábbi módon írható fel:

$$N_z = \int_{\zeta=\infty}^{\zeta} w_0 \cdot c_r \cdot d\zeta = w' \cdot N_\zeta, \quad \text{mivel} \quad \frac{N_z}{N_\zeta} = w'.$$

Mivel

$$\int w \cdot d\zeta = 0, \text{ a } \zeta = \infty \text{ helyen}$$

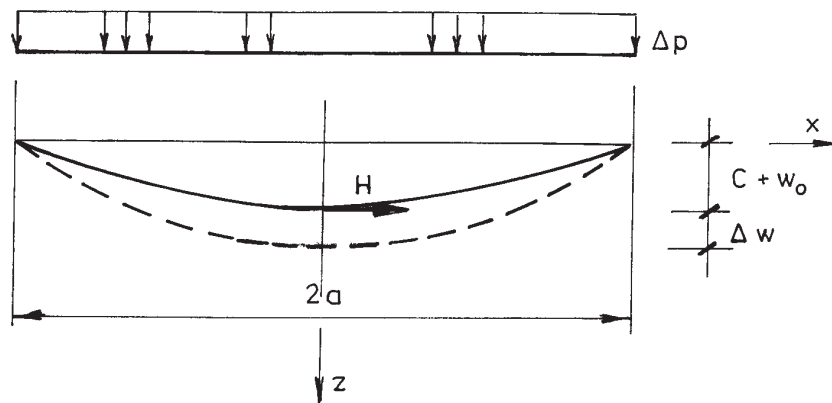
a fenti egyenlet differenciálható:

$$w \cdot c_r = w'' N_\zeta$$

Így az alakváltozás korrekciója a szabad perem esetén:

$$w = w_{perem} \cdot e^{-\sqrt{\frac{c_r}{N_\zeta}} \zeta}.$$

A képletben w_{perem} a (13) összefüggésével N_y pedig a 4. ábra összefüggéseinek felhasználásával számítható ki. A c_r ágyazási tényező meghatározására induljunk ki a 9. ábra alapján:



9. ábra. Az ágyazási tényező meghatározása

A kótélben keletkező H húzóerőt könnyen kiszámíthatjuk:

$$H = \frac{\Delta p \cdot a}{2(c + w_0)}.$$

Az ebből keletkező $\varepsilon_x = H/E$ könnyen kiszámítható, azonban ε_x a korábban levezetett (7) összefüggés felhasználásával is kifejezhető és a kétféle módon számított ε_x egyenlővé tételével a Δ_w / Δ_p hányados kifejezhető és ez éppen a keresett ágyazási tényező:

$$\frac{\Delta p}{\Delta w} = \frac{E \cdot \Theta \cdot (c + w_0)}{a^3} = c_r.$$

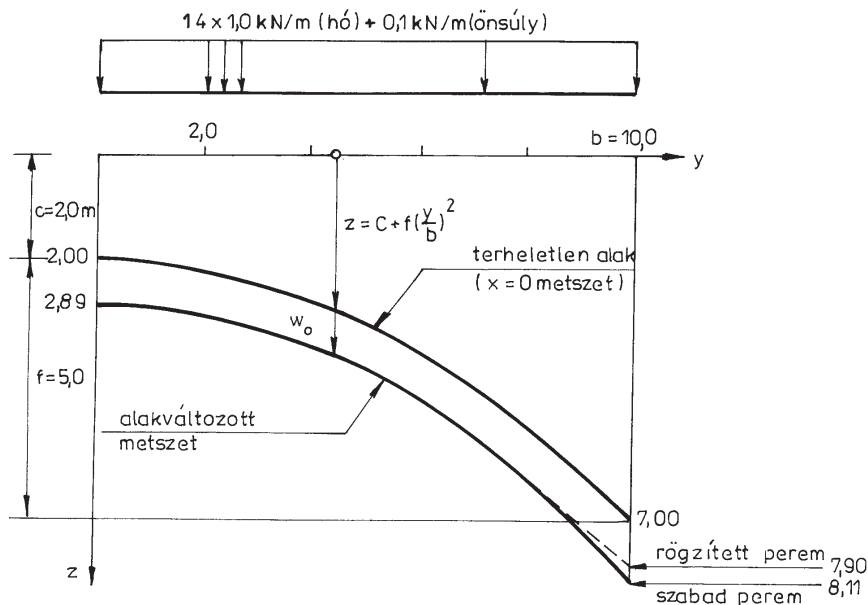
F. 3. Számpélda

A vizsgált számpélda geometriai adatait vegyük fel a 4. ábra kapcsán a már korábbi esettel egyezően. A ponyva anyagának jellemzői legyenek:

a rugalmassági modulus $E = 200$ [kN/m]

a kontrakciós tényező $\nu = 0,15$ [-]

A terhelést vegyük fel $1,4$ kN/m² (hóteher biztonsági tényezővel szorozva), valamint $0,1$ kN/m² önsúly teher. Először megvizsgáltuk a totális teher esetét, ennek végeredményét a 10. ábrán tüntettük fel.

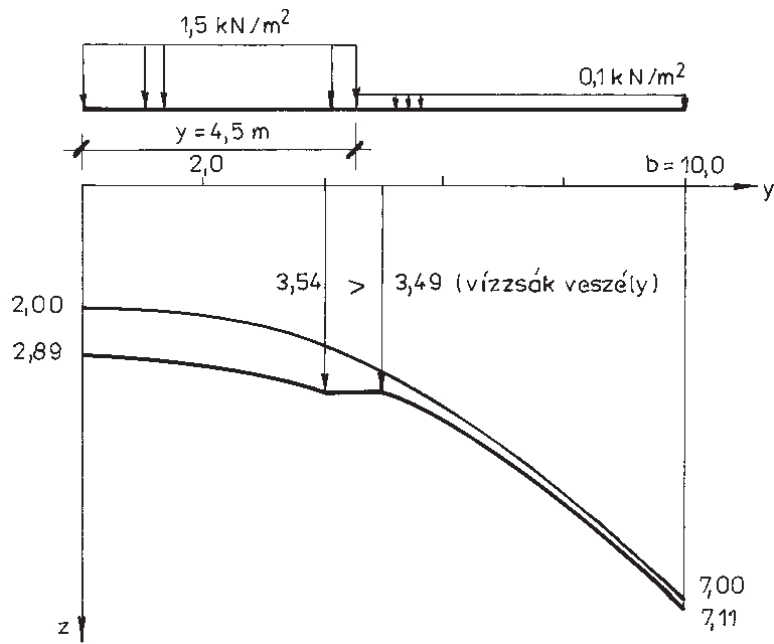


Ezen belül két esetet vizsgáltunk:

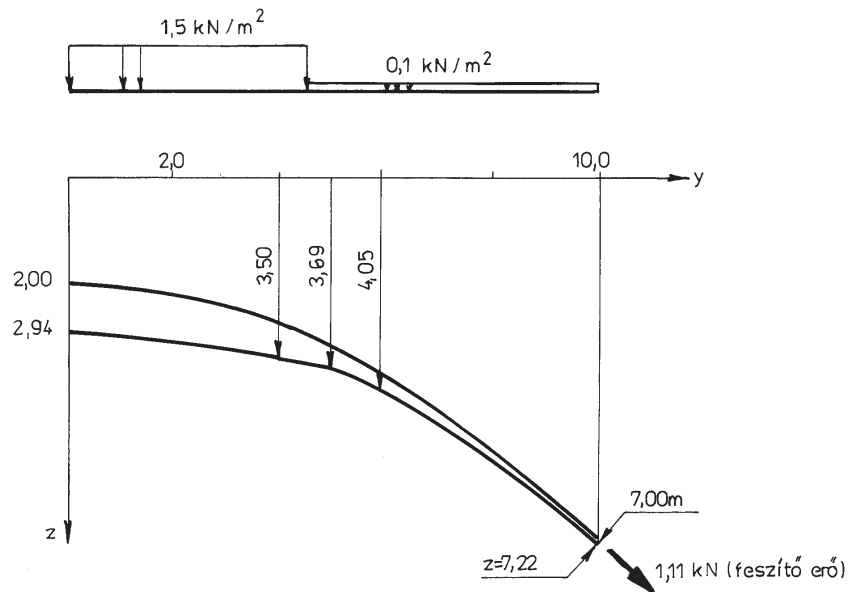
- az elmozdulásmentesen, vízszintes irányban rögzített perem és a
- szabad perem esetét.

Ezt követően megvizsgáltuk a szakaszos hóteher egy lehetséges esetét. Ennek eredményeit a 11. ábrán mutatjuk be.

Láthatóan az $y = 4,5$ m környezetében vízszaks alakul ki. Ezt elkerülendő feszítést alkalmazunk. Ennek megvalósítását a perem adott mértékű elmozdításával (mehúzásával) érhetjük el. Ennek mértékét vegyük fel $0,1$ m-re, az eredményt a 12. ábrán tüntettük fel.



11. ábra. A ponyvahéj alakja [m] a szakaszos hóteher egy lehetséges esetére



12. ábra. A ponyvahéj alakja [m] adott mértékű (1,114 kN) peremfeszítés esetén

Ennek a peremmeghúzási mértékhez tartozó feszítőerő értéke 1,114 [kN/m], lecsengése az $y = 0$ helyen 0,947 [kN/m] lesz. A vízzsák láthatóan eltűnik.

Belátható, hogy a vizsgált példák esetében $\eta = \frac{w_0}{a}$ mindenütt $\leq 0,3$, így a 4. ábra szerinti közelítés indokolt volt.

DEFORMATION OF HYPERBOLICAL PARABOLOID TENT STRUCTURE, REGARDING OF THE RISK OF LOCAL INSTABILITY CAUSED BY “WATERSACK”

Summary

The paper deals with the local instability problem of tent structures caused by “watersack”. A simplified method was presented to solve this problem. The method is suggesting simple formulas for the pre-design of such structures. Showing the advantages of this method a numerical example was also presented in the frame of article.

Keywords: hyperbolic paraboloid, tent structure, instability, watersack