

A TERMÉSZETES FAANYAG SZILÁRDSÁGI FELÜLETÉNEK JELLEMZŐI*

SZALAI JÓZSEF**

Az anizotrop faanyag és faalapú anyagok törésének, ill. teherbírásának előrejelzése lényegesen bonyolultabb feladat, mint azt az izotrop anyagok esetében megszoktuk.

Az anizotrop tönkremeneteli elméletek általában egy polinom összefüggést adnak meg a szilárdsági határállapot fellépésének meghatározására. A feszültségek terében a feltétel geometriailag egy (hiper)felületet jelent. Amennyiben az anyagtörvény rugalmas, rugalmas-képlékeny, rugalmas-viszkózus vagy rugalmas-képlékeny-felkeményedő tulajdonságú, bizonyítható, hogy a tönkremeneteli felület mindig konvex. Rugalmas-rideg anyagok esetében a tönkremeneteli felület „dombszerű”, minden irányban véges, de tartalmazhat konkáv részeket is. A kívülről nézve homorú felületrészek létezését a rugalmas alakváltozás energetikai elemzésével magyarázhatjuk, és a rideg törés pillanatában a Drucker-féle stabilitási posztulátum érvényességének megszűnésével igazolhatjuk.

Kulcsszavak: a faanyag szilárdsága; anizotrop tönkremeneteli kritériumok; rugalmas, képlékeny, felkeményedő, viszkózus és rideg anyag; tönkremeneteli felület; Drucker-féle anyagstabilitás

1. BEVEZETÉS

A természetes faanyag vagy akár a faalapú anyagok bonyolult belső mikro- és mezoszerkezetük következtében a fizikai-mechanikai tulajdonságok tekintetében makroszkopikusan anizotropiát mutatnak. A faanyag és a faalapú anyagok anyagmodellje a fenomenológiai elmélet alkalmazása során – első közelítésként – homogénnek és ortogonálisan anizotropnak (röviden ortotropnak) tekinthető. Ortotrop anyagoknál a mechanikai tulajdonságok (mint pl. a rugalmasság, képlékenységi modulus, viszkózitás, szilárdság stb.) jellemzésére általában négydimenziós (negyedrendű) tenzorok alkalmasak, amelyekben az anatómiai vagy szerkezeti főirányokkal egybeeső koordináta-rendszerben kilenc független tenzorkomponens szerepel. Ezek a

* A cikk 1999 decemberében érkezett a szerkesztőségbe.

** A műszaki tudományok kandidátusa, egy. tanár. Nyugat-magyarországi Egyetem, Műszaki Mechanika és Tartószerkezetek Intézet. 9400 Sopron, Bajcsy-Zsilinszky E. u. 34. Fax: (99) 311-103; e-mail: jkszalai@fmk.nyme.hu

tenzorkomponensek a kísérlettel meghatározható ún. technikai anyagállandók (technikai rugalmasságok, szilárdságok, keménységek stb.) meghatározott függvényei. Technikai anyagállandóknak nevezzük a kísérlettel meghatározható anyagjellemzőket.

A szilárdság tekintetében a faanyagról (és a faalapú anyagokról is) a következőket hangsúlyozhatjuk. A faanyag négydimenziós szilárdsági tenzorában – az ortogonális anizotrópia miatt – kilenc független komponens található. Ezeket optimális esetben 27 technikai szilárdság ismeretében határozhatjuk meg. A komponenseket ugyanis a feszültségi állapot normálfeszültségeinek előjelei függvényében kell más és más technikai állandókkal számítanunk, mert a faanyag adott orientációhoz tartozó húzó- és nyomószilárdsága különböző. A szilárdsági tenzor komponensei és a technikai szilárdságok közötti függvénykapcsolat konkrét formáját az alkalmazott törésmélelet határozza meg. A szilárdsági tenzor ismeretében egy tetszőleges irányhoz vagy síkhoz tartozó normál-, ill. nyírószilárdság értéke számítható. A számítás lehetőségét és helyességét számos kísérlet (Askenazi, 1978; Szalai, 1994) támasztja alá. Ha arra a kérdésre szeretnénk választ kapni, hogy egy működő feszültségállapot okoz-e törést, vagy hogy mekkora biztonság van még a tönkremenetellel szemben, már nem elegendő csupán a szilárdsági tenzor ismerete, hanem alkalmazni kell valamilyen tönkremeneteli (más néven szilárdsági) elméletet is. Ezek a tönkremeneteli elméletek matematikai szempontból polinomok, amelyekben a független változók a feszültségkomponensek, az együtthatók pedig a szilárdsági tenzor komponensei, azaz közvetve a technikai szilárdságok. Ezek a polinomok a feszültségek kilenc-, ill. hatdimenziós terében geometriailag egy (hiper)felületet határoznak meg. A tönkremenetel kérdését a felület ismeretében a következőképpen fogalmazhatjuk meg. Ha a feszültségi állapotnak megfelelő feszültségi képpont a felületre esik, akkor az anyag éppen a törés (tönkremenetel) határállapotában van. Ha a feszültségi képpont a felület és az origó között helyezkedik el, nincs törés. A felületen kívüli képpont tönkremenetelt jelez. A szinte számtalan anizotrop törésmélelet közül az elméleti megállapítások és gyakorlati tapasztalatok alapján faanyagra az Askenazi-féle tűnik a legalkalmasabbnak (Szalai, 1994).

2. PROBLÉMAFELVETÉS

Az izotrop vagy anizotrop anyagok tönkremeneteli elméleteinek megfelelő tönkremeneteli felületei minden irányban végesek, hiszen a teherbírás semmilyen irányban sem lehet végtelen nagy. A szilárdsági felület „dombszerű”. A tönkremeneteli felület a legtöbb anizotrop törésmélelet esetén (von Mises-elmélet, Tsai-Wu-elmélet stb.) kívülről nézve konvex. Az Askenazi-féle szilárdsági felület azonban dombszerűsége ellenére konkáv részeket is tartalmazhat. Jóllehet faanya-

gon, faalapú anyagokon, amelyek az építési szerkezetekben uralkodó klimatikus állapotok mellett rugalmas-ridegek, (Askenazi, 1978; Ehlbeck – Hemmer, 1986; Szalai, 1994) vagy a szintén ridegen törő vasbetonon (Kollár – Takács, 1991) a gyakorlatban is tapasztalták lokálisan homorú felületek megjelenését, sok kutató a részlegesen konkáv szilárdsági felületet tényét elvileg kétségbe vonja, ill. mérési hibának tartja.

A következőkben röviden összefoglaljuk, hogy a feszültségi és alakváltozási állapotot összekapcsoló anyagtörvények milyen felületeket definiálnak és ezekből milyen következtetéseket vonhatunk le. Előtte azonban ismerkedjünk meg a stabil anyagviselkedés kritériumával és a tönkremeneteli felületekkel kapcsolatos két tétellel.

3. A STABIL ANYAGVISELKEDÉS DRUCKER-FÉLE KRITÉRIUMA

A Drucker-féle kritérium szerint az anyag egy terhelési ciklusban addig viselkedik stabilan, amíg a

$$d\varepsilon_{ij} d\sigma^{ij} > 0 \quad (1)$$

reláció fennáll. Itt

$d\varepsilon_{ij}$ – az elemi alakváltozási állapot növekmény ($i, j = 1, 2, 3$),
 $d\sigma^{ij}$ – az elemi feszültségi állapotnövekmény¹ ($i, j = 1, 2, 3$).

A fenti feltétel azt jelenti, hogy az alakváltozás során felhalmozott, visszanyerhető vagy elnyelt (hővé alakuló) energia csak pozitív lehet (ez az energia nyilvánvalóan nem lehet negatív, mert az azt jelentené, hogy a tehermentesítés során több energia szabadulna fel, mint a terheléskor befektetett energia, ami ellentmondásban áll az energia megmaradásának elvével). Fizikailag a (1) relációt úgy értelmezhetjük, hogy a feszültségi állapot elemi nagyságú növekedése következtében fellépő alakváltozási állapotnövekedés, ill. az ezeknek megfelelő vektorok egymással hegyesszöget zárnak be, azaz az anyag követni tudja a feszültségek alakváltoztató hatását. Erre mondjuk, hogy az anyag még stabilan viselkedik. A reláció megfordulása azt jelenti, hogy a feszültségnövekmény és az alakváltozás-növekmény

¹ Ebben és a további összefüggésekben az Einstein-féle jelölési konvenciót alkalmazzuk. Megjegyezzük, hogy derékszögű koordináta-rendszerekben a tenzorok kovariáns és kontravariáns komponensei számértékileg megegyeznek.

mény vektorai egymással tompaszöget zárnak be, az anyag elemi részecskéje a feszültségek értelmével ellentétes irányban deformálódik, mozdul el, ami csak úgy lehetséges, ha folytonossága megszűnik, azaz reped, törik.

4. A NORMALITÁS ÉS KONVEXITÁS TÉTELE

Minden olyan feszültségi állapotnál, amelynél megindul a rugalmas, képlékeny, viszkózus vagy felkeményedő alakváltozás a feszültségek terében a feszültségi képpont rajta van egy zárt (hiper)felületen, melyet általánosan

$$f = f(\sigma^{ij}, \varepsilon_{ij}, k_i) = \text{const.} \quad (2)$$

alakban adhatunk meg. E függvény független változói a feszültségi, az alakváltozási állapot komponensei és más egyéb mennyiségek (pl. terhelési történetre jellemző érték), vagy ezek valamelyike.

Tegyük fel, hogy e felület csupán a feszültségi állapot függvénye és egy pontjában a külső normális legyen $\bar{n} = \Sigma n_i \bar{e}_i$ ($i = 1, 2, \dots$ – a feszültségtér dimenziója, \bar{e}_i – a feszültségtér tengelyeinek irányába eső egységvektorok). Működjön egy olyan elemi feszültségi állapotnövekmény, amely beleesik az f felület érintősíkjába. Ekkor, mivel $\bar{n} \perp d\bar{\sigma}$, a két vektor skalárszorzata nulla:

$$\bar{n} d\bar{\sigma} = n_i d\sigma^{ij} = n_1 d\sigma^{11} + n_2 d\sigma^{12} + n_3 d\sigma^{13} + n_4 d\sigma^{14} + \dots + n_9 d\sigma^{33} = 0 \quad (3)$$

Az érintősíkra eső elemi feszültségi állapot változásra azonban f értéke nem változik meg, azaz

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma^{ij}} d\sigma^{ij} = \frac{\partial f}{\partial \sigma^{11}} d\sigma^{11} = \frac{\partial f}{\partial \sigma^{12}} d\sigma^{12} = \frac{\partial f}{\partial \sigma^{13}} d\sigma^{13} = \frac{\partial f}{\partial \sigma^{21}} d\sigma^{21} + \dots + \frac{\partial f}{\partial \sigma^{33}} d\sigma^{33} = 0 \quad (4)$$

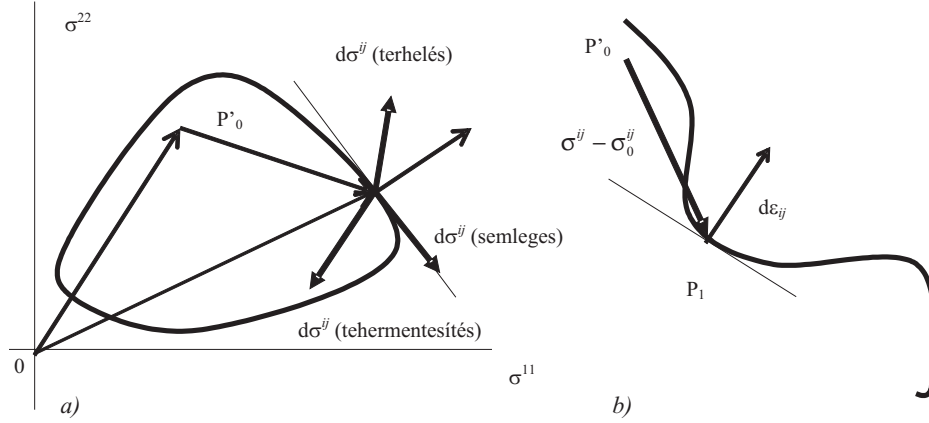
(3) és (4) összehasonlításával adódik, hogy a $\partial f / \partial \sigma^{ij}$ mennyiség a konstans f felületre merőleges, azaz f gradiense. Tetszőleges pontban a külső normális és $\text{grad} f$ egymással párhuzamosak. Bizonyítható, hogy a rugalmas alakváltozás deformációvektora, a viszkózus alakváltozás deformáció-sebesség vektora, a képlékeny anyag vagy felkeményedő anyag elemi deformáció növekménye párhuzamos $\partial f / \partial \sigma^{ij}$ -vel, azaz merőleges az $f = \text{const.}$ felületre. Ez a normalitás tétele.

Az (1) stabilitási feltételnek van még egy következménye az $f = \text{const.}$ felület alakjára nézve.

Tegyük fel, hogy az anyag egy pontjában a terhelési történet olyan, hogy a feszültségi képpont a hiperfelület belső P'_0 pontjára esik (1/a ábra). Ezután alkalmazzunk egy olyan terhelést, amelynek hatására a feszültségi képpont a hiper-

felület P_1 felületére kerül. Esetünkben az (1) stabilitási feltétel a következő alakot ölti:

$$(\sigma^{ij} - \sigma_0^{ij}) d\varepsilon_{ij} > 0. \quad (5)$$



1. ábra. a) A feszültségnövekmény-vektor lehetséges helyzetei a hiperfelületen, b) a felület konvexitásának demonstrációja a kétdimenziós feszültségtérben

Mivel – mint láttuk – a $d\varepsilon_{ij}$ alakváltozási állapot vektora a felület külső normálisával párhuzamos és ennek a $(\sigma^{ij} - \sigma_0^{ij})$ vektorral vett skaláris szorzata pozitív érték, a két vektor közötti szögnek kisebbnek kell lenni 90° -nál. Ez azonban csak akkor lehetséges, ha az $f = \text{const.}$ hiperfelület konvex. Konkáv felületdarabok esetén ugyanis mindig található lenne olyan P'_0 kiindulási feszültségi képpont, amelyre az (1) feltétel megsérülne (1/b ábra).

5. ANYAGTÖRVERNÉK

5.1. IDEÁLISAN RUGALMAS ANYAG

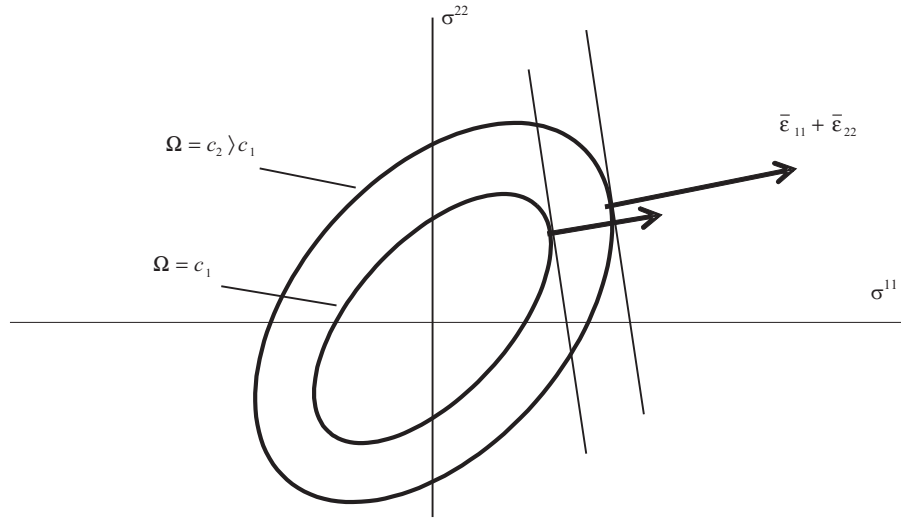
Lineárisan rugalmas anyag esetén az Ω kiegészítő rugalmas potenciál a feszültségek pozitív definit kvadratikusan függvénye:

$$\Omega = \int_0^{\sigma^{ij}} \varepsilon_{ij} d\sigma^{ij} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} \sigma^{ij} = \frac{1}{2} s_{ijkl} \sigma^{ij} \sigma^{kl}, \quad (6)$$

ahol

s_{ijkl} – az anizotrop anyag alakíthatósági tenzora ($i, j, k, l = 1, 2, 3$).

A rugalmas potenciál értelmezésénél fogva csak pozitív lehet. A kilenc- vagy hatdimenziós feszültségtérben minden $\Omega = c_1 = \text{const.}$ értéknek megfelelő felület egy hiperellipszoid. Az alterek felületei vagy görbéi is ellipszoidok vagy ellipszisek (pl. a σ^{11}, σ^{22} síkban ellipszis (2. ábra), síkbeli feszültségi állapotban ellipszoid).



2. ábra. A kiegészítő energiasűrűség felülete lineárisan rugalmas anyag esetén a kétdimenziós feszültségtérben

A kiegészítő rugalmas potenciál mindig pozitív definit függetlenül attól, hogy lineáris vagy nemlineáris, izotrop vagy anizotrop a rugalmas anyagtörvény. A konstans értékű kiegészítő rugalmas potenciál felülete tehát mindig konvex, lehetnek azonban az ellipszoidnál kevésbé szabályos alakúak is (pl. ovális, hengeres, prizmatikus stb.).

Differenciáljuk (6)-ot a feszültségkomponensek szerint:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial \Omega}{\partial \sigma^{ij}}, \quad (7)$$

azaz a rugalmas alakváltozás egyedül a pillanatnyi feszültségektől függ, a terheléstörténetnek nincs szerepe. (7) egyben a normalitási reláció is. Egy adott σ^{ij} -nél az állandó Ω -hoz tartozó felület normálisa reprezentálja a σ^{ij} -hez tartozó ε_{ij} rugalmas

deformációt abban az értelemben, hogy az alakváltozási komponenseknek a feszültségi koordinátatengelyekkel párhuzamos irányhoz tartozó komponensei arányosak a megfelelő feszültségkomponensekkel.

A normalitás és a konvexitás minden rugalmas anyag tulajdonsága, függetlenül attól, hogy izotrop vagy anizotrop, lineáris vagy nemlineáris.

5.2. VISZKÓZUS ANYAG

A viszkózus anyagoknál matematikailag analóg összefüggéseket használhatunk a rugalmas anyagokéhoz, azzal a különbséggel, hogy az alakváltozási komponensek helyett azok idő szerinti deriváltját, azaz az alakváltozási sebességet, a kiegészítő rugalmas potenciál helyett pedig a Θ kiegészítő viszkózus potenciált írjuk:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{\partial \Theta}{\partial \sigma^{ij}}. \quad (8)$$

A $\Theta = \text{const.}$ felület mint rugalmas anyagnál itt is konvex, és az alakváltozási sebesség merőleges a feszültségi képpontban a felület érintőjére. A (8) összefüggés fizikai jelentése azonban mást takar. Itt

$$D = \sigma^{ij} \dot{\epsilon}_{ij} = \sigma^{ij} \frac{\partial \Theta}{\partial \sigma^{ij}}, \quad (9)$$

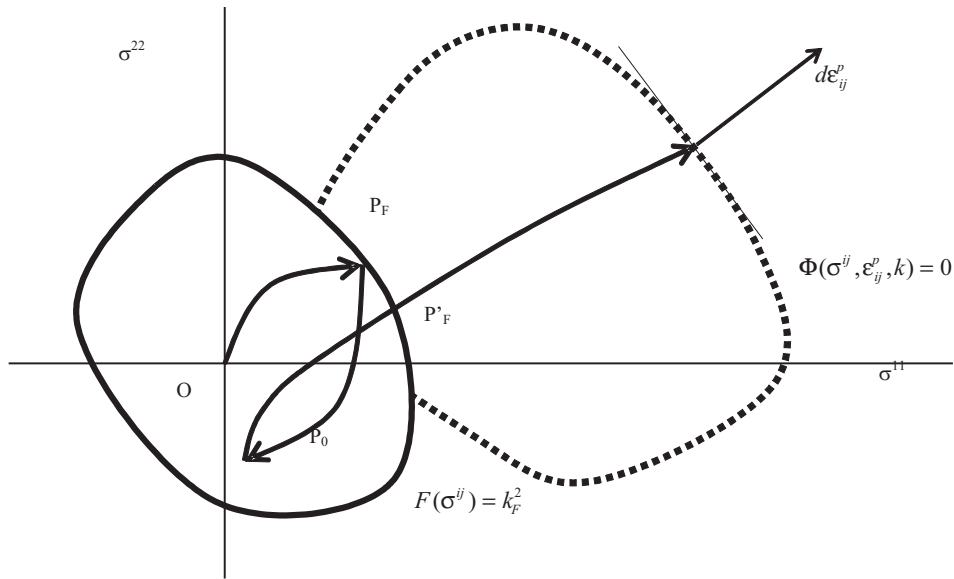
a térfogategységre eső energiadisszipáció sebessége.

5.3. IDEÁLISAN KÉPLÉKENY ÉS KÉPLÉKENY FELKEMÉNYEDŐ ANYAG

Minden olyan feszültségi állapot, pontosabban a neki megfelelő képpont, amelynél a folyás először megindul, ill. megkezdődik a felkeményedés, egy zárt felületen helyezkedik el, melyet az

$$F(\sigma^{ij}) = (k_F)^2 = \text{const.} \quad (10)$$

általános összefüggéssel adhatunk meg. A k_F paraméter az egytengelyű feszültségi állapothoz tartozó folyáshatárral van valamilyen kapcsolatban. Az (10)-tel megadott felületet *eredeti folyási hiperfelületnek* nevezzük. Ezt a felületet a σ^{11} , σ^{22} síkba redukálva az 3. ábrán látható zárt – folytonos vonallal rajzolt – görbével jelképezhetjük. Ez a görbe a síkot két részre osztja. Ha a feszültségi képpont az origót



3. ábra. A kiegészítő rugalmas energiasűrűség felülete ideálisan képlékeny (folytonos vonal) és képlékeny fejkeményedő (pontosított vonal) anyag esetén a terhelési folyamat ábrázolásával

is tartalmazó belső részbe esik, az anyagban rugalmas alakváltozások lépnek fel. A görbén kívüli rész a plasztikus terület. Ideálisan képlékeny anyagnál az eredeti folyási hiperfelület változatlan marad és a feszültségi képpont nem eshet a felületen kívülre. A folyás akkor lép fel, ha a feszültségi képpont éppen a felületre esik. Ha a felkeményedő anyagban a plasztikus területen terhelünk, akkor az eredeti folyási hiperfelület deformálódhat és eltolódhat, a 3. ábrán látható pontosított vonalú zárt görbébe mehet át. Az $OP_F P_0 P_F P_1$ görbe vonal az anyagi pont egy lehetséges terheléstörténetét mutatja. A feszültségi állapot először elérte az első megfolyásnak megfelelő P_F pontot, ezután a $P_F P_0 P_F$ folyamatnak megfelelő feszültség-átrendező-dés következik be a rugalmas területen, majd a felkeményedési szakasz jön létre a $P_F P_1$ folyamán. A mindenkor speciális felkeményedési állapotot egy skálár-függvénnyel adhatjuk meg:

$$\Phi(\sigma^{ij}, \varepsilon_{ij}^p, k) = 0, \quad (11)$$

amely általában a tényleges feszültségi állapotnak, a hozzátartozó plasztikus alakváltozási állapotnak és a k felkeményedési paraméteren keresztül a felkeményedési terheléstörténet függvénye, s amit *felkeményedési hiperfelületnek* nevezünk. A Φ függvény alkalmas az anizotrópia és az ún. Bauschinger-effektus kifejezésére is.

A feszültségtérben Φ is zárt hiperfelület, amelynek belsejében ($\Phi < 0$) csak rugalmas állapot uralkodhat. A függvény teljes differenciáljából általános érvényű megállapításokat tehetünk:

$$d\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial\sigma^{ij}} d\sigma^{ij} + \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_{ij}^p} d\varepsilon_{ij}^p + \frac{\partial\Phi}{\partial k} dk. \quad (12)$$

A $\Phi = 0$ felkeményedési hiperfelületből kiindulva a feszültségi állapotnak minden olyan változása, amelynél $d\Phi < 0$, a felület belsejébe vezet, azaz rugalmas állapotok uralkodnak ($\Phi < 0$). Mivel ilyenkor képlékeny alakváltozás nincs: $d\varepsilon_{ij}^p = 0$, és a felkeményedési terheléstörténet is ugyanaz marad: $dk = 0$, a tehermentesítés feltétele:

$$d\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial\sigma^{ij}} d\sigma^{ij} < 0. \quad (13)$$

A tehermentesítésnek megfelelő $d\sigma^{ij}$ feszültségváltozási állapotvektorok a felület belsejébe mutatnak. Ebben az esetben a 4.1. alfejezet megállapításai érvényesek.

Összetett feszültségi állapot esetén olyan feszültségállapot-változások is felléphetnek, amelyek során sem rugalmas, sem plasztikus alakváltozás nem keletkezik. A feszültségi képpont ilyenkor a hiperfelületen mozog, azaz $d\Phi = 0$. Ilyenkor – $d\varepsilon_{ij}^p$ és $dk = 0$ miatt –:

$$d\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial\sigma^{ij}} d\sigma^{ij} = 0. \quad (14)$$

Mivel a $\partial\Phi / \partial\sigma^{ij}$ és a $d\sigma^{ij}$ vektorok skalár szorzata eltűnik és $d\sigma^{ij}$ benne van a felület érintősíkjában, a $\partial\Phi / \partial\sigma^{ij}$ vektor a felkeményedési hiperfelület külső normálisának irányába mutat.

A hiperfelületből kifelé mutató feszültségállapot-változási vektorok plasztikus alakváltozást okoznak, ez a tulajdonképpeni terhelési folyamat. Ilyenkor a $\partial\Phi / \partial\sigma^{ij}$ és a $d\sigma^{ij}$ vektorok skalár szorzata pozitív:

$$d\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial\sigma^{ij}} d\sigma^{ij} > 0, \quad (15)$$

mert $\partial\Phi / \partial\sigma^{ij}$ minden kifelé mutató $d\sigma^{ij}$ vektorral hegyes szöget zár be.

Összefoglalva:

$$\Phi = 0 \text{ és } \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma^{ij}} d\sigma^{ij} \begin{cases} < 0 \text{ tehermentesítésnél} \\ = 0 \text{ feszültségátrendeződésnél} \\ > 0 \text{ terhelésnél} \end{cases} \quad (16)$$

(1)-et és (16)-ot összehasonlítva azonnal adódik, hogy a plasztikus alakváltozások vektorának iránya csak $\partial f / \partial \sigma^{ij}$ lehet, maga a képlékeny deformációs állapot a

$$de_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma^{ij}} \quad (17)$$

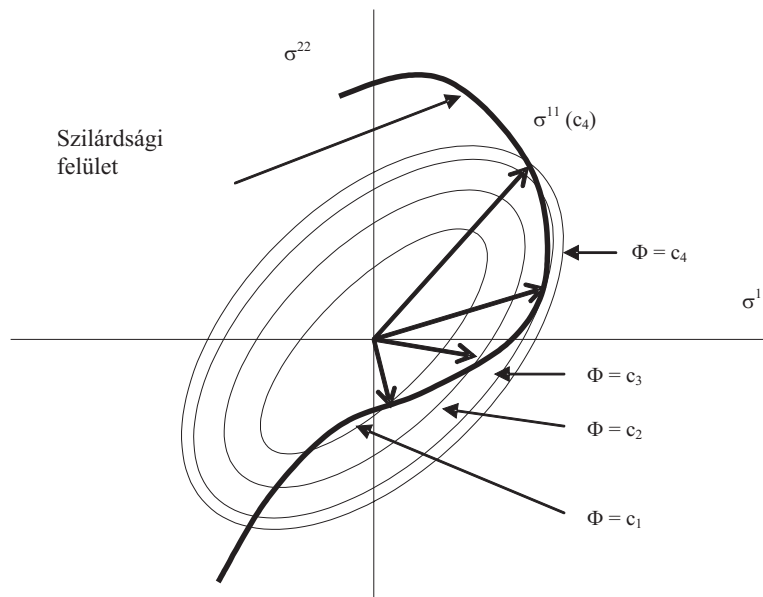
összefüggéssel adódik, ahol $d\lambda$ egy nemnegatív skalár együttható, az ún. *képlékenységi tényező*. $d\lambda = 0$ fennállása esetén feszültségátrendeződés lép csak fel, a $d\lambda < 0$ pedig értelmetlen. Mivel a $\partial \Phi / \partial \sigma^{ij}$ vektor a felkeményedési hiperfelület külső normálisába esik, – (17) miatt – ilyen irányú a képlékeny alakváltozás-növekmény vektora is (3. ábra). Az (5) egyenlőtlenség a képlékeny deformáció-növekményre is fennáll, tehát mind az eredeti folyási, mind a felkeményedési (hiper)felület konvex. A normalitás és a konvexitás törvénye tehát minden képlékeny és felkeményedő anyagra érvényes. Ideálisan képlékeny anyagnál de_{ij}^p az elsődleges folyási hiperfelületre merőleges és $d\lambda$ határozatlan marad.

5.4. RUGALMAS-RIDEG ANYAG

A rugalmas rideg anyagok alakváltozási jelleggörbéje – különösen a légszáraz faanyagé – a rideg törés bekövetkezéséig sokszor lineáris, esetleg egy olyan hatványfüggvénnyel közelíthető, amely csak a törési alakváltozás közelében görbül jelentősebb mértékben az alakváltozási tengely felé. Rideg törésnél a képlékeny agyagra jellemző viszonylag nagy alakváltozás nem lép fel, és az alakváltozási folyamat gyakorlatilag egészen a tönkremenetelig rugalmas.

Összetett feszültségi állapotban, mindaddig, amíg nem lép fel a törés, az 5.1. pontban leírt megállapítások és összefüggések érvényesek. Lineárisan rugalmas anyagnál minden törési feszültségi állapotnak megfelelő képpont a (6)-tal megadott $\Omega = c_1$ kiegészítő rugalmas potenciálnak megfelelő (hiper)ellipszoidra esik. A tönkremenetel bekövetkeztéig a rugalmas alakváltozást az Ω kiegészítő rugalmas potenciál határozza meg a (11) és (12) összefüggésnek megfelelően. Folyamatosan növelve egy konkrét feszültségi állapot komponenseit a normalitás és a

konvexitás törvénye a tönkremenetelig fennáll. Anizotrop anyag esetén azonban a tönkremenetelhez a különböző feszültségi állapotoknál különböző nagyságú $\Omega = c_i$ ($i = 1, 2, 3, \dots$) felületek tartoznak. A Függelékben megmutatjuk, hogy feltételezve a tönkremenetelhez tartozó kiegészítő potenciál orientációtól való függetlenségét, a rugalmas és szilárdsági anyagjellemzők között olyan kapcsolatoknak kellene fennállniuk, amelyeket a gyakorlati mérések nem igazolnak. Izotrop anyagnál az orientációnak nincs jelentősége. Itt a tönkremeneteli felület konvex, hiszen a tönkremenetelhez tartozó feszültségi állapotok képpontja az anyagra jellemző kiegészítő potenciális energiaértéknek megfelelő (hiper)ellipszoidon helyezkedik el. Anizotrop anyagnál minden orientációhoz más kiegészítő potenciál tartozhat. A tönkremenetelhez tartozó feszültségi képpontok összessége alkotja a ridegen törő anizotrop anyagok törési határfelületét (4. ábra).



4. ábra. A kiegészítő rugalmas energiasűrűség különböző felületei a tönkremenetel pillanatában és a tönkremeneteli feszültségi képpontok által alkotott szilárdsági felület

Anizotrop anyagnál a tönkremeneteli felület így nem feltétlenül konvex. A 4. ábrán látható módon a tönkremeneteli feszültségképpontok különböző ellipszoidokon fekszenek, de a tönkremenetelhez tartozó képpontok által alkotott felület konvex és konkáv részeket egyaránt tartalmazhat. A tönkremenetel pillanatában ugyanis a Drucker-féle stabilitási feltétel nem érvényes, hiszen megszűnik az

anyag folytonossága és a $d\epsilon_{ij} d\sigma^{ij}$ szorzat fizikailag értelmét veszti, tehát az (1), ill. (5) egyenlőtlenségnek nem kell teljesülnie. Ezzel elméletileg is igazoltuk azt a kísérleti tapasztalatot, hogy a rugalmas-rideg anyagok tönkremeneteli felületének konkáv részei is lehetnek.

IRODALOM

- Askenazi, E. K. (1978): *Anizotropia dreveszini i drevesznih materialov*. Moszkva, Izdatelstvtvo Lesznaja Promüslennosztj.
- Drucker, D. C. (1967): *Introduction to mechanics of deformable solids*. Mc Graw Hill.
- Ehlbeck, J. – Hemmer, K. (1986): Ein Beitrag zur Verbesserung des Tragfähigkeit bei Spannungs-kombinationen und zur Sammlung von Ausgangswerten für ein neues Sicherheitskonzept. *Schlussbericht des Lehrstuhls für Ingenieurholzbau und Baukonstruktionen*. Universität Karlsruhe.
- Kalishky S. (1990): *Mechanika II. Szilárdságtan*. Budapest, Tankönyvkiadó.
- Kollár L. P. – Takács Z. (1991): Lehet-e a vasbeton-keresztmetszet teherbírási vonala konkáv? *Közeledéscépités- és Mélyépítéstudományi Szemle*, XLI. 6. szám. 227–231.
- Reckling, K. A. (1967): *Plastizitätstheorie und ihre Anwendung auf Festigkeitsprobleme*. Berlin – Heidelberg – New York, Springer.
- Szalai J. (1994): *A faanyag és faalapú anyagok anizotrop rugalmasság- és szilárdságtana. I. rész: A mechanikai tulajdonságok anizotrópiája*. Sopron, Hillebrand Nyomda Kft.

FÜGGELÉK

Anizotrop anyag rideg törésekor a tönkremenetelig felhalmozott kiegészítő rugalmas potenciál értéke az orientáció függvénye

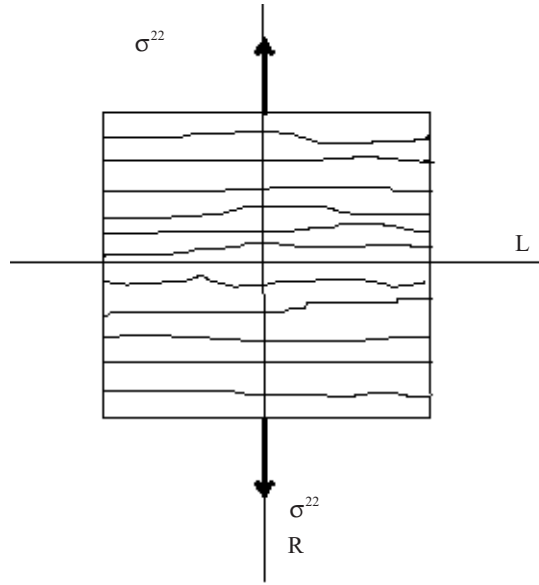
Hasson egy – az anatómiai főirányokkal párhuzamosan kivágott – fa próbatestre (F1. ábra) a tönkremenetel pillanatában az R irányban $\sigma^{RR} = \sigma^{22} = f_R$, azaz a radiális irányú húzószilárdságnak megfelelő lineáris feszültségi állapot. Légszáraz állapotban az alakváltozási diagram egészen a törésig lineárisnak tekinthető, ezért a törésig felhalmozott kiegészítő rugalmas potenciál:

$$U^* = \frac{1}{2} s_{ijkl} \sigma^{ij} \sigma^{kl} = \frac{1}{2} s_{2222} \sigma^{RR} \sigma^{RR}, \quad (F1)$$

ahol

$$s_{ijkl} \text{ – az alakíthatósági (deformálhatósági) tenzor, pl. } s_{1111} = \frac{1}{E_L}, s_{2222} = \frac{1}{E_R},$$

ahol E_L és E_R – a faanyag rost és radiális irányú rugalmassági modulusza.



F1. ábra. Az anatómiai fősíkokkal párhuzamosan kivágott fatest R irányú (rostra merőleges) terhelése egyenletes normáligénybevétellel
($\sigma^{22} = \sigma^{RR}$)

Forgassuk el a hasábot (vagy a normálfeszültséget) 90°-kal. Ebben az esetben a lineáris feszültségi állapot egyetlen nem nulla feszültsége:

$$\sigma^{11} = \sigma^{LL} = \sigma^{RR} = f_R,$$

ami nem okoz tönkremenetelt, hiszen faanyagnál

$$f_L > f_R,$$

f_L és f_R – a faanyag húzószilárdsága rost és radiális irányban.

Növeljük meg egyenletesen a σ^{11} feszültség értékét, és legyen a tönkremenetel pillanatában

$$\sigma^{11} = k\sigma^{RR},$$

tehát a σ^{RR} feszültség k -szorososa (k – tetszőleges pozitív valós szám).

A kiegészítő rugalmas potenciál a tönkremenetel pillanatában

$$U^{*'} = \frac{1}{2} s_{ijkl} \sigma^{ij} \sigma^{kl} = \frac{1}{2} s_{1111} k^2 \sigma^{RR} \sigma^{RR}. \quad (F2)$$

Ha azzal a feltételezéssel élünk, hogy az anizotrop anyag akkor megy tönkre, ha a fajlagos kiegészítő potenciál elér egy bizonyos, az anyagra jellemző értéket (izotrop anyagnál anyagnál ez triviális feltételezés, anizotrop anyagnál nem, a von Mises-, a Tsai-Wu- és sok más anizotrop törésmélet mégis ezt teszi), akkor (F1) és (F2) egyenlő:

$$\frac{1}{2} s_{2222} \sigma^{RR} \sigma^{RR} = \frac{1}{2} s_{1111} k^2 \sigma^{RR} \sigma^{RR},$$

ahonnan

$$k = \sqrt{\frac{s_{2222}}{s_{1111}}} = \sqrt{\frac{E_L}{E_R}}. \quad (F3)$$

(F3) általánosítva azt jelenti, hogy amennyiben feltételezzük, hogy anizotrop anyagnál a különböző tönkremeneteli feszültségi állapotokhoz tartozó kiegészítő rugalmas potenciál azonos, akkor létezik egy k feszültségnövelő tényező, amely megmutatja, hogy egy feszültségi állapot komponenseit, vagy azok valamelyikét milyen mértékben kell (lehet) növelni a tönkremenetel bekövetkezéséhez. Összetettebb feszültségi állapot esetén k függvénye (F3)-nál bonyolultabb lesz, de mindenképpen az anyag rugalmas állandóinak valamilyen függvénye.

Alkalmazzuk a tönkremeneteli elméleteket a két feszültségi állapot esetén.

A von Mises-féle tönkremeneteli elmélet:

$$t_{ijkl} \sigma^{ij} \sigma^{kl} = 1,$$

ahol

t_{ijkl} – a von Mises-féle tönkremeneteli tenzor komponensei ($i, j, k, l = 1, 2, 3$), pl.
 $t_{1111} = \frac{1}{f_L^2}$, $t_{2222} = \frac{1}{f_R^2}$, f_L , f_R – a faanyag normálszilárdsága rost és sugár irányban.

Esetünkben:

$$t_{2222} \sigma^{RR} \sigma^{RR} = 1, \quad t_{1111} k^2 \sigma^{RR} \sigma^{RR} = 1.$$

A két összefüggés összehasonlításából adódik:

$$k^2 = \frac{t_{2222}}{t_{1111}} = \frac{f_L^2}{f_R^2},$$

(F3) felhasználásával

$$\frac{f_L}{f_R} = \sqrt{\frac{E_L}{E_R}}. \quad (\text{F4})$$

A Tsai-Wu-féle tönkremeneteli elmélet:

$$t_{ij} \sigma^{ij} + t_{ijkl} \sigma^{ij} \sigma^{kl} = 1,$$

ahol

$$t_{ij} - \text{a Tsai-Wu-féle kétdimenziós szilárdsági tenzor, pl. } t_{11} = \frac{1}{f_L^+} - \frac{1}{f_L^-},$$

$$t_{22} = \frac{1}{f_R^+} - \frac{1}{f_R^-},$$

$$t_{ijkl} - \text{a Tsai-Wu-féle négydimenziós szilárdsági tenzor, pl. } t_{1111} = \frac{1}{f_L^+ f_L^-},$$

$$t_{2222} = \frac{1}{f_R^+ f_R^-},$$

ahol a + jel a húzószilárdságra, a – jel a nyomószilárdságra utal.

A két terhelési esetnek megfelelően:

$$t_{22} \sigma^{RR} + t_{2222} \sigma^{RR} \sigma^{RR} = 1, \quad t_{11} k \sigma^{RR} + t_{1111} k^2 \sigma^{RR} \sigma^{RR} = 1,$$

ahonnan elemi számolás, majd (F3) felhasználása után:

$$\frac{E_L}{E_R} \frac{f_R^+}{f_L^+ f_L^-} + \sqrt{\frac{E_L}{E_R}} \left(\frac{1}{f_L^+} - \frac{1}{f_L^-} \right) = \frac{1}{f_R^+}. \quad (\text{F5})$$

(F4) és (F5) összefüggések azt jelentik, hogy amennyiben feltételezzük, hogy az anizotrop anyagban a tönkremenetel pillanatában felhalmozott kiegészítő rugalmas potenciál bármilyen jellegű feszültségi állapotnál ugyanaz (és feltételezve, hogy az anyagtörvény a tönkremenetelig lineáris, ami a ridegen törő faanyagnál elég jól teljesül), akkor a rugalmas állandók és a szilárdságok között valamilyen függvénykapcsolatnak kell lenniük. E kapcsolatok által előírt mennyiségi viszonyok azonban a gyakorlatban tapasztalt anyagjellemzőkre nem teljesülnek (átlagos faanyagjellemzőkkel számolva (F5) jobb és bal oldala között legalább egy

nagyságrendnyi eltérés van, de (F4) sem áll fenn). Felhívjuk a figyelmet arra, hogy izotrop anyagnál (azonos húzó- és nyomószilárdság esetén) mind a (F4), mind az (F5) egyenlőség teljesül.

Ha feladjuk a tönkremenetelhez tartozó kiegészítő potenciál azonosságának gondolatát, ahogy azt az Askenázi-féle elmélet is teszi, a következőket állapíthatjuk meg.

Az Askenázi-féle tönkremeneteli elmélet alakja:

$$[t_{ijkl}\sigma^{ij}\sigma^{kl}]^2 = \frac{1}{2}[(\sigma^{ij}\delta_{ij}) + \sigma^{ij}\sigma_{ij}] = I_1^2 - I_2, \quad (F6)$$

ahol

$\sigma^{ij} = \sigma_{ij}$ – a ható feszültségi állapot,

I_1 és I_2 – az első és második feszültségi invariáns,

t_{ijkl} – az Askenázi-féle szilárdsági tenzor, pl. $t_{1111} = \frac{1}{f_L}$, $t_{2222} = \frac{1}{f_R}$.

δ_{ij} – a Kronecker-delta.

(F6) bal oldalának négyzetgyöke kiegészítő potenciál jellegű mennyiség, ill. azzal valamilyen kapcsolatban van (lásd az (F1) kifejezés általános részét), a jobb oldal viszont nem állandó, hanem az első és második feszültségi invariáns függvénye.

Térjünk vissza a két terhelési esethez:

$$(t_{2222}\sigma^{RR}\sigma^{RR})^2 = (\sigma^{RR})^2 = \frac{2U^*}{s_{2222}}, \quad (t_{1111}k^2\sigma^{RR}\sigma^{RR})^2 = k^2(\sigma^{RR})^2 = \frac{2U^*}{s_{1111}},$$

ahol felhasználtuk (F1)-et és (F2)-t. Végül:

$$U^* = \frac{1}{2} \frac{f_R^2}{E_R}, \quad U^{*'} = \frac{1}{2} \frac{f_L^2}{E_L},$$

a kettő hányadosa:

$$\frac{U^{*'}}{U^*} = \frac{E_R}{E_L} \left(\frac{f_L}{f_R} \right)^2, \quad (F7)$$

amit ebben az egyszerű terhelési esetben szemlélettel is beláthatunk. Például valamilyen fenyő fajra jellemző fiktív adatokkal, amelynél $E_L = 10000$ MPa, $E_R = 1000$ MPa, $f_L = 100$ MPa, $f_R = 5$ MPa:

$$\frac{U^{*'}}{U^*} = \frac{1000}{100000} \left(\frac{100}{5} \right)^2 = 40,$$

azaz rostirányban tönkremenetelig terhelve 40-szer akkora fajlagos kiegészítő rugalmas potenciál halmozódik fel, mint sugár irányú tönkremenetelnél.

Az Askenázi-elmélettel tehát meghatározhatók a tönkremenetelhez tartozó feszültségállapotok, a rugalmas anyagállandók ismeretében pedig a különböző törési feszültségi állapotoknak megfelelő kiegészítő potenciál, vagy azok egymáshoz viszonyított aránya. Levezetésünkben felhasználtuk azt feltételezést, hogy az ortotrop anyag lineárisan rugalmas. Erre a feltevésre valójában nincs szükség, ez csupán a számítást teszi egyszerűbbé. Ha ismerjük az anyagtörvényt, a kiegészítő potenciál elvileg számítható.

CHARACTERISTICS OF THE STRENGTH SURFACE OF SOLID WOOD

Summary

Prediction of the failure and load-bearing capacity of anisotropic wood and wood-based materials is far most difficult than for isotropic materials.

The anisotropic failure theories generally result in polynomial relationships for identifying the appearance of the strength limit state. The conditions of failure criterions geometrically represent in the space of stresses (hyper)surfaces. If the material is elastic, elastic-plastic, elastic-viscous or elastic-plastic-hardening, it can be proved that the failure surface is always convex. For elastic-brittle materials the failure surface is „hill-like”, i.e. it is finite in every direction, however it can contain concave domains too. The existence of the outwardly concave surface parts can be explained by the analysis of the elastic strain energy, and it is verified by the termination of the Drucker's stability postulate at the moment of brittle failure.

Keywords: strength of wood, anisotropic failure criteria: strength surfaces of elastic, perfect plastic, stress-hardening, viscous and brittle materials, Drucker's stability postulate, normality and convexity in stress space

