Építés- Építészettudomány XXXI (1–2) 61–68

SOROZATOK KONVOLÚCIÓJÁNAK ALKALMAZÁSAI*

HOLNAPY DEZSŐ**

Műszaki folyamatok modellezésére (műanyagok deformációi, épületek süllyedése, árhullámok követése, vízkivétel kútcsoportokból, vízgyűjtőterületek vízhozama, folyami vízerőművek teljesítményszámítása) gyakran használnak elsőrendű differenciálegyenleteket, ill. -rendszereket.

A feladatok megoldására az alkalmazók körében a Runge–Kutta-módszerek valamelyike, vagy a Laplace-féle transzformáció kínálkozik.

A munkaigényes Laplace-féle transzformáció használatát azonban a sorozatok konvolúciójának karakterisztikus függvényekkel megoldott kezelése egyszerű matematikai eszközökkel helyettesítheti, amelyre jelen tanulmány mutat be példát az anyagok viszkoelasztikus viselkedésének köréből, majd vázolja az általánosítás lehetőségeit.

Kulcsszavak: konvolúció, sorozatok, reológia

1. BEVEZETÉS

Műszaki folyamatok modellezésére gyakran elsőrendű differenciálegyenleteket, ill. -rendszereket használnak. A feladatok numerikus megoldására rutin megoldásként a Runge–Kutta-módszerek valamelyike, analitikus megoldására pedig a Laplace-féle integrál-transzformáció kínálkozik. A feladatok többségében azonban csak táblázatokkal kezelhető függvények is szerepelnek, ami a folytonos analízis alkalmazását szinte lehetetlenné teszi.

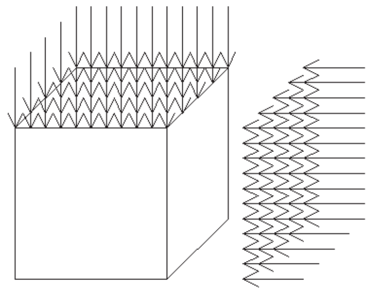
Alapkoncepcióként fogadjuk el, hogy digitális automatákra modellként az algebrák az alkalmasabbak. Keresnünk kell tehát olyan matematikai eszközöket, amelyek a jelenségeket közvetlenül diszkrét elemekkel írják le. Egyik lehetőség a feladatok megoldására a numerikus sorozatokkal megvalósított operációk alkal-

* Informatika a Felsőoktatásban c. konferencián elhangzott előadás, Debrecen, 2002. aug. 28–30.

** A műszaki tudomány kandidátusa, c. egy. docens. BME Fotogrammetria és Térinformatika Tanszék. H-1111 Budapest, Műegyetem rakpart 3–9. K. I. 19. Fax: (36 1) 463-3084; e-mail: holnapy@epito.bme.hu

mazása. Évtizedekkel ezelőtt is szerepeltek hasonló algoritmusok az irodalomban. Az új lendületet a kutatáshoz, a közelmúltban megjelent „Konkrét matematika” [1] című munka generátorfüggvényekkel foglalkozó alfejezete adta. A sorozatok konvolúciójának alkalmazása egyszerűen helyettesítheti a Laplace-féle transzformációt, és egyszerű matematikai eszközökkel teszi lehetővé a konvolutórikus problémák diszkrét kezelését.

Bemutatás céljára egy műanyagból készült kockát választunk, amelynek a felső lapján egy 130 kN/cm^2 nagyságú feszültség működik 10 napig, ezután levesszük a terhet (alsó lapon természetesen megtámasztott a kocka). 6,5. naptól a 8,75. napig azonban a kocka egyik oldallapját is megterheljük ugyanekkora feszültséggel (a szemben lévő oldal szintén megtámasztott). Vizsgálatunk tárgya minden esetben a függőleges fajlagos összenyomódás időbeli alakulása. A próbatest az *1. ábrá*n látható.



1. ábra. A vizsgált próbatest

A bemutatásra kerülő grafikonok abszcisszáin az idő van feltüntetve negyednapokban, az ordinátákon a függőleges irányú fajlagos összenyomódás (dimenzió nélküli érték). A kocka élei egységnyi (cm) hosszúságúak.

2. AZ EGYSÉGHATÁS VÁLASZFÜGGVÉNYE

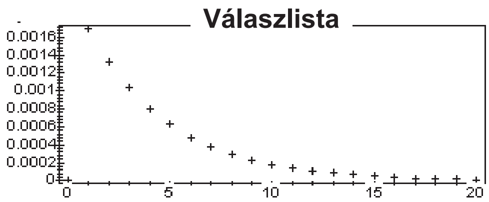
Okként egy egységugrás-függvényt alkalmazunk, amelyet egységnyi idő múlva (egy negyednap) megszüntetünk. Az egységhatás válaszfüggvényét analitikusan keressük meg. A válaszfüggvény a

$$130 \cdot 4 \cdot \partial \varepsilon(t) / \partial t + 130 \cdot \varepsilon(t) = Heaviside(t) - Heaviside(t-1) \qquad (1)$$

differenciálegyenlet megoldása,

$$\varepsilon(0) = 0 \tag{2}$$

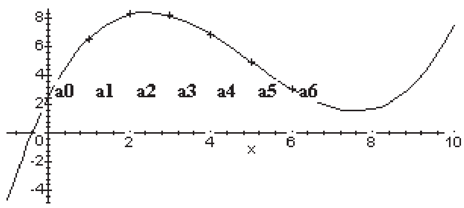
kezdeti feltétel mellett, amit negyednapos egyenletes felosztású sorozatként fogunk használni, s grafikusan a *2. ábrán* tüntettünk fel.



2. ábra. Az egységhatás válaszfüggvénye

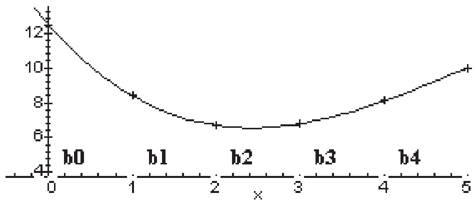
3. AZ EGYSÉGHATÁS VÁLASZFÜGGVÉNYÉNEK FELHASZNÁLÁSA

Nyilvánvalóan a gyakorlatban az ok nem egységnyi, hanem valamilyen függvény, amit a *3. ábra* szimbolizál. Az ábrán az eddigivel azonos (negyednapos egyenlőközű) felosztással létrehozott sorozat értékei is mindjárt fel vannak tüntetve.



3. ábra. A tényleges ok függvénye

Legyen az általánosság megszorítása nélkül a válaszfüggvény és a vele kapcsolatos sorozat a *4. ábra* szerinti.



4. ábra. Egy egységhatás válaszfüggvénye

Az állandó együtthatós lineáris differenciálegyenletek esetében a megoldásfüggvényekre érvényes a szuperpozíció elve, ezért a „nulla" időhöz tartozó válasz sorozata a következő:

$$a_0{\cdot}b_0 \qquad a_0{\cdot}b_1 \qquad a_0{\cdot}b_2 \qquad a_0{\cdot}b_3 \qquad a_0{\cdot}b_4 \;\ldots \tag{3}$$

Az „egy" időhöz tartozó válaszsorozat a fentihez hasonlóan, de egy időegységgel eltolva érvényesül. A „kettő", a „három" időközhöz tartozó ugyanígy számítandó.

$$\begin{array}{cccccc}
a_0{\cdot}b_0 & a_0{\cdot}b_1 & a_0{\cdot}b_2 & a_0{\cdot}b_3 & a_0{\cdot}b_4 & \ldots \\
 & a_1{\cdot}b_0 & a_1{\cdot}b_1 & a_1{\cdot}b_2 & a_1{\cdot}b_3 & \ldots \\
 & & a_2{\cdot}b_0 & a_2{\cdot}b_1 & a_2{\cdot}b_2 & \ldots \\
 & & & a_3{\cdot}b_0 & a_3{\cdot}b_1 & \ldots \\
 & & & & & \ldots
\end{array} \tag{4}$$

A felírt oszlopokat összegezve, a tényleges oknak megfelelő válaszfüggvény sorozatát kapjuk.

Az oszlopok összege:

$$a_0{\cdot}b_0,\ (a_0{\cdot}b_1 + a_1{\cdot}b_0),\ (a_0{\cdot}b_2 + a_1{\cdot}b_1 + a_2{\cdot}b_0),\ (\ldots.),\ \ldots\ldots \tag{5}$$

Az utóbbiról belátható, hogy az a következő két polinom szorzatának együtthatólistája:

$$A(x) = a_0 + a_1{\cdot}x + a_2{\cdot}x^2 + a_3{\cdot}x^3 + a_4{\cdot}x^4 + \ldots,\ \text{és} \tag{6}$$

$$B(x) = b_0 + b_1{\cdot}x + b_2{\cdot}x^2 + b^3{\cdot}x^3 + b_4{\cdot}x^4 + \ldots, \tag{7}$$

ahol a szorzat polinom n-edik együtthatója:

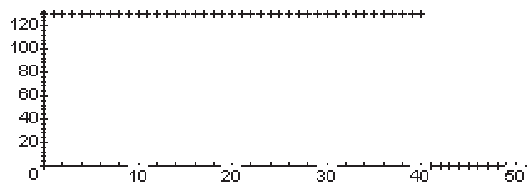
$$\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_{n-1}. \tag{8}$$

Az [1]-ben a (6) és (7)-beli polinomokat a sorozatok karakterisztikus polinomjainak nevezik, s mint a fentiekből kitűnik, a konvolúció visszavezethető a sorozatok karakterisztikus polinomjainak szorzatára, azaz a következőre:

$$\begin{aligned} A(x)\cdot B(x) = a_0\cdot b_0 + (a_0\cdot b_1 + a_1\cdot b_0)\cdot x &+ \\ (a_0\cdot b_2 + a_1\cdot b_1 + a_2\cdot b_0)\cdot x^2 &+ \\ (a_0\cdot b_3 + a_1\cdot b_2 + a_2\cdot b_1 + a_3\cdot b_0)\cdot x^3 &+ \end{aligned} \tag{9}$$

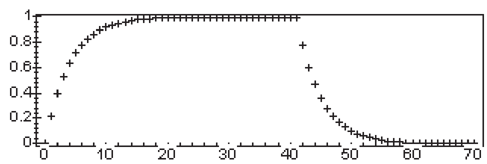
4. ALKALMAZÁSI PÉLDA

A bevezetőben említett példa, amelynek adatait Rollertől [3] vettük át, a következő ábrák segítségével mutatható be. A függőlegesen a kockára alkalmazott feszültség az *5. ábrá*n látható.



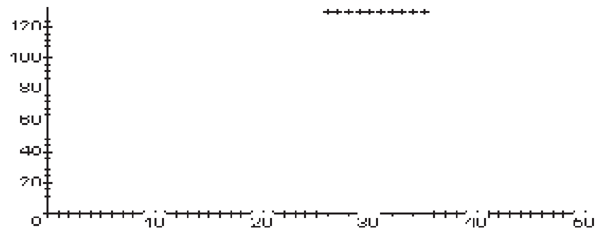
5. ábra. A felső kockalapra ható feszültség az idő függvényében

Az alkalmazott feszültség hatására keletkező, és tartalmát illetően a fajlagos alakváltozásokat eredményező válaszfüggvény a *6. ábrá*n látható.



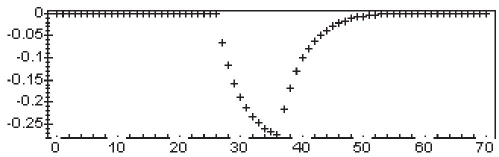
6. ábra. Az előidézett függőleges fajlagos alakváltozás az idő függvényében

A 26. –35. időintervallumban működő 130 kN/cm^2 oldalirányú feszültség, mint terhelő feszültség-idő függvény, a *7. ábrá*n látható.



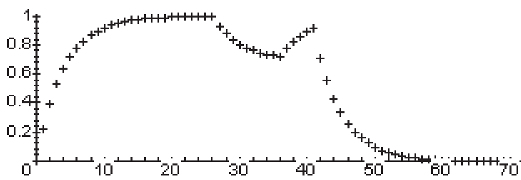
7. ábra. Az oldallapra ható feszültség az idő függvényében

Az oldalirányú feszültség hatására keletkező, és tartalmát illetően a függőleges fajlagos alakváltozásokat befolyásoló válaszfüggvény a *8. ábrá*n látható. (Az egységhatás válaszfüggvényét nem kell újra meghatároznunk, mert az, szilárdságtani okok miatt a már rendelkezésre állónak 0,3 szorosa. A 0,3 az ún. Poisson-féle harántkontrakciós tényező.)



8. ábra. Az előidézett függőleges fajlagos alakváltozás az idő függvényében

A két hatás szuperpozíciójából keletkező fajlagos összenyomódás-idő függvényt, mint végeredményt, a *9. ábrá*n mutatjuk be. Ha az olvasó szemléletében az összenyomódás a kocka felső lapjának lefelé mozgásaként van jelen, az ábra pozitív ordinátáit lefelé mutató mozgásnak kell tekintenie!



9. ábra. A két hatás szuperpozíciója

5. TOVÁBBI LEHETŐSÉGEK

Bizonyára az olvasó előtt is nyilvánvaló, hogy ugyanilyen matematikai apparátussal kezelhetők a bevezetésben említett problémák. Talán legszemléletesebb, amikor egy ház épül, és az önsúlyteher fokozatosan növekszik, miközben a süllyedés időben elhúzódva alakul ki. Megemlíthetjük, hogy az árhullámok kialakulásánál e módszert régóta használják csak más interpretációkat tettek hozzá. Vágás [4] például az árhullám levonulás vizsgálatánál úgyszólván pontosan ugyanezt teszi, csak mátrixos formában. Kármán és Biot [2] az állandó együtthatós lineáris differenciálegyenletek tranziens jelenségeinél használja e szuperpozíciós eljárást. Jelen dolgozat a gyakorlati feladatok számára annyival mond többet, hogy több egyidejű ok hatásait is könnyűszerrel figyelembe lehet venni, ha egyébként a módszer alkalmazásának feltétele – a lineáris szuperponálhatóság – fennáll. Ugyanígy tekinthetjük a módszer eleganciáján túlmenő előnynek, hogy a sorozatokkal (vagy az azokat reprezentáló polinomokkal) a folyamatosan érkező adatokat közvetlenül előrejelzésre, vagy akár automatikus beavatkozás kezdeményezésére tudjuk felhasználni.

Reméljük, hogy az árvizek levonulásának egységárhullám-módszerével eddig is kezelhető eredményekhez, a fentiek a befogadó folyam visszahatásait is kezelhetővé fogják tenni.

A számítások a Maple formula-orientált nyelv használatával készültek.

IRODALOMJEGYZÉK

[1] Graham, R. L. — Knuth, D. E. – Patashnik, O.: *Konkrét matematika.* Budapest, Műszaki Könyvkiadó, 1998.

[2] Kármán T. – Biot, M. A.: *Matematikai módszerek műszaki feladatok megoldására*. 2. kiadás. Budapest, Műszaki Könyvkiadó, 1967.

[3] Roller B.: Rendszerelmélet és viszkoelaszticitás alkalmazása tartószerkezeteknél. *Közlekedésépítés- és Mélyépítéstudományi Szemle* 42 (1992) 385–390.

[4] Vágás I.: Az árhullám elemzés átfolyás-elméleti módszerei. *Hidrológiai Közlöny* (1969) 247–253.

APPLICATIONS OF CONVOLUTIONS SEQUENCES

Summary

Differential equations or equation systems of first order are often applied for modeling the technical processes (e.g. deformation of plastics, yield of buildings, rate of water flow, capacity of water power plants). For the solution of these problems one of the Runge–Kutta methods or the transformation „Laplace" are suitable.

However, the use of the highly demanding transformation „Laplace” can be replaced by simple mathematical methods using the convolution of series with the help of characteristic functions. The author gives for this procedure an example in the field of viscoelasticity and simultaneously the general application of the method will be demonstrated also.

Keywords: convolution, series, rheology