

MOZGATHATÓ FORGÁSSZIMMETRIKUS ÉS GÖMBI KUPOLASZERKEZETEK*

KOVÁCS FLÓRIÁN**

A cikk első része rövid kinematikai áttekintést ad néhány olyan túlhatározott mechanizmusról, melyeken a szivárványhártya-jellegű nyitható tetőszerkezetek különböző szerkezeti megoldásai alapulnak. Jelen értekezés kizárólag az n -szeresen forgásszimmetrikus, csuklós rúdszerkezetű mechanizmusok kinematikai és építészeti vonatkozásaival, illetve a megfelelő tulajdonságok összevetésével foglalkozik, s rávilágít arra, hogy a síkbeli mechanizmusok együtteséből felépülő térbeli mechanizmusok csúszó alkatrészek híján nem képesek adott forgásfelület mentén mozogni.

A második rész egy új, túlhatározott gömbi mechanizmust mutat be, mely ollószerűen kapcsolt gömbi körívekből épül fel, továbbá különböző lehetőségeket vázol a fenti szerkezet merevségének újabb rudak beiktatása által történő növelésére. Legvégül a projektív geometria tételein alapuló eljárást ismertet a rúdhálózat tetszőleges mértékű további sűrítésére.

Kulcsszavak: nyitható tetők, gömbi mechanizmus, ollószerű elemek, nyitható/csukható kupolaszerkezetek, túlhatározott mechanizmus

1. BEVEZETÉS

Építészek és statikusok számára egyaránt izgalmas, egyszersmind napjainkban egyre többször felmerülő feladat a nagy alapterületű és befogadóképességű épületek tervezése, különös tekintettel a lefedés megfelelő megoldására. A feladat még összetettebbé válik, mihelyt e szerkezetekkel szemben egy bizonyos értelemben vett mozgathatóság igénye is fölmerül – gondolhatunk itt akár egy nyitható tetejű stadionra vagy egyéb közösségi létesítményekre.

Tekintettel arra, hogy a mérnöki szóhasználatban a „szerkezet” és „mechanizmus” épp a mozgathatóság szerinti különbségtételt fejezi ki, viszont a térlefedések hagyományos értelemben mégiscsak szerkezetnek számítanak, vizsgálatunk tár-

* Ez a kutatás az OTKA T031931 és az FKFP 0177/2001 számú kutatási projekt keretében zajlott.

** MTA-BME Tartószerkezetek Numerikus Mechanikája Kutatócsoport. 1111 Budapest, Műegyetem rkp. 3. K. mf. 52. Tel.: 463-4039.

gyát a továbbiakban – némi kompromisszum árán – mozgatható szerkezeteknek fogjuk nevezni.

Mint általában, e mozgatható szerkezetek esetében is többféle tervezési szempont összehangolása szükséges, melyek közül jelen munkában csak a mechanikai, azon belül is inkább a kinematikai, mint statikai megfontolásokkal foglalkozunk részletesen. Érdeklődésünk középpontjában a mozgathatóság alapjául szolgáló mechanizmusok viselkedése, különböző megszorító feltételek melletti konstruálhatósága áll. A megszorítások lényegében két alaptípusba tartoznak: részint bizonyos geometriai követelmények teljesülése (pl. a mozgó alkatrészek által bejárt pálya) írható elő, részint a szerkezet kinematikai túlhatározottságának megfelelő biztosítására lehet szükség az elemek együttdolgozása és az igénybevételek viszonylagos kiegyenlítése érdekében. Megjegyezzük azonban, hogy pusztán e kinematikai megfontolások sem lehetnek függetlenek például attól a gyakorlati követelménytől, hogy a szerkezet váza alkalmas legyen a tényleges térelválasztó elemek megfelelő rögzítésére, egymáshoz való illeszkedésük biztosítására mind mozgás közben, mind pedig a teljesen zárt állapotban.

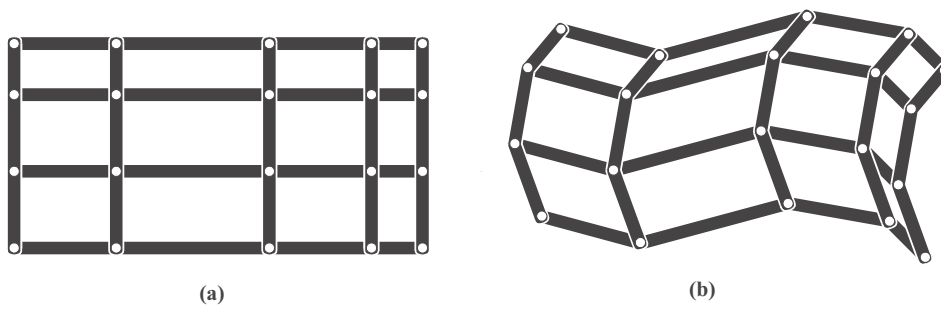
Ez utóbbi megjegyzés arra is rámutat, hogy a nyitható szerkezetek bizonyos triviális válfajaival sem kívánunk foglalkozni, hiszen a merevtest-szerűen elmozdítható szerkezetek, héjak – kinematikai egyszerűségük mellett – igazán nagy terek esetében nem jelentenek alternatívát. Ehelyett olyan szimmetrikus, sőt egyes esetekben forgásszimmetrikus szerkezetekre koncentrálnunk, melyek mozgatása egy központi nyílás méretének változtatását jelenti, hasonlóan a szem szivárványhártyájának vagy a fényképezőgép fényrekeszének viselkedéséhez. Az általánosságot valójában igen kevésbé csorbító választásunkat e szerkezeti koncepció rendkívüli funkcionális előnyei, valamint a már hasonló elvek szerint megépült modern stadionok és sportcsarnokok példái indokolják.

Végezetül hangsúlyozzuk, hogy a kivitelezést jelentősen megkönnyítő, de csak szerelési állapotban fennálló mozgathatóság esetével ehelyütt szintén nem foglalkozunk.

2. SÍKBELI FORGÁSSZIMMETRIKUS MECHANIZMUSOK

A fenti cím mindjárt egy kis kétséget ébreszthet azáltal, hogy a nagy terek lefedésére síkbeli szerkezetek statikai szempontból közismerten igen kedvezőtlenek. Látni fogjuk azonban, hogy e síkbeli mechanizmusok kiindulópontként szolgálnak egyéb szerkezeti megoldások létrehozásához is.

Tekintsük először az *1.a ábrán* látható, n függőleges és m vízszintes rúdból (merev testből) álló csuklós szerkezetet, ahol a nem rúdvégi helyzetű csuklók mindegyike ollószerű, azaz az egyenes rudak nem törhetnek meg. Az $n+m$ merev



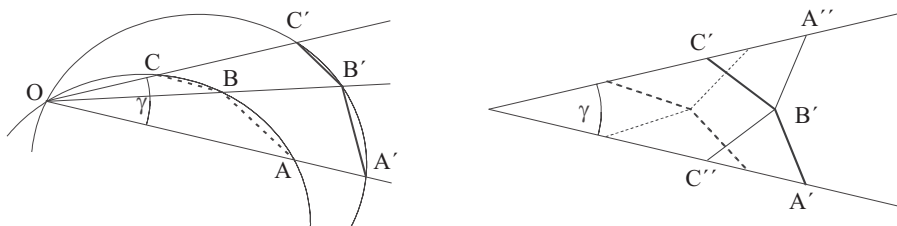
1. ábra. Ollószerű elemekből fölépülő síkbeli túlhatározott mechanizmusok

testből álló síkbeli szerkezet kinematikai szabadságfoka $3 \cdot (n+m)$, az $n \cdot m$ számú csukló mindegyike pedig másodfokú kényszert jelent, ami alapján – figyelembe véve az itt meg nem engedett merevtest-szerű elmozdulás három szabadságfokát is – a szerkezet kinematikai túlhatározottsága $c = 2nm - 3(n+m) + 3$.

Jól látható, hogy n és m növelésével ez az érték tetszőlegesen nagyra növelhető, ugyanakkor a kétféle rúdíránnyal bezárt szög tetszőleges megváltozása mellett a szerkezet továbbra is kompatibilis marad, azaz mechanizmusként viselkedik: ilyen mechanizmuson alapul néhány közismert használati tárgy, például egyes kerítéskapuk és konyhai alátétek működése is.

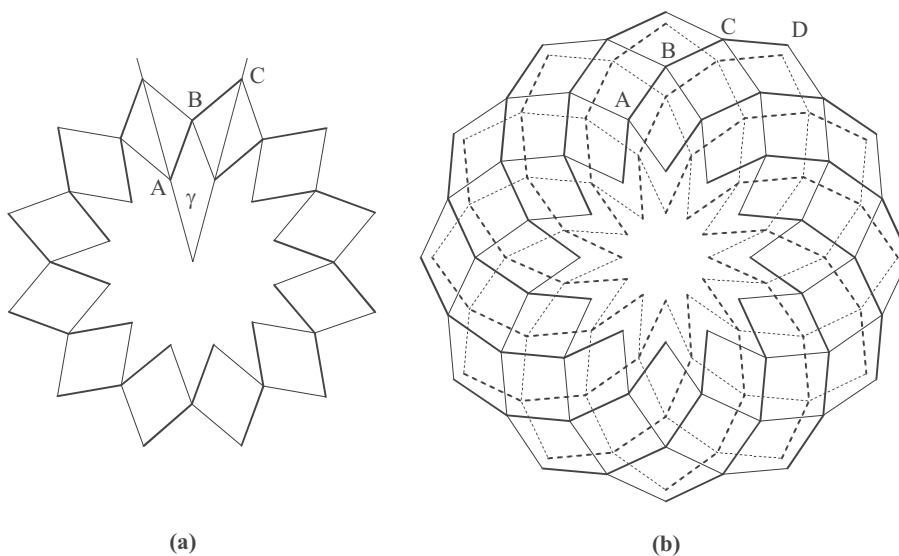
Ha most a mechanizmus minden rúdját törtengelyűre cseréljük oly módon, hogy a töréspontok az ollószerű csuklók pontjaiba kerüljenek, illetve egy adott konfigurációban minden – szomszédos rúdpárok által meghatározott – négyszög paralelogramma legyen (1.b ábra), akkor belátható, hogy egy adott csuklópontban a két metsző rúd hajlásszögének megváltoztatása továbbra is kompatibilis szerkezetet eredményez: a beiktatott szögváltozás minden fennmaradó metszéspontban ugyanazt a szögváltozást hozza létre, miáltal a paralelogrammák paralelogrammák maradnak.

Tekintsük most egy ilyen mechanizmusnak egy ABC darabját úgy, hogy A, B és C egy törtengelyű rúd szomszédos csuklópontjait jelentsék, valamint legyen A'B'C' az ABC vonaldarab egy elmozdított helyzete úgy, hogy a vonaldarab A és C végpontjai egy rögzített O középpontú, γ nagyságú szög szárain mozogjanak (2.a ábra): ekkor a kerületi szögek tételének megfordításából adódóan az OAC és OA'C' háromszögek köré írt körök sugara egyenlő. Ha ezek után B rajta van az előbbi körön, akkor ugyanezen tétel értelmében részint B' is illeszkedik az utóbbi körre, részint pedig az AB és A'B' szakaszok egyenlő hossza folytán $\angle AOB = \angle A'OB'$, azaz BB' egyenese átmegy O-n. Mivel adott γ szöghöz és AC szakaszhoz mindig tetszőleges számú, fentiek szerinti tulajdonságú B pont található, mindig konstruálható egyúttal AC szakaszhoz olyan – tetszőleges számú – ABC



2. ábra. Töröttengelyű ollóelempár mozgása adott szögszár mentén

töröttvonal, amelynek végpontjait az OA és OC szögszárakon mozgatva B is egy O-n átmenő vonal mentén mozog. Ha B-t ráadásul úgy választjuk, hogy $AB = BC$ teljesüljön, akkor B az $AOC\angle$ felezőjén mozog, tehát ABC -t e szögfelezőre tükrözve a kapott $A''BC''$ végpontjai szintén az OA és OC szögszárakon helyezkednek el, azaz az eredeti alakzat és tükörképe B-nél csuklósan összekapcsolható anélkül, hogy ez az iménti mozgást akadályozná (2.b ábra). Könnyen látható, hogy ha az így nyert ollószerű elemeket megsokszorozva egymás mellé kapcsoljuk (a szögszárakra rendre tengelyesen tükrözzük), alkalmasan választott γ szög esetén ($\gamma = 2\pi/n$) a mechanizmus zárt, n -szeresen forgásszimmetrikus alakzatot ad (3.a ábra). Meglepő módon a szerkezet kinematikai túlhatározottságának foka ugrásszerűen megnövelhető azáltal, ha a kiindulási ABC töröttvonalat egy további mereven kap-



3. ábra. A You-Pellegrino-féle forgásszimmetrikus túlhatározott mechanizmus

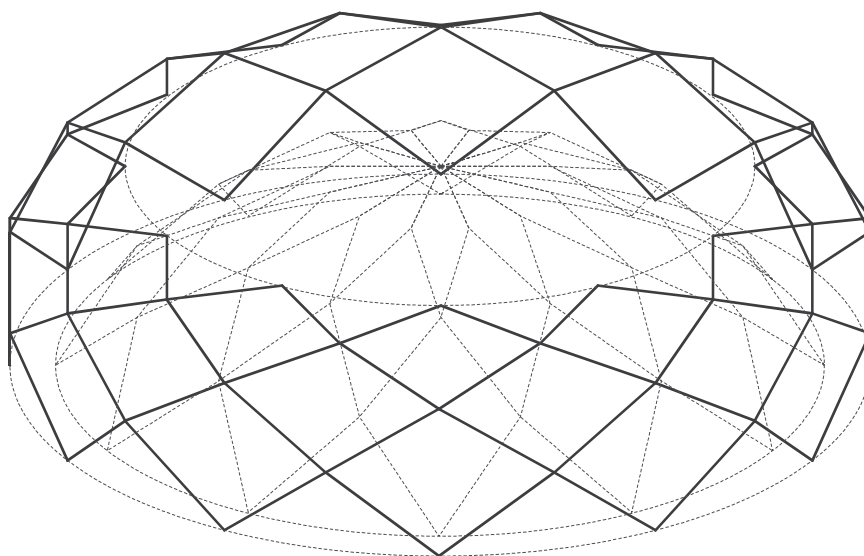
csolt CD szakasszal bővítjük úgy, hogy $AB = BC = CD$ és $ABC\angle = BCD\angle$ legyen: ekkor az előbbi gondolatmenetből adódóan $COD\angle$ is $\gamma/2$ -vel egyenlő, miáltal a tükrözések során D szintén állandó fedésbe kerül valamely i -edrendű tükröképével, s azzal csuklósan összekapcsolható. A töröttvonalak természetesen ugyanezen logika szerint újabb szakaszokkal, a szerkezet tehát újabb koncentrikus csuklóssorral bővíthető (3.b ábra). Ezt az ötletet először a cambridge-i egyetemen alkalmazták szimmetrikus, nyitható tetőszerkezetek kifejlesztésére [1], megjegyezzük azonban, hogy a fenti gondolatsorban felhasznált megszorító feltételek némelyikének elhagyásával szintén előállíthatóak kinematikailag többszörösen túlhatározott, ám alacsonyabb rendű szimmetriát hordozó, s ezzel változatosabb – például ovális – formákat biztosító, változtatható nyílású mozgatható szerkezetek [2].

3. KVÁZI-TÉRBELI FORGÁSSZIMMETRIKUS MECHANIZMUSOK

Ismét indokolt, hogy először magával a fejezetcímmel foglalkozzunk. Jogos elvenvetésként merülhet föl, hogy a tér semelyik iránya mentén sem elhanyagolható kiterjedésű alakzat *per definitionem* térbelinek tekintendő, ha viszont egy adott irányban ez a méret elhanyagolható, akkor síkbeli alakzattal van dolgunk. A „kvázi-térbeli” kifejezés szándékunk szerint arra utal, hogy bizonyos térbeli alakzatok mozgathatósága mögött egyszerű síkgeometriai mechanizmusok állnak, míg a valódi térbeli mozgatható szerkezetek kinematikai háttere „valódi” térgeometriára támaszkodik (természetesen ez utóbbi jelző esetlegessége a felállított kategóriák közötti határvonalat is némiképp bizonytalanná teszi).

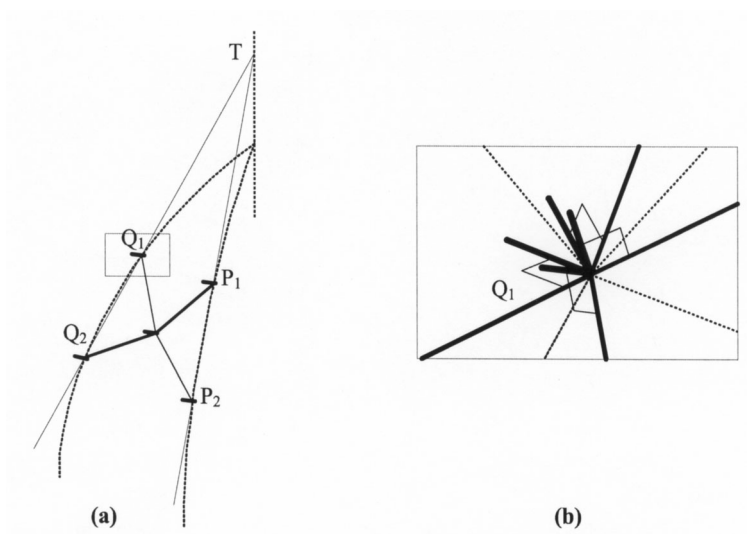
Kvázi-térbelinek nevezhetjük például azt a szerkezetet, amely az iménti síkbeli mechanizmusból származtatható oly módon, hogy a zárt állapothoz (általános esetben a legkisebb kiterjedésű központi hézaghoz) tartozó konfigurációból kiindulva a csuklókat az alapsíkra merőlegesen kiemeljük egy elméleti – célszerűen pozitív szorzatgörbületű és forgásszimmetrikus – felületre, és az összekötő rúdszakaszokat (célszerűen inkább függőleges síkú tárcsákat) a csuklókhöz igazítjuk. E szerkezetek kinematikai viselkedése gyakorlatilag azonos a síkbeli kiindulási mechanizmuséval, bár a teherviselés szempontjából már valódi térbeli jelleget mutat. Előnyeként említhető rendkívüli egyszerűsége és a már tárgyalt sokszoros kinematikai túlhatározottság, ugyanakkor esztétikai szempontból zavaró lehet az elemek kizárólagos vízszintes mozgása, amely teljesen nyitott állapotban nagy térigényű, toroid- és hengerhéj kombinációjára emlékeztető alakot eredményez (4. ábra).

A vázolt térlefedési probléma másik megoldását a C. Hoberman által megalkotott „Iris Dome” elnevezésű szerkezet mutatja [3], melynek működése szintén a 2.b ábrán látható ollószerű mechanizmuson alapul. Az 5.a ábrán látható P_1 , Q_1 , Q_2 és P_2 pontok egy forgásfelületen helyezkednek el úgy, hogy P_1 és Q_1 , illetve Q_2 és



4. ábra. A You-Pellegrino-féle mechanizmus kvázi-térbeli változata

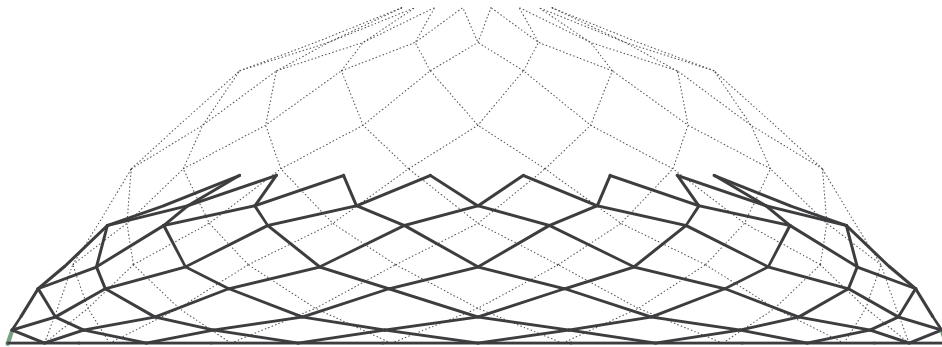
P_2 forgástengelytől mért távolsága páronként egyenlő, illetve P_1P_2 és Q_1Q_2 egyenesei a forgástengely egy T pontjában metszik egymást. Jól látható, hogy ekkor a négy ponthoz mint végpontokhoz hozzárendelhető olyan – a 2.b ábrához hasonló – mechanizmus, amely a négy pontot az őket T -vel összekötő egyenesek mentén



5. ábra. Az Iris Dome egy ollóeleme és csomóponti vázlata a csukló tengelyekkel

mozgatja. A véges mozgathatóságnak azonban feltétele, hogy az olló minden csuklója $P_1Q_1Q_2P_2$ síkjára merőleges tengelyű, s így egymással párhuzamos legyen: ez indokolhatja most is a „kvázi-térbeli” meghatározást. A ferde síkban mozgó ollós szerkezet sorozatos tükrözésével szintén létrehozható egy forgásszimmetrikus mechanizmus, amelyhez a 3.b ábra szerinti újabb gyűrűk is hozzákapcsolhatók. Az Iris Dome mindazonáltal két alapvető szerkezeti tulajdonságban eltér a 4. ábra modelljétől. Mivel a négy szomszédos (közös ponttal rendelkező) ollóelem mindegyike eltérő síkban fekszik, ezáltal részint a köztük lévő csuklós kapcsolat nem egyetlen, hanem négy különböző, de adott ponton áthaladó csukló-tengely által biztosítható (5.b ábra), részint az egymással átellenben elhelyezkedő ollóelemek sem kapcsolhatók többé mereven egymáshoz: mindebből következik, hogy az új szerkezet kinematikai túlhatározottsága az előző modellénél kisebb, a kapcsolatok kialakítása pedig valamivel bonyolultabb.

Az Iris Dome legfőbb szerkezeti előnye azonban, hogy mozgatása során a csomópontok mindvégig közel maradnak egy adott forgásfelülethez, ráadásul nyitás során a szerkezet tényleges magassága is csökken – mindez nemcsak az esztétikum, hanem a teherviselés szempontjából is lényeges. Megjegyezhetjük ugyanakkor, hogy az ollós kialakítás ez esetben is a szerkezet külső átmérőjének mozgás közbeni változásával jár, illetve a fentiekből következően bármely ollóelem síkja a nyitás során párhuzamos marad eredeti helyzetével, amely az ollók meridián-metszetben megfigyelhető vetületének csökkenésével együtt az azonos metszetben mérhető görbület növekedését idézi elő (6. ábra).



6. ábra. Az Iris Dome nyitott és zárt állapotban

4. VALÓDI TÉRBELI FORGÁSSZIMMETRIKUS MECHANIZMUSOK

E fejezetben volna említendő jószerivel az összes többi kupolaszerkezeti megoldás, melyek közül legismertebbek Piñero radiálisan kiterjeszthető rácsos héjszerkezete [4] és egyéb (ollószerű elemeken alapuló és változó átmérőjű gömbsüveg-héjat adó) szerkezeti modellek [5, 6], ám kezdeti kikötésünk értelmében csak a szivárványhártya-jellegű mechanizmusokra térünk ki. Zeigler geodetikus kupolája [7] lényegében gömbön mozgó szerkezet, de rúdjaik kompatibilitását csúszó alkatrészek biztosítják. A cambridge-i modell gömbi adaptációját jelenti Kokawa szerkezete [8], mely többszörösen törttengelyű elemek csuklós kapcsolatával a 4. ábrához hasonló, kinematikailag túlhatározott és gömbhéj mentén mozgó szerkezetet ad. Ebben az esetben viszont a kompatibilitási feltételek teljesítése a tengelyes csuklók helyett gömbcsuklók alkalmazását kívánja meg.

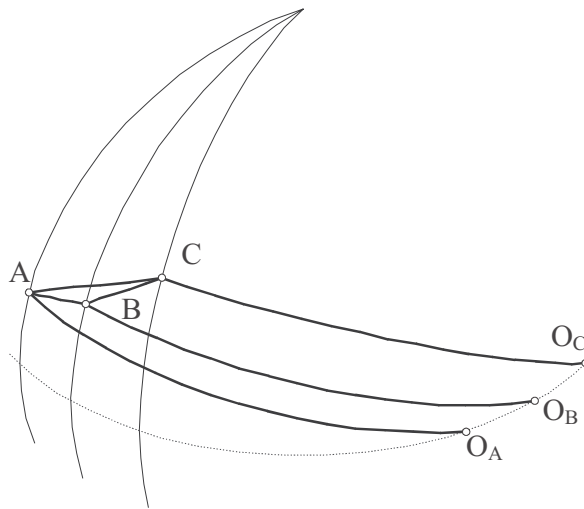
5. CSUKLÓS GÖMBI FORGÁSSZIMMETRIKUS MECHANIZMUSOK

Az eddigiek során vázolt mozgatható szerkezetek bizonyos előnyeinek egyesítése érdekében fölmerül egy olyan konstrukció megalkotása, amely csúszó alkatrészek nélkül, pusztán tengelyes csuklós kapcsolat alkalmazásával készül, s mindemellett a szerkezeti elemek mozgásuk során egyetlen alkalmas forgásfelületre illeszkednek. Feltételezve továbbá, hogy a csuklók tengelye mind merőleges az előbbi felületre, beláthatjuk, hogy ennek egy minden pontjában metszetiránytól független állandó görbülettel kell rendelkeznie, mely feltételnek (a síkon kívül) közismerten csak a gömb tesz eleget. Megjegyzendő, hogy a gömbfelszín állandó görbülete az előbbi lehetőség mellett azt is biztosítja, hogy a valódi térlefedő elemek (héjak) is állandó görbületű, azaz gömbhéjak legyenek, melyek a mozgathatóság során egymáson akadály nélkül elcsúszhatnak és elfordulhatnak.

5.1. A KIALAKÍTÁS SZEMPONTJAI – A SÍKBELI ANALÓGIA PROBLÉMÁI

A korábban tárgyalt szerkezetek mindegyike ollószerű elemekből épül föl: ilyen elem a gömb felszínén is elképzelhető, sajnos azonban az egyes elemek kompatibilis kapcsolata a síkbeli recept szerint nem valósítható meg. Az 1. ábra kinematikailag többszörösen túlhatározott mechanizmusának mozgathatósága összekötő rúdjaik párhuzamosságán alapul, viszont a gömbön a főkörök mindig metsző vonalak. Belátható, hogy párhuzamos rudak híján két gömbi alakzatot legfel-

jebb két csuklós rúddal kapcsolhatunk össze anélkül, hogy a véges mozgást meggátolnánk, feltéve, hogy semelyik két csukló nem egybeeső [9]. Ha most tekintjük a 2.b ábra szerkezeti elemének gömbi analógonjaként azt a szimmetrikus ollószerű szerkezetet, melynek két-két végpontja a gömb egy-egy meridiángörbéjén fekszik, akkor a 7. ábra jelölései alapján A, B és C pontok három különböző gömbi főkörön mozognának, azaz a gömbkerület negyedrésszével azonos hosszú rúddal rendre összeköthetőek volnának három különböző (O_A , O_B , O_C) gömbi ponttal, ami ellentmondana a fenti kijelentésnek. Következésképp a szimmetrikus mozgás csak akkor lehetséges, ha ennek során az ABC háromszög torzulhat: ennek egyik lehetséges megoldása az ABC töröttvonal csuklós láncolatává való alakítása.



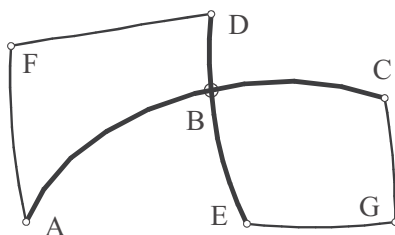
7. ábra. Gömbi főkörön mozgó ponthármás

Az ollószerű elemek láncolatokká alakításának legfőbb problémája a kinematikailag többszörösen határozatlan szerkezet létrejötte: n -szeres forgásszimmetria és összesen egy sor – eredetileg ollószerű – elem felhasználásával $3n$ csukló és $4n$ rúd adódik, azaz a kinematikai határozatlanság fokának alsó korlátja $f = 2 \cdot (3n) - 4n - 3$, amely minden szóba jöhető (1-nél nagyobb) n -re pozitív (megjegyezzük, hogy mindezen nem változtat az újabb gyűrűk hozzáadása sem, ugyanis minden gyűrű újabb $4n$ rudat, de csak $2n$ csuklót jelent, azaz f értéke változatlan). Tekintettel arra, hogy a szerkezet mozgása célszerűen csupán egy független elmozdulási paraméter által vezérelt, az eddigiektől eltérő szerkezeti megoldás szükséges.

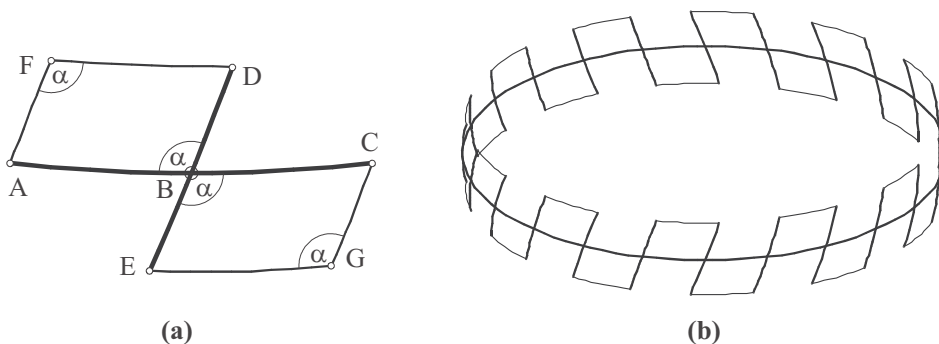
5.2. SZIMMETRIA ÉS KINEMATIKAI TÚLHATÁROZOTTSÁG

A szerkezet tervezett forgásszimmetrikus kialakítását és mozgását egy középpontosan szimmetrikus szerkezeti elem teszi lehetővé, amely egyúttal arra is alkalmas, hogy a mozgatható szerkezet fix alapokra helyezését megoldja [10]. Emlékeztetünk, hogy ez utóbbi feladat az eddig tárgyalt esetek többségében csak a tetőszerkezet működési elvétől eltérő kiegészítő mechanizmus alkalmazásával volt megoldható.

Tekintsük a 8. ábrán ollószerű csuklóval (B) kapcsolt ABC és DBE merev gömbi idomokat, valamint négy gömbi „rudat”, azaz csuklós kapcsolóelemet: az ily módon konstruált mechanizmus egyszabadságfokú, hiszen a két ollószár hajlásszöge bizonyos korlátok között tetszőlegesen változtatható, F és G pontok helyének megváltozása ekkor az elágazási és limitpontok környezetébe tartozó eseteket kivéve egyértelműen adódik. A rúdhosszak speciális megválasztásával ($FD = AB = BC = EG$, $FA = DB = BE = CG$) az is elérhető, hogy az alakzat minden helyzetében két olyan négyszögből (FDBA és BCGE) álljon, melyekben az átellenes szögek megegyeznek: $AFD\angle = DBA\angle$, $EBC\angle = CGE\angle$. Ha most kikötjük, hogy ABC, illetve EBD egy gömbi főkör szegmensei, akkor a 9.a ábra centrálisan szim-



8. ábra. Gömbi ollóelem négy kiegészítő rúddal

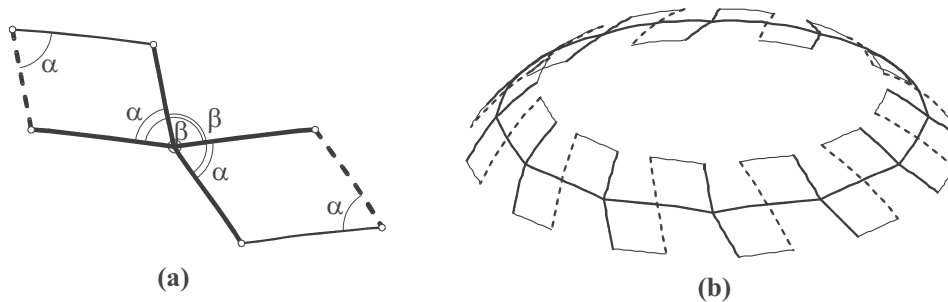


9. ábra. Középpontosan szimmetrikus mechanizmus (CSM) és a belőle képzett gyűrű

metrikus alakzatához jutunk, ahol minden jelölt szög egymással egyenlő (α): ezen alakzatra a továbbiakban a „közepponosan szimmetrikus mechanizmus” angol fordításának kezdőbetűi alapján rövidítve CSM-ként hivatkozunk [11]. Az ABC ívet a teljes főkör n -edrészére felvéve végül az is lehetséges, hogy n ilyen egybevágó CSM „sorba kapcsolásával” egy zárt gyűrű- mechanizmushoz jutunk oly módon, hogy az A-nál és C-nél, illetve egyéb, a forgásszimmetriának köszönhetően egybevágó környezetű csomópontoknál az átellenes rudakat merev töröttvonaláá kapcsoljuk össze. Ebben a szerkezetben (9.b ábra) így egy merev főkör minden csuklójához ollósan illeszkednek az egybevágó főkörszegmensek, s könnyen belátható, hogy a teljes (merev) főkört mint fix megtámasztást tekintve a mechanizmus kinematikai túlhatározottsága éppen egy.

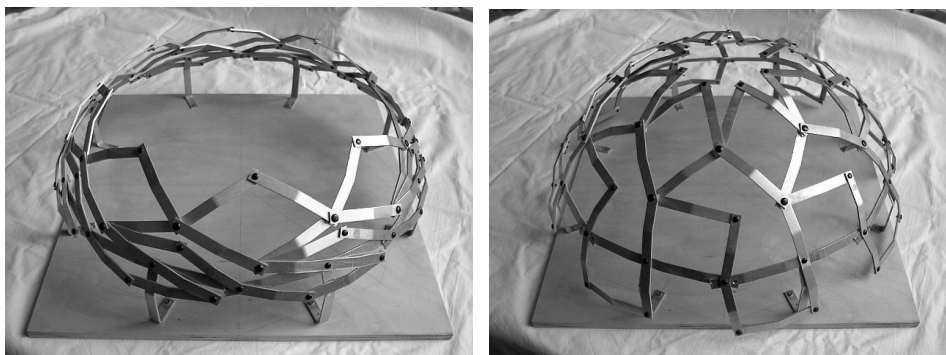
E gyűrűs mechanizmus fogyatékosága, hogy gömbi főkörre épülvén lényegében csak félgömb alakú lefedés pereméül szolgálhat. Kis korrekcióval azonban ez az ötlet általános gömbsüveg-alakra is alkalmazható: ha a 9.a ábra alakzatában az ABC és DBE szögeket egyaránt egy 180° -tól különböző β értékre választjuk, „ferde középpontosan szimmetrikus mechanizmus”-hoz (inclined CSM, ICSM) jutunk, amely szintén biztosítja az A-nál és C-nél lévő szögek egyenlőségét (10.a ábra). Ha az ABC vonalat úgy választjuk, hogy BA és BC a gömb egy általános körének A és C pontjához húzott érintő főkörszegmensek, AC körív pedig épp a teljes kör n -edrészé legyen, akkor az előző bekezdés gondolatmenete alapján létrehozható az általános körgyűrűre támaszkodó, kinematikailag egyszerűen túlhatározott forgásszimmetrikus mechanizmus (10.b ábra). Ez utóbbinak lehetséges módosulata, amikor A, B és C pontok ugyanannak a körívnek pontjai, viszont a szomszédos ICSM-ek összeillesztésekor a rögzítendő rudak ugyancsak β törésszögű ollósárakat eredményeznek.

Mint az az előző fejezet végén a láncolatokról írottakból már következik, egy létező forgásszimmetrikus mechanizmus a kinematikai szabadságfok változása nélkül egészíthető ki egyszerű, egybevágó gömbi háromcsuklós tartók sorozatával



10. ábra. Ferde CSM (ICSM) és a belőle képzett gyűrű

úgy, hogy az egymásra épített gyűrűk végül deltoid-, esetleg rombusz-mintázatú gömbi rúdszerkezetet alkossanak, mely így már a térlefedő szerkezet tulajdonképpeni vázát is szolgáltatja (25 cm sugarú gömbfelületen mozgó modellünk nyílt és zárt állapota a 11. ábrán látható).



11. ábra. A gömbi csuklós kupolaszerkezet 50 cm átmérőjű alumínium-modellje

5.3. MEREVÍTÉSI LEHETŐSÉGEK

A mozgatható szerkezetekkel szemben magától értetődő követelmény, hogy ne csak bizonyos rögzített helyzetekben, hanem a teljes mozgástartományban rendelkezék teherbíró képességgel. Ez azért fontos szempont, mert az itt tárgyalt, lényegében rácsos héjként viselkedő szerkezetek terheik jelentős részét a héjfelület normálisa irányában viselik, s ezáltal pusztán az önsúly hatására is jelentős hajlítónyomatékok keletkezhetnek a szerkezet rúdjaiban. Ezen igénybevételeket nagyban csökkenthetik a célszerű helyen – döntően a felső perem közelében – elhelyezett fölös szerkezeti elemek, esetleg zárt peremgyűrű.

Az 5.2. fejezetben leírt mozgatható szerkezet komoly előnye, hogy rögzített peremgyűrűre támaszkodik, ugyanakkor a korábbi – nem gömbi – szerkezetekkel ellentétben ezen peremtől távol eső pontok között nincsen olyan fölös kapcsolat, amely a csomópontok szimmetrikus együttmozgását közvetlenül erősíthetné, más oldalról közelítve: az itt támadó külső erők egyenletesebb elosztását biztosíthatná.

E hiányosság kiküszöbölésére különböző lehetőségek léteznek, melyek gyakorlati használhatósága természetesen eltérő. A gömbi poligonok területére jellemző gömbi többlet például a poligon oldalai mentén sorba kapcsolt CSM-ek láncolatának segítségével egyetlen – tetszőleges állású – szöggként jeleníthető meg a poligon bármely csúcsában [11], ezáltal a szimmetriakövetelmények értelmében elvileg egybevágó, azonos szélességen fekvő és csúcsukkal érintkező rombuszok terület-

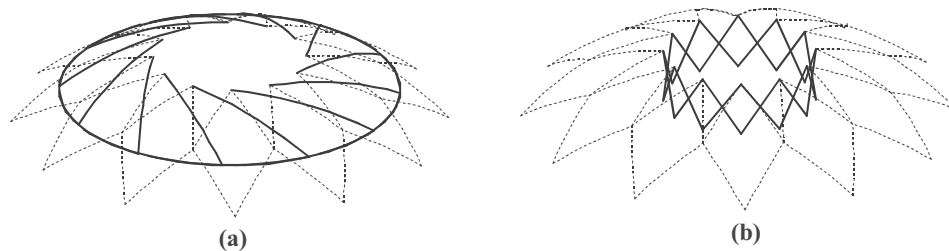
egyenlősége garantálható. A módszer részletes ismertetésétől itt eltekintünk, mert a CSM-ek oldalélenkénti felhasználásával a szerkezet annyira bonyolulttá válik, hogy az a gyakorlati alkalmazást lényegében kizárja.

5.3.1. Merevítés függesztett gyűrűkkel

Ez a merevítési mód – csakúgy, mint maga az alapmechanizmus – zárt és merev gyűrű alkalmazásán alapszik. Feltételezve, hogy a szerkezet n -szeres forgásszimmetriájú, a merevítő gyűrűhöz ugyancsak forgásszimmetrikus elrendezésben n csuklót, illetve ezekhez kapcsolva n egyenlő hosszú rudat (főkörívet) rendelünk, melyek hossza bizonyos határok között tetszőlegesre vehető föl. Ha e rudak másik végpontjait sorban a felső deltoidrács azonos szélességen elhelyezkedő valamely csomópont-sorozatához kapcsoljuk, továbbra is kompatibilis mechanizmushoz jutunk (12.a ábra). A merevítő gyűrű – mint merev test – a gömbi mozgás szempontjából 3 szabadságfokot, miközben az n darab (általános esetben nem közös metszéspontú főkörökre illeszkedő) függesztőrud n -szeres kényszert jelent, miáltal a kinematikai túlhatározottság foka gyűrűnként $n-3$ -mal növekszik.

Érdekes, bár jelen kinematikai megközelítésen túlmutató probléma annak elemzése, hogy a merevítő gyűrű sugarának (ezzel magassági koordinátájának), illetve a hozzá kapcsolt pontsor helyzetének megválasztásától hogyan függ az igénybevétel-eloszlás egyenletessége. Részletesebb vizsgálat nélkül is nyilvánvaló azonban, hogy a túl hosszú függesztőrudak nagy nyomatéki igénybevételt okoznak, valamint hogy a szerkezet mozgatása közben csupán függőleges tengely körüli forgást végző merevítő gyűrűt célszerű lehet vízszintes tengelyű görgőkkel is alátámasztani, noha ez a gömbi konstrukciótól idegen megoldás.

Megjegyzendő, s egyben a módszer korlátaira is rávilágít az a tény, hogy a merevítési szempontok alapján minél magasabbra helyezett gyűrű a szerkezet nyithatóságának, vagyis alapvető funkcionális követelményének szab komoly határokat.



12. ábra. Merevítés (a) függesztett gyűrűvel, (b) hengeres ráccsal

5.3.2. Merevítés hengeres ráccsal

A most említendő, gömbfelszínen mozgó mechanizmusunkhoz képest teljesen szerkezetidegen megoldás jelentőségét az adja, hogy valószínűleg az eddigieknél jóval hatékonyabb merevítést biztosít. Képzeljünk el egy olyan, ollószerű elemekből fölépülő n -szeresen forgásszimmetrikus gyűrűt, mint amilyenek az Iris Dome-ot alkotják. Ha a szomszédos ollók síkjai függőlegesek, akkor a gyűrű változó átmérőjű, szabályos n -szög alapú hasáb lesz, melynek felső csomópontjai gömbcsuklókkal a gömbi deltoidrác akármely, de célszerűen a legbelső csomópont-sorához kapcsolhatók. Ez a változó átmérőjű diafragma-gyűrű direkt módon biztosítja az egymáshoz közvetlenül gömbi rúddal nem kapcsolt pontok azonos távolságát egymástól és a szerkezet forgástengelyétől is (12.b ábra). Kiegészítésként megjegyezzük, hogy peremgyűrű céljára egyszerű és igen hatékony választás a rögzíthető teleszkópos rudak alkalmazása, amely azonban nemhogy nem gömbi, de még csak nem is csuklós szerkezet, ezért vele bővebben itt nem foglalkozunk.

5.4. A KÖR MINT MÁSODRENDŰ GÖRBE: A RÚDHÁLÓZAT SÚRÍTÉSE

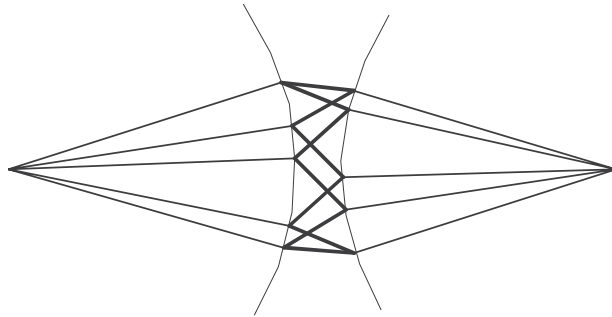
Ebben a fejezetben egy kinematikailag túlhatározott gömbi mechanizmusok generálására alkalmas eljárást ismertetünk, majd megvizsgáljuk az új konstrukciók jelen szerkezetben való alkalmazását is.

A projektív geometria számos másodrendű görbékre vonatkozó tételéből levezethető, hogy abban az esetben, ha közös síkban elhelyezkedő két kör közé olyan zárt cikcakkvonalat illesztünk, melynek minden oldala egyenlő hosszú, és csúcsai felváltva hol egyik, hol a másik kör területén helyezkednek el, akkor ez a cikcakkvonal véges, egyszabadságfokú mechanizmusként viselkedik, feltéve, hogy csúcspontjai a körívek mentén szabadon mozoghatnak [12]. Ez a szabályszerűség könnyedén adaptálható csuklós rúdszerkezetekre, hiszen a cikcakkvonal csomópontjainak körmozgása sugárirányú és -nagyságú rudak beiktatásával biztosítható. Belátható egyszersmind, hogy az 13. ábrán látható, $2n$ oldalszámú cikcakkvonal esetén a szerkezet belső (nem rögzített) csomópontjainak száma $2n$ (ez $4n$ ismeretlen elmozdulás-koordinátát jelent), míg a rudaké $4n$, így a szerkezet geometriai mátrixa kvadratikus. A korábbi tapasztalatok ugyan arra mutatnak, hogy síkbeli túlhatározott mechanizmusok a gömbre nem feltétlenül vihetők át, de jelen esetben belátható, hogy a tétel a háromdimenziós euklideszi tér tetszőleges helyzetű két körére érvényes [13], melyből a gömbi alkalmazhatóság egyértelműen következik.

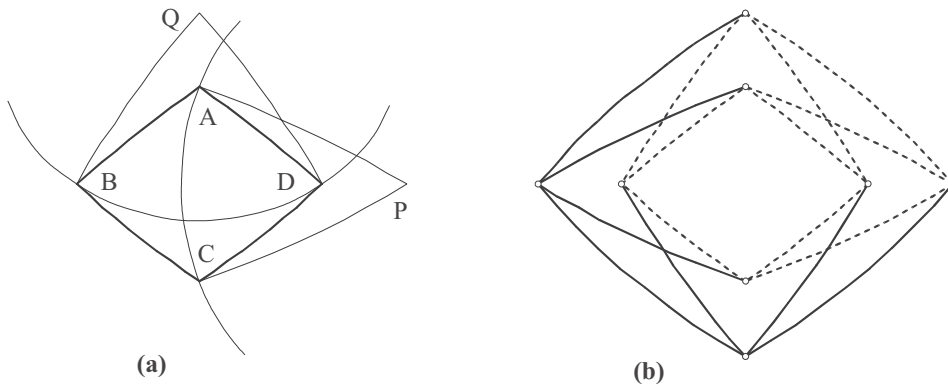
Tekintsük a 14.a ábrán látható ABCD gömbi rombuszt! Vegyünk föl hozzá két olyan kört, amely egyenként áthalad A és C, illetve B és D pontokon: ezek középpontjai (P és Q) szükségképpen rajta vannak BD és AC főkörívek meghosszabbítá-

sán, egyébként helyzetük tetszőleges. Ha most ABCD oldalait, illetve PA, PC, QB és QD főköríveket csuklós rúdnak tekintjük, akkor a fentiek értelmében a szerkezet rögzített P és Q pontok mellett is mechanizmusként viselkedik (ennek értelmében P és Q egy rúddal szintén összeköthető). Vegyük észre, hogy a megfelelő rudak egyenlő hossza révén a mechanizmus bármely helyzetében P és Q benne van ABCD egy-egy szimmetriasíkjában, melyből viszont következik, hogy P és Q e síkokra vett tükörképei a mozgathatóság korlátozása nélkül szintén összeköthetők ABCD két-két csúcsával, valamint egymással is (14.b ábra). A kapott szerkezet egy rúdjának két végpontját külső csomópontnak tekintve ekkor a 6 belső csomópont és a maradék 15 rúd összesen $15 - 2 \cdot 6 = 3$ főlös kényszert jelent, vagyis a mechanizmus kinematikailag négyszeresen túlhatározott.

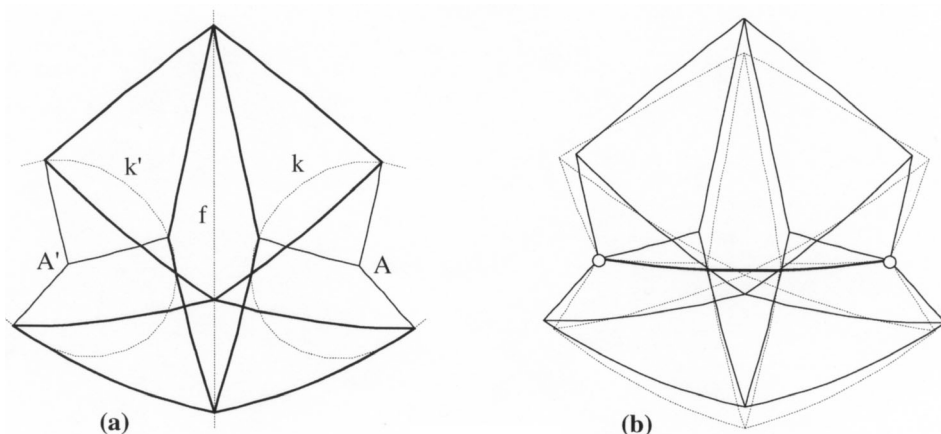
Ez a tulajdonság előnyösen felhasználható a rácshálózat sűrítésére akkor, ha a gömbi kupolaszerkezet felső része rombuszos rácsozású, hiszen minden rombuszos láncolat kibővíthető a most bemutatotthoz hasonló mechanizmussá, miközben a



13. ábra. Körívpár mentén mozgó síkbeli cikcakkvonal



14. ábra. A cikcaktételen alapuló túlhatározott gömbi csuklós mechanizmus



15. ábra. Tükörszimmetrikus mechanizmus (MSM)

szerkezet védettsége egyrészt növekszik a progresszív tönkremenetellel szemben, illetve a sűrűbb hálózat hasznosnak bizonyulhat a tényleges térelhatároló elemek optimális rögzítéséhez. Hangsúlyozzuk, hogy a fenti megoldás nem járul hozzá közvetlenül a tetőszerkezet rombikus láncolatainak forgásszimmetrikus együtt-dolgozásához.

Létezik a fenti „cikkakk”-tételnek egy másfajta elméleti felhasználása is, amellyel a középpontosan szimmetrikus mechanizmus mintájára létrehozható a tükörszimmetrikus mechanizmus (MSM) is. A 15.a ábra jobb oldalán látható hatoldalú cikkakkvonal pontjai felváltva illeszkednek egy A középpontú k gömbi körre, illetve egy f gömbi főkörre. Nyilvánvaló, hogy a k körön és a főkörön lévő pontokat a főkör és k középpontjához kapcsolva ismét mechanizmushoz jutnánk, de a főkör sugarak nagy mérete miatt inkább tükrözzük a szerkezetet az f főkör síkjára! Most sem az A' középpontú k' kör és a tükörsíkban lévő főkör közötti cikkakkvonal, sem ennek eredeti képe nem akadályozzák a szimmetriasíkban lévő pontok főkörön történő mozgását. Annak érdekében, hogy az egyéb elmozdulások kinematikai lehetőségességét általános esetben kizárjuk, elsőrendű mátrixanalízist végeztünk. A -t és A' -t leszámítva a szerkezet 9 belső csomóponttal és 18 rúddal rendelkezik, vagyis a geometriai mátrix kvadratikus, a kapott egyszeres rangcsökkenés így csak az előbb leírt véges elmozdulásrendszernek (15.b ábra) köszönhető.

Mindebből az is következik, hogy az eredetileg csupán ICSM-ekből álló külső perem néhány szomszédos csuklója közé MSM-eket illesztve kiküszöbölhetjük a rombuszrács mozgás során bekövetkező, függőleges tengely körüli elfordulását. Ugyancsak az MSM-ek szimmetriájának következtében módunk van adott csukló-

pont rögzített főkörmenti mozgására is, vagyis például a külső peremen elhelyezett, ICSM-ekkel „szinkronizált” MSM-sorozat adott csomópont-sornak adott meridiánok mentén egymással egyenlő meridiánirányú elmozdulását biztosíthatja, amely egy, az előzőtől némileg különböző, de szintén csuklós gömbi kupolaszerkezet vázát szolgáltathatja.

6. ÖSSZEFOGLALÁS, KÖVETKEZTETÉSEK

A fentiekben áttekintését adtuk a nagy terek nyitható, forgásszimmetrikus lefedésére való rúdszerkezetek különböző létező válfajainak, illetve bemutattunk egy új, tiszta gömbi geometrián alapuló csuklós rúdszerkezeti megoldást is, melyben minden csukló forgástengelye a gömb középpontja felé mutat. A – többi bemutatott szerkezethez hasonlóan – egyparaméteres mechanizmusként viselkedő gömbi rácsszerkezet a síkbeli mechanizmusok eltérő jellege miatt egyszerű középpontos szimmetrián nyugvó alapmechanizmusokból épül fel kinematikailag túlhatározott módon.

A leírt szerkezet előnyös tulajdonságai közé elsőként az áttekinthető és egyszerű csomóponti kialakítás, másodsorban a szerkezethez szervesen illeszkedő rögzített peremgyűrű, harmadsorban a héjelemek elhelyezését és mozgását megkönnyítő állandó görbület tartozik.

Nehézséget jelent ugyanakkor a kupolaváz felső régióinak merevítése, melynek megoldására ugyancsak a gömbi geometria elvei szerint kialakított kiegészítő szerkezeteket, valamint egy hatékonyabb, hagyományos csuklós szerkezetű diafragma gyűrűt javasoltunk. A gyakorlati megvalósítás szempontjából mindenképp részletes statikai és szilárdságtani vizsgálat szükséges a merevítő elemek szerkezeti arányaira, konkrét elrendezésére vonatkozóan.

Ugyancsak szükségesnek látszik az általános térbeli körök páros gráfot eredményező összekötéséből levezetett, túlhatározott gömbi mechanizmusok statikai analízise, amennyiben ezeket a rácsszerkezet sűrítésére, illetve a szerkezet szimmetrikus együttdolgoztatására kívánjuk felhasználni.

IRODALOMJEGYZÉK

- [1] You, Z., Pellegrino, S.: Foldable Bar Structures. *International Journal of Solids & Structures* 1997. 34 (15). 1825–1847.
- [2] Kassabian, P. E., You, Z., Pellegrino, S.: Retractable Structures Based on Multi-angulated Elements. In: *Proceedings of 3rd International Colloquium on Structural Morphology – Towards the New Millennium*. J. C. Chilton, B. S. Choo, W. J. Lewis, O. Popovic (eds), Nottingham 1997. 92–99.

- [3] Hoberman, C.: Radial Expansion/Retraction Truss Structures. *United States Patent* 1991. Patent Number: 5,024,031.
- [4] Piñero, E. P.: Expandable Space Framing. *Progressive Architecture* 1962. 43 (6). 154–155.
- [5] Escrig, F.: Geometrías de las estructuras desplegables de aspas. In: *Arquitectura Transformable*. F. Escrig (ed), Sevilla 1993. 95–124.
- [6] Gantes, C. J.: Structural Analysis and Design of Deployable Structures. *Computers & Structures* 1989. 32 (3–4). 661–669.
- [7] Zeigler, T. R.: Collapsible Self-Supporting Structures. *United States Patent* 1984. Patent Number: 4,437,275.
- [8] Kokawa, T.: Structural Idea of Retractable Loop-Dome. *Journal of IASS* 2000. 41. 111–116.
- [9] Waldron, K.: The constraint analysis of mechanisms. *Journal of Mechanisms* 1966. 1. 101–114.
- [10] Kovács F., Tarnai T.: Foldable Bar Structures on a Sphere. In: *Proceedings of 2nd International PhD Symposium*. G. L. Balázs (ed), Budapest 1998. 305–311.
- [11] Kovács F.: Foldable Bar Structures on a Sphere. In: *IUTAM-IASS Symposium on Deployable Structures: Theory and Applications*. Solid Mechanics and its Applications, S. Pellegrino, S. D. Guest (eds), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 2000. 221–228.
- [12] Hráskó A.: Poncelet-type Problems, an Elementary Approach. *Elemente der Mathematik* 2000. 55. 45–62.
- [13] Wunderlich, W.: Mechanisms related to Poncelet's Closure Theorem. *Mechanism and Machine Theory* 1981. 16 (6). 611–620.

RETRACTABLE SYMMETRICAL AND SPHERICAL DOME STRUCTURES

Summary

The first part of the paper gives a short kinematical review of some overconstrained mechanisms that different structural concepts for Iris-type retractable roofs are based on. Only bar-and-joint mechanisms with n -fold rotational symmetry are considered and compared to each other concerning kinematical and architectural aspects. It is found that 3D structures made of simple planar mechanisms do not move along a given revolute surface unless by use of sliding elements.

A new, overconstrained spherical dome structure is then proposed that contains only spherical bars (arches) with scissor-like hinged connections. In addition to that, some possible ways of structural stiffening by further constraintment is shown. Arguments taken from projective geometry provides a denser network of bars and makes possible other structural solutions for spherical roofs as well.

Keywords: retractable roofs, spherical mechanism, scissor-like components, expandable/retractable lattice dome, overconstrained mechanism.