

# A NÉGYRUDAS MECHANIZMUS KOMPATIBILITÁSÁNAK SZINGULARITÁSAI

LENGYEL ANDRÁS\*

A szerkezeti mechanikai tervezésben egyre nagyobb szerepet kapnak a mechanizmusok az újszerű alkalmazások vagy építéstechnológiák révén. A kinematikailag határozott szerkezetekhez hasonlóan a mechanizmusok kinematikai határozottságát is befolyásolják a geometriai méretek és a topológiai kialakítás. A mozgás során előforduló különféle szingularitások demonstrálására a négyrudas mechanizmust használjuk modellként. A mozgás globális leírását a kompatibilitási feltétel adja két állapotváltozó függvényében. A változók értékészlete a rúdhosszak függvényében különböző osztályokba sorolható, melyeket a rúdhosszak terében háromdimenziós tartományokként ábrázolunk. E tartományok szélein és a közöttük lévő határhelyzetekben speciális geometriájú esetek állnak elő, melyek kinematikailag szinguláris alakokkal rendelkeznek. A szinguláris esetek lokális vizsgálatát a gyártás vagy a használat során keletkező geometriai tökéletlenségek bevonásával végezzük. A mozgás érzékeny a kicsiny megzavarásokra. A speciális esetek határhelyzetéből adódóan a rúdhosszak változása különféle mobilitási osztályokat eredményezhet. Míg a kompatibilitási utak általános pontjaiban a két állapotváltozó kapcsolata közelítőleg lineárisnak tekinthető, az speciális esetek lokális vizsgálata megmutatta, hogy az elágazási pontok környezetét az állapotváltozók magasabb rendű függvényei írják le. A megzavarások hatására az elágazási pontok megszűnhetnek és másfajta szingularitások jöhetnek létre. A legspeciálisabb esetben a magasabb rendű szingularitás megzavarásával különféle alacsonyabb rendű szingularitások, illetve különféle alakú kompatibilitási utak hozhatók létre.

**Kulcsszavak:** négyrudas mechanizmus, kompatibilitás, szingularitás, elágazás, tökéletlenségek

## 1. BEVEZETÉS

A csuklós rúdszerkezetek komoly szerepet játszanak a mérnöki gyakorlatban, mind szerkezeti mechanikai, mind gépészeti alkalmazásokban. Bár a szerkezeti mechanika hagyományosan kinematikailag határozott szerkezetekkel foglalkozik, újszerű alkalmazások vagy építéstechnológiák megkívánják olyan konstrukciók létrehozását, melyek (legalábbis átmenetileg) rendelkeznek kinematikai szabad-

\* Okl. építőmérnök, PhD (2003. University of Oxford, UK). E-mail: andras\_l@hotmail.hu

ságfokkal, vagyis mechanizmusok. Számos példát lehet említeni az űrbeli alkalmazások területén, melyek többnyire összecukható-kinyitható szerkezetek (deployable structures). A rendeltetési helyre való szállítás megköveteli egy viszonylag kicsi, kompakt alak létrehozását, melyet az üzembe állításhoz szükséges kihajtogatás követ, például összecukható antennák vagy térrácsok esetében (Miura, 1993). Földi alkalmazásokra is találunk példát, többek között stadionok nyitható-cukható tetőszerkezetének formájában. Adott esetben akár építéstechnológiai megfontolásból alkalmaznak kinematikailag határozatlan szerkezeteket, melyeket a végleges helyzetben megmerevítve, a létesítmény elnyeri a tervezett alakját. Erre példa a Kawaguchi (1991) által kifejlesztett Pantadome elnevezésű rendszer.

Rúdszerkezetek esetében tehát alapvető kérdés a kinematikai határozottság megállapítása, illetve kinematikai határozatlanság esetén a mozgás leírása. A Maxwell-szabály (Calladine, 1978) szükséges, de nem elégséges feltétel: egy síkbeli csuklós rúdszerkezet merev, ha  $b \geq 2j - k$ , ahol  $b, j$  és  $k$  rendre a rudak, csuklók és a kinematikai kényszerek összfokszámát jelöli. Speciális topológiai elrendezés azonban kinematikailag határozatlanná tehet egy rúdszerkezetet, sőt a szerkezeti elemek geometriai mérete is befolyásolja a kinematikai határozottságot (Szabó és Roller, 1978; Tarnai, 1984, 1990).

Hasonló jelenség megfigyelhető véges mechanizmusok esetében is, melyek véges mozgást végeznek deformációk nélkül (Litvin, 1980; Tarnai, 1999). Speciális geometria esetén a mechanizmus olyan alakot vehet fel, amelyben az infinitezimális kinematikai szabadságfokok száma megnő. Ebben a pontban a szerkezet alakot válthat és a mozgás egy másik úton haladhat tovább. Az állapotváltozók terében a mozgást leíró kompatibilitási utaknak elágazási pontja van.

Litvin (1980) és Tarnai (1999) a négyrudas mechanizmus egy-egy speciális esetét vizsgálta, melyek aszimmetrikus elágazási ponttal rendelkeztek. Lengyel és You (2003) további példákat is elemeztek, melyeket párhuzamba állítottak a rugalmas szerkezetek stabilitáselméletében ismert egyensúlyi utak elágazásaival. A szinguláris pontok vizsgálatára Lengyel (2002) javasolt egy módszert az elemi katasztrófaelmélet felhasználásával. A négyrudas mechanizmus kompatibilitását tanulmányozta Hunt (1978) két állapotváltozó szög függvénykapcsolatával. A kompatibilitás általános osztályozása is lehetséges a rúdhosszak alapján (Prentis, 1980).

Bár a mérnöki gyakorlatban alkalmazott mechanizmusok gyakran bonyolult, térbeli szerkezetek, a mozgás során előforduló különféle szingularitások demonstrálására a négyrudas mechanizmus modellként szolgálhat. Ebben a tanulmányban e mechanizmus vizsgálatával foglalkozunk. A kompatibilitás általános osztályozása segítségével áttekintést adunk az e szerkezettípusnál előforduló szingularitásokról. Ezt négy speciális eset elágazási pontjainak részletes vizsgálata követi.

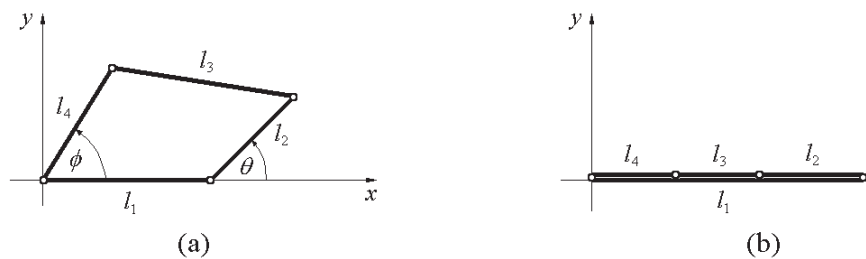
## 2. A KINEMATIKAI MODELL

Tekintsük a négyrudas mechanizmus legáltalánosabb formáját, melyet az  $I(a)$  ábra mutat. A rudak hossza az óramutató járásával ellentétes irányban rendre  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $l_3$  és  $l_4$ . Helyezzük el a szerkezetet egy  $(x, y)$  koordináta-rendszerben úgy, hogy az  $l_1$  hosszúságú rúd az  $x$  tengelyre essen az ábra szerint. A mozgás leírására két állapotváltozó ( $\phi$  és  $\theta$ ) elegendő. Az 1-es, 2-es és 4-es rudakat merevnek tekintve, a 3-as rúdra felírt kompatibilitási egyenlet adja a két szög közötti összefüggést:

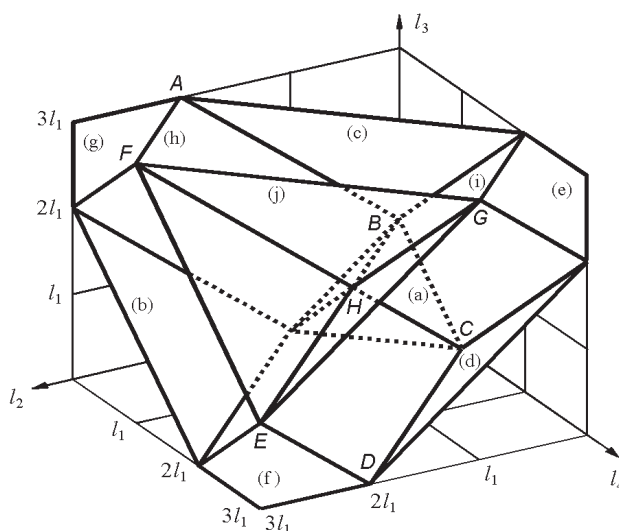
$$F(\phi, \theta) = \sqrt{(l_1 + l_2 \cos \theta - l_4 \cos \phi)^2 + (l_2 \sin \theta - l_4 \sin \phi)^2} - l_3 = 0. \quad (1)$$

Az (1) feltétel az oldalsó rudak végpontjai közötti távolság és az összekötő rúd hosszának egyenlőségét fejezi ki. Az egyenletet kielégítő értékpárok felelnek meg a geometriailag lehetséges alakoknak, melyek tipikusan görbék (kompatibilitási utak).

A két állapotváltozó értékkészlete a rúdhosszak függvénye. Ha a  $\phi$  szög értékkészlete végtelen, a 4-es rúd a mozgás során teljesen körbefordul. Hasonló érvényes a 2-es rúdra és a  $\theta$  szögre is. Ha azonban ez egy véges intervallum (periodikusan ismétlődve), a rúd mozgásának határhelyzetei vannak. A két szög értékkészlete alapján különféle kombinációk jöhetnek létre, melyek tartományokat alkotnak (Prentis, 1980). Ezeket a tartományokat most egy háromdimenziós koordináta-rendszerben ábrázoljuk, az 1-es rudat rögzítettnek, a többit pedig változónak tekintve (2. ábra). A kompatibilis helyzeteket a  $-l_1 + l_2 + l_3 + l_4 \geq 0$  (a), az  $l_1 - l_2 + l_3 + l_4 \geq 0$  (b), az  $l_1 + l_2 - l_3 + l_4 \geq 0$  (c), az  $l_1 + l_2 + l_3 - l_4 \geq 0$  (d), az  $l_2 \geq 0$  (e), az  $l_3 \geq 0$  (f) és az  $l_4 \geq 0$  (g) egyenlőtlenségekkel megadott félterek metszete tartalmazza. Ezt további tartományokra osztják az  $l_1 + l_2 = l_3 + l_4$  (h), az  $l_1 + l_4 = l_2 + l_3$  (i) és az  $l_1 + l_3 = l_2 + l_4$  (j) síkok. E síkok természetesen végtelen



**1. ábra.** A négyrudas mechanizmus  
(a) Általános kialakítás. (b) Infinitesimális mechanizmus



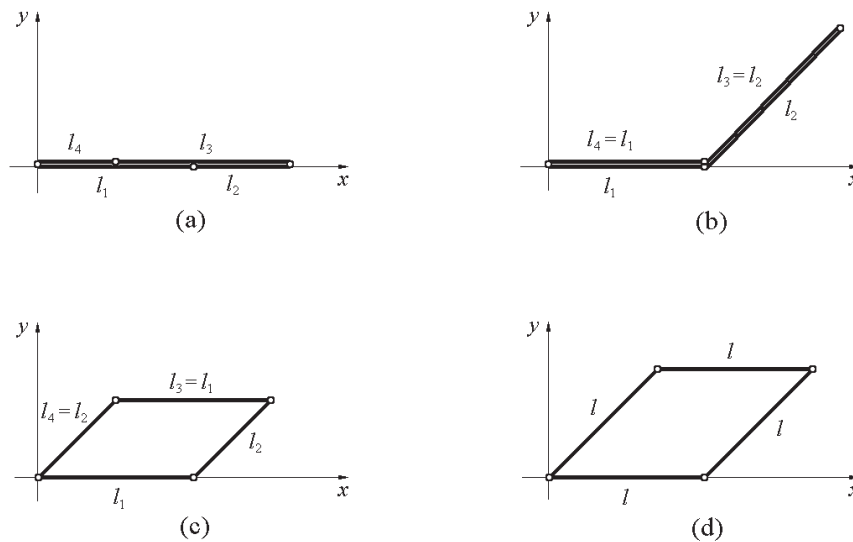
2. ábra. Mobilitási osztályok a rúdhosszak függvényében

kiterjedésűek, a 2. ábra csupán egy véges térrészben (egy  $3l_1$  élhosszúságú kockában) mutatja őket. Például a (h) sík ide tartozó darabját az  $ABCDEF$  hatszög határolja. Négy alapvető esetet különböztethetünk meg a  $\phi$  és  $\theta$  szögek értékkészlete alapján: végtelen-végtelen, véges-végtelen, végtelen-véges, véges-véges. Például az első a (h), az (i) és a (j) síkok által határolt térrészben áll elő, az  $EFG$  lapja felé a végtelenbe nyitott  $EFGH$  tetraéderben.

### 3. SPECIÁLIS ESETEK

A különféle tartományoknak megfelelő esetek meglehetősen jól ismertek, ezekkel nem foglalkozunk. Azonban a tartományok szélén, illetve a közöttük levő határfelületeken számos speciális eset áll elő, melyek elemzése e tanulmány hátralevő részének tárgya.

Az első eset a tartomány szélein áll elő, amikor az (a)–(d) egyenlőtlenségek valamelyike egyenlőséggé válik. Ekkor az egyik rúd hossza megegyezik a másik három összegével, és a szerkezet egy infinitezimális mechanizmussá fajul el. Erre mutat példát a 1(b) ábra. Szintén a tartomány szélén (amikor (e), (f) vagy (g) egyenlőséggé válik) áll elő az az elfajuló eset, amikor valamelyik rúd hossza zérus. Ekkor a rendszer egy merev szerkezet.

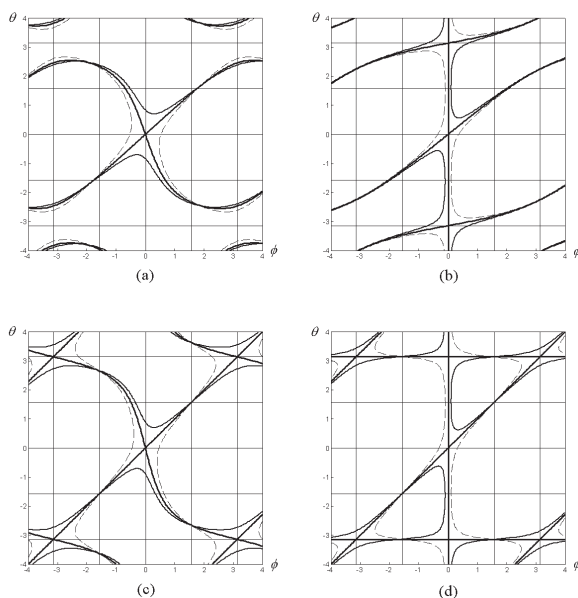


3. ábra. Speciális konfigurációk

A többi szingularitás az egyes tartományok közötti határhelyzetekben jön létre (a (h), az (i) vagy a (j) síkok). Az egyik ilyen sík az  $l_1 + l_2 = l_3 + l_4$ . Ekkor a szerkezetnek van egy olyan helyzete ( $\phi = \theta = 0$ ), amelyben az összes rúd az  $x$  tengelyre esik a 3(a) ábra szerint. Ebben a pontban a kinematikai szabadságfokok száma megnő és a kompatibilitási utakon elágazási pont van, melyet a 4(a) ábra mutat (vastag vonalak). E speciális eset egy alelete, amikor  $l_1 = l_4$  és  $l_2 = l_3$  (3(b) ábra). Ekkor az elágazási pontban a rudak páronként fedik egymást és az egyik pár ( $l_2$  és  $l_3$ ) egyidejű forgása egy egyenes kompatibilitási utat képvisel (4(b) ábra, vastag vonalak). Hasonló jelenség áll elő az  $l_1 + l_4 = l_2 + l_3$  sík esetében is.

E két sík metszéspontjában egy harmadik eset áll elő, amikor  $l_1 = l_3$  és  $l_2 = l_4$ . Ekkor a szerkezet paralelogramma alakú (3(c) ábra). A kompatibilitási utakon elágazási pont jelenik meg a ( $\phi = \theta = 0$ ) pontban, mely a 4(c) ábrán látható (vastag vonalak). Ennek az esetnek is van egy alelete, amikor az összes rúd hossza azonos:  $l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = l$  (3(d) ábra). A kompatibilitási utak ebben az esetben kizárólag egyenes vonalakkal állnak (4(d) ábra, vastag vonalak).

Bár matematikai szempontból egy szerkezet tipikusan nem szinguláris, vagyis szabályosan viselkedik, a szinguláris szerkezeteknek a mérnöki gyakorlatban mégis nagy jelentőségük van. Ugyanis gyakran tervezési vagy esztétikai szempont a szimmetriára és az uniformizmusra való törekvés, melynek következtében, a fenti példákhoz hasonlóan, szimmetrikus vagy több azonos méretű elemet tartalmazó szerkezetet kapunk. Ezért a szingularitások figyelembevétele sok esetben elengedhetetlen a tervezésnél.



4. ábra. Kompatibilitási utak

#### 4. A VIZSGÁLATI MÓDSZER

Az (1) kompatibilitási feltétel a mechanizmus globális és egyértelmű leírását adja az állapotváltozók terében. A vizsgálat során azonban a rendszert befolyásoló paramétereket is figyelembe kell venni. Mechanizmusok esetén kézenfekvő kicsiny geometriai tökéletlenségeket bevezetni, melyek a gyártáskor vagy a használat során keletkeznek. Ilyen imperfekció például a rudak hosszának hibája vagy a csuklók forgástengelyének tökéletlensége. E zavaró tényezők figyelembevételét nemcsak a teljes körű formális elemzés igénye indokolja, hanem az a tény is, hogy a valóságban gyakorlatilag mindig jelen vannak, hiszen tökéletes geometriájú szerkezetek csak elméletileg léteznek. Így a kompatibilitás két állapotváltozó és számos paraméter függvényében adható meg.

Tökéletlenségek esetén a megoldáshalmaz változik, vagyis a kompatibilitási utak módosulnak. Általános kialakítás esetén a viselkedés jellege nem változik, azonban speciális geometria esetén a szinguláris pont környezete alapvetően megváltozik, hiszen a megzavarás az egyedi különleges helyzetet megszünteti.

A célunk tehát a kompatibilitási feltétel lokális vizsgálata a szerkezet szinguláris helyzetében. Ehhez előállítjuk (1) Taylor-sorát a két állapotváltozó függvényében. Megvizsgáljuk, hogy a paraméterek választása hogyan befolyásolja a mozgást a szinguláris pont környezetében.

## 5. PÉLDÁK

A példákban a  $i$ -edik rúd ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) kicsiny hosszhibáját  $\varepsilon_i$ -vel, a teljes hosszát  $L_i$ -vel jelöljük. Általános esetben a kompatibilitási feltétel a következő alakban írható:

$$F(\phi, \theta) = \sqrt{(L_1 + L_2 \cos \theta - L_4 \cos \phi)^2 + (L_2 \sin \theta - L_4 \sin \phi)^2} - L_3 = 0, \quad (2)$$

ahol  $L_1 = l_1 + \varepsilon_1$ ,  $L_2 = l_2 + \varepsilon_2$ ,  $L_3 = l_3 + \varepsilon_3$ , és  $L_4 = l_4 + \varepsilon_4$ .

Tekintsük először a 3(a) ábrán látható esetet. Az elágazási pontban ( $\phi = \theta = 0$ ) elegendő a tökéletes szerkezet Taylor-sorát a másodfokú tagokig felírni. Az  $l_3 = l_1 + l_2 - l_4$  helyettesítéssel kapjuk:

$$F \approx \frac{1}{2} \frac{(l_1 + l_2)l_4}{l_1 + l_2 - l_4} \theta^2 - \frac{l_2 l_4}{l_1 + l_2 - l_4} \phi \theta - \frac{1}{2} \frac{(l_1 - l_4)l_2}{l_1 + l_2 - l_4} \phi^2. \quad (3)$$

A tökéletlenségekkel megzavart szerkezet esetén pedig:

$$F \approx \frac{1}{2} \frac{(L_1 + L_2)L_4}{L_1 + L_2 - L_4} \theta^2 - \frac{L_2 L_4}{L_1 + L_2 - L_4} \phi \theta - \frac{1}{2} \frac{(L_1 - L_4)L_2}{L_1 + L_2 - L_4} \phi^2 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4. \quad (4)$$

Mindkét szög másodfokú kifejezése megjelenik (3)-ban. Megfigyelhetjük, hogy a tökéletlenségek hatása szintén a változók másodfokú tagjaiban jelentkezik. A kompatibilitási utak megváltoznak, ugyanis az elágazás megszűnik, és egy másfajta szingularitás (határpont) jelenik meg. Az  $L_1 + L_2 - L_3 - L_4$  kifejezés előjelétől függően vékony folytonos (+), illetve szaggatott (-) vonalak jelölik a kompatibilitási utakat az 4(a) ábrán.

E példa egy a esetét láttuk a 3(b) ábrán. Ekkor  $l_1 = l_4$  és  $l_2 = l_3$ . Általános tökéletlenségek esetén a Taylor-sor azonos a (4) kifejezéssel. Azonban tökéletes szerkezet esetén a  $\phi$  másodfokú kifejezése eltűnik (egyidejűleg az összes többi is), ami az 4(b) ábrán látható egyenes kompatibilitási útnak felel meg. A tökéletlen utak jelölése az előző esettel azonos.

A harmadik példa a 3(c) ábrán látható paralelogramma alakú szerkezet. A fentiekhez hasonlóan egyszerűen kapjuk, hogy a kompatibilitási feltétel Taylor-sora lényegében a (3), illetve (4) kifejezésekkel azonos.

Külön figyelmet igényel a legspeciálisabb eset, amikor az összes rúd hossza azonos ( $l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = l$ ). A ( $\phi = \theta = 0$ ) elágazási pont vizsgálata a fentiekhez hasonló eredményt hoz, azonban lényegesen különböző viselkedést mutat a másik elágazási pont ( $\phi = 0, \theta = \pi$ ). Ebben a pontban a Taylor-sor:

$$F \approx l\phi\bar{\theta} - \frac{1}{6}l\phi^3\bar{\theta} - \frac{1}{4}l\phi^2\bar{\theta}^2 - \frac{1}{6}l\phi\bar{\theta}^3 + \dots, \quad (5)$$

illetve:

$$F \approx -\frac{(L_1 - L_2)L_4}{2(L_1 - L_2 - L_4)}\bar{\theta}^2 - \frac{L_2L_4}{L_1 - L_2 - L_4}\phi\bar{\theta} - \frac{(L_1 - L_4)L_2}{2(L_1 - L_2 - L_4)}\phi^2 - \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 + \varepsilon_4, \quad (6)$$

ahol  $\bar{\theta} = \theta - \pi$ . A tökéletes szerkezet esetén (5) a változóknak csak vegyes kifejezéseit tartalmazza, azaz a változók összes (végtelen sok) tiszta tagja eltűnik. Ezért ez a pont végtelenül elfajultnak tekinthető. A kompatibilitási utak ennek megfelelően a koordinátatengelyekkel párhuzamos egyenes vonalak. E két út egy-egy olyan mozgásnak felel meg, amikor a szerkezet két rúdja a másik kettőtől függetlenül mozog. A rúdhosszak hibájával megzavart szerkezet esetén, az előzőekhez hasonlóan, a másodfokú tagok jelennek meg a (6) Taylor-sorban. A végtelen rendben elfajult pontot tehát a megzavarás véges rendben elfajulttá redukálta.

Elméletileg lehetséges olyan megzavarást alkalmazni, mely nem a másodfokú, hanem a magasabb fokú tagokat érinti. Nyilvánvalóan ez nem lehetséges a rúdhosszak konstans hibája esetén. Tekintsünk tehát egy olyan rendszert, amikor a rudak csuklós kapcsolatai nem tökéletesek. Ha egy csuklóban a csap, illetve a furat felülete nem tökéletes hengerfelület, akkor a relatív elfordulás függvényében a furat és csap középpontja közötti távolság változik, vagyis a vonatkozó rúd effektív hossza az elfordulás függvénye. Ezt a 4-es rúdra alkalmazva  $\varepsilon_4$  az

$$\varepsilon_4(\phi) = c_1\phi + c_2\phi^2 + c_3\phi^3 + \dots \quad (7)$$

alakban írható, ahol a  $c_i$  együtthatók konstansokat jelölnek. Minden más tökéletlenséget zérusnak tekintve, megmutatható, hogy az elágazási pontban a kompatibilitási feltétel az

$$F = \varepsilon_4(\theta) = c_1\phi + c_2\phi^2 + c_3\phi^3 + \dots \quad (8)$$

alakra hozható. Ez azt jelenti, hogy alkalmas megzavarással a kompatibilitási feltétel tetszőleges lokális alakját elő lehet állítani. Ha a zavaró függvényben csak az  $i$ -ik együttható nem zérus, a kompatibilitási feltételben csak az  $i$ -ik hatvány szerepel. Az egyenes kompatibilitási út pedig ezzel összefüggésben módosul.



## ÖSSZEFOGLALÁS

Ebben a tanulmányban az egyik legegyszerűbb és legáltalánosabban alkalmazott egyszabadságfokú mechanizmust, a négyrudas rúdláncot vizsgáltuk. A geometriai méretek alapján a mobilitás különféle osztályait lehet felállítani, melyek között számos szinguláris eset fordul elő. Megállapíthatjuk, hogy e speciális esetek globális és lokális viselkedése is egyedi és rendkívül érzékeny a rendszer megzavarására. Mivel a kompatibilitási osztályok közötti határhelyzetekben (sík, egyenes vagy pont) található, kicsiny tökéletlenségek hatására is a mobilitás különféle osztályai jöhetnek létre. Például a paralelogramma alakú konfiguráció esetében a 2-es vagy a 4-es rúd megnyúlása lehetetlenné teszi a rúd teljes körbefordulását. A megzavarástól függően többféle mobilitási osztály is előállhat.

Az egyszabadságfokú mechanizmusok kompatibilitási útjainak általános pontjaiban a mozgás egy paraméterrel leírható, azaz a két állapotváltozó kapcsolata az adott pontban közelítőleg lineárisnak tekinthető. Az speciális esetek lokális vizsgálata demonstrálta, hogy az elágazási pontok környezetét az állapotváltozók magasabb rendű függvényei írják le. A megzavarások hatására az elágazási pontok megszűnhetnek. A legspeciálisabb eset megmutatta, hogy a magasabb rendű szingularitás megzavarásával különféle alacsonyabb rendű szingularitások, illetve különféle alakú kompatibilitási utak hozhatók létre. Ez, a mérnöki gyakorlatban sokszor előforduló mechanizmus tehát változatos viselkedést mutat és sokféle tervezési problémát vet fel.

## Köszönetnyilvánítás

E tanulmány alapját képező kutatás részben a Clarendon Fund (St Edmund Hall, Oxford) és a Royal Society (The European Science Exchange Programme, HA/ESEP/JP) támogatásával zajlott. A szerző köszönetét fejezi ki Tarnai Tibornak, Gáspár Zsoltnak és Zhong Younak a szakmai együttműködésért.

## IRODALOMJEGYZÉK

- Calladine, C. R.: Buckminster Fuller's "tensegrity" structures and Clerk Maxwell's rules for the construction of stiff frames. *International Journal of Solids and Structures*, 14 (1978) 161–172.
- Hunt, K. H.: *Kinematic Geometry of Mechanisms*. Oxford University Press, 1978.
- Kawaguchi, M.: Design problems of long span spatial structures. *Eng. Struct.* 13 (1991) 144–163.
- Lengyel, A.: *Analogy between equilibrium of structures and compatibility of mechanisms*. PhD disszertáció, University of Oxford, United Kingdom, 2003.
- Lengyel, A. – You, Z.: Analogy between bifurcations in stability of structures and kinematics of mechanisms. *Mechanics based design of structures and machines*, 2003 (in print).

- Litvin, F. L.: Application of theorem of implicit function system existence for analysis and synthesis of linkages. *Mechanism and Machine Theory*, 15 (1980) 115–125.
- Miura, K.: Concepts of deployable space structures. *International Journal of Space Structures*, 8(1–2) (1993) 3–16.
- Prentis, J.: *Dynamics of Mechanical Systems*. Wiley, New York, 1980.
- Szabó, J. – Roller, B.: *Anwendung der Matrizenrechnung auf Stabwerke*. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1978.
- Tarnai, T.: Bifurcation of equilibrium and bifurcation of compatibility. Abstracts of Lectures, 16<sup>th</sup> IUTAM Congress, Lyngby, Denmark, lecture 652, 1984.
- Tarnai, T.: *Kinematically indeterminate structures and structural topology*. DSc disszertáció, Magyar Tudományos Akadémia, Budapest, 1990.
- Tarnai, T.: Rigidity and kinematic bifurcation of structures. 40<sup>th</sup> Anniversary Congress of the International Association for Shell and Spatial Structures (IASS), CEDEX, Madrid, Spain, Sep. 20–24, 1999; 1: B 2.81–B 2.90.

## SINGULARITIES OF THE COMPATIBILITY OF FOUR-BAR LINKAGES

### *Summary*

Mechanisms are gaining significance in structural engineering design by new applications and construction technologies. In a similar way to static and kinematic properties of structures, those of mechanisms are also affected by the metric properties and the topology. The four-bar linkage serves as model to demonstrate the various singularities occurring during motion. The global description of the motion can be given by a compatibility condition in terms of two state variables. The range of the values of the variables defines various categories in terms of the bar lengths, which are visualized as three-dimensional domains. The outer and inner surfaces of these domains refer to cases with special geometry, which have kinematically singular configurations. The local analysis of the singularities is done with the introduction of geometric imperfections due to manufacturing or wear. The motion is sensitive to small perturbations. Due to the borderline position of the special cases, the change of the bar lengths may result in various categories of the mobility. While in the general points of the compatibility path the relationship between the two state variables can be approximated as linear, the local analysis of the special cases has shown that the neighbourhood of the bifurcation points is described by higher-order functions of the state variables. The perturbations may result in the disappearance of the bifurcation points and the appearance of other types of singularities. In the most special case various lower-order singularities and compatibility paths can be obtained by perturbing the higher-order singular point.

**Keywords:** four-bar linkage, compatibility, singularity, bifurcation, imperfections