

PONYVASZERKEZETEK ALAKMEGHATÁROZÁSI MÓDSZEREI

HEGYI DEZSŐ*

A cikk a ponyvaszerkezetek alakmeghatározási problémakörével foglalkozik. Célja bemutatni, miért van szükségünk alakmeghatározásra. Röviden ismerteti a Magyarországon és külföldön legelterjedtebb alakmeghatározási eljárásokat. Nem a teljes algoritmusok kerülnek levezetésre, hanem az egyes módszerek működésének alapvető elemei kerülnek bemutatásra. Végül a cikk bemutatja két Magyarországon fejlesztett eljárás szerkezettervezési vonatkozásait.

Kulcsszavak: ponyvaszerkezet, alakmeghatározás, optimális alakfelvétel

BEVEZETÉS

Ponyvaszerkezeteknek a textíliákból épített teherhordó szerkezeteket nevezük. A ponyvaszerkezetek anyaga jellemzően PVC bevonatú poliészter szál vagy TEFLON bevonatú üvegszál szövet.

A ponyvából készült tartószerkezetek az épített környezet különleges szerkezetek. Laikusoknak is szembe tűnő a hagyományos épületekre jellemző formavilágtól különböző megjelenése. A szerkezettervezőknek a technikai textíliák sajátos viselkedése fontos.

A PONYVA MINT SZERKEZETALKOTÓ ANYAG

A ponyvaanyag rendkívül vékony, vastagsága általában néhány tized milliméter. Az így adódó nagy hajlékonyság miatt nyomó és hajlító igénybevételt csak elhanyagolható mértékben képes viselni. Húzó erők felvételére annál inkább alkalmas, és nyírómerevséggel is rendelkezik. Ahhoz, hogy a terheit képes legyen fel-

* BME Szilárdságtani és Tartószerkezeti Tanszék. Tel.: 463-1315; fax.: 463-1773; e-mail: dizso@silver.szt.bme.hu

venni csupán húzó és nyíró metszeterők segítségével, hiperbolikus felületre van szükségünk (1. ábra). Így biztosíthatjuk, hogy bármilyen irányú terhelés esetén legyen a terhet felvenni képes felületi metszet. Légtartós sátrak esetén a ponyvafelület elliptikus, és a légnyomást kell viselnie, ami mindig azonos oldalról és a felületre merőlegesen hat. A külső terheket a külső és a belső légnyomás közti különbség viseli.



1. ábra. Kétszeresen görbült felületek

Az egyes terhelésekhez tartozó belső erők és elmozdulások meghatározását harmadrendű elmélettel célszerű végezni. Erre azért van szükség, mert a ponyvaszerkezet terheit nagy elmozdulásokkal veszi fel kis alakváltozások esetén is. Az elmozdulás a tartószerkezet geometriáját és a teherelrendezést is lényegesen befolyásolja (2. ábra).



2. ábra. Alakváltozás szélteher hatására a ponyvaszerkezeten

Fontos megjegyeznünk, hogy azt nem mindig tudjuk biztosítani, hogy a lehetséges teherelrendezések vagy terhelési szintek esetén csak húzó metszeterők lépjenek fel a ponyvaanyagban (különösen szélteher esetén, de még hóteherre sem). Ennek oka, hogy a nagy elmozdulások nagymértékben megváltoztathatják a szerkezet geometriáját. Bizonyos helyzetekben nyomó metszeterők alakulnának ki, ami elől a ponyvaanyag kitér, és ráncossá válik. A ponyvaszerkezet alaktartó képességét az előfeszítéssel (az építés során bevitt húzófeszültséggel) nagymértékben lehet befolyásolni.

Előfeszítő erőre nem csak a nyomott tartományok elkerülése miatt van szükségünk. A megfeszítetlen felület könnyen belebeg a szél hatására, vagy ráncossá válik, ami esztétikailag kedvezőtlen.

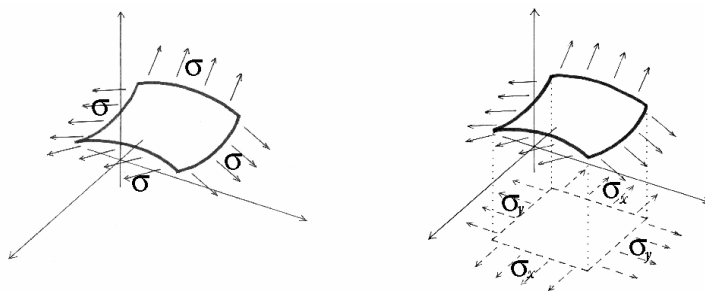
A felület viselkedésén túl fontos megemlíteni, hogy a ponyvaanyag tulajdonképpen egy szövet. Rugalmassága és teherviselő képessége nagymértékben függ a száliránytól. Két jellemző irányt, a szál és a vetülék irányt emelhetjük ki, amelyek a korszerű technikai textiliáknál közel azonos tulajdonságúak. A számításokban orthotrop viselkedésű anyagként vehetjük figyelembe.

ALAKMEGHATÁROZÁSI MÓDSZEREK

A ponyvaszerkezetek alakmeghatározása alatt általában egy olyan alak felvételét értjük, amely egy adott peremrendszerre illeszkedik és egy előírt feszültségelrendezéshez tartozik. Ezt az alakot másként elméleti alaknak is nevezzük. Előállítása során az anyag tulajdonságait, és azt a tényt, hogy az előírt feszültségeket valami módon elő kell állítani, nem vesszük figyelembe. Megkülönböztetünk szerelési alakot. Az elméleti alak meghatározása során előállított szabásmintához hozzárendelhetőek az anyag tulajdonságai, és megtervezhető az előfeszítés módja. Az így összeállított és megfeszített szerkezet alakját nevezzük szerelési alaknak. A továbbiakban az elméleti alak meghatározására mutatok be különböző, a magyar és a nemzetközi szakirodalomban fellelhető módszert.

Az alakmeghatározási módszerek csoportosítását többféleképpen is elvégezhetjük. Fő csoportként mindenképpen külön kell választanunk a fizikai és a matematikai modelleket. A legrégebbi eljárások fizikai modellt használnak, mint a kifeeszített szappanhártya vagy rugókból összeállított hálózat [23]. Nyomott membránokhoz a leőgátott láncszövetet lehet alkalmazni (ez a vízszintes síkra tükrözött felületet adja). A tervezettnél kisebb léptékben összeállított modellről mérésrel lehet meghatározni az egyensúlyi alakot.

A matematikai módszerek számítással határozzák meg a lehetséges felületet. A matematikai módszerek csoportját tovább bonthatjuk. Első lépésben különválaszthatjuk az analitikus és numerikus eljárásokat. A numerikus eljárásokat tovább oszthatjuk a felület felosztását alapul véve rúdháló- és felületelem-modellekre. A felületre előírt belső erők alapján megkülönböztethetünk szappanhártyát (a felületre előírt állandó nagyságú valódi metszeterők), Pelikán-hártyát (a metszeterők vízszintes síkra vett komponenseire vonatkozó előírás, mely az egyes koordináták irányában ír elő egyenlőséget) (3. ábra), de ettől a két optimálisnak tartott előírástól eltérő feszültségeloszlás is lehetséges. Végül az alkalmazott matematikai, mechanikai módszerek szerint is elvégezhetjük a csoportosítást. Jelen ismertetésben ez utóbbit vettem alapul.



3. ábra. Szappanhártya és Pelikán-hártya

ANALITIKUS MEGOLDÁS A PUCHER-FÉLE DIFFERENCIÁLEGYENLETTEL

Pálfalvi és Hegedűs közöl analitikus megoldást [16] a Pucher-féle egyensúlyi differenciálegyenlet felhasználásával.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - P = 0,$$

ahol z az alakfüggvény és F a feszültségfüggvény az x és az y változókkal kifejezve. P a külső terhek függvénye, amit el lehet hagyni, mert az alakmeghatározás során külső terhektől mentes felülettel számolunk.

Alakmeghatározás esetén a differenciálegyenletben szereplő (F) feszültségfüggvényt kell megadni, és az alak egyenlete az ismeretlen. Az előírt feszültségfüggvény lehet konstans (szappanhártya), vagy a vízszintes síkra redukált komponenseire nézve konstans (Pelikán-hártya) függvény.

Az egyenlet tagjainak második tényezői a redukált metszeterőket fejezik ki. Így konstans redukált metszeterők esetén, és nullának feltételezett nyíró metszeterők mellett az egyenlet a következő alakra hozható:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} n_x + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} n_y = 0 \quad \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = n_{xy} = 0 \right).$$

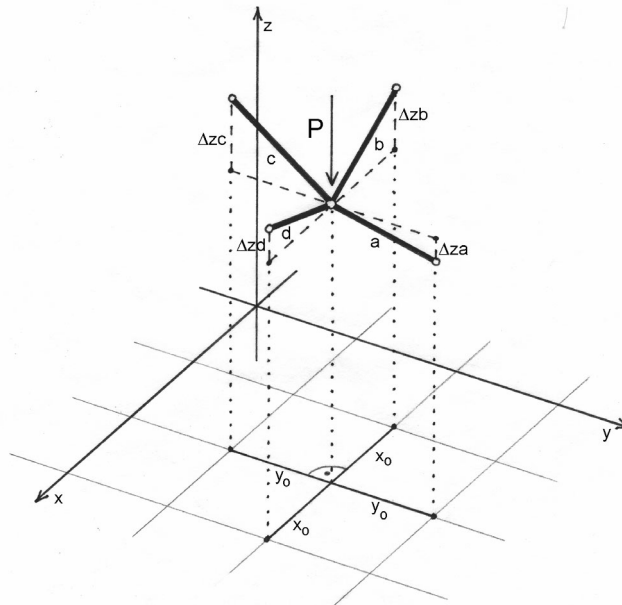
Konstans valódi metszeterők esetén Pálfalvi és Hegedűs a következő differenciálegyenletet közli [16]:

$$\frac{A}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \left(1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 \right) - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \left(1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \right) \right) = 0.$$

Az analitikus megoldáshoz a feszültségfüggvények mellett szükség van a peremek geometriájára, a számítás eredménye az alakfüggvény. Ennek segítségével minden pontban megadható a felület. Ahhoz, hogy matematikailag kezelhető legyen a feladat, csak kevésbé összetett szerkezeteket vizsgálhatunk ilyen módon, mint például forgásfelületek vagy nyeregfelületek.

VETÜLETÉBEN MERŐLEGES RÚDHÁLÓ MODELL

Talán a legfrappánsabb megoldás Pelikántól származik [17]. Ő alaprajzában merőleges, irányonként egyenlő távolságban elhelyezkedő rudakból álló hálózattal helyettesített lapos vasbeton héjakat. A vasbeton önsúlyát a rúdhálózat csomópontjaira helyezett koncentrált teherrel helyettesítette. Az így összeállított rendszer csomópontjaira felírta az egyensúlyi egyenleteket (4. ábra).



4. ábra. Vetületi hálózat, kezdeti alak és szabásminta

$$S_{ay} = S_{cy} = Q_y$$

$$S_{by} = S_{dy} = 0$$

$$S_{bx} = S_{dx} = Q_x$$

$$S_{ax} = S_{cx} = 0$$

$$S_{az} + S_{bz} + S_{cz} + S_{dz} - P = 0$$

$$S_{az} = -Q_y \cdot \frac{\Delta z_a}{y_0}$$

$$S_{bz} = Q_x \cdot \frac{\Delta z_b}{x_0}$$

$$S_{cz} = Q_y \cdot \frac{\Delta z_c}{y_0}$$

$$S_{dz} = -Q_z \cdot \frac{\Delta z_d}{x_0}$$

Az egyes rudakban ébredő erő vízszintes vetületeire egyenlőséget írt elő (a szakirodalom Pelikán-hártyaként ismeri az ilyen felületeket). Lapos héjak esetén ez a szappanhártyát közelíti. A három vetületi egyenlethől kettőt el is hagyhatunk (a vízszintes tengelyekre vonatkozó vetületi egyenletek teljesülnek minden csomópontban az előírás szerint). A függőleges tengelyre vonatkozó vetületi egyenletben a rudak vizsgált csomóponthoz képest ellentétes végének a magassága az ismeretlen. A teljes szerkezet összes nem rögzített helyzetű csomópontjára fel kell írni a függőleges erők egyensúlyának az egyenletét. Így összeáll egy lineáris egyenletrendszer, aminek a megoldása az egyensúlyi alak. Az ötvenes években számítógépek híján Pelikán egy kézzel elvégezhető relaxációs módszert dolgozott ki. Csomópontonként vizsgálva a szerkezetet lépésenként meghatározta a csomópont egyensúlyához szükséges magasságát, és továbblépett a szomszédos csomópontokra. Többször végigjárva a szerkezet pontjait kialakul az egyensúlyi felület. Ez a módszer azért kisebb szerkezet esetén is sok munkát igényel.

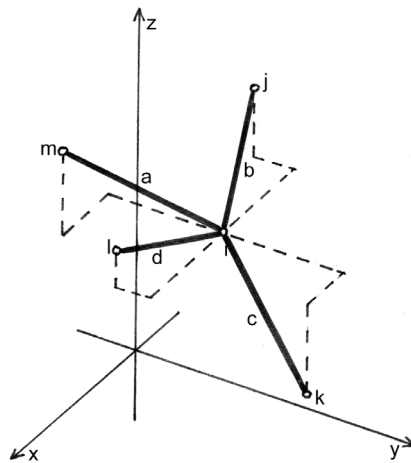
A rúderők vízszintes komponenseinek nagysága (a két egymásra vetületében merőleges irányban futó rudak rúderőinek vízszintes komponenseinek aránya), és a csomóponti terhek nagysága és a peremek magassága határozzák meg a szerkezet geometriáját.

A Pelikán-féle módszert a BME-n Szabó, Gáspár és Galaskó fejlesztette tovább, és készített jól használható, sokoldalú szoftvert a gyakorlati alkalmazáshoz [3, 24]. Különbség a vasbetonhéjakhoz képest, hogy a ponyvaszerkezet önsúlya elhanyagolható, és az anyag csak húzást képes felvenni. A külső terhektől mentes feszített ponyvaszerkezet csak hiperbolikus felület lehet.

ERŐINTENZITÁS-MÓDSZER

A nemzetközi szakirodalomból ismert a ponyva és kábelszerkezetek alakmeghatározásához használt "force density method", erőintenzitás-módszer. Kidolgozása Sheck és Linkwitz nevéhez fűződik [12, 19].

A módszer egy általános térbeli helyzetben lévő rúdhálózatból indul ki, melynek kiindulási koordinátái ismertek, azok szabadon felvehetők. Felírva a csomópontok egyensúlyi egyenleteit olyan összefüggéshez jutunk, ahol a geometria és a vizsgált erőkomponensek közötti kapcsolat nemlineáris, hiszen a számlálóban és a nevezőben is szerepelnek a rúd végpontjainak koordinátái (5. ábra). Ez nagy számítási nehézséget eredményez. Ezt egyszerűsítendő bevezették az „erősűrűség” (q) fogalmát. Az egyenletekben szereplő erő-rúdhossz hányados értékét előírva az egyes rudakra, a továbbiakban már csak a számlálóban szerepelnek az ismeretlen koordináták, méghozzá első hatványon. Az erősűrűségnek valódi statikai értelmezése nincs, viszont bevezetésükkel az egyenletek lényegesen leegyszerűsödnek. Felírva a szerkezet összes nem rögzített csomópontjára az egyenleteket egy lineáris egyenletrendszert kapunk.



5. ábra. Vetületi hálózat, kezdeti alak és szabásminta

$$a = \sqrt{(x_m - x_i)^2 + (y_m - y_i)^2 + (z_m - z_i)^2} \dots$$

$$\frac{S_a}{a}(x_m - x_i) + \frac{S_b}{b}(x_j - x_i) + \frac{S_c}{c}(x_k - x_i) + \frac{S_d}{d}(x_l - x_i) = 0$$

$$\frac{S_a}{a}(y_m - y_i) + \frac{S_b}{b}(y_j - y_i) + \frac{S_c}{c}(y_k - y_i) + \frac{S_d}{d}(y_l - y_i) = 0$$

$$\frac{S_a}{a}(z_m - z_i) + \frac{S_b}{b}(z_j - z_i) + \frac{S_c}{c}(z_k - z_i) + \frac{S_d}{d}(z_l - z_i) = 0$$

$$q_a(x_m - x_i) + q_b(x_j - x_i) + q_c(x_k - x_i) + q_d(x_l - x_i) = 0$$

$$q_a(y_m - y_i) + q_b(y_j - y_i) + q_c(y_k - y_i) + q_d(y_l - y_i) = 0$$

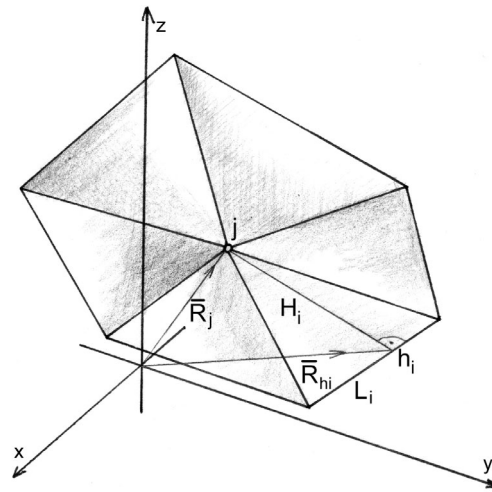
$$q_a(z_m - z_i) + q_b(z_j - z_i) + q_c(z_k - z_i) + q_d(z_l - z_i) = 0$$

A felület tulajdonságait a peremfeltételek és az egyes elemekre megadott erő-sűrűség-érték befolyásolják. Az erő-sűrűség értékének módosításával el lehet érni előírt elemhosszakat az egyes rudakhoz vagy a rudak összes hosszának minimumát (ez az adott peremfeltételekhez tartozó minimál-felületet eredményez, ami a korábbiak alapján szappanhártyának felel meg). Ezeknek a feltételeknek a figyelembevételére azonban már nemlineáris eljárásra van szükség. Adott erő-sűrűségekhez lineárisan számítható az egyensúlyi alak, ezután ellenőrizve az előírt feltételt, és szükség szerint új erő-sűrűségeket felvéve lehet új egyensúlyi alakot számítani.

FESZÜLTSGINTENZITÁS-MÓDSZER

Az erőintenzitás-módszer rudakból álló szerkezetekre lett kidolgozva (kötél- és tensegrity- szerkezetekre), de a merőleges rúdháló modelléhez hasonlóan alkalmas ponyvafelületek alakmeghatározásához is. Létezik hasonló, felületelemre kidolgozott megoldás is. Ez az úgynevezett "surface stress density method", felületi feszültségsűrűség módszer [13, 14].

Egy háromszögelemből összeállított rendszer egy csomópontjának egyensúlyi egyenlete felírható a 6. ábrán bemutatott alakban. Ismeretlen a csomópont egyensúlyi alakhoz tartozó helyvektora (R_c). Az egyenlet némileg egyszerűsödik, ha a benne szereplő feszültség-terület hányadosokat (Q_{si} - felületi feszültség sűrűség) kiemeljük. Az oldalhosszak (L_i) a szomszédos pontok koordinátáiból számíthatók, a h_1 pontok koordinátái ugyancsak (ezekhez a vizsgált pont koordinátáira is szükség van). A teljes szerkezet összes nem rögzített csomópontjára felírva az egyensúlyi egyenleteket egy nemlineáris egyenletrendszerhez jutunk. Egy megfelelően választott kiindulási értéket behelyettesítve, és a kapott eredményeket újra és újra visszahelyettesítve az egyensúlyi állapot felé konvergáló rendszert kapunk.



6. ábra. Felületi feszültségintenzitás-módszer általános csomópontja

$$\begin{aligned}
 F_c &= \sum_{i=1}^i \frac{1}{2} L_i t \sigma_0 \frac{\bar{j}h_i}{H_i} = \sum_{i=1}^i \frac{2\sigma_0}{L_i H_i} \frac{1}{4} L_i^2 t (\bar{R}_{hi} - \bar{R}_c) = \sum_{i=1}^i Q_{si} \frac{1}{4} L_i^2 t (\bar{R}_{hi} - \bar{R}_c) = \\
 &= \sum_{i=1}^i Q_{si} \frac{1}{4} L_i^2 t \bar{R}_{hi} - \sum_{i=1}^i Q_{si} \frac{1}{4} L_i^2 \bar{R}_c = 0
 \end{aligned}$$

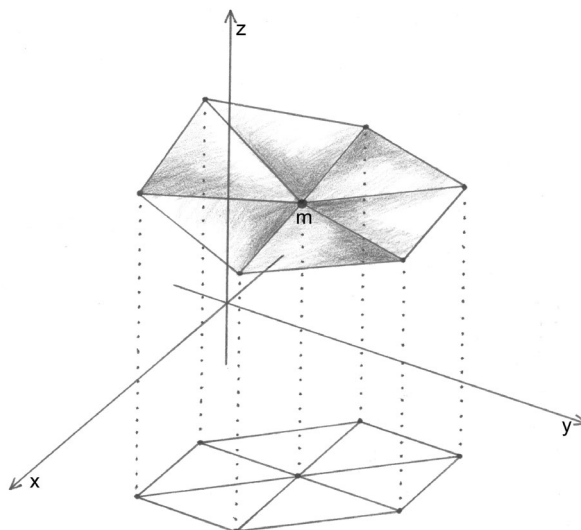
t – a felület vastagsága

Az erőintenzitás-módszerhez hasonlóan a felület alakját az egyes elemekre előírt feszültség intenzitás értéke és a peremfeltételek határozzák meg.

DINAMIKUS RELAXÁCIÓ

Ugyancsak numerikus alakmeghatározási módszer a kezdeti alak dinamikus relaxációval történő meghatározása, mely Barnes nevéhez fűződik [1]. A dinamikus relaxáció (ellazítás) jól alkalmazható eljárás nemlineáris egyenletrendszer megoldására, mint amilyen általában az alakmeghatározás is. Lényege, hogy a szerkezeten fiktív tömegeket helyezünk el, amelyeket a rájuk ható kiegyensúlyozatlan erők mozgásba hoznak.

Hincz és Gáspár [8, 9] közöl alakmeghatározási eljárást, mely a dinamikus relaxációt alkalmazza. A szerkezet háromszögelemekből áll, és a csomópontok alaprajzi vetülete rögzített az egyensúlyi alak keresése során. A program a háromszögek csúcspontjaiba helyez fiktív tömegeket, és ide redukálja az előírt metszeterőket. Az előírt belső feszültség lehet a valódi metszeterőkre nézve állandó (szappan hártya) vagy a vízszintes síkra redukált metszeterőkre nézve állandó (Pelikán-hártya).



7. ábra. A sebesség és az új koordináta számításának egy lépése a szerkezet egy csomópontjára

$$\bar{F}_{mz}^k = \sum \bar{N}_{mz}^k \quad a^k = \frac{\bar{F}_{mz}^k}{m_i}$$

$$v_{mz}^{k+\Delta t/2} = v_{mz}^{k-\Delta t/2} + a_{mz}^k \cdot \Delta t$$

$$z_m^{k+\Delta t} = z_m^k + v_m^{k+\Delta t/2} \cdot \Delta t$$

\bar{N}_{mz}^k = a csomópontra redukált metszeterők az i -edik időpontban

\bar{F}_{mz}^j = kiegyensúlyozatlan terhek a t_i időpontban

m_i = fiktív teher

$v^{\Delta t/2}$ = átlagsebesség t_i és $t_i + \Delta t$ között

$z^{k+\Delta t}$ = magasság $k + \Delta t$ időpontban

A kiegyensúlyozatlan erők a fiktív tömegeket mozgásba hozzák Newton II. törvénye szerint, és kialakul egy rezgőmozgás. Egy rezgőmozgás tömegpontjának mozgási energiája akkor maximális, amikor az egyensúlyi ponton halad át, vagyis amikor nem hat rá erő. A számított felület egyes pontjai más és más pillanatban érik el ezt a pontot a számítás során. Az egyes időpontokban kiszámítva a teljes szerkezet mozgási energiáját, lokális maximumokat lehet találni. Itt kinematikus csillapítást alkalmazva, azaz a szerkezet pontjainak a sebességét lenullázva a teljes szerkezet egyensúlyi állapota felé konvergáló folyamatot kapunk (megfelelő időlépés és tömegnagyság választása esetén). A számítások során lineáris egyismeretlenes egyenleteket kell megoldani.

Az egyensúlyi felület alakja az előírt feszültségelrendezéstől és a peremfeltételektől függ.

Gosling és Lewis [5, 6] olyan alakmeghatározási módszert közöl, ahol a szerkezet merevségi mátrixát használják fel az előbb bemutatott módszer fiktív tömegei helyett a számításához:

$$v^{k+\Delta t/2} = v^{k-\Delta t/2} + \left(\frac{\bar{F}^k \cdot (K^k)^{-1}}{\Delta t} \right).$$

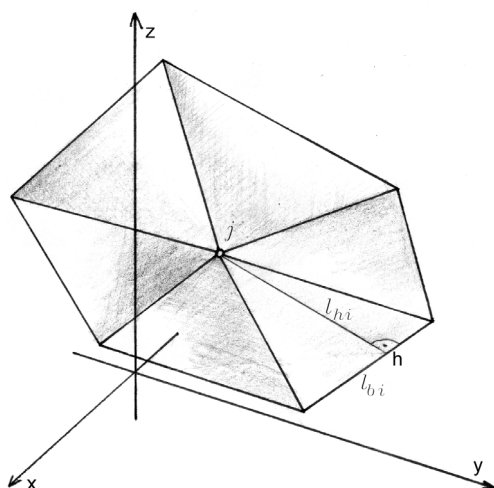
Az így számított sebesség nem valódi mozgáshoz tartozik, hanem a nemlineáris egyenletrendszer megoldásának konvergenciájának gyorsítását szolgálja. Ez az elmozdulásokat leíró egyenletből látszik leginkább:

$$s^{k+\Delta t} = \Delta t \cdot v^{k-\Delta t/2} + \bar{R}^k \cdot (K^k)^{-1},$$

ahol az egyenlet második része az adott kiegyensúlyozatlan erők és az adott merevségből lineárisan számított eltolódásvektort adja.

KONJUGÁLT GRADIENS MÓDSZER

Többváltozós függvények szélsőértékének keresésére kifejlesztett matematikai eljárás a konjugált gradiens módszer. Rúdszerkezetek rúdhosszai összegének, vagy felületelemekből összeállított szerkezetek felület minimumának keresésére is alkalmas az eljárás (8. ábra). Az eljárással kapott felület minimál felület. Ez szappanhártyának felel meg, amire Maurin és Motro is rámutat cikkében [13, 15].



8. ábra. Konjugált gradiens módszer egy eleme

$$\frac{\partial f_{(X)}}{\partial X} = \frac{\partial \left(\sum_{i=1}^i \frac{1}{2} l_{bi} l_{hi} \right)}{\partial X} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^i \frac{l_{bi}}{l_{hi}} \frac{\partial l_{hi}^2}{\partial X_j} = - \sum_{j=1}^i \frac{l_{bj}}{l_{hj}} j h_i$$

$$X_{p+1} = X_p + \alpha_p d_p$$

$$d_p = g_p - \frac{g_p \cdot g_p}{g_{p-1} \cdot g_{p-1}} d_{p-1}$$

- $f_{(X)}$ – a felület területe a pontok koordinátaival kifejezve
- X – a pontok koordinátáinak összessége
- X_j – az egyes pontok koordinátái (x, y, z irányú komponens)
- g – az $f(X)$ függvény gradiense
- α – a lépéshosszat meghatározó skalár

Az eljárás lényege a következő: a felület területét fel lehet írni a felület meghatározó csomópontok függvényeként. Ez egy többváltozós függvény, ahol az ismeretlenek száma a csomópontok ismeretlen koordinátáinak száma. A felület területét leíró függvény gradiensét (a függvény összes változója szerinti deriváltak vektoriális összegét) kiszámítva egy adott állapotban, megkapjuk a függvényhez

tartozó legmeredekebb érintőt, mely a függvény értékének emelkedése irányába mutat. Evvel az érintővel ellentétes irányában elindulva a függvény minimuma, vagy legalábbis lokális minimuma felé közeledünk. Megfelelő lépésközt választva a gradienst újra és újra kiszámítva el lehet érni ezt a minimumot. Az eljárás stabil konvergenciát biztosít a minimálfelület megkereséséhez, ha a peremfeltételek biztosítják annak létezését, ha a kiindulási állapotból nem egy, a globális minimumtól különböző lokális minimum felé indul el a rendszer, és ha megfelelő nagyságúak az iterációs lépések.

MEGÚJÍTOTT REFERENCIÁK MÓDSZERE

Bletzinger és Ramm [25] közöl megújított referenciák módszere (updated reference method) néven alakmeghatározási módszert. Az eljárás abból indul ki, hogy egy membránfelületre előfeszítést ír elő. Akkor kapunk a feszültségrendszerhez (az előfeszítéshez) tartozó egyensúlyi felületet, ha a feszültségrendszer virtuális munkája a felületen nulla. Ha az előírt feszültség minden irányban azonos, akkor minimál felületet, azaz szappanhártyát kapunk.

A feszültségrendszer által végzett virtuális munka a következő formában írható fel az aktuális felületre vonatkoztatva:

$$\delta w = t \int_a \sigma: \delta u_x da = 0.$$

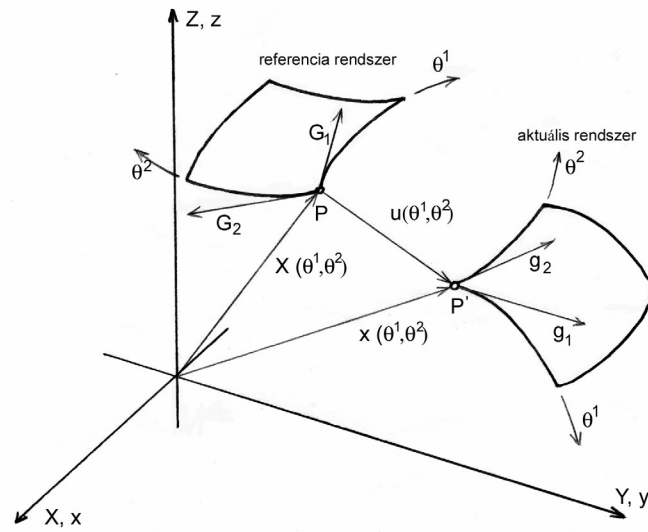
A második Piola–Kirchoff feszültségtenzor (S) és az alakváltozási gradiens (F) segítségével kifejezett virtuális munka a referenciafelületre felírva a következő:

$$\delta w = t \int_a (F \cdot S): \delta F dA = 0.$$

A probléma kezelhetősége érdekében érdemes a szerkezetet felbontani egy végelem hálózatra. Az elemek egyes csomópontjain a szabadsági fokok irányában végzett virtuális munka deriváltja a következő:

$$\frac{\partial w}{\partial b_r} = t \int_a (F \cdot S): \frac{\partial F}{\partial b_r} dA.$$

Ennek a deriválnak kell zérusnak lennie a teljes felületre egyensúlyi állapot esetén. Az összefüggés nemlineáris. Az egyenletet linearizálva a következő alak adódik:



9. ábra. Egy felületelem a referencia- és az aktuális rendszerben

$$LIN \frac{\partial w}{\partial b_r} = t \int_a (F \cdot S) : \frac{\partial F}{\partial b_r} dA + \Delta b_s t \int_a \frac{\partial}{\partial b_s} \left((F \cdot S) : \frac{\partial F}{\partial b_r} \right) dA = 0.$$

$$G_i = \frac{\partial X}{\partial \theta^i} \quad g_i = \frac{\partial x}{\partial \theta^i}$$

$$F = G^i \otimes g_i$$

$$u = x - X$$

$$S = \det FF^{-1} \cdot \sigma \cdot F^{-T}$$

Az alakváltozási gradiensek helyére a referenciaállapot és az azt megelőző állapot közötti változásból adódó értéket lehet behelyettesíteni. Az egyenlet első fele adja a kiegyensúlyozatlan terheket, a második fele pedig a merevségi mátrixot. E szerint rendezve az iteráció egy lépése a következőképpen néz ki:

$$\bar{\bar{R}} = \bar{\bar{K}}_s \cdot \bar{\bar{\Delta b}}_s$$

($\bar{\bar{R}}$ a kiegyensúlyozatlan erők vektora, $\bar{\bar{K}}$ a merevségi mátrix és $\bar{\bar{\Delta b}}$ az eltolódás vektora).

A bemutatott módszer tulajdonképpen a Newton–Raphson-módszer, ami rendszerint csak a megoldás közelében konvergál stabilan. Bonet és Mahaney a stabil konvergencia érdekében azt javasolja, hogy a kiindulási felület legyen a perempontok alaprajzi vetülete közé kifeszített teljesen sík felület, és az abból kiemelkedő perempontok az első 8–10 iterrációs lépésben emelkedjenek a tervezett magasságba [26].

AZ ÉPÍTÉSZETI TERVEZÉS ÉS AZ ALAKMEGHATÁROZÁS

A tervezés első lépésében el kell képzelni a lehetséges alakot, elrendezést. Ehhez szükség van némi tapasztalatra. A pontos alakot, a belső erőket, az alakváltásokat és a szabásmintát azonban már csak szoftver segítségével számíthatjuk ki, készíthetjük el. A tervezés során több alternatívát meg kell vizsgálni, többször módosítani kell a szerkezetet. Az elvárásokhoz meg kell keresni az optimális elrendezést.

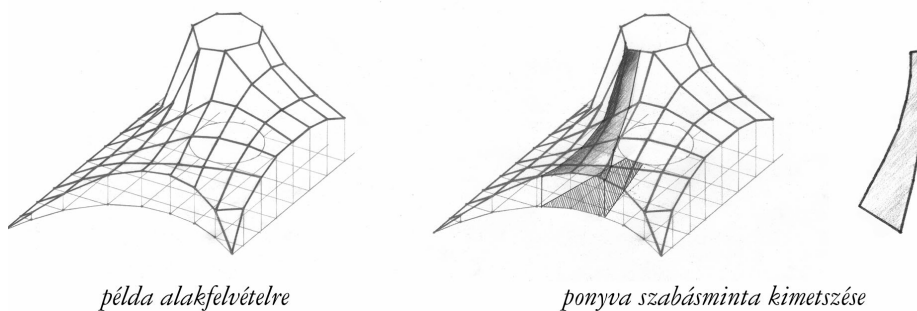
A következőkben azt kívánom bemutatni, hogy a Magyarországon működő programok hogyan segítik ezt a tervezési folyamatot.

RÚDHÁLÓ-MODELL

A rúdháló modell kevés geometriai kötöttség mellett alkalmas alakmeghatározásra (Szabó, Gáspár, Galaskó [3, 24]). A peremek szabadon felvehetők: lehetnek peremkábelek vagy merev rögzítésűek, és bárhol felvehetünk közbenső megtámasztott pontokat (árbocokat). Ezekre illeszti rá a program a vetületükben merőleges rudak hálózatát (10. ábra). Az egyensúlyi egyenletek megoldása után megkapjuk a szerkezet alakját. A kapott eredmény egy olyan rúdhálózat, melynek rúdjai vízszintes síkra vett vetülete egy derékszögű hálózatot ad. Ez a hálózat alkalmas szabásminta meghatározáshoz, illetve erőtani vizsgálatához.

A szabásminta meghatározásának egyik problémája az, hogy mivel a vetületi raszterünk kötött, az ismert pontok sűrűsége a ponyva felületére vetítve nagyon egyenlőtlen lehet. Ez akkor áll elő, ha nagyon lapos vagy nagyon meredek részei is vannak a felületnek. Ez nehezíti a szabásminta pontos meghatározását. Éppen ezért az eljárás egy modul segítségével lehetőséget ad arra, hogy árbocos elrendezés esetén az árboc környezetében sugaras rúdhálózatra lehessen áttérni (az árboc környezetében mindig nagyon meredek a felület).

Erőtani vizsgálatra is alkalmas a merőleges rúdhálózat. Harmadrendű elmélet segítségével kiszámíthatjuk a rúderőket és a támaszerőket. A probléma azonban ott merül fel, hogy egy felületszerkezetet rúdszerkezettel modellezünk. Ez termé-

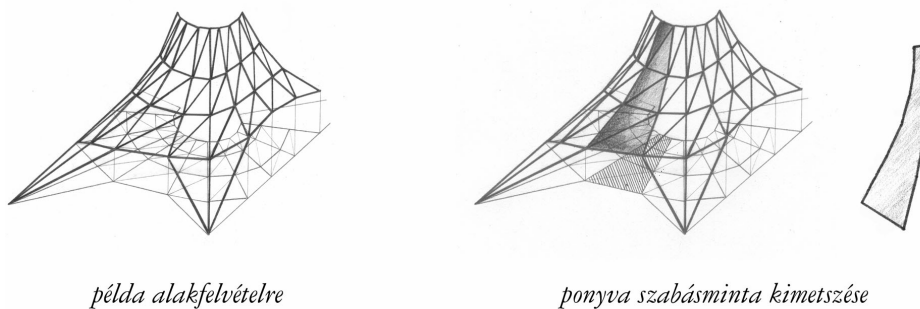


10. ábra. Vetületi hálózat, kezdeti alak és szabásminta

szetesen nem minden tekintetben képes utánozni a ponyvaanyag valódi viselkedését. Így például nem tudja követni a szabásmintával összefüggésben lévő szálirány-függő rugalmassági modulust vagy a nyírási merevséget.

MEMBRÁNMODELL DINAMIKUS RELAXÁCIÓVAL

A dinamikus relaxációval meghatározott membránmodell bizonyos tekintetben kedvezőbb a merőleges rúdhálónál (Hincz, Gáspár [8, 9]). Előnyei a következők: a rendszer összeállítása hasonlóan az előzőhöz a peremek és a közbenső megtámasztások meghatározásával kezdődik, ahol ugyancsak lehetőség van merev megtámasztásokra és peremkábelekre (11. ábra). A felvett hálózat az előirányzott szabásminta vonalainak a vízszintes síkra vett vetülete. A végeelem hálózat sűrűsége



11. ábra. Vetületi hálózat, kezdeti alak és szabásminta

szabályozható, ami további segítség a megfelelő adatsűrűség eléréséhez a szabásminta számára (a konfiguráció felvételekor jól meg lehet becsülni a felület merekségének nagyságrendjét az egyes régiókban). A hálózat ilyen jellegű felvétele mindenképpen előnyös, hiszen, építészeti szempontból nemcsak a felület formája, hanem a szabásminta elrendezése is fontos, hiszen ez meghatározó, erős vonalként kirajzolódik a szerkezeten.

A kapott felület erőtani vizsgálata is a dinamikus relaxáció segítségével történik. Az eljárás a szabásminta ponyvaszeleteiből állítja vissza szerkezetet, a szerelési alakot. Ezért itt a rúdháló-modellel ellentétben lehetőségünk van az anyag szálirányonként eltérő tulajdonságait is figyelembe vennünk. A számítás valódi felületeket alkalmaz a valósághoz közelebb álló anyagjellemzőkkel.

ÖSSZEFOGLALÁS

Általános jellemzője az alakmeghatározási módszereknek, hogy sajátfeszültségi állapotban vizsgálják a felületet, azaz az előírt belsőerő-rendszerhez keresnek alakot. Ha az előfeszítést tekintjük kiemelt terhelésnek, akkor az ehhez tartozó optimális feszültségeloszlás esetén érhetjük el az anyag legkedvezőbb kihasználtságát. Ha az így tervezett felület képes a meteorológiai terheket is hordani, a szerkezet megfelelő.

Másik közös jellemző, hogy az alakmeghatározás közben nem veszik figyelembe az anyag ortotrop tulajdonságát. Rúdháló modell esetén természetesen adódik ez a kényszerűség. Felületelem esetén is egyszerű az oka: szabásminta nélkül nem határozhatjuk meg a szövés irányát, szabásmintát pedig csak az alak ismeretében készíthetünk.

A felsorolt eljárások az elméleti alak meghatározását célozzák. Ez annyit jelent, hogy az előírt peremfeltételekhez és belső erőkhöz tartozó alakot adják eredményül. Azonban a korábban leírtak szerint biztosítanunk kell az előfeszítést is a felületen. Az előfeszítő erő bevitele természetesen alakváltozással jár, ami a szerkezet alakját is befolyásolja. Az előfeszítést előállíthatjuk a szabásminta zsugorításával. Ilyenkor a zsugorított felület peremekre történő „rányújtása” során áll elő a kívánt feszültség. Vagy a peremek nyújtásával, emelésével érhetjük el a kívánt mértéket. Az ezután kapott alakot nevezzük szerelési alaknak, ami tulajdonképpen a szerkezet összeállításakor kialakuló valóságos alak [8]. A különbség rendszerint kicsi, azonban nagy az elvi és gyakorlati jelentősége, hiszen lényeges tervezési, kivitelezési problémáról van szó. Itt fontos megjegyezni, hogy az anyag relaxációja miatt a szerkezet feszítését nem csak az építéskor, hanem később is el kell végezni.

IRODALOMJEGYZÉK

- [1] Barnes, M. R. (1994): Form and stress engineering of tension structures. *Structural Engineering Review* Vol. 6, 175–202.
- [2] Csonka P. (1981): *Héjszerkezetek*. Akadémiai Kiadó, Budapest.
- [3] Galaskó Gy. (1997): *Ponyvaszerkezetek tervezésének néhány kérdése*. PhD értekezés, Budapest.
- [4] Galaskó, Gy., Gáspár, Zs., Nouri-Baranger, T., Leon, J. C., Trompette, P., Veron, P. (1996): Comparison of tent structures calculation in Hungary and France. *Acta Technica Hung.* 107 (1–2), 27–36.
- [5] Gosling, P. D., Lewis, W. J. (1996): Optimal structural membranes-I. Formulation of a curved quadrilateral element for surface definition. *Computers and Structures* 61, 871–883.
- [6] Gosling, P. D., Lewis, W. J. (1996): Optimal structural membranes-II. Form-finding of prestressed membranes using a curved quadrilateral finite element for surface definition. *Computers and Structures* 61, 885–895.
- [7] Hincz K., Galaskó Gy. (2001): Feszített ponyvaszerkezetek szabásmintáinak összehasonlító elemzése. *Építés-Építészettudomány* XXX (1–2), 159–171.
- [8] Hincz K., Gáspár Zs. (1998): Ponyvaszerkezetek szerelési alakjának meghatározása, *Építés-Építészettudomány* XXVII (1–2), 41–67.
- [9] Hincz K., Gáspár Zs. (1999): The effect of the approximations used during generation of membrane cutting pattern. *Archives of Civ. Eng.* 45 (2), 221–230.
- [10] Kollár L. (2000): *Mérnöki építmények és szerkezetek tervezése*. Akadémiai Kiadó, Budapest.
- [11] Kollár L. (1987): *Ponyvaszerkezetek*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest.
- [12] Linkwitz, K. (1999): About formfinding of double curved structures. *Engineering Structures* 21, 709–718.
- [13] Maurin, B., Motro, R. (1997): Density methods and minimal forms computation. *Proceedings of the IASS Structural Morphology Colloquium*, Nottingham, 225–232.
- [14] Maurin, B., Motro, R. (1998): The surface density method as a form-finding tool for tensile structures. *Engineering Structures* 20, 712–719.
- [15] Maurin, B., Motro, R. (2001): Investigation of minimal forms with conjugate gradient method. *Int. J. of Solids and Struct.* 38, 2387–2399.
- [16] Pálfalvi, D., Hegedűs, I. (1998): On the statical problems for determination of the shape of prestressed tents. *Periodica Politechnica Ser. Civ. Eng.* 42 (2), 163–169.
- [17] Pelikán J. (1959): *Hártyaszerkezetek*. Felsőoktatási Jegyzetellátó Vállalat, Budapest.
- [18] Pelikán J. (1968): *Szerkezettervezés*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest.
- [19] Sheck, H. J. (1974): The force density method for form finding and computation of the general networks. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 3, 115–133.
- [20] Szabó J., Kollár L. (1974): *Függőtetők számítása*. Műszaki Kiadó, Budapest.
- [21] Szabó J., Roller B. (1971): *Rúdszerkezetek számítása*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest.
- [22] Tibert, A. G., Pellegrino, S. (2000): Review of Form-Finding Methods for Tensegrity Structures. www-civ.eng.camb.ac.uk
- [23] Drew P. (1979): *Forma és szerkezet Frei Otto alkotásaiban*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest.
- [24] Szabó J., Gáspár Zs. (1974): Peremkábelekre feszített derékszögű kötélháló számítása. *Műszaki Tudomány* 48, 283–302.
- [25] Bletzinger, K. U., Ramm, E. (2001): Structural optimization and form finding of light weight structures. *Computers and Structures* 79, 2053–2062.
- [26] Bonet, J., Mahaney, J. (2001): Form finding of membrane structures by the updated reference method with minimum mesh distortion. *Int. J. of Solids and Structures* 38, 5469–5480.

FORM-FINDING METHODS FOR TENT STRUCTURES

Summary

The paper is about the form-finding methods of tent structures. The main goal is to show why special shape is needed for tent structures. A short description is given about the most frequently used form finding methods. Only the main stages of the algorithms are given. At the end of the paper two structural design methods developed in Hungary are discripted.

Keywords: tent structures, form-finding, optimal shape

