

A T-038072 tematikus OTKA pályázat zárójelentése

Témavezető neve: DR. PÁLES ZSOLT, az MTA doktora, egyetemi tanár

Téma címe: *Nemsima feltételes extrémumproblémák*

Kutatás időtartama: 2002.01.01–2005.12.31

A pályázat támogatásával 30 publikáció készült el, illetve lett közlésre benyújtva, vagy elfogadva; ezekből a publikációkból pedig 16 tudományos előadást tartottam nemzetközi, illetve hazai konferenciákon. A kutatási témában 2002–2005-ban végzett munkámat négy főbb témakör köré csoportosítva foglalom össze.

I. Vera Zeidannal (aki a Michigan State University professzora) együttműködve hét dolgozat készült el. Három (2002-ben, 2003-ban, illetve 2004-ben) megjelent dolgozatban ([27], [28], [30]) halmazértékű (alulról félig folytonos állapotter és mérhető irányítási) korlátozásokat tartalmazó szélsőérték, illetve optimális irányítási feladatokban az ún. másodrendű megengedett variációk pontos meghatározásával olyan másodrendű szükséges feltételeket sikerült megadni, amelyek a megszokott és sejthető tagokon kívül egy olyan tagot is tartalmaznak, amely az úgynevezett burkoló effektusnak köszönhetően az állapotterrel kapcsolatos korlátozások kapcsán lép fel. Az említett három dolgozatban a gyenge, illetve erős optimalitás ilyen feltételeit adtuk meg a korlátozások különféle kombinációi mellett.

A negyedik 2004-ben megjelent közös dolgozatunkban ([29]) a kritikus irányok (azaz az olyan érintő irányok, amelyek esetén a másodrendű megengedett variációk halmaza nem üres) effektív jellemzését adtuk meg absztrakt normált térbeli zárt konvex halmazok esetén. Szintén sikerült absztrakt esetben formulát találni a másodrendű megengedett variációk halmazának a tartó funkcionáljára is. Az ötödik, közlésre benyújtott ([25]) dolgozatban a korábbi eredmények betetőzéseként, az ún. Dubovickij–Miljutyin-féle időtranszformációs trükk segítségével az állapotterre vonatkozó egyenlőtlenségi, az irányítási függvényre pedig egyenlőségi és egyenlőtlenségi korlátozásokat tartalmazó optimális irányítási feladatokra sikerült a Pontrjagin-féle maximum-elvet kiterjeszteni és ezt másodrendű szükséges feltételekkel is kiegészíteni.

Közös kutatásaink egy mostanában kibontakozó területe a Clarke-féle általánosított Jacobi-mátrix (amely a lokálisan Lipschitz véges dimenziós normált terek között ható függvényekhez társít egy halmazértékű derivált fogalmat), amelyet végtelen dimenziós normált tereken értelmezett és véges dimenziós értékészletű lokálisan Lipschitz függvényekre sikerült általánosítani a [26] (már közlésre elfogadott) dolgozatunkban. Az általánosítás még mindig a lokálisan Lipschitz függvények (Rademachertól eredő) majdnem mindenütt differenciálási tételén alapszik, mivel a függvény véges dimenziós affin alterekre vett megszorításainak Clarke-féle Jacobi-mátrixai segítségével értelmezi az általánosított halmazértékű deriváltat. Ennek az új fogalomnak a karakterizációját és a kalkulus szabályok egy teljes spektrumát (összeg szabály, lánc szabály, részenként sima függvények differenciálása, stb.) sikerült kidolgozni a [24] dolgozatban. Bebizonyítottuk, hogy ez a derivált fogalom a legszűkebb szekvenciálisan felülről folytonos halmazértékű szigorú Hadamard-féle derivált. A bizonyítások háttérében

M. Fabian és D. Preiss egy eredményének az általánosítására volt szükség. Ennek felhasználásával kimutattuk, hogy az általánosított derivált véges dimenziós alterekre való leszűkítése és az ugyanarra az altérre nézve képzett általánosított derivált között egyenlőség áll fenn. A következő természetes kérdés az eddigi fogalmak és eredményeink kiterjesztése a végtelen dimenziós értékkészlet esetére is. A Hilbert-terek esetére ez valószínűleg megtehető, de Radon–Nikodým tulajdonságú, vagy még általánosabb Banach-terek esetén a tér geometriai struktúrája fontos szerepet játszhat, ezért ezek a vizsgálatok még nem befejezettek és további kutatások ígéretes kiindulópontjai lehetnek.

Két további dolgozatomban ([20], [21]) a Lagrange-féle multiplikátor-elvet terjesztettem ki olyan feltételes szélsőérték problémákra, amelyek nemsima skalár egyenlőtlenségi és nemsima Banach-térbeli értékű egyenlőségi korlátozásokat tartalmaznak. A második dolgozat ún. absztrakt irányítási feladatokra vonatkozik, vagyis olyan problémákra, ahol változók két csoportba oszthatók: az egyik csoport szerint Lipschitz folytonosság, a másik csoport szerint pedig egy konvexitási feltétel teljesül. Az optimumnak az ilyen problémákra nyert első- és magasabb-rendű szükséges feltétele minden szempontból általánosítja A. Ioffénak és V. Tyihomírovnak egy klasszikus eredményét, amely a Lagrange-elv és a Pontrjagin-féle maximum-elv egy közös általánosítása. Ezek az eredmények elsősorban a konkrét — közönséges és parciális differenciálegyenletekkel vezérelt, nemsima adatokat tartalmazó — optimális irányítási problémákra alkalmazhatók sikeresen.

II. A másik vizsgált témakörben a konvexitás különböző általánosításait, ezek jellemzését, továbbá konvex függvények perturbációs tulajdonságait, stabilitását vizsgáltam. Régóta ismert (D. Hyers-től és S. Ulam-tól származó) eredmény, hogy egy konvex függvénynek korlátos függvénnel való perturbációja a konvexitás milyen módosított formájával jellemezhető, illetve, hogy ilyenkor mi mondható a perturbált konvex függvény szubgradienséről. A 2003-ban megjelent [19] dolgozatomban a konvex függvények olyan perturbációival foglalkoztam, amelyek előállnak egy korlátos és egy (első rendben) Lipschitz-perturbáció összegeként. Sikertült többféle jellemzését megtalálni az ilyen függvényeknek, de egyelőre csak a valós változós esetben. A Jensen-konvex és t -konvex függvények perturbációinak vizsgálatát Házy Attilával közös 2004-ben megjelent [11] és 2005-ben megjelenő [12] dolgozatainkban végeztük el. Az eredmények egy meglepő vonása az ún. Tagaki-féle folytonos, de seholsem differenciálható függvénynek a felbukkanása, ami ezeknek a függvényeknek az elméletét is gazdagítja. (Boros Zoltán, egy sejtésemet igazolva, megmutatta, hogy a Tagaki-függvény kielégíti a Jensen-egyenlőtlenség egy perturbált alakját, azaz, hogy egy bizonyos konvexitási tulajdonsággal rendelkezik.) További érdekesnek mutakozó kérdés a nem elsőrendű Lipschitz-perturbációk vizsgálata és az eddigi eredményeknek a vektorváltozós függvények esetére vonatkozó kiterjesztése. A monoton függvények Lipschitz-perturbációt jellemeztük a Makó Zitával közös [16] dolgozatunkban.

A [3], [4], illetve [5] — Bessenyei Mihállyal közösen írt — dolgozatokban az ún. Csebisev-rendszerekre nézve első-, valamint magasabb rendben konvex függvények konvexitásával foglalkoztunk és kiterjesztettük a klasszikus esetből ismert Hermite–Hadamard-egyenlőtlenséget ilyen rendszerekre. A különböző szimmetria tulajdonságokkal rendelkező függvényekre vonatkozó Hermite–Hadamard-típusú egyenlőtlenséget találtunk a Czinder Péterrel közös [7] dolgozatban, amelyről kiderült, hogy a Gini és Stolarsky közepek összehasonlítási tételének bizonyításában is jelentős szerepet játszik ([8]). A Lars-Erik Perssonnal közös 2004-ben megjelent [22]

dolgozatomban a Hardy–Carleman–Knopp-féle egyenlőtlenségnek egy Gini-közepekre vonatkozó kiterjesztését adtuk. A Carleman-egyenlőtlenségnek egy kompakt intervallumokra való általánosítását találtuk [15]-ben. Az optimális konstans ebben az esetben élesen kisebbnek adódik, mint a klasszikus esetben.

A Jensen-, Wright- és t -konvexitás megfelelően értelmezett másodrendű deriváltakkal történő jellemzését adtuk meg a Gilányi Attilával, illetve Kazimierz Nikodemmel közös 2002-ben és 2004-ben megjelent [10], illetve [17] dolgozatokban. [9]-ban kiterjesztettük az ún. Bernstein-Doetsch-féle tételt kvázikonvex függvényekre. A konvexitás halmazértékű általánosításait vizsgáltuk a Mirosław Adamekkel és Kazimierz Nikodemmel közös [1] dolgozatunkban. Boros Zoltánnal egy új szubdifferenciálfogalmat, a Q -szubdifferenciál fogalmát vezettük be [6], amely a konvex analízisből ismert standard szubdifferenciál fogalomnak az általánosítása, ennek elemei azonban nem lineáris funkcionálok, hanem additív függvények. Ennek az új fogalomnak a segítségével a Jensen-konvexitást a Q -szubdifferenciál monotonitásával jellemeztük. Székelyhidi Lászlóval a klasszikus szuperadditív–szubadditív függvénytérpárokra vonatkozó szendvics-tételt általánosítottuk közelítőleg szuperadditív–szubadditív függvénytérpárokra [23]-ben. A Beckenbach által bevezetett konvexitás-fogalomra vonatkozó szendvics tételeket nyertünk Kazimierz Nikodemmel a közlésre elfogadott [18] dolgozatban.

III. A harmadik vizsgált témakörhöz egy dolgozat ([14]) (amelyet a kolozsvári Babes-Bolyai Egyetem két professzorával Kolumbán Józseffel és Kassay Gáborral együttműködve készítettem) tartozik, amelyben Minty és Stampacchia típusú variációs egyenletrendszerek faktorizációjának a kérdését vizsgáltuk, azaz azt, hogy a rendszert alkotó egyenletek önállóan való megoldhatóságából mikor következik az összetett rendszer megoldhatósága is.

IV. A pályázat támogatásával és Járai Antal, Maksa Gyula társzerzőkkel készült [13] dolgozatban az ún. Cauchy-differenciák és a kváziösszegek egyenlőségét vizsgáltuk és a teljes leírást a lehető legtermészetesebb, leggyengébb regularitási feltételek mellett megadtuk. Ez a dolgozat lényegében az összes (általunk) ismert lényeges ún. regularitásjavító módszert alkalmazza az ismeretlen függvények többszöri differenciálhatóságának az igazolására, aminek felhasználásával az ismeretlen függvényekre közönséges differenciálegyenletrendszerek vezethetők le, melyeket megoldva az eredeti egyenlet 9 több paraméterrel jellemezhető megoldáscsaládja kapható meg.

Debrecen, 2006. február 10.

(Témavezető aláírása)

A KUTATÁSI TÉMÁBAN A JELEN OTKA PÁLYÁZAT TÁMOGATÁSÁVAL
MEGJELENT ÉS KÖZLÉSRE ELFOGADOTT PUBLIKÁCIÓK LISTÁJA

- [1] M. Adamek, K. Nikodem, and Zs. Páles. On (K, λ) -convex set-valued maps. *Rad. Mat.*, 11(2):183–191, 2002/03.
- [2] M. Bessenyei and Zs. Páles. Higher-order generalizations of Hadamard’s inequality. *Publ. Math. Debrecen*, 61(3-4):623–643, 2002.
- [3] M. Bessenyei and Zs. Páles. Hadamard-type inequalities for generalized convex functions. *Math. Inequal. Appl.*, 6(3):379–392, 2003.
- [4] M. Bessenyei and Zs. Páles. On generalized higher-order convexity and Hermite–Hadamard-type inequalities. *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 70(1-2):13–24, 2004.
- [5] M. Bessenyei and Zs. Páles. Hermite–Hadamard inequalities for generalized convex functions. *Aequationes Math.*, 69(1-2):32–40, 2005.
- [6] Z. Boros and Zs. Páles. $\mathbb{Q}$ -subdifferential of Jensen-convex functions. *J. Math. Anal. Appl.*, 2006. közlésre elfogadva.
- [7] P. Czinder and Zs. Páles. An extension of the Hermite–Hadamard inequality and an application for Gini and Stolarsky means. *J. Inequal. Pure Appl. Math.*, 5(2):Article 42, pp. 8 (electronic), 2004.
- [8] P. Czinder and Zs. Páles. Local monotonicity properties of two-variable Gini means and the comparison theorem revisited. *J. Math. Anal. Appl.*, 301(2):427–438, 2005.
- [9] A. Gilányi, K. Nikodem, and Zs. Páles. Bernstein–Doetsch type results for quasiconvex functions. *Math. Inequal. Appl.*, 7(2):169–175, 2004.
- [10] A. Gilányi and Zs. Páles. On Dinghas-type derivatives and convex functions of higher order. *Real Anal. Exchange*, 27(2):485–493, 2001/2002.
- [11] A. Háy and Zs. Páles. On approximately midconvex functions. *Bull. London Math. Soc.*, 36(3):339–350, 2004.
- [12] A. Háy and Zs. Páles. On approximately t -convex functions. *Publ. Math. Debrecen*, 66(3-4):489–501, 2005. Dedicated to the 75th birthday of Professor Heinz König.
- [13] A. Járαι, Gy. Maksa, and Zs. Páles. On Cauchy-differences that are also quasiums. *Publ. Math. Debrecen*, 65(3-4):381–398, 2004. Dedicated to the memory of Professors Béla Brindza and Jenő Erdős.
- [14] G. Kassay, J. Kolumbán, and Zs. Páles. Factorization of Minty and Stampacchia variational inequality systems. *European J. Oper. Res.*, 143(2):377–389, 2002. Interior point methods (Budapest, 2000).
- [15] L. Larsson, Zs. Páles, and L.-E. Persson. Carlson type inequalities for finite sums and integrals on bounded intervals. *Bull. Austr. Math. Soc.*, 71(2):275–284, 2005.
- [16] Z. Makó and Zs. Páles. On Lipschitz perturbation of monotonic functions. *Acta Math. Hungar.* közlésre elfogadva.
- [17] K. Nikodem and Zs. Páles. On t -convex functions. *Real Anal. Exchange*, 29(1):219–228, 2003/2004.
- [18] K. Nikodem and Zs. Páles. Generalized convexity and separation theorems. *J. Conv. Anal.*, 2006. közlésre elfogadva.
- [19] Zs. Páles. On approximately convex functions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 131(1):243–252, 2003.
- [20] Zs. Páles. Optimum problems with nonsmooth equality constraints. *Nonlinear Anal.*, 63(5-7):e2575–e2581, 2005.
- [21] Zs. Páles. Abstract control problems with nonsmooth data. In A. Seeger, editor, *Recent Advances in Optimization. Proceedings of the 12th French–German–Spanish Conference on Optimization, Avignon (2004)*, volume 563 of *Lectures Notes in Economics and Mathematical Systems*, pages 205–216, Berlin–Heidelberg, 2006. Springer.
- [22] Zs. Páles and L.-E. Persson. Hardy type inequalities for means. *Bull. Austr. Math. Soc.*, 70(3):521–528, 2004.
- [23] Zs. Páles and L. Székelyhidi. On approximate sandwich and decomposition theorems. *Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Comput.*, 23:59–70, 2004.
- [24] Zs. Páles and V. Zeidan. Calculus rules for the infinite dimensional Clarke generalized Jacobian. *J. London Math. Soc.* közlésre benyújtva.
- [25] Zs. Páles and V. Zeidan. First and second-order optimality conditions for strong local minimum in control problems with pure state constraints. *Nonlinear Anal.* közlésre benyújtva.

- [26] Zs. Páles and V. Zeidan. Infinite dimensional Clarke generalized Jacobian. *J. Convex Anal.* közlésre elfogadva.
- [27] Zs. Páles and V. Zeidan. Strong local optimality conditions for control problems with mixed state-control constraints. In *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control*, pages 4738–4743, 2002.
- [28] Zs. Páles and V. Zeidan. Optimal control problems with set-valued control and state constraints. *SIAM J. Optim.*, 14:334–358, 2003.
- [29] Zs. Páles and V. Zeidan. Critical and critical tangent cones in optimization problems. *Set-Valued Anal.*, 12(1-2):241–258, 2004.
- [30] Zs. Páles and V. Zeidan. Strong local optimality conditions for state constrained control problems. *J. Global Optim.*, 28(3-4):363–377, 2004.

A KUTATÁSI TÉMÁBAN TARTOTT ELŐADÁSOK LISTÁJA

- [1] Zs. Páles, *Localizable convexity properties of real functions*, 8th International Conference on Applied Mathematics, Computer Science, and Mechanics (Theodor Anghelutã Seminar), Kolozsvár–Kisbánya, Románia, 2002, május 30–június 2.
- [2] Zs. Páles, *Localizable convexity properties of real functions*, 17th Summer Conference on Real Function Theory, Stara Lesna, Szlovákia, 2002, szeptember 1–6.
- [3] Zs. Páles, *Solution of two variable functional inequalities*, 3rd Katowice–Debrecen Winter Seminar on Functional Equations and Inequalities, Będlewo, Lengyelország, 2003, január 29–február 1.
- [4] Zs. Páles, *Approximatively convex functions and their subdifferentials*, Spring School on Variational Analysis, Paseky, Csehország, 2003, április 27–május 3.
- [5] Zs. Páles, *Aggregációelmélet*, Magyar Tudományos Akadémia, Budapest, 2003, május 13.
- [6] Zs. Páles, *On segment preserving maps*, 41st International Symposium on Functional Equations, Noszvaj, 2003, június 8–15.
- [7] Zs. Páles, *On higher-order convexity and Wright-convexity*, 9th International Conference on Functional Equations and Inequalities, Muszyna Złockie, Lengyelország, 2003, szeptember 7–13.
- [8] Zs. Páles. *Feltételes szélsőérték problémák első és magasabb rendű szükséges feltételei*. Plenáris előadás, XXVI. Magyar Operáció Kutatási Konferencia, Győr, 2004. május 26–28.
- [9] Zs. Páles. *Extremum problems with non-smooth equality constraints*. 5th Joint Conference on Mathematics and Computer Science, Debrecen, 2004. június 9–12.
- [10] Zs. Páles. *Optimum problems with nonsmooth equality constraints*. 4th World Congress of Nonlinear Analysts, Orlando, Florida, USA, 2004. június 29–július 6.
- [11] Zs. Páles. *On abstract control problems with non-smooth data*. French–German–Spanish Conference on Optimization, Avignon, Franciaország, 2004. szeptember 19–25.
- [12] Zs. Páles. *Bernstein–Doetsch theorem revisited*. 5th Katowice–Debrecen Winter Seminar on Functional Equations and Inequalities, Będlewo, Lengyelország, 2005. február 2–5.
- [13] Zs. Páles. *Hardy-típusú egyenlőtlenségek általános közepekkel*. Leindler–Tandori konferencia, Szeged, 2005. május 10–11.
- [14] Zs. Páles. *Characterization of segment and convexity preserving maps*. Fejér–Riesz Konferencia, Eger, 2005. június 8–13.
- [15] Zs. Páles. *Characterization of segment and convexity preserving maps*. 8th Symposium on Generalized Convexity and Generalized Monotonicity, Varese, Olaszország, 2005. június 4–8.
- [16] Zs. Páles. *Infinite dimensional Clarke generalized Jacobian*. 7th Midwest Optimization Seminar, Western Michigan University, Kalamazoo, USA, 2005. október 15.