

# A FA SZÁLIRÁNYTÓL FÜGGŐ SZILÁRDSÁGI JELLEMZŐINEK ÖSSZEHASONLÍTÁSA AZ EUROCODE 5 ÉS A KOMPOZIT TÖRÉSI ELMÉLETEK ALAPJÁN

BÓDI ISTVÁN\* – ERDŐDI LÁSZLÓ\*\*

## 1. BEVEZETÉS

A faszervezetek szilárdsági méretezésével foglalkozó Európai Szabvány MSZ ENV 1995-1-1 Eurocode 5 (a továbbiakban EC5), összetett feszültségállapot esetében nem ad megfelelő útmutatást a faanyagok szilárdsági tönkremeneteléről. A mérnöki gyakorlatban azonban, a gyakori egyszerűsítések ellenére is, gyakran találkozhatunk olyan esetekkel, ahol a tönkremenetel összetett feszültségállapotban következik be.

Ez nem azt jelenti, hogy egyik ilyen esetben sem ismerjük a tönkremenetelhez tartozó feszültségeket. Az 1995-ben megjelent Eurocode 5 a lehetséges fakapcsolatok sokféle esetét külön fejezetekben tárgyalja. Ezáltal az összetett feszültségállapot okozta lokális tönkremeneteleket ezeknél a fakapcsolatoknál a szabvány szükségszerűen figyelembe veszi, hiszen az ott leírt képletek kísérleti eredményeken alapulnak. Mégis olyan speciális esetekben, melyeket a szabvány külön nem vizsgál és a feszültségállapot nem egytengelyű, nem tudjuk eldönteni, mekkora nagyságú feszültségpárok esetében következik be a tönkremenetel, hiszen nem áll rendelkezésre egy olyan összetett törési feltétel, amellyel a működő rostirányú és rostra merőleges feszültségek kölcsönhatását figyelembe vehetnénk.

Ebben a cikkben a fa szilárdsági tönkremenetelét biaxiális törési kritériumok segítségével írjuk le, figyelembe véve a kitüntetett irányú (rostirányú, rostra merőleges) feszültségek kölcsönhatását. Megfelelő törési kritérium birtokában lehetőség nyílik a nem ismert esetek (feszültségpárok) kiszámításán túl, a kísérleti eredményekkel alátámasztott, már ismert alapesetek eredményeivel való összehasonlításra is.

\* Okl. építőmérnök, PhD, egyetemi docens. Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Hidak és Szerkezetek Tanszéke. 1111 Budapest, Bertalan Lajos utca 2. Z épület. Tel.: 463 1726; fax: 463 1784.

\*\* Okl. építőmérnök, doktorandusz. Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Hidak és Szerkezetek Tanszéke. 1111 Budapest, Bertalan Lajos utca 2. Z épület. Tel.: 463 1724; fax: 463 1784.

## 2. SZILÁRDSÁGI PARAMÉTEREK ÉS SZILÁRDSÁGI ELLENŐRZÉS AZ EC5 ÉS A KOMPOZIT BIAXIÁLIS KRITÉRIUMOK SZERINT

A kompozitokkal való összehasonlítás alapját az a hasonlóság képezi, amely mind a szerkezeti felépítésben, mind a tulajdonságokban egyaránt jelentkezik. A cellulóz anyagú rostokat tekinthetjük a kompozit anyagoknál szereplő szálnak, s az ezt körülvevő merevítő közeg – a lignin – pedig lehet a kompozitoknál jól ismert mátrix (ágyazóanyag). A rostok nem tökéletes párhuzamosságától s az anyaghibáktól eltekintve, faanyagunkat egyirányban szálerősített transzotróp tulajdonságú kompozit anyagként fogjuk kezelni. A transzotróp anyagok szilárdsági jellemzésére a kompozit elméletek és az EC5 egyaránt 5 független szilárdsági jellemzőt definiál, melyek az Eurocode jelöléseivel a következők:

- $f_{t,0,k}$ : szálirányú húzószilárdság,
- $f_{c,0,k}$ : szálirányú nyomószilárdság,
- $f_{t,90,k}$ : szálra merőleges húzószilárdság,
- $f_{c,90,k}$ : szálra merőleges nyomószilárdság,
- $f_{v,k}$ : szállal párhuzamos nyírószilárdság.

Az ezektől eltérő szilárdsági jellemzők meghatározásánál alapvetően más módon járunk el, ennél fogva a szilárdsági ellenőrzés is teljesen másképp zajlik.

Bár az EC5-ben csak a rostirányú és a rostra merőleges szilárdsági értékek adóttak, a szabvány mégis lehetőséget ad tetszőleges  $\alpha$  irányban a szilárdság jellemző értékeinek meghatározására. (Igaz ugyan, hogy ezek a szilárdsági jellemzők nem függetlenek a fent megnevezett 5 szilárdsági értéktől.) Például az  $\alpha$  irányhoz tartozó nyomószilárdságot, s az ehhez tartozó szilárdsági ellenőrzést az Eurocode 5 ismert képletei alapján számíthatjuk:

$$f_{c,\alpha,k} = \frac{f_{c,0,k} \cdot f_{c,90,k}}{f_{c,0,k} \cdot \sin^2 \alpha + f_{c,90,k} \cdot \cos^2 \alpha} \quad (1)$$

$$\sigma_{c,\alpha,d} \leq \frac{f_{c,\alpha,k}}{\gamma} \quad (2)$$

Ezzel szemben a kompozit anyagok szilárdsági ellenőrzése teljesen másképp történik. Valójában itt is csak az az 5 db szilárdsági jellemző áll rendelkezésünkre, ami az EC5 táblázataiban adott, de a kompozit elméletek nem definiálnak ezenkívül szilárdsági jellemzőket, mint azt az (1) képlet tette a faszilárdsági szabványok ese-

tében. Egy nem-rostirányú, vagy rostirányra nem-merőleges feszültségről úgy tudjuk eldönteni, hogy tönkremenetelt okoz-e, hogy a rostirányú koordináta-rendszerbe transzformáljuk őket. A kapott feszültségeket behelyettesítve a tönkremeneteli kritériumokba, a szilárdsági ellenőrzés elvégezhető.

Ilyen módon eljárva viszont nincs szükségünk az (1)-es összefüggésre, mivel e nélkül is meg tudjuk adni, hogy mikor következik be a tönkremenetel a rosttal tet-szőleges irányt bezáró feszültség esetén is. A feszültségek rostirányú koordináta-rendszerbe transzformálásához viszont szükségünk van egy transzformáló mátrix megadására. Hason a rostokkal  $\alpha$  szöget bezárva egy  $\sigma_\alpha$  nagyságú feszültség. Legyen a rostirányú feszültség  $\sigma_1$ , a rostra merőleges  $\sigma_2$ , a nyírófeszültség pedig  $\tau_{12}$ . A forgatómátrix segítségével ezek a feszültségek így fejezhetők ki:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2cs \\ s^2 & c^2 & -2cs \\ -cs & cs & -s^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_\alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.a-c.)$$

Ahol

$$c = \cos\alpha,$$

$$s = \sin\alpha.$$

Elvégezve a mátrixszorzást és behelyettesítve a kapott kitüntetett irányú (rostirányú és rostirányra merőleges) feszültségeket a biaxiális kritériumok törési feltételeibe, a szilárdsági ellenőrzés elvégezhető a következő fejezetben ismertetésre kerülő módon.

### 3. BIAXIÁLIS KRITÉRIUMOK ALKALMAZÁSA FAANYAGOK SZILÁRDSÁGI JELLEMZŐIVEL

Az előzőekben bemutattuk a kétféle eljárás: az EC5 szerinti és a kompozit biaxiális kritérium szerinti szilárdsági ellenőrzés közötti különbséget. Látható volt, hogy a szilárdsági ellenőrzés teljesen másképp történik a két esetben, de a szükséges szilárdsági paraméterek megegyeztek. Ez tulajdonképpen azt jelenti, hogy a biaxiális törési kritériumok meghatározásához be kell helyettesíteni a szilárdsági értékek helyére az EC5 táblázatában szereplő szilárdsági paramétereket.

A probléma azonban mégsem ilyen egyszerű. Egyrészt azért nem, mert nem ismeretes hogy a kapott törési kritériumok mennyire megfelelőek összetett feszült-

ségállapotban, másrészt viszont a bonyolultabb törési kritériumok leírásához nem elegendő az EC5 táblázatában szereplő 5 szilárdsági jellemző. A kritérium ellenőrzése úgy lenne lehetséges, ha tetszőleges feszültségállapotban mérni tudnánk a töréshez tartozó feszültségpárokat. Mivel ez nehezen megvalósítható, illetve nagyon költséges lenne, alternatív megoldás lehet a kompozit anyagok esetében is gyakran használatos módszer, nevezetesen: olyan egytengelyű feszültségállapotban mérik a törési feszültséget, amely nem kitüntetett irányban működik (rosttal szöget zár be). Ekkor, mint azt a (3) képlet igen jól szemlélteti, az  $\alpha$  irányban lévő egytengelyű feszültségállapot rostirányban összetett feszültségállapotot eredményez. Ez a megoldás azért is nagyon kedvező számunkra, mert nem kell megmérnünk különböző irányok egytengelyű törési feszültségét, mivel az Eurocode-ban a nyomószilárdság és a húzószilárdság diagramok révén ezek az értékek adóttak.

A következőkben azt fogjuk megvizsgálni, hogy az egyes biaxiális törési kritériumok hogyan adják vissza az Eurocode 5 (1) szerinti húzó- és nyomószilárdság diagramokat. Mivel ezeket a diagramokat kísérleti mérések alapján meghatározták, a hasonlóság alapján próbáljuk eldönteni, melyik biaxiális kritérium a legmegfelelőbb. Azoknál a kritériumoknál, ahol az EC5 táblázatában szereplő 5 szilárdsági jellemző nem elegendő, a hiányzó paramétereket az említett húzó- és nyomószilárdság diagramok alapján fogjuk megválasztani.

### 3.1. A MAXIMÁLIS FESZÜLTSEGEK KRITÉRIUMA

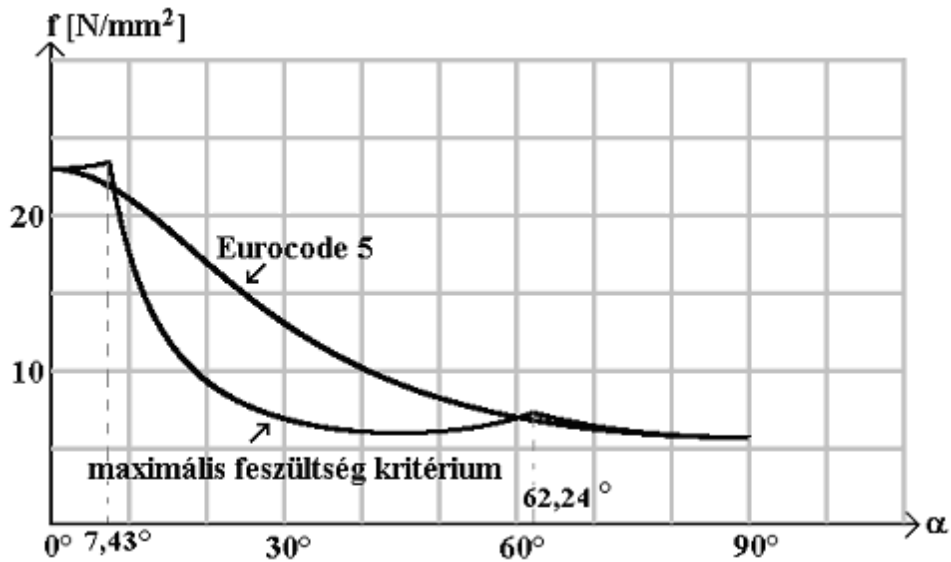
A legegyszerűbb kritérium (tulajdonképpen ez nem is biaxiális) a *maximális feszültségek kritériuma*. Ennél a kritériumnál a kitüntetett irányú feszültségek (rostirányú, rostra merőleges és nyíró) nincsenek kapcsolatban egymással, egymástól függetlenül külön feltételekkel írják le a tönkremenetelt. A maximális feszültség kritérium törési egyenletei a faanyag szilárdsági jellemzőijével a következők szerint adhatók meg:

$$\begin{aligned} \text{rostirányban:} \quad & -f_{c,0,k} < \sigma_1 < f_{t,0,k} \\ \text{rostra merőlegesen:} \quad & -f_{c,90,k} < \sigma_2 < f_{t,90,k} \\ \text{nyírásra:} \quad & \tau_{12} < f_{v,k} \end{aligned} \quad (4.a-c)$$

A maximális feszültségek kritériuma szerinti nyomó- és húzószilárdság diagram meghatározásához az szükséges, hogy a (3.a,b,c) képlet alapján a különböző  $\alpha$  irányok esetében az egytengelyű feszültség állapotot rostirányba forgassuk és a kapott feszültségeket behelyettesítve eldöntsük, melyik kritérium lesz a mértékadó.

Az  $\alpha = 0$  és az  $\alpha = 90$  fokhoz tartozó esetekben természetesen az összes biaxiális kritériummal számítva az EC5-tel megegyező értékeket kapunk, hiszen ezek a kritériumok teljesítik azt a feltételt, hogy  $\alpha = 0$ , és  $\alpha = 90$  esetében visszaadják az eredeti szilárdsági állandót. Tehát bármely biaxiális kritériummal is számolunk, a nyomószilárdság diagramunk kezdőponti értéke  $f_{c,0,k}$  végponti értéke pedig  $f_{c,90,k}$  lesz, és ugyanez érvényes a húzószilárdság diagramra is. A feladat tehát a törési kritérium diagramjának közbenső szakaszainak meghatározása. (A kapott diagramokat C30-as szilárdsági osztály esetén ismertetjük, bár a diagramok lefutása minden más esetben hasonló lenne.)

Az 1. ábrán a maximális feszültség kritérium által leírt nyomószilárdság diagramot és az összehasonlítás végett az EC5 nyomószilárdság diagramját is ábrázoltuk. A maximális feszültség kritérium görbéjében látható törések a három önálló törési kritérium határpontjain találhatók. 0-tól 7,43 fokig a rostirányú, 7,43-tól 62,24-ig a nyírási, 62,24-től 90-ig pedig a rostra merőleges kritérium lesz a mértékadó.



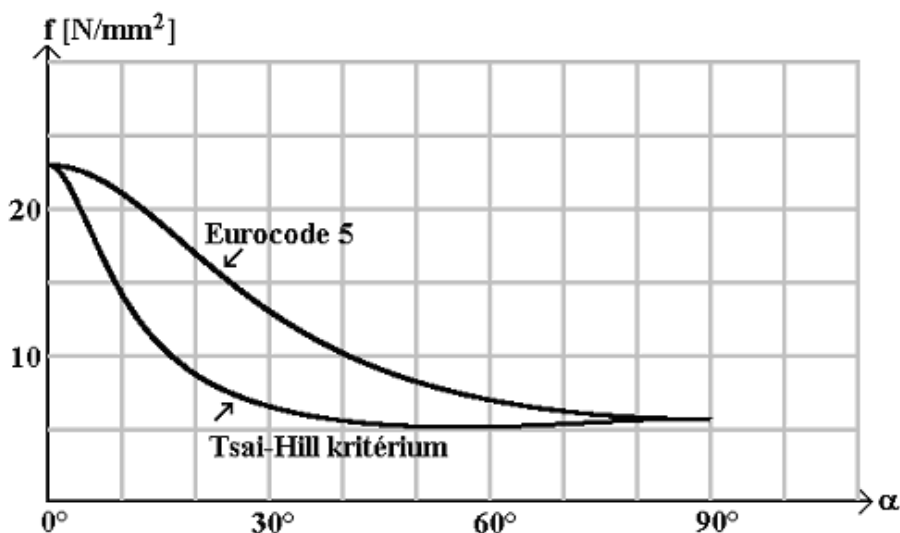
1. ábra. A maximális feszültség kritérium és az EC5 nyomószilárdság diagramja C30-as szilárdsági osztályú faanyag esetén

## 3.2. A TSAI–HILL TÖRÉSI KRITÉRIUM

A következő törési kritérium, amit vizsgálni fogunk a *Tsai–Hill kritérium*, melynek tönkremeneteli feltételét az (5) egyenlet írja le.

$$\frac{\sigma_1^2}{f_{c,0,k}^2} - \frac{\sigma_1\sigma_2}{f_{c,0,k}^2} + \frac{\sigma_2^2}{f_{c,90,k}^2} + \frac{\tau_{12}^2}{f_{vk}^2} \leq 1. \quad (5)$$

Ez a kritérium egy olyan egyenlőtlenség, amelynek bal oldalán törtek (részleges kihasználtságok) összege található. A törtek számlálójában egy-egy kitüntetett irányú feszültség négyzete, a nevezőben pedig a hozzá tartozó szilárdsági érték négyzete szerepel. Ez azt jelenti, hogy amennyiben a  $\sigma_1$  feszültség nyomás, az első tag nevezőjében az  $f_{c,0,k}$  szilárdság szerepel. (Abban az esetben viszont, ha rostirányban húzás keletkezne, a nevezőben az  $f_{t,0,k}$  érték szerepelne.) Mivel most a nyomószilárdság diagramot határozzuk meg, az (5) képlet minden szilárdsági jellemzője a nyomáshoz tartozó érték. Az (5) képletben szereplő második tag a rostirányú és a rostra merőleges tag kapcsolatát veszi figyelembe. Mivel ezen tag együtthatója nem befolyásolja a triviális tönkremeneteli módokhoz tartozó (rostirányban egytengelyű, ill. rostra merőlegesen egytengelyű) feszültségeket, egy  $p$  paramétert írhatunk a tört elé, melynek értékét  $-1$  és  $+1$  között tetszőlegesen változtathatjuk. A kritérium által leírt nyomószilárdság diagramot a 2. ábrán tüntettük fel. Az ábrán



2. ábra. A Tsai–Hill kritérium és az EC5 nyomószilárdság diagramja C30-as szilárdsági osztályú faanyag esetén

látható, hogy a Tsai–Hill kritérium által leírt diagram  $p$  paraméter értékétől független, ha az a mondottak szerint belül van a  $(-1, +1)$  tartományon. (Jelentős változás a Tsai–Hill kritérium görbájében akkor lenne tapasztalható, ha ez a  $p$  paraméter legalább 50 lenne, ebben az esetben viszont a tönkremeneteli görbére nem kapnánk a kísérleteket megközelítő eredményt.)

### 3.3. A TSAI–WU KRITÉRIUM

Nézzük meg, hogyan alakul a nyomószilárdság diagram a *Tsai–Wu kritérium* esetén. A kritérium tönkremeneteli egyenlete:

$$F_{11}\sigma_1^2 + F_{22}\sigma_2^2 + F_{66}\sigma_6^2 + F_1\sigma_1 + F_2\sigma_2 + 2F_{12}\sigma_1\sigma_2 \leq 1 \quad (6)$$

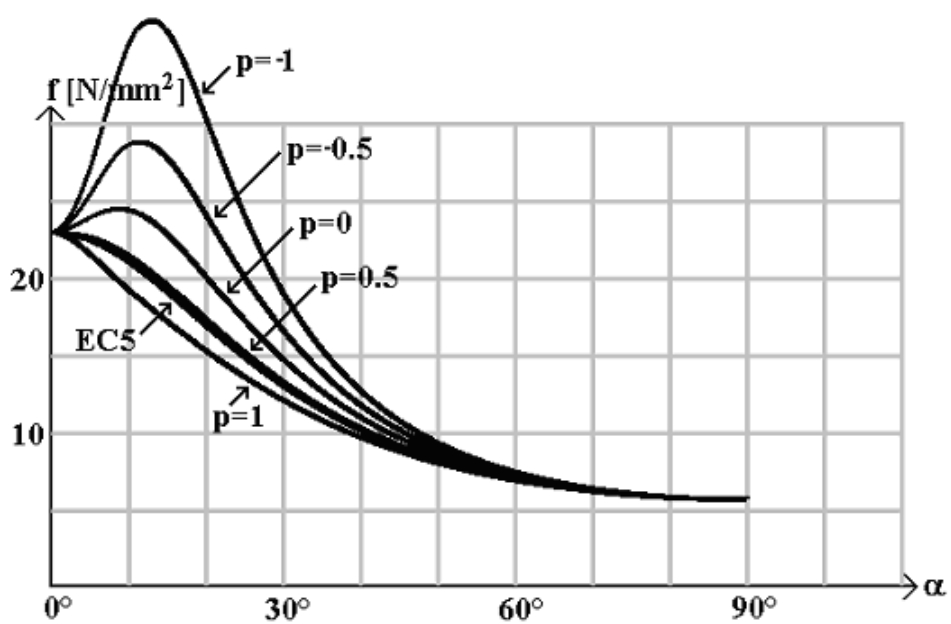
A (6) kifejezésben szereplő,  $F$ -fel jelölt értékek szilárdsági állandók:

$$F_{11} = \frac{1}{f_{t,0,k} \cdot f_{c,0,k}}; \quad F_1 = \frac{1}{f_{t,0,k}} - \frac{1}{f_{c,0,k}}; \quad F_{12} = p\sqrt{F_{11} \cdot F_{22}} \quad (7.a-d)$$

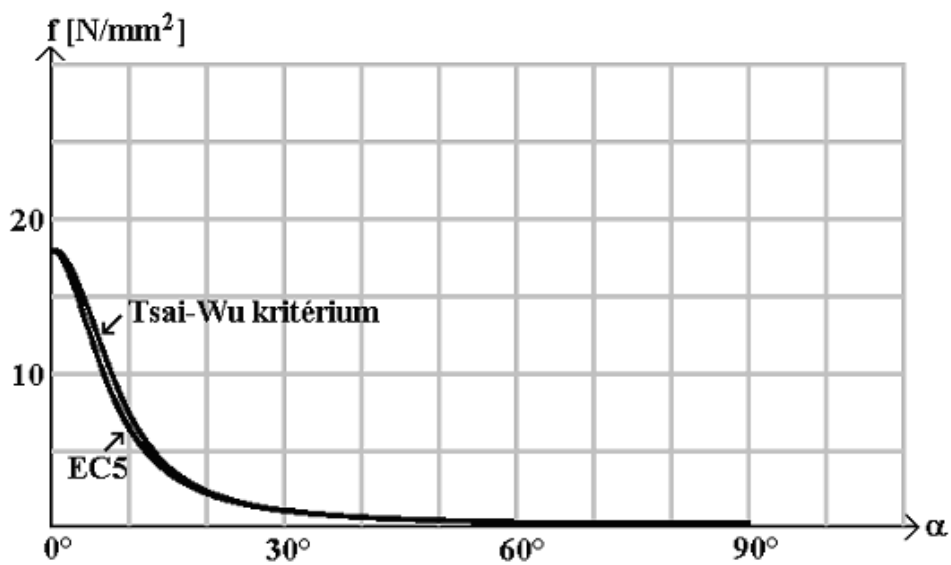
$$F_{22} = \frac{1}{f_{t,90,k} \cdot f_{c,90,k}}; \quad F_2 = \frac{1}{f_{t,90,k}} - \frac{1}{f_{t,0,k}}; \quad F_{66} = \frac{1}{f_{v,k}^2}$$

A kritériumban szereplő  $F$  anyagállandókat az 5 jellemző szilárdsági paraméter segítségével adtuk meg. Ez a megoldás azért kedvezőbb a Tsai–Hill kritériumnál, mert nem kell megvizsgálni a rostirányú és rostra merőleges feszültségek előjelét, mivel  $F$  értékei ettől függetlenek, tehát elegendő a kitüntetett irányú feszültségeket előjelhelyesen behelyettesíteni a Tsai–Wu kritériumba. (A Tsai–Hill kritérium (5) egyenlőtlensége ezzel szemben csak akkor érvényes, ha rostirányban és rostra merőlegesen is nyomás van. Abban az esetben, ha rostirányban pl. húzófeszültség működne, akkor az (5) egyenlőtlenség első tagjának nevezőjét  $f_{t,0,k}$ -ra kellene módosítani.) A rostirányú és a rostra merőleges tag együtthatóját ismét beszoroztuk egy  $p$  paraméterrel, amely  $-1$  és  $+1$  között itt is tetszőlegesen felvehető, mivel az  $F_{12}$  tag minden olyan esetben kiesik, amikor valamelyik kitüntetett irányú feszültség nulla. (A  $-1 < p < 1$  feltétel abból adódik, hogy a tönkremeneteli görbének ellipszisnek kell lennie.) A 3. ábrán a Tsai–Wu kritérium lehetséges nyomószilárdság diagramjait ábrázoltuk a  $p$  paraméter különböző eseteire.

A 3. ábrán jól látható, hogy  $p$  paraméter a Tsai–Hill kritériumnál látottakkal ellentétben itt már jelentősen befolyásolja a nyomószilárdság diagram lefutását. Bár a  $p = +0,5$  esetben az EC5 szerinti és a Tsai–Wu kritérium által adott nyomószilárdság diagram alig különbözik, mielőtt elfogadnánk a  $p = +0,5$  esetet a legjobban közelítő törési kritériumnak, vizsgáljuk meg a húzószilárdság diagramot is.



3. ábra. A Tsai–Wu kritérium és az EC5 nyomószilárdság diagramja C30-as szilárdsági osztályú faanyag esetén



4. ábra. A Tsai–Wu kritérium és az EC5 húzószilárdság diagramja C30-as szilárdsági osztályú faanyag esetén



Látható, hogy a 4. ábrán feltüntetett húzószilárdság diagramok alakját a  $p$  paraméter értéke alig befolyásolja, minden esetben az EC5 szerinti húzószilárdság diagramhoz közeli diagramot kapunk. Ez azt jelenti, hogy C30-as szilárdsági osztály esetén a nyomószilárdság diagram alapján  $p$  paraméter értékét  $-0,3$ -ra módosítva egy olyan törési kritériumhoz jutunk, amely egytengelyű húzásra és nyomásra is megfelel, függetlenül a rostok irányától. (Sajnos, nem áll rendelkezésre olyan kísérleti adat, amely alapján azt is el lehetne dönteni, hogy tetszőleges összetett feszültségállapotban is megfelelő-e ez a megfogalmazása a törési kritériumnak.) Az Eurocode 5 által definiált többi szilárdsági faanyag osztály esetén a Tsai–Wu kritérium a következő módosításokkal bizonyul legalkalmasabbnak:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{C14}: & F_{11}\sigma_1^2 + F_{22}\sigma_2^2 + F_{66}\sigma_6^2 + F_1\sigma_1 + F_2\sigma_2 + \mathbf{2,7}F_{12}\sigma_1\sigma_2 = 1 \\
 \mathbf{C16}: & F_{11}\sigma_1^2 + F_{22}\sigma_2^2 + F_{66}\sigma_6^2 + F_1\sigma_1 + F_2\sigma_2 + \mathbf{2,9}F_{12}\sigma_1\sigma_2 = 1 \\
 \mathbf{C18}: & F_{11}\sigma_1^2 + F_{22}\sigma_2^2 + F_{66}\sigma_6^2 + F_1\sigma_1 + F_2\sigma_2 + \mathbf{1,7}F_{12}\sigma_1\sigma_2 = 1 \\
 \mathbf{C22}: & F_{11}\sigma_1^2 + F_{22}\sigma_2^2 + F_{66}\sigma_6^2 + F_1\sigma_1 + F_2\sigma_2 - \mathbf{0,2}F_{12}\sigma_1\sigma_2 = 1 \\
 \mathbf{C24}: & F_{11}\sigma_1^2 + F_{22}\sigma_2^2 + F_{66}\sigma_6^2 + F_1\sigma_1 + F_2\sigma_2 + \mathbf{1,3}F_{12}\sigma_1\sigma_2 = 1 \\
 \mathbf{C27}: & F_{11}\sigma_1^2 + F_{22}\sigma_2^2 + F_{66}\sigma_6^2 + F_1\sigma_1 + F_2\sigma_2 + \mathbf{0,3}F_{12}\sigma_1\sigma_2 = 1 \\
 \mathbf{C30}: & F_{11}\sigma_1^2 + F_{22}\sigma_2^2 + F_{66}\sigma_6^2 + F_1\sigma_1 + F_2\sigma_2 - \mathbf{0,3}F_{12}\sigma_1\sigma_2 = 1 \\
 \mathbf{C35}: & F_{11}\sigma_1^2 + F_{22}\sigma_2^2 + F_{66}\sigma_6^2 + F_1\sigma_1 + F_2\sigma_2 - \mathbf{1,4}F_{12}\sigma_1\sigma_2 = 1 \\
 \mathbf{C40}: & F_{11}\sigma_1^2 + F_{22}\sigma_2^2 + F_{66}\sigma_6^2 + F_1\sigma_1 + F_2\sigma_2 - \mathbf{2,6}F_{12}\sigma_1\sigma_2 = 1
 \end{aligned} \tag{8.a-i}$$

### 3.4. ASKENÁZI KRITÉRIUM

Az utoljára vizsgált biaxiális kritérium az *Askenazi kritérium*. E tönkrementeli kritérium kifejezésében a kitüntetett irányú feszültségek a negyedik hatványon szerepelnek. A törést leíró egyenlőtlenség:

$$\begin{aligned}
 & [t_{1111} \cdot (\sigma_1)^2 + t_{2222} \cdot (\sigma_2)^2 + (t_{1122} + t_{2211}) \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 + \\
 & + (t_{1212} + t_{1221} + t_{2112} + t_{2121}) \cdot (\tau_{12})^2]^2 + \\
 & - (\sigma_1)^2 - (\sigma_2)^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2 - (\tau_{12})^2 \geq 0.
 \end{aligned} \tag{9}$$

A  $t$ -vel jelölt anyagállandók az 5 jellemző szilárdsági értékből és egy  $r_{12}$ -vel jelölt szilárdsági állandóból számíthatók. Hasonlóan a Tsai–Hill kritériumhoz, a

$t$  anyagállandók nevezőjében szereplő szilárdsági érték függ a hozzá tartozó feszültség előjelétől. A (10.a–c) képletek esetében feltételeztük, hogy mind rostirányban, mind arra merőleges irányban nyomás van. Ellenkező esetben az  $f_c$  nyomószilárdsági paraméterek helyére az  $f_t$  húzó szilárdsági értékeket kellene a képletekbe behelyettesíteni.

$$t_{1111} = \frac{1}{f_{c,0,k}}; \quad f_{2222} = \frac{1}{f_{c,90,k}}; \quad t_{1212} + t_{1221} + t_{2112} + t_{2121} = \frac{1}{f_v};$$

$$t_{1122} + t_{2211} = \frac{\sqrt{3}}{r_{12}} - \frac{1}{f_{c,0,k}} - \frac{1}{f_{c,90,k}} \quad (10.a-d)$$

Az  $r_{12}$  értékére az 1-es, 2-es főirányban egyszerre ható egyenlő nagyságú feszültséghez tartozó szilárdsági értéket kellene behelyettesíteni. Mivel erre nincsen az EC5-ben önálló szilárdsági adat, ezért ide az (1) képlet segítségével számított  $f_{c,45,k}$  értéket helyettesítjük be közelítésként. (Ezt a választást azzal indokoljuk, hogy a 45 fokos feszültség transzformálásának esetében kapunk egyenlő nagyságú feszültségeket az 1-es, 2-es főirányban, bár az így kapott feszültségek nagyságát és a 45 fokos feszültségből keletkező rostirányú nyírófeszültséget nem vettük figyelembe. Mivel a kritériumba későbbiekben bekerülő  $p$  szorzóparaméter ezt az értéket úgy is automatikusan módosítani fogja, kezdeti feltételként az  $f_{c,45,k}$  értéket elfogadhatónak tekintjük.)

A Tsai–Wu kritériumhoz hasonlóan az Askenazi kritériumban is egy  $p$  szorzótényezőt alkalmazunk a rostirányú és rostra merőleges tagok kölcsönhatásának figyelembe vételére (11). A kritérium nyomószilárdság diagramja  $p = 4,0$  esetben (11) alig különbözik az EC5 nyomószilárdság diagramjától. Mivel pedig a  $p = 4,0$  eset a húzószilárdság diagramnál is megfelelő értékeket szolgáltat, így felírhatjuk általánosan az Askenazi kritérium tönkremeneteli egyenletét C30-as szilárdsági osztály esetére:

$$[t_{1111} \cdot (\sigma_1)^2 + t_{2222} \cdot (\sigma_2)^2 + p \cdot (t_{1122} + t_{2211}) \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 +$$

$$+ (t_{1212} + t_{1221} + t_{2112} + t_{2121}) \cdot (\tau_{12})^2]^2 +$$

$$- (\sigma_1)^2 - (\sigma_2)^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2 - (\tau_{12})^2 \geq 0. \quad (11)$$

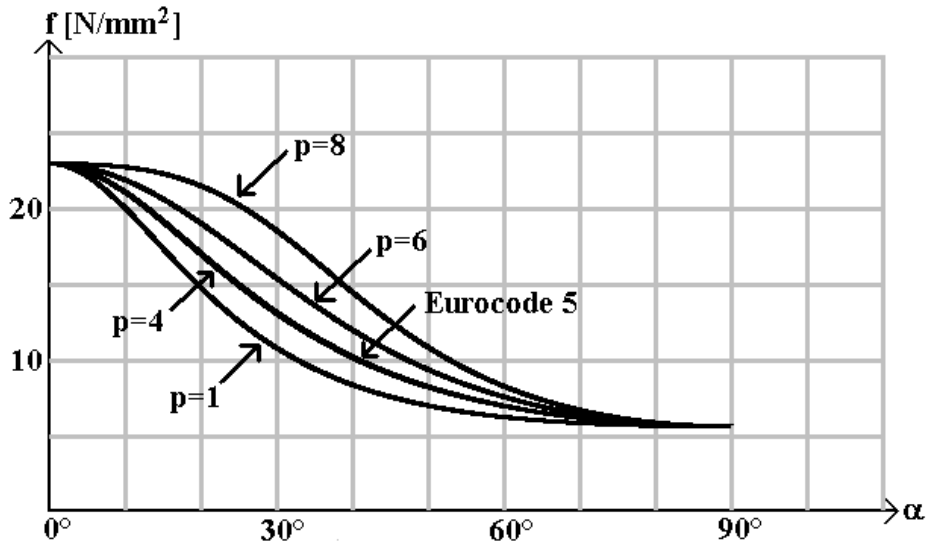
A (11) képletben szereplő  $t$  értékeket a következőképpen lehet általánosan definiálni az Eurocode 5 szilárdsági paramétereivel:

$$t_{1111} = \frac{1}{f_{t,0,k}^c}; \quad t_{2222} = \frac{1}{f_{t,90,k}^c}; \quad t_{1212} + t_{1221} + t_{2112} + t_{2121} = \frac{1}{f_{v,k}};$$

$$t_{1122} + t_{2211} = \frac{\sqrt{3}}{r_{12}} - \frac{1}{f_{t,0,k}^c} - \frac{1}{f_{t,90,k}^c}.$$

(12.a-d)

Megjegyezzük, hogy a  $p$  paraméter kritériumba kerülésével új feltételünk nem az eredetileg tervezett  $r_{12}$  feszültségi értéknél fog kielégülni egyenlő nagyságú rostirányú és rostra merőleges nyomás esetében. Mivel ez az érték feltételezés volt, ez a kismértékű módosulás nem jelent problémát, mivel elsődleges célunk az volt, hogy a kritérium megfelelő legyen tetszőleges egytengelyű húzás esetén, ez pedig a  $p$  paraméter bevezetésével most már igazodik az Eurocode 5 és ezáltal a kísérleti eredmények szerintihez. Az Askenazi kritérium nyomószilárdság diagramját az 5. ábrán ábráztuk.



5. ábra. Az Askenazi kritérium és az EC5 nyomószilárdság diagramja C30-as szilárdsági osztályú faanyag esetén

Az Eurocode 5 többi szilárdsági osztálya esetén a legjobb húzó és nyomó értékek alapján a  $p$  paraméter értékére a következők adódtak:

<b>C14</b> : 7,5	<b>C16</b> : 7,5	<b>C18</b> : 6,5
<b>C22</b> : 5,0	<b>C24</b> : 5,0	<b>C27</b> : 4,5
<b>C30</b> : 4,0	<b>C35</b> : 3,0	<b>C40</b> : 2,5

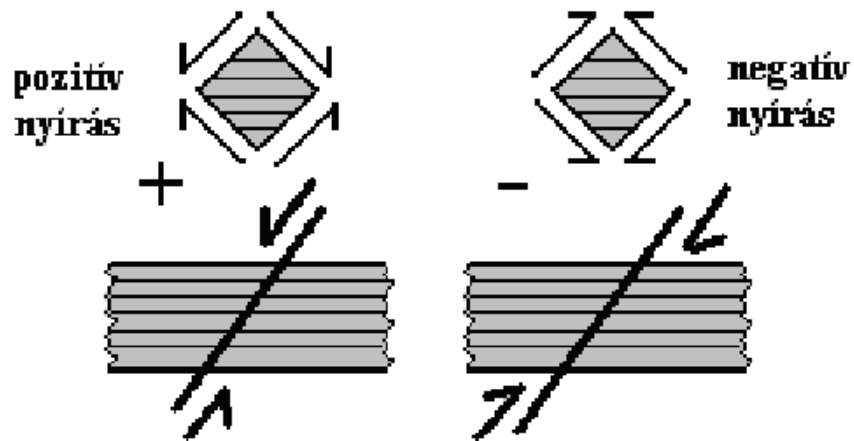
#### 4. NYÍRÓSZILÁRDSÁG VÁLTOZÁSÁNAK KIFEJEZÉSE A BIAXIÁLIS KRITÉRIUMOK ALKALMAZÁSÁVAL

Az Eurocode 5 csupán a rostokkal párhuzamos nyírósziárdságot tünteti fel, de a kompozit biaxiális kritériumokkal azt is megvizsgálhatjuk, hogyan változik a *rostokkal szöget bezáró* nyírósziárdság értéke. Legyen az  $\alpha$  irányban ható nyírófeszültség nagysága  $\tau_\alpha$ . Az ebből keletkező feszültségek:

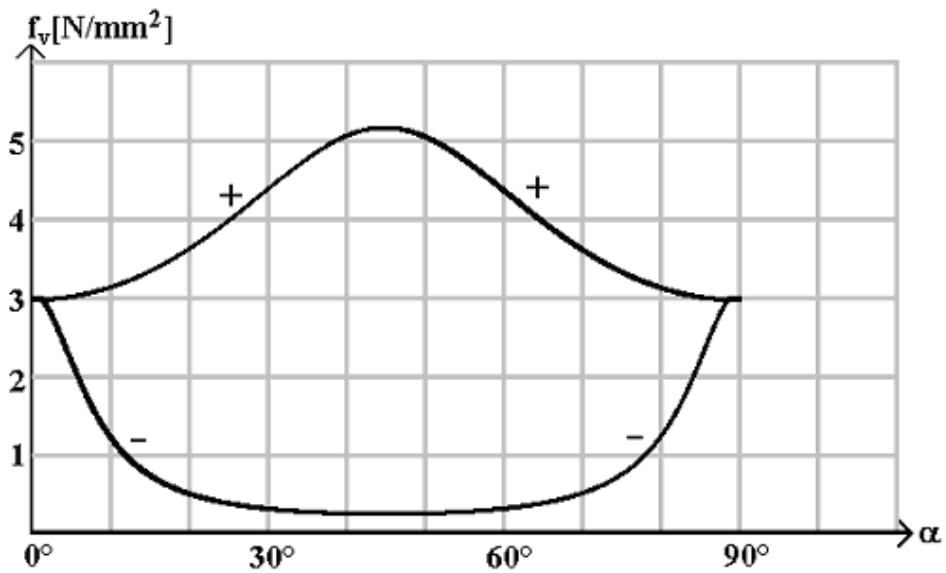
$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2cs \\ s^2 & c^2 & -2cs \\ -cs & cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau_\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot \tau_\alpha \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha \\ -2 \cdot \tau_\alpha \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha \\ \tau_\alpha \cdot (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \end{bmatrix}. \quad (13.a-c)$$

A (13.a–c) kifejezésbe  $\alpha = 0$ -t behelyettesítve, visszakapjuk a megadott nyírósziárdságot. Az is észrevehető, hogy  $\alpha = 90$  esetében is a nyírósziárdságot kapjuk, csak ellenkező előjellel. Ez pedig azt jelenti, hogy a rostra merőleges irányú nyírósziárdság meg fog egyezni a rostirányúval bármely biaxiális kritériummal is számolunk. (Példaként megemlítjük, hogy az MSZ 10144 magyar szabvány ezzel szemben definiál egy rostra merőleges nyírósziárdságot is, ami a rostirányú szilárdság kb. 3-szorososa. Ez a 3-szoros érték sokkal hihetőbb, de transzotrop anyagként modellezve a fát nincsen mód egy ilyen szilárdsági érték figyelembevételére, mivel ez már a 6. független szilárdsági paraméter lenne. A transzotrop anyagok esetében 5 szilárdsági paraméter szükséges és elégséges a modell leírásához. Ennek a 6. szilárdsági paraméternek gyakorlati szempontból sincsen jelentősége, mert a dualitási tétel miatt a rostokra merőleges nyíróigénybevétel esetén is a rostokkal párhuzamosan nyíródik el a fatest. A rostokra merőleges nyírósziárdságot ezen ok miatt mérni sem lehet.)

Még egy fontos dolgot figyelhetünk meg a biaxiális kritériumok kapcsán. Nem indifferens, hogy pozitív vagy negatív irányú a nyírás, mivel a 6. ábrán szereplő két esetben belátható, hogy nem ugyanakkora a meghatározható nyírósziárdság. A 7. ábra a nyírósziárdság változását szemlélteti a rosttal bezárt szög függvényében a kétféle nyírás esetében.



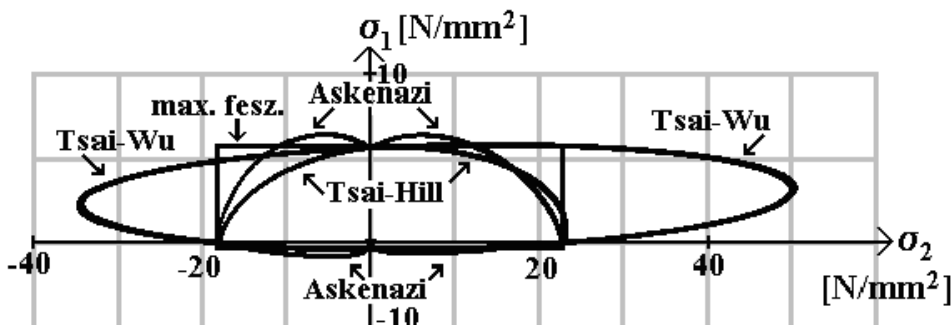
6. ábra. Pozitív és negatív irányú nyírás szemléltetése



7. ábra. Nyírószilárdság alakulása a rosttal bezárt szög függvényében a C30-as szilárdsági osztályú faanyagra alkalmazott Askenazi kritérium szerint

## 5. A VIZSGÁLT BIAXIÁLIS KRITÉRIUMOK TÖNKREMETETELI GÖRBÉI

Ábrázoljuk a tönkremeneteli görbéket is a biaxiális kritériumokkal (8. ábra). Az ábrából jól látszanak a kritériumok közötti alapvető eltérések. A *maximális feszültség kritérium* görbéje téglalap, hiszen nem számoltunk a feszültségek kölcsönhatásával. Ezt a téglalapot „kerékíti” ellipszisszé a *Tsai–Hill kritérium görbéje*, amely törést ír elő az olyan feszültség párokra, melyek mindegyike közel áll a szilárdsághoz, bár egyik sem haladja meg azt.



8. ábra. Az alkalmazott biaxiális kritériumok tönkremeneteli görbéi az EC5 szilárdsági jellemzőivel

A *Tsai–Wu kritérium* tönkremeneteli görbéje lényegesen nagyobb tartományt fed le a többi görbéhez képest, s jól látszik hogy az EC5 paramétereivel még olyan feszültség párokra sem ír elő törést, amelyekre a többi kritérium már rég megtette. A 8. ábra meggyőzően mutatja, hogy ezzel a kritériummal mennyire óvatosan kell bánnunk, alkalmazása faszerkezetek esetén nem ajánlott. A kritériumok közül csak az *Askenazi kritérium* tönkremeneteli görbéjére kapunk középen, alul-felül konkáv alakot, mely az anizotrópia szélesebb körű figyelembevételét jelezheti, mivel a szilárdsági függvények vizsgálatakor is az Askenazi kritérium szolgáltatja a legjobban egyező eredményeket.

## 6. ÖSSZEFOGLALÁS

Az *Eurocode 5* segítségével csak egytengelyű nyomásra, egytengelyű húzásra és rostokkal párhuzamos nyírásra tudjuk a töréshez tartozó feszültségeket meghatározni. Olyan feszültség párokra, amelyek nem tartoznak a fenti esetekbe, a szab-

vány nem ad értékeket. Egy tetszőleges összetett feszültségállapotban tehát szükségünk lehet a biaxiális kritériumok alkalmazására, mivel így meg tudjuk állapítani a tönkremenetelhez tartozó feszültségeket. A biaxiális kritériumok alkalmazhatósága a fa szilárdsági jellemzőinek meghatározására úgy biztosítható, ha a kísérleteken alapuló egytengelyű nyomás és egytengelyű húzás szabvány szerinti diagramjait összehasonlítjuk a kritériumok alapján kapott eredményekkel. Az elvégzett számítások tükrében a következő megállapítások tehetők:

- A *maximális feszültség kritérium* görbéiben törések találhatók, hiszen több tönkremeneteli feltételünk van, s ezáltal nem vesszük figyelembe a fő feszültségek közötti kapcsolatokat.
- A *Tsai–Wu kritérium* abból a szempontból lenne a legalkalmasabb kritérium, hogy különbséget tesz az azonos irányhoz tartozó nyomó- és húzószilárdság között. A legnagyobb hibája is ebből ered: a szilárdsági értékek kis megváltoztatásával nagy eltérések alakulnak ki a szilárdsági függvények (nyomó- és húzószilárdság) értékeinek változásában. Ez azért van, mert csak egy tönkremeneteli egyenletünk van és ez a kitüntetett irányú feszültségek előjelétől független, ebben a tönkremeneteli egyenletben viszont figyelembe kell venni az összes szilárdsági jellemzőt: így a rostra merőleges húzó- és nyomószilárdságot is, melyek nagyságrendileg eltérő számok. Az ábrázolt eredmények is azt mutatják, hogy a nyomószilárdság függvényben lévő helyi maximum (3. ábra) és a tönkremeneteli felület által definiált ellipszis (8. ábra) miatt a vizsgált  $p$  paraméter módosítása mindenképpen szükséges, hogy alkalmas legyen az összetett feszültségállapot okozta tönkremenetel figyelembevételére.
- A *Tsai–Hill* és *Askenazi kritérium* sokkal jobban alkalmazható faanyagokra, mint az előző kettő. Mindkét kritériumnál más-más a tönkremeneteli egyenletünk a fő feszültségek előjelének függvényében. Első lépésben tehát el kell döntenünk, milyen előjelű a rostirányú és rostra merőleges feszültség, ezután helyettesíthetünk be az ennek megfelelő kritérium kifejezésébe. Mivel az Askenazi kritérium negyedik hatványon szerepelteti a feszültségeket, szilárdsági görbéi sokkal jobban simulnak a szabvány (EC5) szerinti görbékhez. A kritériumok szabad paraméterének szükséges módosításakor is azt láthatuk, hogy az Askenazi kritérium paramétereit lehet a legkedvezőbben módosítani a szabvánnyal való minél jobb egyezés érdekében. Összességében elmondhatjuk, hogy az elvégzett vizsgálatok indokolják az Askenazi kritérium alkalmazását a faanyagok szilárdsági vizsgálataira.

## IRODALOM

- Gibson, R. F. (1994): *Principles of Composite Materials Mechanics*. New York, The McGraw-Hill Companies Inc.
- Hyer, M. W. (1998): *Stress Analysis of Fiber Reinforced Composite Materials*. New York, The McGraw-Hill Companies Inc.
- Kalischky S. (1992): *Mechanika II. Szilárdságtan*. Budapest, Tankönyvkiadó.
- MSZ ENV 1995-1-1:2000 EUROCODE 5 (2000), Faszervezetek tervezése.
- Szalay J. (1994): *A faanyag és faalapú anyagok anizotróp rugalmasság- és szilárdságtana*. I. rész: *A mechanikai tulajdonságok anizotrópiája*. Sopron, Hillebrand Nyomda Kft.

COMPARISON OF THE GRAIN DIRECTION DEPENDENT  
STRENGTH CHARACTERISTICS OF WOOD ACCORDING  
TO EUROCODE 5 AND THE COMPOSITE FAILURE THEORIES

*Summary*

Analyzing the strength behavior of wooden materials the stresses that cause failure can be determined only in case of uniaxial compression or tension and shear parallel to the grain according to Eurocode 5. The standard does not give any data for stress pairs that are not part of the above cases. In this study the strength failure of the wood with biaxial failure criteria is defined, so that the interaction of the stresses, being in special directions (parallel and perpendicular to the grain), could be considered. Possessing appropriate failure criterion it is possible to calculate non-defined cases and also to compare the results of the known basic cases to the results given by the biaxial criteria. The carried out analysis justifies the ability of the application of the Ashkenazi failure criterion for the strength analysis of wooden materials.

**Keywords:** wood, failure criteria, strength characteristics, Eurocode 5