

A KÜLÖNBÖZŐ RENDŰ MECHANIKAI ELMÉLETEKRŐL

GÁSPÁR ZSOLT, NÉMETH RÓBERT*

1. BEVEZETÉS

A tartószerkezetek számítása során a valóságos, tényleges szerkezet helyett mindig valamilyen mechanikai modellt vizsgálunk. (A továbbiakban csak rugalmas szerkezetek statikai problémáival foglalkozunk.) A mechanikai modell viselkedésének a megengedett mértékű egyszerűsítésekkel elvégzett matematikai leírása szolgáltatja a matematikai modellt. E leíráshoz használhatunk első-, másod- vagy harmadrendű elméletet. Az elsőrendű (lineáris) elméletben minden alapegyenlet (egyensúlyi, fizikai, geometriai) lineáris. A harmadrendű elméletben a mechanikai modell leírásakor nem teszünk matematikai elhanyagolásokat. (Az már más kérdés, hogy az egyenletrendszer megoldását általában csak közelítjük.) A másodrendű elméletben vannak nemlineáris egyenletek, de vannak közelítések is. A közelítések mértékétől függően a másodrendű elméletek több fokozata is kialakulhat.

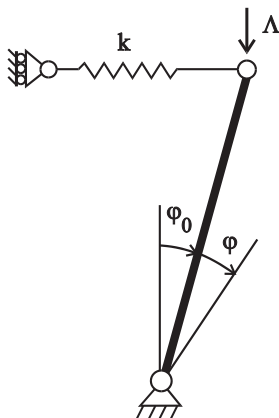
A különböző rendű elméleteket és az alakváltozási tartomány felosztását (igen kicsiny, véges, nagy) kitűnően szemlélteti Halász [1] egy egy szabadságfokú modell összefüggéseinek bemutatásával, és azoknak egy különös (négy fél koordinátengelyt tartalmazó) koordináta-rendszerben való ábrázolásával. E dolgozatnak az a célja, hogy megvizsgáljuk azt, hogy kinyerhetőek-e más információk is ezekből az ábrákból, mennyire megbízhatók a különböző másodrendű elméletekkel kapott eredmények, mennyire általánosíthatók a megállapítások a több szabadságfokú modellekre.

2. EGY SZABADSÁGFOKÚ MODELL

Válasszuk az *1. ábrán* látható, már sokak által (pl. [2, 3]) vizsgált mechanikai modellt, amely egy L hosszúságú merev rúdból és egy rugalmas rugóból áll. A rúd egyik vége egy csuklóval a földhöz van rögzítve, másik vége pedig az egyensúlyi

* Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Építésztechnika Kar, Tartószerkezetek Mechanikája Tanszék. 1111 Budapest, Műegyetem rkp. 3. K. mfsz. 35. Tel.: 463-1161

állapotban mindig vízszintes helyzetben lévő rugóval kapcsolódik a függőleges falhoz. A rugó hossza olyan, hogy terheletlen állapotban összekötve a rúddal, a rúd tengelye a függőlegessel (nem feltétlenül kicsi) φ_0 szöget zár be. A rúdra a felső



végpontján egy függőleges L erő hat, amelyet akkor tekintünk pozitívnak, ha lefelé mutat.

1. ábra

A modell leírására a következő változókat fogjuk használni: az elmozdulást a terheletlen állapothoz viszonyított elfordulás φ szögével, az alakváltozást a rugó Δl megnyúlásával, a belső erőt a rugóban ébredő S rugóerővel, végül a külső erőt Δ nagyságával mérjük. (A 2. pontban bemutatott ábrákat a következő adatok felhasználásával rajzoljuk: $L = 1$ m, $\varphi_0 = 0,1$ rad, és a fizikai egyenletekben szereplő állandók: $k_1 = 1$ kN/m, $k_2 = 0,1$ kN/m², $k_3 = 0,01$ kN/m³.)

2.1. ELSŐRENDŰ ELMÉLET

A szerkezet változói között az alábbi (lineáris) összefüggéseket írhatjuk fel. Az elmozdulás és az alakváltozás kapcsolatát leíró *geometriai egyenlet*, mely a kis elmozdulások elmélete szerint a $\sin \varphi \approx \varphi$, $\cos \varphi \approx 1$ közelítéssel él:

$$\Delta l = L \cdot \cos \varphi_0 \cdot \varphi. \quad (1)$$

Az alakváltozás és a belső erő közötti kapcsolatot a *fizikai egyenlet* írja le, ennek linearizált alakja a Hooke-törvény:

$$S = \Delta l \cdot k_1. \quad (2)$$

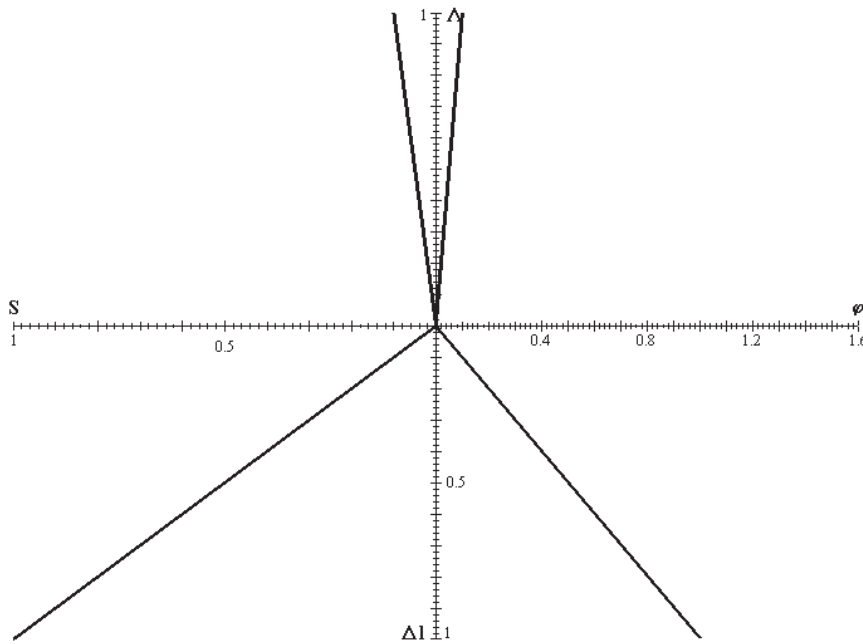
A külső és belső erők kapcsolatát leíró *egyensúlyi egyenletben* a megmerevítés elvét használjuk, mely szerint az egyensúlyi feltételeket nem az új helyzetben, hanem az eredeti helyzetben írjuk fel:

$$S = \Lambda \cdot \operatorname{tg}\varphi_0. \quad (3)$$

E három egyenletből kiküszöbölhetjük a Δl és az S változót, így megkapjuk az *egyensúlyi út* egyenletét, ami a külső erő és az elmozdulás közötti kapcsolatot adja meg:

$$\Lambda = \frac{k_1 L \cdot \cos \varphi_0 \cdot \varphi}{\operatorname{tg}\varphi_0}. \quad (4)$$

Követve Halász [1] 3. ábráját a négy egyenletet csak a változók pozitív tartományában ábrázolva, és a koordináta-rendszereket megfelelően elfordítva, összehelyesítve kapjuk a 2. ábrát. Itt jól látható, hogy minden összefüggés lineáris. Az egyensúlyi út nem ad semmilyen információt egy esetleges stabilitásvesztésről, ezért legfeljebb csak szilárdsági, elmozdulási vagy/és alakváltozási határállapotot vizsgálhatunk.



2. ábra

2.2. HARMADRENDŰ ELMÉLET

A harmadrendű elmélet használata is egyértelmű, ezért nem a másodrendű elmélettel, hanem ezzel folytatjuk az elemzést. A harmadrendű elméletnél a *geometriai egyenletben* a φ elfordulás trigonometrikus függvényben szerepel:

$$\Delta l = L \cdot (\sin(\varphi + \varphi_0) - \sin \varphi_0), \quad (5)$$

a *fizikai egyenletben* tetszőleges nemlineáris folytonos függvény szerepelhet:

$$S = f(\Delta l) \approx k_1 \cdot \Delta l + k_2 \cdot \Delta l^2 + k_3 \cdot \Delta l^3. \quad (6)$$

(A továbbiakban az ábráinkon az f függvényt harmadfokú polinomnak vesszük fel.)

Az *egyensúlyi egyenletet* most az új, elmozdult helyzetben írjuk fel, így abban nem csak a teher és a belső erő szerepel, hanem a φ elfordulás is:

$$S = \Lambda \cdot \operatorname{tg}(\varphi + \varphi_0). \quad (7)$$

E három egyenletből most is kiküszöbölhetjük a Δl és az S változót, így megkapjuk az *egyensúlyi út egyenletét*:

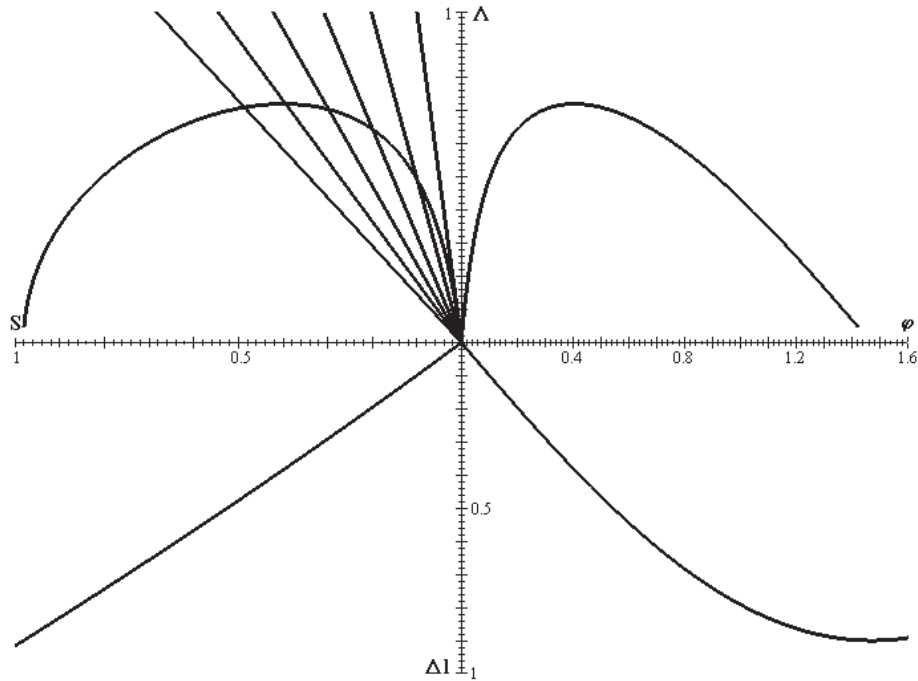
$$f(L \cdot (\sin(\varphi + \varphi_0) - \sin \varphi_0)) = \Lambda \cdot \operatorname{tg}(\varphi + \varphi_0). \quad (8)$$

Az egyenleteket megint az elsőrendű elméletnél látott módon szeretnénk felrajzolni, azonban a következőkre kell figyelniük. Az egyensúlyi egyenlet ugyan a belső és a külső erő kapcsolatát írja le, de tartalmazza az elmozdulást is, ezért nem egy görbével ábrázolható, hanem egy, az elmozdulástól mint paramétertől függő egyenessereggel, mint erre Kurutz [4] már felhívta a figyelmet. Ennek az egyenessereggel néhány tagját rajzoltuk fel a 3. ábra bal felső negyedében. Az elmozdulást ugyan a geometriai és a fizikai egyenlet segítségével kiküszöbölhetjük az egyensúlyi egyenletből (ha az f függvény a vizsgált szakaszon monoton növekvő folytonos függvény, vagyis létezik inverze):

$$S = \Lambda \cdot \operatorname{tg} \left(\arcsin \frac{f^{-1}(S) + L \cdot \sin \varphi_0}{L} \right) \quad (9)$$

de az így kapott egyenletet már nem hívhatjuk tisztán egyensúlyi egyenletnek. Ezt a görbét is ábrázoltuk az egyensúlyi egyenessereggel együtt, e görbe a kompatibilis egyensúlyi helyzeteket mutatja.

Az egyensúlyi út vagy a (9) egyenletnek megfelelő görbe felrajzolásánál csak az okozhat nehézséget, hogy általános esetben abból sem Λ sem φ nem fejezhető ki explicit alakban, ezért ábrázolásukhoz esetleg iterációt kell alkalmazni.



3. ábra

A harmadrendű elmélettel kapott egyensúlyi útnak tetőpontja is van, tehát ebből megállapítható az is, hogy mekkora kritikus tehernél következik be a (most határpontos) stabilitásvesztés.

2.3. MÁSODRENDŰ ELMÉLETEK

Itt a többes szám azért indokolt, mert a bevezetőben mondottak szerint minden olyan elméletet másodrendűnek nevezünk, amelyben nemlineáris egyenletet is használunk a közelítésnél, és ilyenre elvileg végtelen sokféle lehetőség van: a nemlineáris egyenleteinkben szereplő függvényeket Taylor-sorba fejtjük, majd az egyes sorokból az általunk önkényesen előírt fokszámnál magasabb fokú tagokat elhanyagoljuk. Még az sem kötelező, hogy minden sornál azonos fokszámig tartunk meg a tagokat.

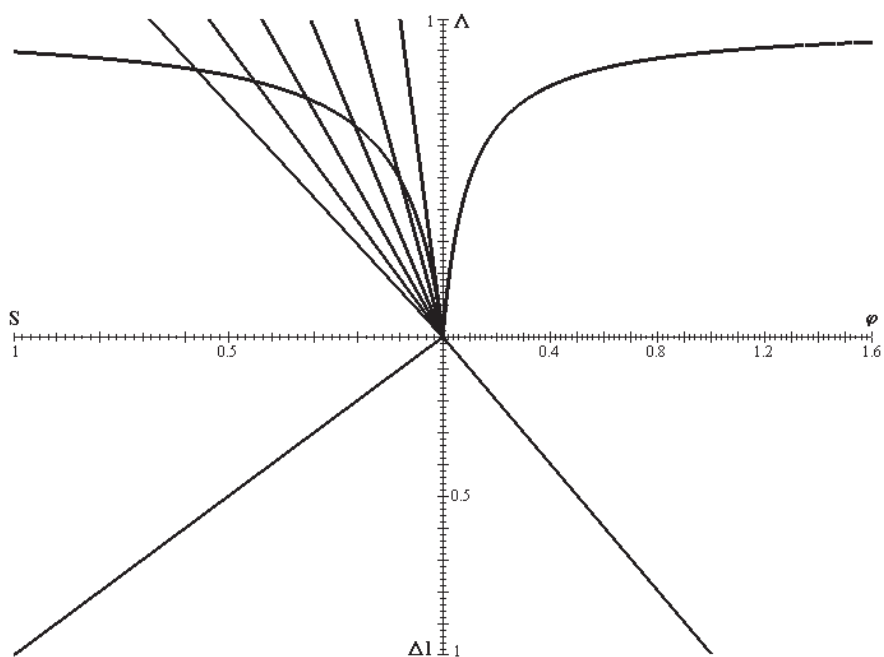
Sokan úgy definiálják a másodrendű elméletet, hogy annál az egyensúlyi egyenletekben figyelembe veszik az elmozdulások hatását is. Azt azonban általában nem írják elő, hogy milyen fokszámig veszik figyelembe. Leggyakrabban az egyensúlyi egyenletben csak a φ -t első fokon tartalmazó tagot hagyják meg, és a másik két egyenletet továbbra is lineárisnak veszik fel. Így a geometriai és a fizikai egyenlet megegyezik az (1) illetve (2) egyenlettel, az egyensúlyi egyenlet alakja pedig:

$$S = \Lambda \cdot \left(\operatorname{tg} \varphi_0 + \frac{\varphi}{\cos^2 \varphi_0} \right). \quad (10)$$

Ezekből meghatározható az egyensúlyi út egyenlete, sőt abból Λ explicit alakban is kifejezhető:

$$\Lambda = \frac{k_1 L \cdot \cos \varphi_0 \cdot \varphi}{\operatorname{tg} \varphi_0 + \frac{\varphi}{\cos^2 \varphi_0}}. \quad (11)$$

A fenti egyenleteket a 4. ábra szemlélteti.



4. ábra

Az egyensúlyi útról megállapítható, hogy az aszimptotikusan tart a

$$\Lambda = k_1 L \cos^3 \varphi_0$$

egyenlettel megadható vízszintes egyeneshez. Ha a φ_0 kezdeti ferdeséget egy eredetileg függőlegesnek tervezett helyzet tökéletlenségének tekintjük, akkor vizsgálhatjuk e tökéletlenség hatását is. A φ_0 értékét csökkentve a vízszintes egyenes emelkedik, és a zérus értéknél az egyensúlyi út két egyenessé fajul. Az egyik egyenes ($\varphi = 0$) függőleges, és azt mutatja, hogy a szerkezet függőleges helyzetben bármekkora függőleges terhet képes (az eredeti helyzetében) egyensúlyozni. A másik egyenes ($\Lambda = k_1 L$) vízszintes, és ezt szokás a másodrendű elmélettel meghatározott másodlagos egyensúlyi útnak tekinteni. Ezt a vélekedést megerősíteni látszik az, hogy a tökéletes szerkezet kritikus terhe valóban $\Lambda^{kr} = k_1 L$, itt a tökéletes szerkezet egyensúlyi útja valóban elágazik, sőt a másodlagos egyensúlyi út érintője valóban vízszintes.

Pedig a vízszintes aszimptota megléte csak arra utal, hogy e teherérték közelében van kritikus teherparaméter. Hiszen ugyanúgy vízszintes aszimptotához tart az egyensúlyi út a nagy φ_0 esetén, amikor a harmadrendű elmélet szerint határpontos stabilitásvesztés van, mint a nagyon kis φ_0 estén, amelynek közelében elágazásos stabilitásvesztés van. Erre még lehet azt mondani, hogy most a harmadrendű elmélet szerint nagyon kis φ_0 esetén is határpontos stabilitásvesztés van. De ugyanilyen jellegű egyensúlyi utat kapunk akkor is (pl. [2, 3]), ha a vízszintes rugó helyett egy, az elfordulással arányos nyomatékot kifejtő rugóval támasztjuk meg a merev rudat. Pedig ott a harmadrendű elmélet szerint kis φ_0 esetén nincs az eredeti állapottól induló egyensúlyi útnak határpontja. Erre még mindig lehet azt mondani, hogy a tökéletes szerkezetnek itt is elágazási pontja van, és a másodlagos egyensúlyi út érintője az elágazási pontban vízszintes, tehát azt közelíti a másodrendű elmélettel kapott görbe. De ugyanilyen jellegű egyensúlyi utat kapunk akkor is (pl. [2, 3]), ha a vízszintes rugó helyett egy ferde rugóval támasztjuk meg a merev rudat. Itt pedig a tökéletes szerkezet másodlagos egyensúlyi útjának az elágazási pontban nem vízszintes az érintője.

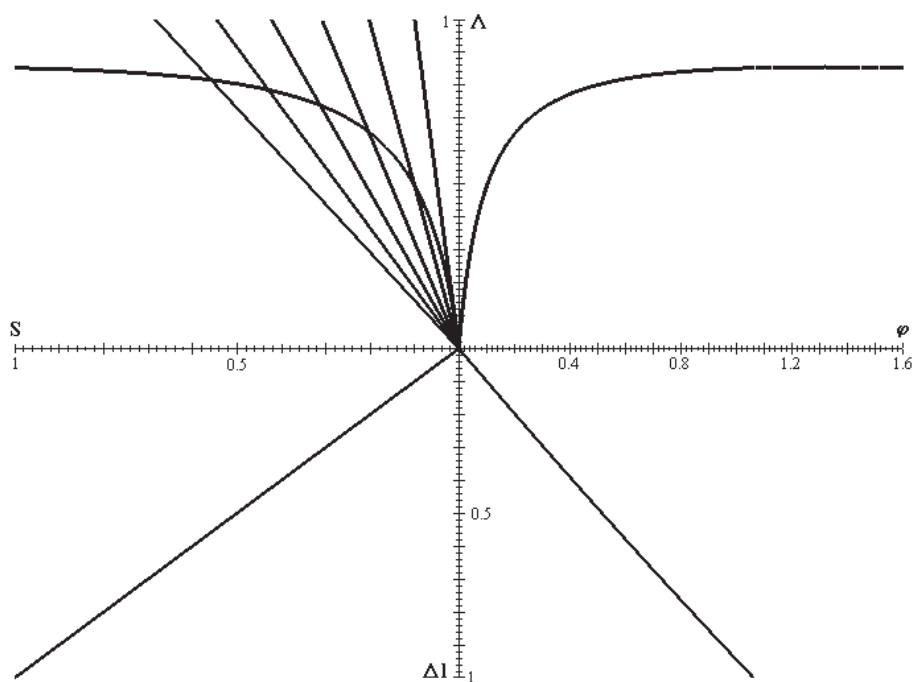
A fentiekből levonhatjuk azt a következtetést, hogy ha csupán az egyensúlyi egyenletekben és csak az elmozdulásban lineáris tagokkal egészítjük ki az elsőrendű elmélet egyenleteit, akkor a kritikus teher nagyságára kaphatunk közelítést, de a stabilitásvesztés típusára és az esetleges másodlagos egyensúlyi út jellegére nem.

Ha többet akarunk megtudni a kritikus teherről, akkor más tagokat is figyelembe kell vennünk. Először nézzük meg, mi történik, ha a geometriai egyenletben az elmozdulás négyzetét tartalmazó tagot is figyelembe vesszük:

$$\Delta l = L \cdot \left(\cos \varphi_0 \cdot \varphi - \sin \varphi_0 \cdot \frac{\varphi^2}{2} \right). \quad (12)$$

A fizikai egyenlet (2)-vel egyezik meg, az egyensúlyi egyenlet (10)-zel. Az egyensúlyi út a (11)-hez hasonló alakban írható:

$$\Lambda = \frac{k_1 L \left(\cos \varphi_0 \cdot \varphi - \sin \varphi_0 \cdot \frac{\varphi^2}{2} \right)}{\operatorname{tg} \varphi_0 + \frac{\varphi}{\cos^2 \varphi_0}}. \quad (13)$$



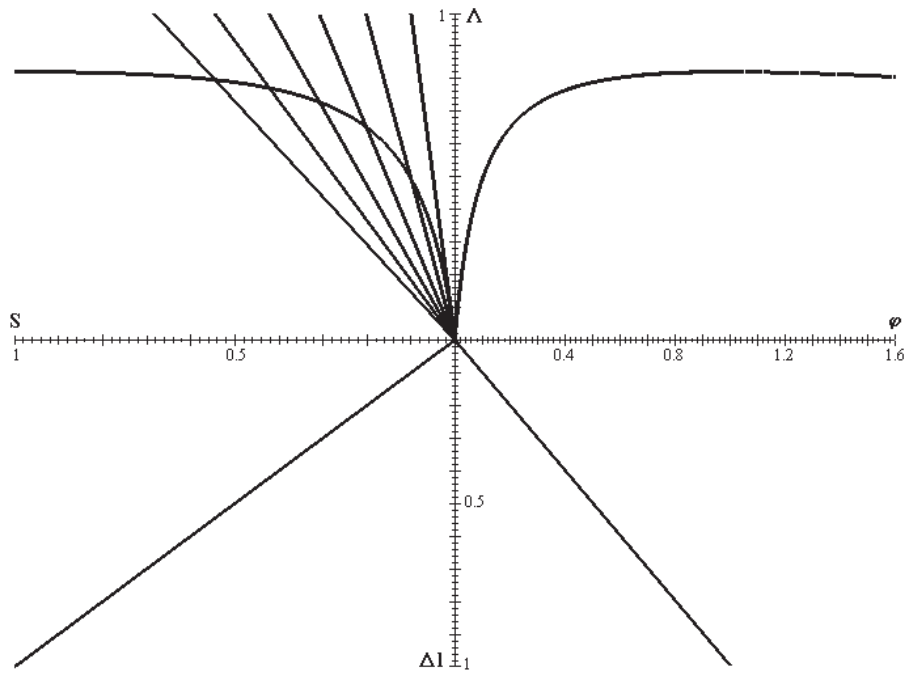
5. ábra

Egyenleteinket ábrázolva (5. ábra) azt látjuk, hogy az egyensúlyi útnak most egy tetőpontja van, vagyis az ábra alapján megállapítható a stabilitásvesztés típusa. Ez általánosan csak akkor igaz, ha a katasztrófa típusának, a kritikus pont determináltságának megfelelő fokú közelítést alkalmazunk egyenleteinkben ([3], 164. oldal).

Hasonló eredményeket kaphatunk, ha a másodfokú tagokat az egyensúlyi egyenletben szerepeltetjük:

$$S = \Lambda \cdot \left(\operatorname{tg} \varphi_0 + \frac{\varphi}{\cos^2 \varphi_0} + \frac{\sin \varphi_0 \cdot \varphi^2}{\cos^3 \varphi_0} \right). \quad (14)$$

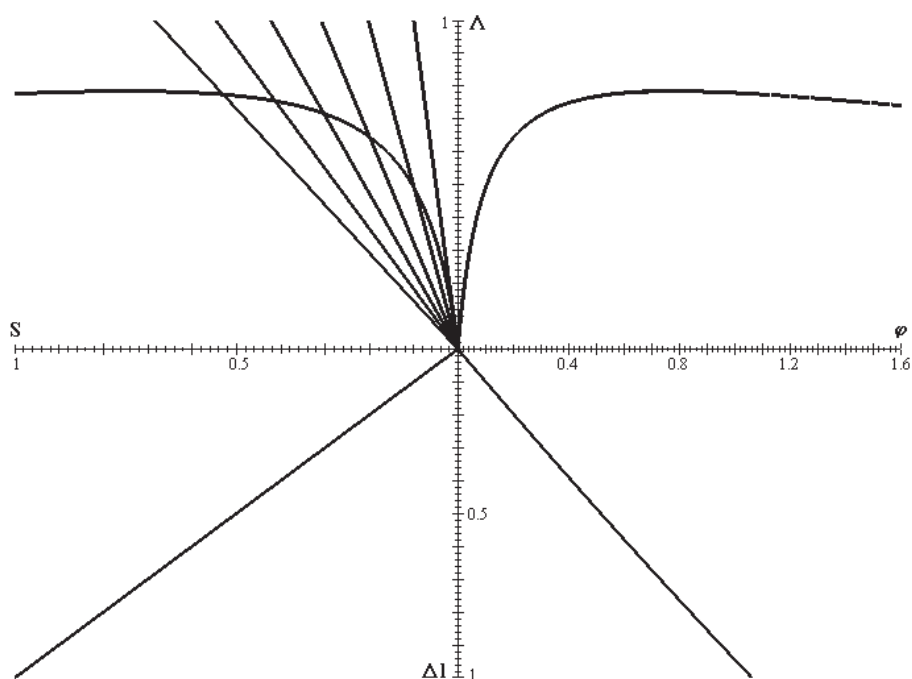
Az ebből levezetett diagramot mutatja a 6. ábra.



6. ábra

A 7. ábra azt az esetet mutatja, amikor az egyensúlyi egyenletben és a geometriai egyenletben is másodfokú közelítést alkalmazunk. Ebben az esetben az egyensúlyi út egyenlete:

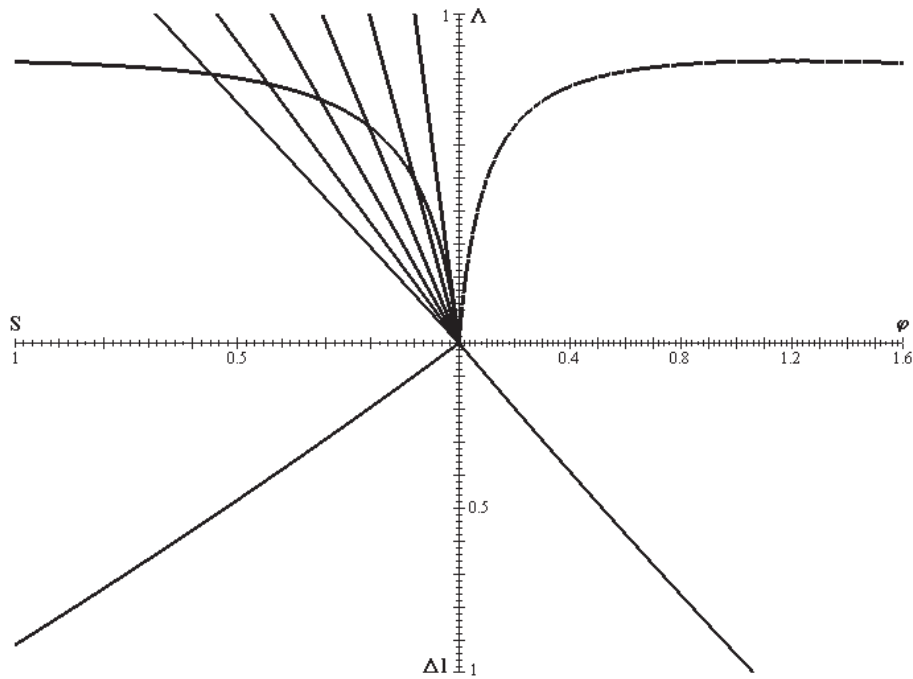
$$\Lambda = \frac{k_1 L \left(\cos \varphi_0 \cdot \varphi - \sin \varphi_0 \cdot \frac{\varphi^2}{2} \right)}{\operatorname{tg} \varphi_0 + \frac{\varphi}{\cos^2 \varphi_0} + \frac{\sin \varphi_0 \cdot \varphi^2}{\cos^3 \varphi_0}}. \quad (15)$$



7. ábra

Könnyen úgy érezheti valaki, hogy ha bármelyik alapegyenletünkben egy újabb tagot figyelembe veszünk, akkor a harmadrendű elmélettel kapott görbéket jobban közelítjük, mint ahogy e tag nélkül tettük azt. Pedig lehetséges, hogy az egyensúlyi egyenletben szereplő tört számlálójában vagy nevezőjében kapott új tagnak még az előjele sem jó, ha egy másik egyenletünkben elhanyagoltunk ugyanilyen vagy alacsonyabb fokszámú tagokat. Logikusnak tűnik, hogy az egyenletekben azonos fokú tagokat használjunk. (A csonkított algebra szabályait lásd pl. [5] 41. oldalán.) A 8. ábra erre mutat példát, ahol a fizikai egyenletben is figyelembe vettük a másodfokú tagot. Az így kapott egyenletekből az egyensúlyi út kifejezhető, ha a geometriai egyenletet az elmozdulás szerint sorba fejtve és csonkolva a kapott eredményt a fizikai egyenletbe beírjuk, majd ugyanazon fokszámig ismét sorba fejtve és csonkolva behelyettesítjük S-et az egyensúlyi egyenletbe. A kapott képlet bonyolultsága nem áll arányban a pontosságával.

A fenti gondolatmenetet folytatva a harmadfokú tagokat is figyelembe véve ugyan pontosabb közelítést kapnánk, azonban az egyre bonyolultabb képletekkel továbbra is közelítő képleteket kapnánk. Így a harmadrendű elméletnél pontatlanabb, de azzal közel azonos időigényű módszert kapnánk.



8. ábra

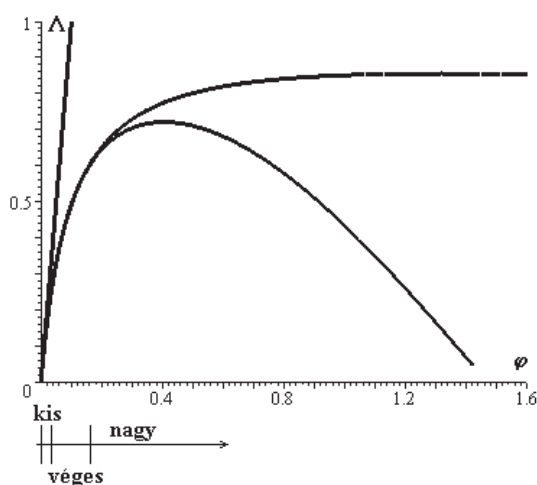
2.4. MEGJEGYZÉSEK

A bemutatott módszer statikailag határozatlan egy szabadságfokú modellen is alkalmazható. Ilyen lehet, ha a fenti modellt az alsó csuklónál még egy elfordulást gátló rugóval is megtámasztjuk (lásd pl. [3] 4–51. ábráján). Könnyen belátható, hogy ha az elmozdulásokat korlátozzuk arra az intervallumra, melyben a merev rúd vége nem kerül a csukló alá, akkor a két rugóból álló rendszer helyettesíthető egy nem lineáris vízszintes rugóval. Ennek a rugóállandóit úgy állítjuk be, hogy a kifejtett erő és nyomaték azonos legyen a helyettesítendő rugók által kifejtett erővel és nyomatékkal.

Megjegyezzük továbbá, hogy a változók fenti felvétele esetén a külső erő és az elmozdulás szorzata a megszokott módtól eltérően most nem munka jellegű mennyiség, de (speciális esetektől eltekintve, esetleg a vizsgált elmozdulási tartományt leszűkítve) a változókat fel lehetne venni úgy is, hogy ez teljesüljön.

Követve Halász ([1] 7. oldal) gondolatmenetét ábrázoljuk az első-, az egyik másod-, és a harmadrendű elmélettel kapott egyensúlyi utakat közös koordináta-rendszerben (9. ábra). A másodrendű elmélettel kapott eredmények közül válasszuk az

5. ábrán láthatót, mert itt a kapott egyensúlyi út (13) képletében a jobb oldali nevezővel átszorozva az egyenlet a szereplő változóiban mindkét oldalon másodfokú. Ezen az ábrán is az elmozdulás három intervallumát különböztethetjük meg. Az elsőrendű elmélettel kapott egyenes a magasabbrendű elméletekkel kapott görbék érintője az origóban, és kis teherintenzitás mellett azokkal egybeesőnek tekinthető. Azt a tartományt, ahol ez igaz, a *kis elmozdulások* tartományának nevezik. A terhet tovább növelve a másod-, és harmadrendű elmélettel kapott görbék eltávolodnak a lineáris elmélet egyenesétől, de egy darabig együtt maradnak. Ezt a tartományt nevezik a *véges elmozdulások* tartományának. Végül bizonyos elmozdulás fölött a másod- és harmadrendű elmélet görbéje is elválik egymástól, ekkor már csak a harmadrendű elmélettel kaphatunk kellően pontos megoldást. Ezt a tartományt hívják a *nagy elmozdulások* tartományának.

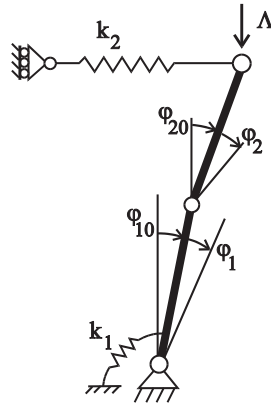


9. ábra

Végül térjünk vissza a három elmélet alkalmazhatóságára. Az elsőrendű elméletnél megállapítottuk, hogy azzal stabilitási határállapotot nem határozhatunk meg. A harmadrendű elmélet mindig használható, pontos, és vele a kritikus teher nagyságát, a posztkritikus viselkedést és az esetleges elágazás tulajdonságait is meghatározhatjuk. Másodrendű elmélettel ezt *csak* akkor tehetjük, ha a stabilitásvesztés típusának megfelelő közelítést alkalmazunk. Ráadásul a tökéletlen szerkezetre kapott kritikus értékek példánkban rendre nagyobbak a tényleges értéknél (lásd 5., 6., 7., 8., ill. 3. ábra), ezek használata méretezésre csak kis tökéletlenségek esetén fogadható el.

3. KÉT SZABADSÁGFOKÚ MODELL

Vizsgálatunkat a következő modellen fogjuk elvégezni. A két, egyenként L hosszúságú rúd egy csuklóval kapcsolódik egymáshoz. Az alsó rúd egy elfordulást gátló rugalmas rugóval kapcsolódik a földhöz, a felső pedig egy vízszintes rugalmas rugóval a falhoz. A teher most is függőleges erő, amely a felső rúd felső végpontjára hat, és akkor pozitív, ha lefelé mutat. Feszültségmentes állapotban az alsó rúd φ_{10} , a felső pedig φ_{20} szöget zár be a függőlegessel.



10. ábra

A modell állapotát leíró változók a következők legyenek. Elmozdulások: az alsó rúd elfordulása az eredeti állapotához képest φ_1 , a felsőé pedig φ_2 . Alakváltozások: az alsó rugó szögváltozása ϑ , a felső rugó megnyúlása pedig Δl . A belső erők: a körrugóban ébredő M nyomaték, és a vízszintes rugóban ébredő S rugóerő. A teher intenzitását most is a Λ paraméter írja le.

Az ábrák készítéséhez az alábbi paramétereket használtuk: $L = 1$ m, $k_1 = 1$ kNm, $k_2 = 1$ kN/m, $\varphi_{10} = 0,05$ rad, $\varphi_{20} = 0,1$ rad. A vizsgálatot most kezdjük a harmadrendű elmélettel.

3.1. HARMADRENDŰ ELMÉLET

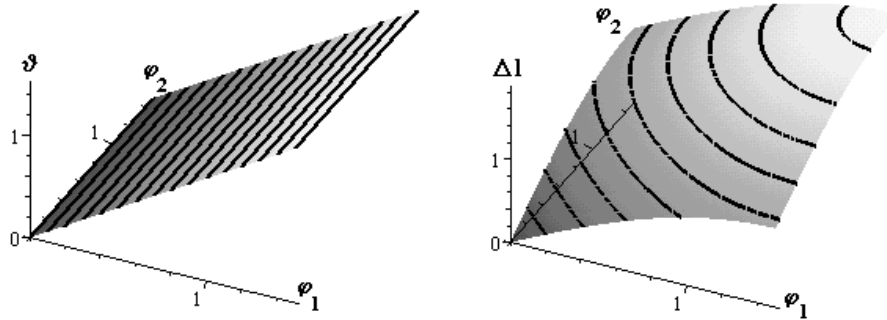
A *geometriai egyenlet* egy $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ leképezés, az elmozdulások teréből az alakváltozások terébe. A teljes összefüggést tehát négy dimenzióban kellene ábrázolni, és az összefüggések ott sem egy görbét, hanem egy kétdimenziós felületet határoznak meg. Vagy az egyenleteket szétválasztva két $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ leképezéssé, két háromdi-

menziós diagramon is szemléltethetjük azokat. A vizsgált modellünk esetén e két egyenlet alakja:

$$\vartheta = \varphi_1,$$

$$\Delta l = L \cdot (\sin(\varphi_1 + \varphi_{10}) - \sin \varphi_{10} + \sin(\varphi_2 + \varphi_{20}) - \sin \varphi_{20}). \quad (16)$$

mely a 11. ábrán látható. (A ϑ alakváltozást ábrázoló felület a φ_2 tengelyt is tartalmazó sík.)



11. ábra

A fizikai egyenlet szintén egy $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ leképezés, ami most a két rugó egymástól való függetlensége miatt két $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ leképezéssé egyszerűsödik, azaz:

$$M = f_1(\vartheta) \approx k_1 \cdot \vartheta,$$

$$S = f_2(\Delta l) \approx k_2 \cdot \Delta l. \quad (17)$$

(Az egyszerűség kedvéért az ábrákon mindkét függvényt lineárisnak választottuk.)

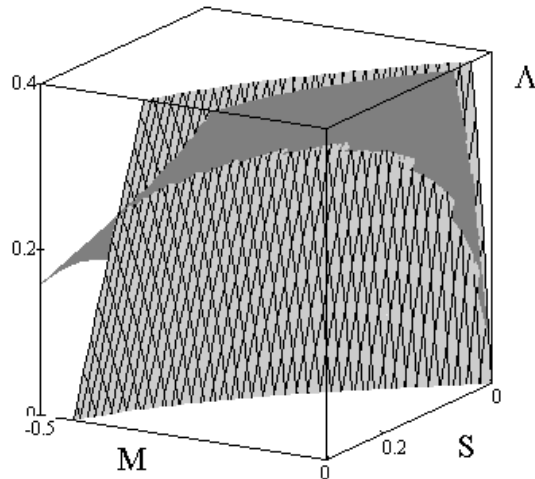
Az egyensúlyi egyenlet két nyomatéki egyenlet, az elsőben a felső rúdra ható erők nyomatékát írtuk fel a rúd aljára, a másodikban az összes erőnek vettük a nyomatékát az alsó csuklóra:

$$S \cdot \cos(\varphi_2 + \varphi_{20}) = \Lambda \cdot \sin(\varphi_2 + \varphi_{20}),$$

$$S \cdot L \cdot (\cos(\varphi_2 + \varphi_{20}) + \cos(\varphi_1 + \varphi_{10})) + M = \Lambda \cdot L \cdot (\sin(\varphi_2 + \varphi_{20}) + \sin(\varphi_1 + \varphi_{10})). \quad (18)$$

Ez a két egyenlet most egy kétparaméteres (φ_1, φ_2) egyenessereget határoz meg a háromdimenziós térben. A geometriai és a fizikai egyenletek segítségével a

kompatibilis egyensúlyi helyzeteket itt is meghatározhatjuk, ami a belső erők és a teherparaméter által meghatározott 3 dimenziós térben egy egydimenziós sokaság (térgörbe) lesz. E görbét két felület metszésvonalaként határozhatjuk meg (12. ábra). Az ábrán a negatív M és pozitív S által meghatározott síknegyedetet rajzoltuk ki, mert a kiindulási állapotból a teher növelésével ebbe jutunk.



12. ábra

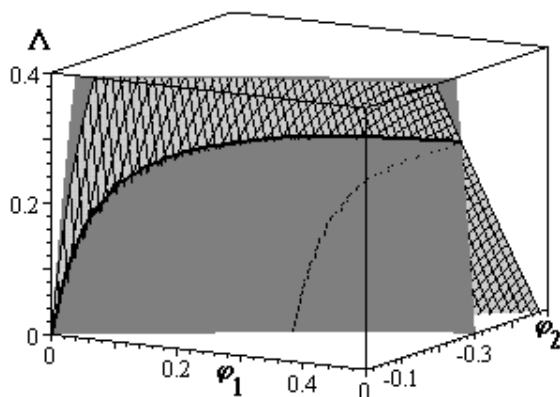
A belső erők és az alakváltozások kiküszöbölésével fel tudunk írni két egyenletet, amik a teher és az elmozdulások közötti összefüggéseket adják meg:

$$\Lambda \cdot \sin(\varphi_2 + \varphi_{20}) = k_2 L \cdot (\sin(\varphi_1 + \varphi_{10}) - \sin \varphi_{10} + (\sin(\varphi_2 + \varphi_{20}) - \sin \varphi_{20}) \cdot \cos(\varphi_2 + \varphi_{20}), \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \Lambda \cdot (\sin(\varphi_1 + \varphi_{10}) + \cos(\varphi_2 + \varphi_{20})) &= \frac{k_1 \cdot \varphi_1}{L} + k_2 L \cdot (\sin(\varphi_1 + \varphi_{10}) - \sin \varphi_{10} + \\ &+ (\sin(\varphi_2 + \varphi_{20}) - \sin \varphi_{20}) \cdot \\ &\cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_{10}) + \cos(\varphi_2 + \varphi_{20})). \end{aligned}$$

Ez a két egyenlet is egy-egy felületként jelenik meg a teher és az elmozdulások által meghatározott térben (13. ábra). E két felület metszésvonala az egyensúlyi út. Az egyensúlyi út pontjai csak numerikusan határozhatók meg. (Megjegyezzük,

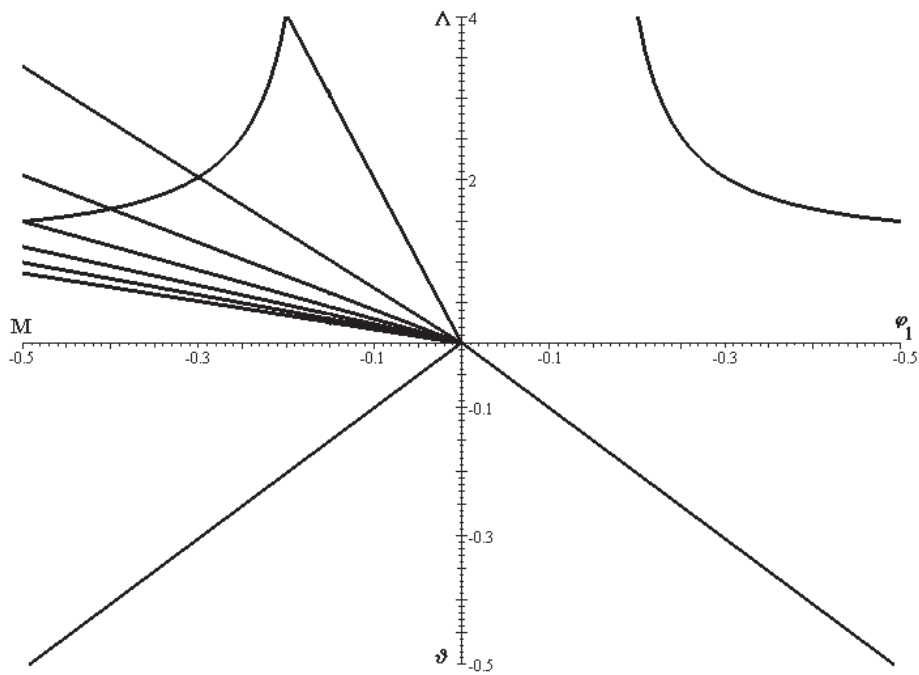
hogya ha a negatív elmozdulások tartományát is ábrázolnánk, akkor az egyensúlyi út egy nem összefüggő görbe lenne.)



13. ábra

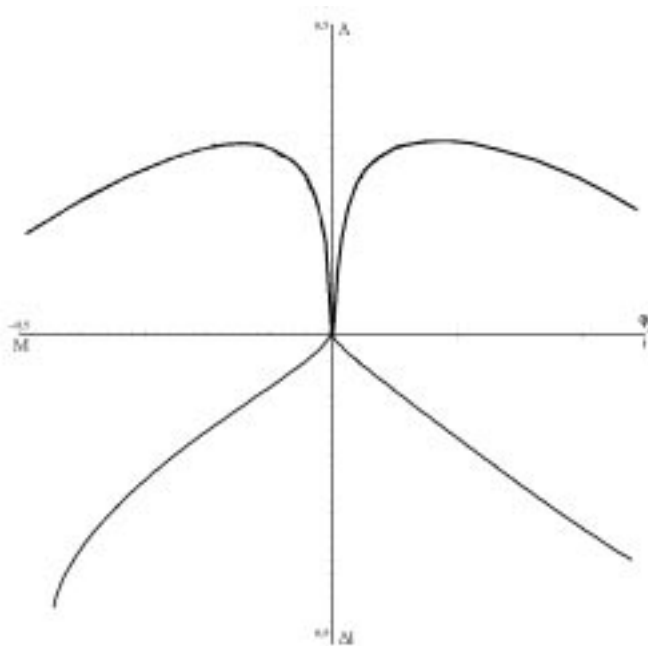
Természetesnek látszik, hogy itt is rajzolhatunk olyan összetolt diagramot, mint a 3. ábrán tettük azt az egy szabadságfokú modellnél. Talán önkényesen kiválaszthatjuk az egyik elmozdulást, az egyik alakváltozást, az egyik belső erőt. Erre mutat példát a 14. ábra, ahol φ_1 , ϑ , M és Δ változókat használtuk. A geometriai összefüggéseknél a (16) egyenletekből csak az első használtuk, a fizikai összefüggést a (17) első egyenlete adta. Az egyensúlyi egyenletekkel már gond van. (18) második egyenletét látszik érdemesnek használni, hiszen csak abban szerepel M . Javasolhatnánk azt, hogy (18) első egyenletéből helyettesítsük be S -et a másodikba, de miért tennénk? A másik két esetben sem törődtünk az elhagyott egyenletekkel. Rögzítsük az elhagyott (φ_2 , Δ , S) változókat (például zérusnak), így a (18) második egyenlete most is egy egyenessereget ad, a felhasznált geometriai és fizikai összefüggések behelyettesítésével most is egy görbét kapunk. Vagy ϑ és M kiküszöbölésével kaphatunk egy Δ - φ_1 összefüggést.

Az így kapott ábra azonban helytelen, félrevezető: az elhagyott egyenletek nem feltétlenül teljesülnek. Még szembetűnőbb a hiba, ha például a φ_2 , Δ és az M változót választjuk. Most φ_1 , ϑ és S értékét kell rögzítenünk. A geometriai egyenletek közül így a (16) második egyenletét ábrázolhatnánk, a fizikai egyenletek közül kiválasztva egyiket, a φ_2 , illetve az M tengellyel párhuzamos egyenest kapnánk, az egyensúlyi egyenlet pedig itt is egy görbesereget adna. Az egyensúlyi utat azonban nem tudnánk meghatározni a felhasznált egyenleteinkkel, mert a fizikai egyenleteink nem ad tényleges összefüggést az alakváltozás és a belső erő között.



14. ábra

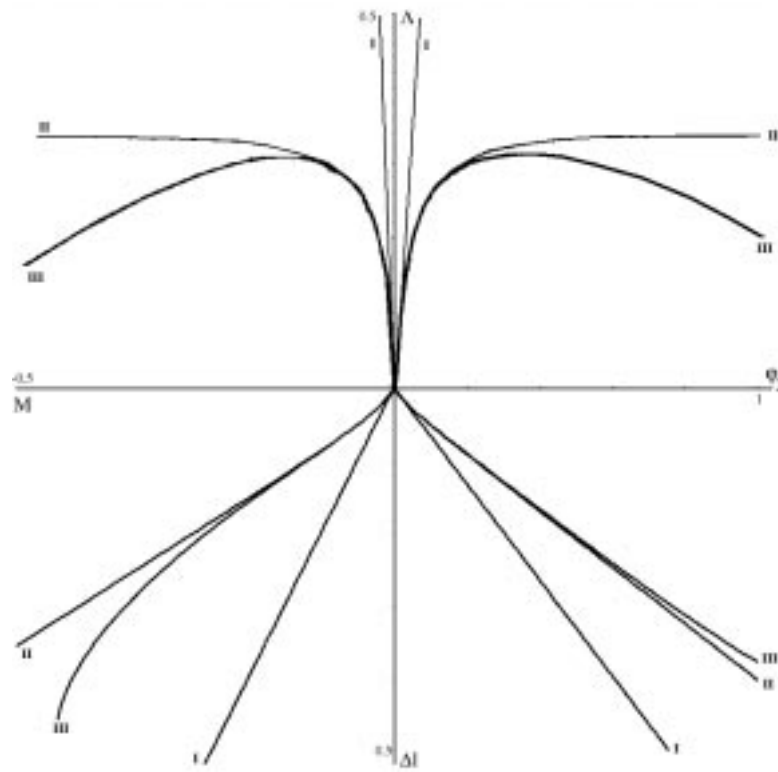
Ellenben megtehetjük azt, hogy az egyensúlyi út numerikusan meghatározott pontjait visszavetítjük a korábbi felületekre, és ekkor mind a négy összefüggés egy-egy térgörbét határoz meg (kettő az R^4 -ben, kettő az R^3 -ban van). Ha az elmozdulások, az alakváltozások és a belső erők közül önkényesen kiválasztunk egyet-egyét, akkor most is rajzolhatunk Halász [1] 3. ábrájával analóg ábrát (15. ábra). Ekkor azonban már az alsó ábrarészekről sem mondhatjuk azt, hogy azok a geometriai, illetve a fizikai egyenletet szemléltetik, hanem az összes egyenlet felhasználásával meghatároztuk a 7 változó összetartozó értékeit, és ezek közül bármelyik kettő kapcsolatát fel lehet rajzolnunk, mint például most tettük az egymástól független Δ és M esetében.



15. ábra

3.2. ALACSONYABBRENDŰ ELMÉLETEK

Természetesen itt is megtehetjük, hogy a (16)–(19) egyenletekben szereplő függvényeket a Taylor-soruk első néhány tagjával közelítjük. Ha minden egyenletünk lineáris, akkor az elsőrendű, különben másodrendű elméletet használunk. Ezeket szemlélteti a 16. ábra, amelyen megismételjük a 15. ábrán bemutatott, a harmadrendű elmélettel kapott görbéket az első- és másodrendű elmélettel kapott görbékkel együtt. (A másodrendű elméletnél csak az egyensúlyi egyenletekben vettünk figyelembe nemlineáris tagokat, mégpedig az elmozdulásokban elsőfokúakat.)



16. ábra

4. KÖVETKEZTETÉSEK

A dolgozatban megmutattuk, hogy a Halász [1] által javasolt négy féltengelyt tartalmazó ábra nagyszerűen használható egy szabadságfokú szerkezetnél, ha az elsőrendű elméletet használjuk. A négy egyenes külön-külön ábrázolja a geometriai, a fizikai és az egyensúlyi egyenleteket, illetve az egyensúlyi utat. A magasabbrendű elméletek alkalmazása esetén az egyensúlyi egyenletek nem ábrázolhatók egy görbével, hanem egy egyenessereget határoznak meg. Csak akkor kapunk egy görbét, ha a geometriai és a fizikai egyenletek információit is felhasználjuk.

Több szabadságfokú szerkezeteknél általában már a geometriai egyenletek sem görbéket, hanem felületeket határoznak meg. (A fizikai egyenletek lehetnek olyanok, hogy nincs két olyan egyenlet, melyekben ugyanaz a változó szerepel.) Felhívtuk a figyelmet arra, hogy félrevezető ábrákat kaphatunk, ha e felületeknek egy-egy síkmetszetét mutatjuk. Mind a négy síknegyedben rajzolhatunk egy-egy

helyes görbét is, de ezek mindegyikéhez az összes egyenlet információit fel kell használnunk.

Szemléltettük azt is, hogy ha a másodrendű elmélet alkalmazásakor eléggé elterjedt módon csak az egyensúlyi egyenletekben veszünk figyelembe nemlineáris tagokat, sőt ott is csak az elmozdulásokban lineárisokat, akkor legfeljebb a kritikus teherparaméter nagyságára kaphatunk közelítést, de a kritikus pont típusára, a másodlagos egyensúlyi utak számára és elhelyezkedésére nem kapunk semmi információt. Az csak véletlen lehet, hogy a szokásos vízszintes egyenes éppen a másodlagos egyensúlyi út kritikus pontjához tartozó érintője.

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Ez a kutatás részben az OTKA T 025256, részben az FKFP 0308/2000 kutatási projekt támogatásával készült.

HIVATKOZÁSOK

- [1] Halász O.: *Acélszerkezetek III/1. Stabilitáselmélet*. Egyetemi jegyzet, Tankönyvkiadó, Budapest, 1966.
- [2] Thompson, J. M. T., Hunt, G. W.: *A General Theory of Elastic Stability*. Wiley, London, 1973.
- [3] Kollár L. (szerk.): *A mérnöki stabilitáselmélet különleges problémái*. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1991.
- [4] Kurutz M.: Effect of nonlinearity in nonsmooth and nonconvex structural behaviour. In: *Nonsmooth/Nonconvex Mechanics: Modelling, Analysis and Numerical Methods*, A volume dedicated to the memory of Professor P. D. Panagiotopoulos. D. Y. Gao, R. W. Ogden, G. E. Stavroulakis (eds), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000. 189–230.
- [5] Poston, T., Stewart, J.: *Katasztrófaelmélet és alkalmazásai*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1985.

ABOUT THEORIES OF DIFFERENT ORDERS IN MECHANICS

Summary

The static analysis of elastic structures uses a mechanical model of the real structure. The mathematical model describes this mechanical model, and provides the first-, second- and third-order theories, depending on the order of simplification. The goal of analysis is the equilibrium path that is derived from the geometrical, physical, and equilibrium relationships between the internal and external state variables. There is a standard method to represent these relationships in a fundamental diagram, in which the relationships are displayed with partially common axes in four quarters of a graph.

The paper answers the following questions:

- What is the exact meaning of the four quarters of this graph?
- Does the fundamental diagram give information on the stability of the structure?
- What is the reliability of the results obtained from the second-order theories?
- How can we generalise our statements to models with more than one degrees of freedom?

Keywords: structural stability; first-, second-, and third-order theory

